

СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Прохорова А.В, Деркач С.И.,
Кувшинова Л.Ю, Чевын М.А.

**Элементы теории
функции комплексного
переменного**

**Методические указания и задания
к практическим занятиям
по дисциплине «Высшая математика»**

Севастополь
2015

517.53(07)

Э 456

Прохорова А.В., Деркач С.И., Кувшинова Л.Ю., Чевын М.А.

Сборник задач и упражнений по функциям комплексного переменного: учеб.-метод. пособие. – Севастополь: СевГУ, 2015.

Данный сборник предназначен для изучения темы «Функции комплексного переменного». Сборник состоит из 6 разделов. Раздел I предназначена для повторения темы «Комплексные числа». Разделы II-VI охватывают темы «Функции комплексного переменного» и составлены в соответствии с календарным планом по высшей математики университета. Все эти разделы содержат три параграфа: справочный материал темы, методические указания к решению задач, задачи и упражнения для самостоятельной работы и ответы к этим задачам.

Сборник предназначен для студентов 2-го курса университета, как очного, так и заочного обучения.

Рецензенты: Ледяев С.Ф. доцент к.т.н.
Матузаева О.В доцент к.т.н.

© ФГАОУ ВО «СГУ», 2015

Оглавление

I. Комплексные числа	
1.1. Основные понятия	4
1.2. Формы записи комплексных чисел	5
1.3. Задачи для самостоятельного решения	9
1.4. Ответы к задачам	11
2. Основные понятия функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного.	
2.1. Основные сведения из теории функций комплексного переменного	13
2.2. Методические указания к решению задач	15
2.3. Задачи для самостоятельного решения	17
2.4. Ответы к задачам	18
3. Элементарные функции комплексного переменного	
3.1. Определение и свойства элементарных функций комплексного переменного	20
3.2. Методические указания к решению задач	22
3.3. Задачи для самостоятельного решения	26
3.4. Ответы к задачам	28
4. Интегрирование функции комплексного переменного	
4.1. Справочный материал теории интегрирования функций комплексного переменного	30
4.2. Методические рекомендации к решению задач	32
4.3. Задачи для самостоятельного решения	35
4.4. Ответы к задачам	38
5. Комплексные ряды	
5.1. Справочный материал по теории комплексных рядов	39
5.2. Методические рекомендации к решению задач	41
5.3. Задачи для самостоятельного решения	49
5.4. Ответы к задачам	50
6. Особые точки. Вычеты	
6.1. Особые точки, их классификация. Основные формулы и теоремы теории вычетов	52
6.2. Методические указания к решению задач.	54
6.3. Задачи для самостоятельного решения	60
6.4. Ответы к задачам	62
7. Тесты по теории функций комплексного переменного	64
Библиографический список	76

I. Комплексные числа

1.1. Основные понятия

Определение. Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y) представленная выражением $z = x + iy$, здесь i - называют мнимой единицей ($i^2 = -1$).

Примеры:

$$(5; 2) \Leftrightarrow 5 + i \cdot 2; (-1, 1; 2, 5) \Leftrightarrow -1, 1 + i \cdot 2, 5; (-1 - 2 \cdot i) \Leftrightarrow (-1; -2)$$

Согласно определению комплексное число $z = x + iy$ задается парой действительных чисел (x, y) .

Геометрически пара действительных чисел определяет точку $M(x, y)$ координатной плоскости. Поэтому комплексные числа можно изображать точками координатной плоскости Oxy , которую называют комплексной плоскостью z . Ось абсцисс называют действительной осью, так как на ней расположены точки соответствующие комплексным числам $x + 0i$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называют мнимой осью — на ней лежат точки, соответствующие чисто мнимым комплексным числам $0 + yi$.

