

**МИНИМИЗАЦИЯ ПОГРЕШНОСТИ ЦИФРОВОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

Показана целесообразность цифровой фильтрации дискретного сигнала при его цифро-аналоговом преобразовании. Она позволяет минимизировать погрешность такого преобразования. Найдены количественные величины оптимальных параметров преобразователя для случайных сигналов различного вида. Определены параметры и частотные характеристики полученных цифровых фильтров.

Компьютер предназначен для обработки цифровых массивов. Однако большинство сигналов в природе существуют в аналоговом виде, т. е. являются непрерывными процессами времени. Поэтому для их обработки на компьютере необходимо произвести аналого-цифровое преобразование. Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) производит над входным процессом две операции: временную дискретизацию и квантование по уровню.

Согласно теореме Котельникова по отсчетам, полученным при временной дискретизации, можно точно воспроизвести исходный непрерывный процесс, если частота дискретизации сигнала (частота Найквиста) F имеет величину не меньше $2f_{\max}$, где $f_{\max}$ — частота самой высокочастотной составляющей процесса. Это возможно только в том случае, если в спектре процесса отсутствуют частоты, большие $f_{\max}$, т. е. если этот спектр финитен. Но все реальные процессы имеют нефинитный спектр. Их дискретизация приводит к наложению зеркальных частот на основную область спектра процесса и, как следствие, к искажению процесса.

Для уменьшения эффекта наложения обычно до цифрового представления процесса его пропускают через фильтр низкой частоты (ФНЧ) с крутым срезом, ограничивающий полосу частот процесса некоторой частотой, принятой за $f_{\max}$ [1]. В идеале такой фильтр должен устранять все частотные компоненты, ответственные за наложения, и в пределах полосы пропускания сохранять неизменными амплитудные и фазовые свойства процесса.

Качество совместной работы ФНЧ и АЦП может быть оценено путем сравнения выходного процесса АЦП с входным процессом ФНЧ. Однако первый из них является дискретным, второй – непрерывным. Так как исходным процессом является входной, то для такого сопоставления необходим выходной дискретный процесс преобразовать в непрерывный. Такое преобразование осуществляется интерполяторами различного вида, которые в свою очередь, вносят в процесс некоторую погрешность.

Идеальный низкочастотный фильтр физически не реализуем. Выбор же параметров реализуемого фильтра, в том числе и его частоты среза, как правило, носит субъективный характер и в значительной степени зависит от опыта и вкуса разработчика АЦП.

Для объективного нахождения наилучших параметров реальных элементов системы ФНЧ-АЦП-интерpolator необходим ввести некоторый количественный критерий качества этой системы в целом, а не отдельных ее частей. Минимизация такого критерия должна позволить найти ее оптимальные параметры.

В зависимости от вида входных процессов и задачи, стоящей перед их дальнейшей обработкой, указанных критериев может быть большое разнообразие. Рассмотрим примеры расчета оптимальных параметров системы ФНЧ-АЦП с линейным интерpolatorом на основе критерия, описанного в работе [2]. При этом будем считать, что для построения выходного процесса используются только отсчеты входного процесса, полученные в настоящий и прошлые моменты. Такой фильтр обеспечивает цифровое преобразование реального времени. Это – частный случай фильтра, рассмотренного в [2].

Первым этапом преобразования исходного непрерывного случайного стационарного центрированного процесса $X(t)$ является его временная дискретизация с постоянным интервалом между отсчетами, равным τ . Учтем, что к исходному процессу добавляется случайный стационарный центрированный не коррелированный с ним шум $n_{\text{ш}}(t)$. Он в дальнейшем интерпретируется как шум квантования процесса $X(t)$ по уровню. В моменты времени $m\tau$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) результатом дискретизации является непрерывный процесс дискретного времени $Y(m\tau) = X(m\tau) + n_{\text{ш}}(m\tau)$. Подвергая его фильтрации с помощью фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтра), получаем новый непрерывный процесс дискретного времени

$$Z(i\tau) = \sum_{m=0}^L a_m Y[(i-m)\tau], \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1)$$

где a_m – постоянные действительные числа — весовые коэффициенты фильтра. Совокупность этих коэффициентов можно представить в виде вектора-строки

$$\vec{x}^T = (a_0, a_1, \dots, a_L), \quad (2)$$

имеющего $L+1$ составляющих.