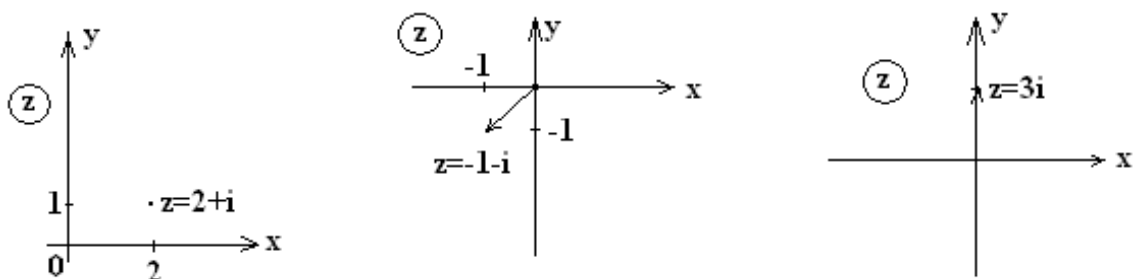
У комплексного числа $z = x + iy$ составляющая x называется реальной частью комплексного числа и обозначается $x = \operatorname{Re} z$ (Real), y - называют мнимой частью и обозначают $y = \operatorname{Im} z$ (Imaginaire). Если $x = 0, y = 0$, то комплексное число $0 + i0$ называется нулем и обозначают $z = 0$. Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $x + iy$ как вектора $\overline{OM}$, т.е. вектора исходящего из начала координат $O(0, 0)$ и идущего в т. $M(x, y)$.

Примеры: Изобразить комплексные числа:

а) $z = 2 + i$

б) $z = -1 - i$

в) $z = 3i$



Определения. 1) Два комплексных числа называются равными, тогда и только тогда, когда равны между собой их действительные и мнимые части.

2) Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда одновременно равны нулю его действительная и мнимая части.

3) Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся друг от друга только знаками при мнимой части называются комплексно – сопряженными.

Комплексные числа не находятся в количественных отношениях.

1.2. Формы записи комплексных чисел

1.2.1. Алгебраическая форма записи, действия над комплексными числами

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Определение. Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z вида

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Из этого определения следует, что для того чтобы сложить два комплексных числа в алгебраической форме достаточно сложить их действительные и мнимые части.

Законы действительных чисел имеют место и для комплексных чисел.

Законы сложения:

- 1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (переместительный)
 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (сочетательный)

При сложении к.ч. изображающие их векторы так же складываются.

Примеры. Сложить комплексные числа

а) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 - i$; б) $z_1 = 2i$, $z_2 = -5$.

Решение:

а) $z_1 + z_2 = 2 + i + (-3 - i) = (2 - 3) + i(1 - 1) = -1 + 0i$.

б) $z_1 + z_2 = 2i - 5 = (-5 + 0) + i(0 + 2) = -5 + 2i$.

Определение. Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называют комплексное число z , которое будучи сложением с z_2 дает z_1 . Т.е. если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

При вычитании комплексных чисел изображающие их векторы вычитаются.

Примеры. Вычесть комплексные числа

а) $z_1 = 7 - 2i$ $z_2 = -3 - i$; б) $z_1 = 5i$ $z_2 = -2 + 3i$.

Решение:

а) $z_1 - z_2 = 7 - 2i - (-3 - i) = (7 - (-3)) + i(-2 + 1) = 10 - i$;

б) $z_1 - z_2 = 5i - (-2 + 3i) = (0 - (-2)) + i(5 - 3) = 2 + 2i$.

Определение. Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число вида

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Законы умножения:

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (переместительный)

$(z_1 \cdot z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (сочетательный)

$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (распределительный)

Законы позволяют перемножать комплексные числа по обычным правилам.

Примеры. 1) Перемножить $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = i$.

Решение:

$z = z_1 \cdot z_2 = (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1 + i$ или $z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(i) = i + i^2 = i - 1 = -1 + i$, где $i^2 = -1$.

2) Перемножить $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = -2 + i$.

Решение:

$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)(-2 + i) = -2 + i - 4i + 2i^2 = -4 - 3i$.

Определение. Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z , которое будучи умноженным на z_2 дает z_1 .

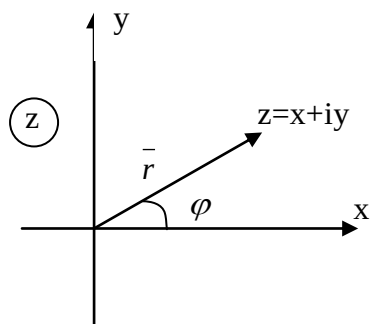
Из этого определения можно получить, что

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Практически частное двух комплексных чисел находят путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$

Пример. $\frac{3-i}{4+3i} = \frac{(3-i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{12-9i-4i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{9-13i}{16+9} = \frac{9-13i}{25} = \frac{9}{25} - i\frac{13}{25}.$

1.2.2. Тригонометрическая форма записи, действия над комплексными числами



Изобразим $z = x + iy$ вектором $\vec{r} = (x, y)$.
 $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ - тригонометрическая форма комплексного числа, где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - величина неотрицательная, определяемая однозначно.

Основное значение аргумента:

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{для внутренних точек 1 и 4 координатных четвертей;} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{для внутренних точек 2 координатной четверти;} \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & \text{для внутренних точек 3 координатной четверти.} \end{cases} \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Если комплексная точка лежит на одной из координатных осей, то ее главный аргумент находят непосредственно из чертежа.

Для любого комплексного числа z аргумент $\text{Arg} z$ величина многозначная, определяемая $\text{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

Пример. Представить в тригонометрической форме

а) $z = 4i$; б) $z = \frac{1}{4}(1-i)$.

Решение:

а) $z = 4i \Leftrightarrow (0, 4) \quad x = 0; \quad y = 4$

$$r = |z| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

б) $z = \frac{1}{4}(1-i) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4} \right) \quad x = \frac{1}{4}; \quad y = -\frac{1}{4}.$

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(-\frac{1}{4} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n = 2, 3, 4, \dots$ – формула Муавра – возведения комплексного числа в натуральную степень.

При делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), n = 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ – формула Муавра для}$$

нахождения значений корня из комплексного числа.

Пример: Решить уравнение: $z^3 + 8i = 0$.

Решение:

$$z^3 + 8i = 0$$

$$z^3 = -8i$$

$$z = \sqrt[3]{-8i}$$

$$-8i = 0 - 8i; \quad x = 0; \quad y = -8;$$

$$z = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8;$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

Если $k = 0$, то $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - i$;

$k = 1$, то $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$;

$k = 2$, то $z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} - i$.

1.2.3. Показательная форма записи действия

Формула Эйлера имеет вид $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ для любого φ .

Т.о. формула $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ примет вид $z = re^{i\varphi}$. Запись числа в виде $z = re^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа.

Пример. Представить в показательной форме число $z = \frac{1}{8}(1+i)$.

Решение:

$$z = \frac{1}{8}(1+i) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}i; \quad x = \frac{1}{8}; \quad y = \frac{1}{8}; \quad \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8} \right) \in 1\varphi$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{8} \right)^2 + \left(\frac{1}{8} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{32}} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Т.о. $z = \frac{1}{\sqrt{32}} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Действия над комплексными числами в показательной форме:

- 1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;
- 2) $z^n = r^n e^{in\varphi}$ - формула Муавра;
- 3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2 , если:

а) $z_1 = 0,5 - 3,2i; z_2 = 1,5 - 0,8i;$

б) $z_1 = -8 - 7i; z_2 = -3i;$

в) $z_1 = 5 + \sqrt{3}i; z_2 = 5 - \sqrt{3}i.$

2. Найти разность и частное комплексных чисел z_1 и z_2 , если:

а) $z_1 = 1 + 2i; z_2 = 5;$

б) $z_1 = -1 + \sqrt{3}i; z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i;$