Фильтр (1) предназначен для получения значений процесса в момент it . В предшествующий ему момент $(i-1)\tau$ значение процесса на выходе фильтра имеет вид

$$Z((i-1)\tau) = \sum_{m=0}^L a_m Y[(i-m-1)\tau] \quad (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3)$$

Так как здесь время дискретно, между отсчетами (1) и (3) значения процесса $Z(t)$ отсутствуют. Для того, чтобы его сравнивать с непрерывным процессом $X(t)$, необходимо осуществить интерполяцию между каждой порой отсчетов $Z((i-1)\tau)$ и $Z(i\tau)$. Остановимся на простейшей интерполяции — кусочно-линейной. При этом будем считать погрешностью $e_{i-1/2}$ восстановления процесса $X(t)$ на указанном временном интервале величину, равную разности исходного $X(t)$ и интерполирующего $\tilde{X}(t)$ значений в середине этого интервала, т.е. $e_{i-1/2} = X(t_{i-1/2}) - \tilde{X}(t_{i-1/2})$. Так как зависимость $\tilde{X}(t)$ предполагается линейной, то в середине интервала τ имеем $\tilde{X}(t_{i-1/2}) = \frac{1}{2}(Z(t_{i-1}) + Z(t_i))$. Средний квадрат этой погрешности есть

$$\epsilon_{i-1/2}^2 = M[(X(t_{i-1/2}) - \tilde{X}(t_{i-1/2}))^2],$$

где символ $M[\bullet]$ означает осреднение величины, стоящей в скобках.

Критерием качества цифрового преобразования предварительно фильтрованного и подвергнутого линейной интерполяции процесса естественно считать величину среднего квадрата относительной погрешности этого преобразования $\delta_{1/2}^2 = \epsilon_{i-1/2}^2 / \sigma_x^2$, которая не зависит от номера отсчета i . Здесь σ_x^2 — дисперсия исходного процесса $X(t)$. Выполнение необходимых вычислений показывает [2], что погрешность можно представить

$$\delta_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \vec{x}^T R_f \vec{x} - \vec{g}^T \vec{x} + 1, \quad (4)$$

где $\vec{x}^T$ — вектор-строка коэффициентов фильтра (2); $\vec{x}$ — транспонированный ему вектор-столбец; $\vec{g}^T = (g_1, g_2, \dots, g_{L+1})$ — $(L+1)$ -мерный вектор, который имеет своими компонентами величины нормированной корреляционной функции процесса $X(t)$ при полуцелых значениях сдвига τ :

$$g_1 = R_{-1/2} + R_{1/2}, g_2 = R_{-3/2} + R_{-1/2}, \dots, g_n = R_{n-3/2} + R_{n-1/2}, \dots, g_L = R_{L-1/2} + R_{L+1/2}.$$

Причем везде справедливо соотношение $R_m = R_{-m} = R(m\tau)$.

В формулу (4) входит квадратная матрица R_f размера $(L+1) \times (L+1)$, имеющая вид

$$R_f = R_{corr} + R_{mod} + \mu(I + R_{mod}). \quad (5)$$

Структура составляющих ее матриц описана в [2]. В матрице (5) и далее обозначено

$$\mu = \sigma_{ш}^2 / \sigma_x^2 \quad (6)$$

отношение дисперсий внутреннего шума АЦП и процесса $X(t)$ (отношение шум/сигнал).

Количество информации, содержащееся в случайной последовательности $X(t_m)$ на характерном (интегральном) масштабе τ_x процесса $X(t)$,

$$j_1 = v\tau_x = \frac{1}{2z} \log_2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \quad (7)$$

где $z = \tau / \tau_x$ — отношение интервала дискретизации процесса к его характерному масштабу; v — скорость создания данных гауссовскими случайными величинами $X(t_m)$ без учета их взаимной корреляции.

Величину j_1 (7) естественно назвать удельной информацией случайной последовательности $X(t_m)$. Она связана с пропускной способностью C канала связи и характерным масштабом процесса $X(t)$ неравенством $j_1 \leq C\tau_x$.

Из (7) находим величину

$$\mu = (4^{j_1 z} - 1)^{-1}, \quad (8)$$

необходимую для дальнейших вычислений.