в) $z_1 = a - \sqrt{b}i; z_2 = a + \sqrt{b}i.$

3. Вычислить:

а) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}i\right);$

б) $2i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);$

в) $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2i}\right)^2;$

г) $i^{13} + i^{14} + i^{15} + i^{16}.$

4. Найти действительную часть комплексного числа $z = \frac{(1 + 2i)^3}{i} + i^{19}.$

5. Найдите мнимую часть комплексного числа $z = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6.$

6. Постройте векторы:

$z = 3 + 2i$ $z = \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ$

$z = 5 - 4i$ $z = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$

$z = -6 + 3i$ $z = -2$

$z = -1 - i$ $z = i$

7. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:

а) $z = 1 - i;$ б) $z = -1 - \sqrt{3}i;$ в) $z = -\sqrt{3} + i;$ г) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$ д) $z = \sqrt{2} + i;$

е) $z = -2;$ з) $z = 1;$ ж) $z = i^{17};$ и) $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}.$

8. Представить в тригонометрической форме комплексное число

а) $z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3} + i)}{i - 1};$ б) $z = \frac{i\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}};$ в) $z = \frac{i}{(1 + i)^2}.$

9. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $z = \sqrt{3} + i;$ б) $z = i;$ в) $z = 1 + i;$ г) $z = -4i;$ д) $z = 1 - i\sqrt{3};$ е) $z = -2\sqrt{3} - 2i;$

ж) $z = 2;$ з) $z = -2 + 2i;$ и) $z = -3.$

10. Используя формулу Муавра, вычислить следующие выражения:

а) $(1 + i)^{10};$ б) $(1 - i\sqrt{3})^6;$ в) $(-1 + i)^5;$ г) $(\sqrt{3} + i)^3;$ д) $(-\sqrt{3} - i\sqrt{3})^8;$ е) $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}.$

11. Найти все значения корней:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[6]{-1}$; в) $\sqrt[3]{-2+2i}$; г) $\sqrt{i}$; д) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$; е) $\sqrt[5]{-2+2i}$.

12. Решить уравнения:

а) $z^2 + i = 0$; б) $z^3 + 1 = 0$; в) $z^3 + 8 = 0$; г) $z^3 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$.

13. Пусть $\operatorname{Re} z = x$; $\operatorname{Im} z = y^2$ ($z \neq 0$). Найти $\bar{z}, \frac{1}{z}$.

14. Доказать равенства: а) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$; б) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$; в) $|\bar{z}| = |z|$.

15. Где расположены точки z , для которых

а) $|z| > 5$; б) $|z - i| \leq 2$; в) $|z - 3 - 4i| = 5$; г) $\operatorname{Re} z > 3$; д) $\operatorname{Im} z \leq 2$;

е) $\operatorname{Re} z^2 = 4$; ж) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$; з) $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$.

16. Какие линии заданы уравнениями:

а) $z = \left(\frac{1}{2} + i\right)t$; б) $z = R(\cos t + i \sin t)$ ($R > 0$); в) $z = a \cos t + ib \sin t$ ($a > 0, b > 0$);

г) $z = t + \frac{i}{t}$; д) $z = t^2 + \frac{i}{t^2}$.

1.4. Ответы к задачам

1. а) $z_1 + z_2 = 2 - 4i$; $z_1 \cdot z_2 = -1,81 - 5,2i$; б) $z_1 + z_2 = -8 - 10i$; $z_1 \cdot z_2 = 24i - 21$;
в) $z_1 + z_2 = 10$; $z_1 \cdot z_2 = 28$.

2. а) $z_1 - z_2 = -4 + 2i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$; б) $z_1 - z_2 = (-1 + \sqrt{2}) + i(\sqrt{3} - \sqrt{6})$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $z_1 - z_2 = -2\sqrt{b}i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a^2 - b}{a^2 + b} - \frac{2a\sqrt{b}}{a^2 + b}i$.

3. а) $\frac{13}{20} - \frac{4}{3}i$; б) $-2i$; в) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; г) 0.

4. $\operatorname{Re} z = -2$.

5. $\operatorname{Im} z = -\frac{11}{17}$.

7. а) $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; б) $z = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$; в) $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$;

г) $z = 1\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$; д) $z = \sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; е) $z = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$;

з) $z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$; ж) $z = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; и) $z = 1\left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}\right)$.

8. а) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$; б) $z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$;

в) $z = \frac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0)$.

9. а) $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; б) $z = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$; в) $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; г) $z = 4e^{i(-\frac{\pi}{2})}$; д) $z = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$;
е) $z = 4e^{i(-\frac{5\pi}{6})}$; ж) $z = 2e^{i0}$; з) $z = \sqrt{8}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$; и) $z = 3e^{i\pi}$.

10. а) $z = 32i$; б) $z = 64\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $z = -4 + 4i$;

г) $z = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$; д) $z = 6^4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $z = 2i$.

11. а) $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\pm i; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{1}{2}i$;

в) $\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$; $\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$;

г) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i; -1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i$;

е) $\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}\right)$; $\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{20} + i\sin\frac{11\pi}{20}\right)$; $\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{20} + i\sin\frac{19\pi}{20}\right)$;

$\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{27\pi}{20} + i\sin\frac{27\pi}{20}\right)$; $\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

12. а) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-1; \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-2; 2 \pm i\sqrt{3}$;

г) $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9} - i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$; $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{16\pi}{9} + i\sin\frac{16\pi}{9}\right)$; $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right)$.

13. $\bar{z} = x - iy^2; \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^4} - i\frac{y^2}{x^2 + y^4}$.

15. а) Вне круга радиуса 5 с центром в начале координат;

б) Внутри круга радиуса 2 с центром в точке i и на окружности этого круга;

в) На окружности радиуса 5 и с центром в точке $3 + 4i$;

г) Справа от прямой $x = 3$;

д) Ниже прямой $y = 2$ и на самой этой прямой;

е) на гиперболе $x^2 - y^2 = 4$;

ж) Внутри угла между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$, выходящими из начала координат.

з) На луче, выходящем из точки i под углом $\frac{\pi}{4}$ к положительному направлению действительной оси.

16. а) Прямая $y = 2x$; б) окружность $x^2 + y^2 = R^2$; в) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 г) гипербола $\frac{1}{x}$; д) ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$, лежащая в первой четверти ($x > 0; y > 0$).

2. Основные понятия функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного

2.1 Основные сведения из теории функции комплексного переменного

Определение. Однозначной функцией комплексного переменного называют соответствие (или закон) f , по которому каждому комплексному числу z из области D ставится в соответствие комплексное число w из области Y .

Обозначение: $w = f(z)$

В символах $w = f(z): \forall z \in D \xrightarrow{f} w \in Y$.

Множество всех рассматриваемых переменных z (область D) называется областью определения функции; множество всех соответствующих значений w (область Y)- областью значений функции.

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько значений $w \in Y$, то функция $w = f(z)$ называется многозначной.

В данном пособии рассматриваются только однозначные функции.

Если $w = u + iv$ есть функция от $z = x + iy$, то каждое из переменных u и v является функцией x и y , т.е. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Функция $w = f(z)$ может быть представлена в виде: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} w$,
 $v(x, y) = \operatorname{Im} w$.

Определение. Число z_0 называется пределом последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$, если для любого положительного числа ε найдется число N (N зависит от ε) такое, что для любых $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$

Если $z_n = x_n + iy_n$ и $z_0 = x_0 + iy_0$, то, учитывая равенство $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ можно заключить (непосредственно из

определения, что существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ равносильно существованию двух пределов: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

Пусть последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ такова, что $|z_n| \rightarrow \infty$ (то есть $\exists M > 0$, такое что $|z_n| > M$ при $n \geq N$), тогда последовательность предела не имеет и обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ и говорят, что предел последовательности бесконечен, а для его изображения дополняют комплексную плоскость точкой, которую обозначают $z = \infty$ и называют бесконечно удаленной. Окрестностью бесконечно удаленной точки называют внешность круга $|z| > R$ (R -достаточно большой радиус).