Допустим, что для процесса с заданной корреляционной функцией R известны его характерный масштаб τ_x и пропускная способность канала C . Выбирая предельное значение $v = C$, находим требуемое

$j_1 = C\tau_x$. Согласно (4), величина $\delta_{1/2}^2$ зависит от $(L+1)$ коэффициентов фильтра, составляющих вектор $\mathbf{x}$, и относительного интервала дискретизации $z = \tau/\tau_x$. Матрица R_f и вектор $\mathbf{g}$ не зависят от $\mathbf{x}$, но зависят от z .

Рассчитаем параметры $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{opt}$ и $z = z_{opt}$ системы ФНЧ-АЦП-интерpolator обеспечивающие минимум величины погрешности $\delta_{1/2}^2$. Их будем называть оптимальными.

Задачу нахождения оптимальных параметров разобьем на два этапа. Выражение (4) представляет собой квадратичную форму относительно $(L+1)$ -мерного вектора $\mathbf{x}$. Вначале аналитически или численно найдем вектор $\mathbf{x}_{opt}(z)$, минимизирующий $\delta_{1/2}^2$ для каждого конкретного z . В результате будет получена функция $\delta_{1/2\min}^2(z)$, не зависящая от вектора $\mathbf{x}$, но зависящая от z . Далее следует найти значение $z = z_{opt}$, доставляющее минимум этой функции. Это — задача одномерной минимизации, которая достаточно просто решается численными методами.

По вычисленным значениям $\mathbf{x}_{opt}$ можно найти спектральные характеристики оптимального ФНЧ. Для этого будем считать, что на его вход подается непрерывный комплексный гармонический сигнал $Y(t) = \exp(j\omega t)$. Согласно (1), сигнал на выходе фильтра также будет гармоническим $z(t) = K(\omega)Y(t)$.

Тогда комплексная спектральная характеристика фильтра

$$K(\omega) = \sum_{m=0}^L a_m \exp(-jm\omega\tau)$$

состоит из суммы действительной и мнимой частей: $K(j\omega) = K_d(\omega) - jK_m(\omega)$, причем

$$K_d(\omega) = \sum_{m=0}^L a_m \cos(m\omega\tau), \quad K_m(\omega) = \sum_{m=0}^L a_m \sin(m\omega\tau)$$

где, как и ранее, τ - интервал дискретизации.

Энергетическая и фазовая спектральные характеристики такого фильтра определяются выражениями

$$F(\omega) = K_d^2(\omega) + K_m^2(\omega), \quad \varphi(\omega) = -\arctg(K_m(\omega)/K_d(\omega)). \quad (9)$$

Найдем и проанализируем оптимальные параметры рассматриваемой системы при прохождении через нее двух видов процессов, один из которых имеет экспоненциальную корреляционную функцию и соответствующую энергетическую спектральную плотность при единичной дисперсии

$$R_{\text{экс}}(\tau) = \exp(-|\tau|/\tau_x), \quad S_{\text{экс}}(\omega) = \frac{\Phi_k}{\pi} \frac{1}{1 + (\omega\tau_x)^2},$$

а другой — колоколообразная корреляционная функция и спектральную плотность

$$R_{\text{кол}}(\tau) = \exp\left(-\frac{\pi}{4}(|\tau|/\tau_x)^2\right), \quad S_{\text{кол}}(\omega) = \frac{\Phi_k}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\pi}(\omega\tau_x)^2\right).$$

Как известно, оба процесса непрерывны, но первый не дифференцируем ни в один момент времени, а второй — гладкий, имеющий все производные.

Рассчитаем оптимальные параметры системы при различном числе отсчетов. Простейший случай — фильтр с единственным отсчетом. Здесь

$$L=1, R_{\text{corr}}=1, R_{\text{mod}}=R_{-1}=R_1=R(\tau), R_{\text{corr ш}}=1, R_{\text{mod ш}}=0.$$

Поэтому матрица (5) вырождается в скаляр $R_f = 1 + R(\tau) + \mu$, вектор $\mathbf{g}^T$ имеет единственную составляющую $g_1 = 2R(\tau/2)$, и критерий (4) принимает вид

$$\delta_{1/2}^2 = \frac{1}{2}(1 + R(\tau) + \mu)x_1^2 - 2R(\tau/2)x_1 + 1.$$

Минимум этой величины достигается при

$$a_0 = x_{1opt} = \frac{2R(\tau/2)}{1 + R(\tau) + \mu} \quad (10)$$

и равен

$$\delta_{1/2}^2 = 1 - \frac{2R^2(\tau/2)}{1 + R(\tau) + \mu}. \quad (11)$$

Подставим в (11) величину $\mu = \mu(\tau)$, определяемую выражением (8). При заданном $j_1 = \text{const}$ выражение (11) превратится в функцию одной нормированной переменной $z = \tau/\tau_x$.