Определение. Комплексное число w_0 называется пределом функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

Равенство $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, равносильно системе равенств
$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0 \end{cases},$$

где $z = x_0 + iy_0$; $w_0 = u_0 + iv_0$.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке $z = z_0$, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x; y) = u(x_0; y_0) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x; y) = v(x_0; y_0) \end{cases}$$

где $z = x_0 + iy_0$; $f(z_0) = u(x_0; y_0) + iv(x_0; y_0)$.

Определение. Функция $f(z)$ называется непрерывной в области D , если она непрерывна в каждой точке $z \in D$.

Определение. Производной $w' = f'(z)$ функции $w = f(z)$ в точке z называется предел отношения приращения функции Δw к приращению независимой переменной Δz , при условии, что Δz стремиться к нулю, произвольным образом.

Обозначение: $w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$.

Понятие производной вводится для однозначной функции комплексного переменного.

Для функции комплексного переменного справедливы обычные правила и формулы дифференцирования функции действительного переменного.

Определение. Функция $w = f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется аналитической в области D .

Будем также говорить, что $f(z)$ аналитическая в точке $z_0 \in D$, если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 . Для того чтобы функция $w = f(z) = u(x; y) + i \cdot v(x; y)$ была дифференцируема в точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись для нее условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Учитывая условия Коши-Римана, производную от функции $w = f(z) = u(x; y) + i \cdot v(x; y)$ можно записать в следующих равносильных формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}; \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}; \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

2.2. Методические указания к решению задач

1. Дана функция $w = z^3 - (3+i)z^2 + iz$. Найти значение функции при $z = 2 - i$.

Решение:

$$w = (2-i)^3 - (3+i) \cdot (2-i)^2 + i \cdot (2-i) = 8 - 12i + 6 + i - (3+i) \cdot (4-4i-1) + 2i + 1 = 15 - 9i + 12i - 12 + 3 - 4i - 4 + i = 2$$

2. Дана функция $f(z) = x^2 + iy^2$, где $z = x + iy$. Найти: $f(2-3i)$.

Решение:

Учитывая, что $x = 2$; $y = -3$; получаем $f(2-3i) = 2^2 + (-3)^2 \cdot i = 4 + 9i$.

3. Найти действительную и мнимую часть функции $f(z) = e^z \cdot |z|$.

Решение:

$$z = x + iy; \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(z) = e^{x+iy} \sqrt{x^2 + y^2} = e^x \cdot e^{iy} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = e^x (\cos y + i \sin y) \sqrt{x^2 + y^2} = e^x \cdot \cos y \sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot e^x \cdot \sin y \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\operatorname{Re} w = e^x \cdot \cos y \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{Im} w = e^x \cdot \sin y \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. Вычислить пределы: 1) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) \cdot (z+1)}{z^2 + 1}$; 2) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+1) \operatorname{Re} \bar{z}}{z}$.

Решение:

$$1) \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) \cdot (z+1)}{z^2 + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) \cdot (z+1)}{(z+i) \cdot (z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{z+i} = \frac{i+1}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$2) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+1) \operatorname{Re} \bar{z}}{z} = \left[\frac{0}{0} \right] = \text{[перейдем к алгебраической форме записи комплексного}$$

$$\text{числа]} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{((x+iy)+1) \cdot x}{x+iy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + x + ixy}{x+iy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + x + ixy) \cdot (x-iy)}{(x+iy) \cdot (x-iy)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + x^2 + xy^2}{x^2 + y^2} - i \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

На основании определения предела рассмотрим отдельно предел действительной и мнимой части.