Семейства графиков величины $\delta_{1/2\min}^2(z)$, обозначенной как $\delta_{1/2m}^2$, при различных значениях j_1 изображены в двойном логарифмическом масштабе на рисунке 1. Рисунок 1 а) соответствует процессу с экспоненциальной, а рисунок 1 б) — с колоколообразной корреляционной функцией. Видно, что для обоих типов процессов зависимости $\delta_{1/2m}^2(z)$ имеют единственный минимум при некотором оптимальном отношении $z = \tau_{opt}/\tau_x$, которое обозначим как $\delta_{1/2mm}^2 = \delta_{1/2m}^2(z_{opt})$.

Следовательно, возможен выбор такого интервала дискретизации, который обеспечивает минимальную погрешность работы фильтра-преобразователя. Обратим внимание на то, что при одном и том же значении j_1 величина этого минимума существенно меньше для гладкого процесса.

Подставив найденное τ_{opt} в формулу (10), находим оптимальный коэффициент, на который следует умножить единственный используемый отсчет

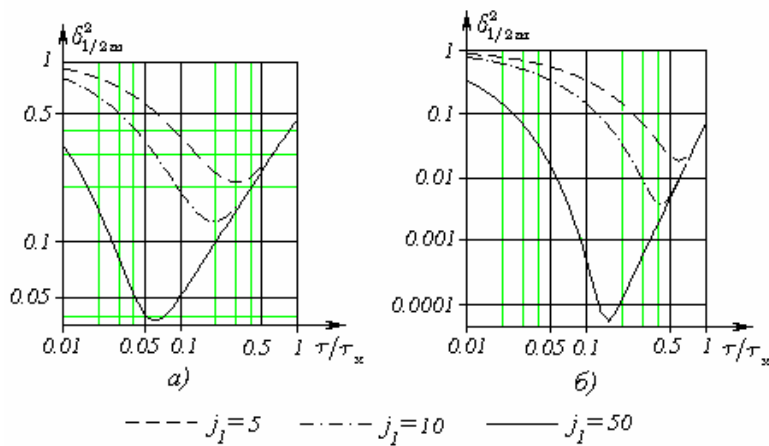


Рисунок 1 — Зависимость квадрата погрешности интерполяции от интервала дискретизации

$$a_{0opt} = 1 - \frac{2R^2(\tau_{opt}/2)}{1 + R(\tau_{opt}) + \mu}.$$

Далее по формуле (8) можно найти оптимальное значение $\mu_{opt} = \left(4^{j_1(\tau_{opt}/\tau_x)} - 1\right)^{-1}$. Величина m есть отношение (6) дисперсий шума и сигнала. Если шум является шумом квантования, то его дисперсия равна $\sigma_{ш}^2 = q^2/12$, где q — величина кванта преобразователя по уровню. Поэтому из соотношения (6) можно найти оптимальное отношение величины кванта к среднеквадратическому отклонению процесса $q_{opt}/\sigma_x = \sqrt{12\mu_{opt}}$.

Результаты расчетов оптимальных параметров ФНЧ-АЦП с одним отсчетом изображены на графиках рисунка 2. Ниже на всех рисунках, если не оговорено иное, сплошными линиями изображены результаты, относящиеся к процессам с экспоненциальной, а пунктиром — с колоколообразной корреляционной функцией. Видно, что при одном и том же значении j_1 погрешность АЦП существенно меньше для гладкого процесса, чем для недифференцируемого. Эта разница тем заметнее, чем больше величина j_1 .

Амплитудная спектральная характеристика фильтра в этом случае есть постоянная величина a_{0opt} , а фазовая характеристика равна нулю.

Фильтр с двумя отсчетами. Здесь $L=1$, компоненты вектора $\mathbf{r}^T$ имеют вид $x_1 = a_0$, $x_2 = a_1$, составляющие матрицы R_f равны

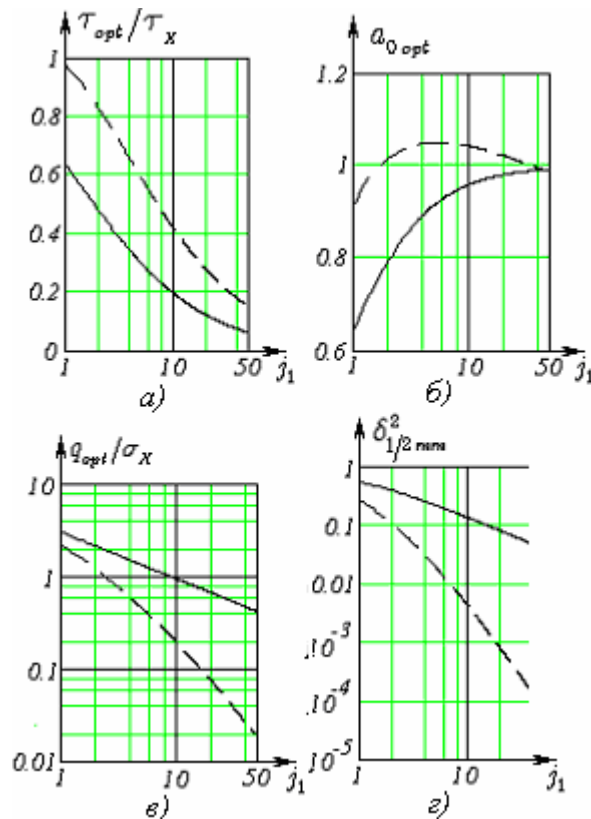


Рисунок 2 – Оптимальные параметры фильтра-преобразователя с одним отсчетом

$$R_{corr} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ R_1 & 1 \end{bmatrix}, R_{max1} = \begin{bmatrix} R_1 & 1 \\ R_2 & R_1 \end{bmatrix}, R_{corr} = I, R_{mod \text{ ш}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и сама эта матрица есть

$$R_f = \begin{bmatrix} 1+R(\tau)+\mu & 1+R(\tau)+\mu \\ R_1+R_2 & 1+R(\tau)+\mu \end{bmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{g}^T = (g_1, g_2)$ имеет составляющие $g_1 = 2R_{1/2}$, $g_2 = R_{1/2} + R_{3/2}$.

Аналитические выражения, описывающие оптимальные параметры, минимизирующие критерий (4), весьма сложны. Поэтому эти параметры найдены численно и представлены в виде графиков (см. рисунок 3).

Рисунок 3 в) относится к недифференцируемому процессу, а 3 г) — к гладкому.

Величину уменьшения $\delta_{1/2mm}^2$ при переходе от одного отсчета к двум отсчетам можно оценить по

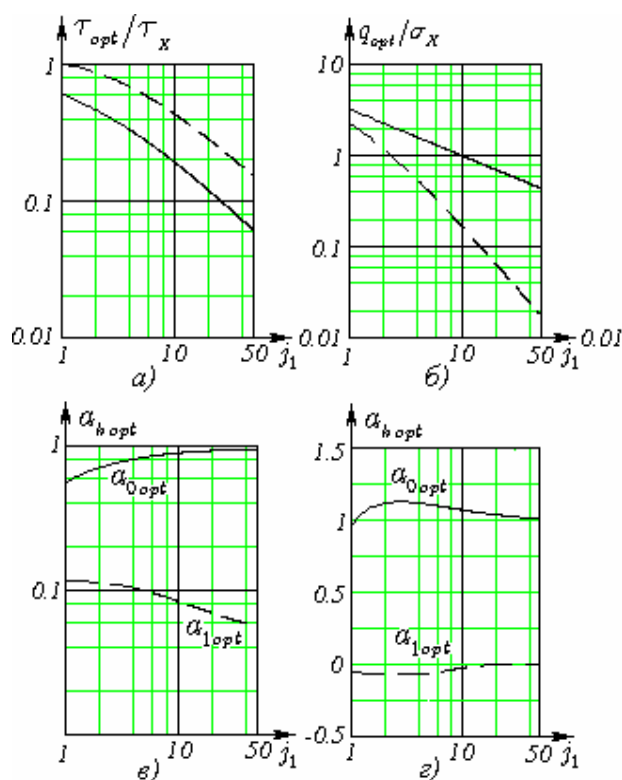


Рисунок 3 – Оптимальные параметры фильтра-преобразователя с двумя отсчетами

рисунку 4, на котором показаны зависимости отношения

$$v_k = \frac{\delta_{1/2mm} \text{ при } k \text{ отсчетах}}{\delta_{1/2mm} \text{ при } 1 \text{ отсчете}}$$

от величины j_1 . Это уменьшение невелико и для недифференцируемого процесса особенно заметно при малых j_1 , а для гладкого — при больших j_1 .

Фильтру с двумя отсчетами соответствуют кривые $v_2(j_1)$. Рисунок 4 а) относится к недифференцируемому процессу, и рисунок 4 б) — к гладкому.

Результаты численных расчетов оптимальных параметров фильтра с тремя отсчетами показаны на рисунках 4 и 5.

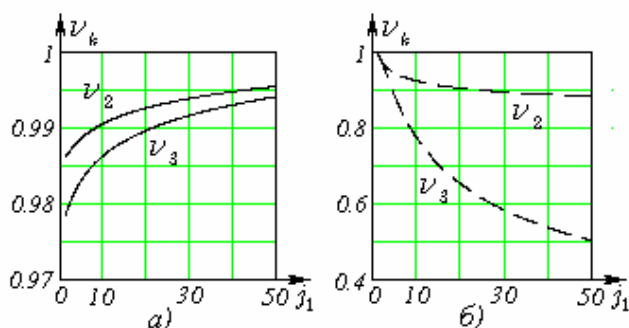


Рисунок 4 — Относительная величина квадрата погрешности цифрового преобразования

При переходе от фильтра с двумя отсчетами к фильтру с тремя отсчетами вид зависимостей $\tau_{opt}/\tau_x(j_1)$ и $q_{opt}/\sigma_x(j_1)$ изменяется незначительно (см. рисунки 3, 5). Появляется новый коэффициент фильтра a_{2opt} ,

зависимость которого от j_1 имеет различный вид для недифференцируемого (см. рисунок 5 в) и гладкого (см. рисунок 5 г) процессов.

Уменьшение $\delta_{1/2mm}^2$ при переходе от одного отсчета к трем более заметно при фильтрации дифференцируемых процессов (см. рисунок 4 б), чем недифференцируемых (см. кривыми $v_3(j_1)$ на рисунке 4 а).

На рисунках 6 а), б) изображены энергетическая $F_{\text{эк}}(\omega\Phi_x)$ и фазовая $\varphi_{\text{эк}}(\omega\Phi_x)$ спектральные характеристики (9) оптимального фильтра-преобразователя для случая $j_1 = 10$ при обработке трех отсчетов процесса с экспоненциальной корреляционной функцией и нормированным энергетическим спектром $S_{0\text{эк}}(\omega\Phi_x) = \pi S_{\text{экс}}(\omega)/\Phi_x$.

На рисунках 6 в), г) изображены аналогичные характеристики $F_{\text{кол}}(\omega\Phi_x)$ и $\varphi_{\text{кол}}(\omega\Phi_x)$ для такого же фильтра при обработке трех отсчетов процесса с колоколообразной корреляционной функцией и нормированным энергетическим спектром $S_{0\text{кол}}(\omega\Phi_x) = \pi S_{\text{кол}}(\omega)/\Phi_x$.

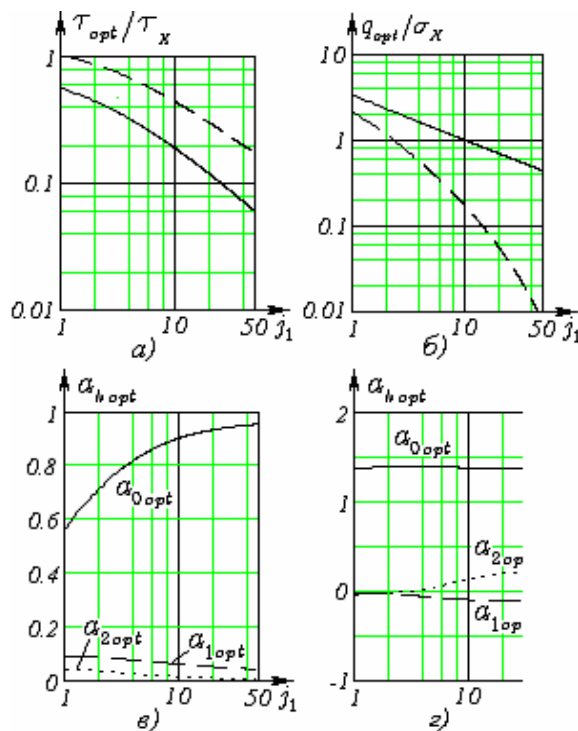


Рисунок 5 – Оптимальные параметры фильтра-преобразователя с тремя отсчетами

Энергетические и фазовые характеристики фильтров являются периодическими и существуют в бесконечном диапазоне частот.

Характеристика $F_{\text{эк}}(\omega\Phi_x)$ имеет первый минимум при $\omega\Phi_x \approx 9$. Этот минимум можно интерпретировать как место зарождения аналога частоты среза ФНЧ для трех отсчетов. При двух отсчетах минимум выражен слабее.

Таким образом, с ростом числа отсчетов наблюдается тенденция углубления этого минимума, что при большом числе отсчетов позволяет объективно найти как оптимальную частоту среза, так и параметры ФНЧ. Фазовая характеристика $\varphi_{\text{эк}}(\omega\Phi_x)$ при изменении частоты колеблется в небольших пределах.

Зависимость $F_{\text{кол}}(\omega\Phi_x)$ качественно носит тот же вид, что и $F_{\text{эк}}(\omega\Phi_x)$, но ее первый минимум значительно глубже и достигается при $\omega\Phi_x \approx 7,5$. Максимальное отклонение от нуля функции $\varphi_{\text{кол}}(\omega\Phi_x)$ втрое больше, чем $\varphi_{\text{эк}}(\omega\Phi_x)$.

Дальнейшие исследования рассматриваемой проблемы направлены на разработку специализированных численных методов многомерной минимизации критерия (4), которые позволяют корректно рассчитывать оптимальные системы ФНЧ-АЦП-интерполяторы высоких порядков.

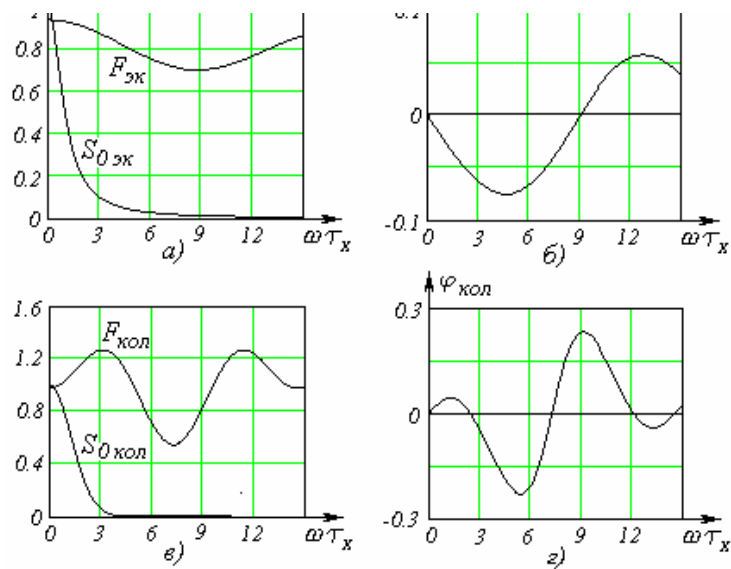


Рисунок 6 – Спектральные характеристики фильтра-преобразователя

Библиографический список

1. Айчи́фер Э. Цифровая обработка сигналов. Практический подход 2-е изд. / Э. Айчи́фер, Б. Джервис. — М., Спб, К.: Вильямс, 2004. — 989 с.
2. Доценко С.В. Цифровое преобразование непрерывных процессов, совмещенное с фильтрацией / С.В. Доценко // Вестн. СевГУ. Сер. Информатика, электроника, связь: Сб. науч. тр. — Севастополь — Вып. 68. — 2005. — С. 13 – 22.

Поступила в редакцию 24.01.2005 г.