Предположим, что переменная точка $(x; y)$ приближается к началу координат $(0;0)$ по прямому $y = kx$.

$$\text{Тогда, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + x^2 + y^2 x}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + k^2 x^3}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x + k^2 x + 1)}{x^2(1 + k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 + k^2 x}{1 + k^2} = 1.$$

$$\text{Предел мнимой части } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

Так как предел зависит от k , то в различных подходах к точке $(0,0)$ по прямому $y = kx$ значения предела будут различными, а это значит, что предел не существует.

5. Определить область непрерывности функции $\frac{z^3 + 1}{z^2(z^2 - 3z + 2)}$.

Решение:

Функция терпит разрыв в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Решая уравнение $z^2(z^2 - 3z + 2) = 0$, получаем $z_{1,2} = 0; z_3 = 1; z_4 = 2$.

Ответ: Область непрерывности - вся комплексная плоскость, кроме точек $0; 1; 2$.

6. Проверить выполнение условий Коши – Римана (Эйлера – Даламбера) для функции $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Если функция дифференцируема, то найти ее производную.

Решение:

$$u = e^x \cos y; \quad v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y;$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y;$$

т.к. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то условия Коши – Римана выполняются – функция дифференцируема.

Найдем производную, так как $w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$,

то $w' = f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$

7. Восстановить дифференцируемую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x, y) = 3x^2 y - y^3$

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy$$

По условию Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Значит $\frac{\partial v}{\partial y} = 6xy$.

Интегрированием находим

$$v(x, y) = \int_{x=\text{const}} 6xy dy + \varphi(x) = 3xy^2 + \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) \text{ произвольная функция}$$

Используем другое условие Коши – Римана: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 + \varphi'(x)$, то $\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 - \varphi'(x)$.

Из условия задачи находим $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Следовательно,

$$-3y^2 - \varphi'(x) = 3x^2 - 3y^2$$

$$\varphi'(x) = -3x^2$$

$$\varphi(x) = \int -3x^2 dx = -x^3 + C_1$$

Получаем $f(z) = 3x^2 y - y^3 + i(3xy^2 - x^3 + C_1)$ или $f(z) = -iz^3 + iC_1$

2.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция $w = z^2 + z$. Найти значение функции:

а) при $z = 1 + i$; б) $z = i$; в) $z = -1$.

2. Найти значение следующих функций в точке $z_0 = 1 - i$.

а) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$; б) $f(z) = z^2 \operatorname{Re} z$; в) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$; г) $f(z) = ye^x - ixe^y$;

д) $f(z) = |z - 1|^2$

3. Функции заданные в виде $w = u(x, y) + iv(x, y)$ представить в виде функции комплексного переменного $z : w = f(z)$.

а) $w = (x^3 - 3xy^2 + 3) + i(3x^2 - y^3)$;

б) $w = (x^2 + 2x - y^2) + i2y(x + 1)$;

в) $w = 4x + i2y$;

г) $w = (x^2 + x) + ixy$.

4. Вычислить пределы.

а) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$; б) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$; в) $\lim_{z \rightarrow -3i} \frac{z^2 + 9}{z + 3i}$; г) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2 - 1) - 2zi}{z^2 + 1}$.

5. Проверить выполнение условий Коши – Римана для функций и, если функция дифференцируема, то найти ее производные:

а) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$; б) $f(z) = (x^2 + y^2) - i2xy$; в) $f(z) = z^3 + z$;

г) $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$.

6. Показать, что следующие функции не являются аналитическими ни в какой области:

а) $w = |z|$; б) $w = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$; в) $w = z \operatorname{Im} z$; г) $w = 2\bar{z} + \operatorname{Re} z$.

7. Пусть $f(z)$ аналитическая функция в области D .

Доказать, что если а) $u(x; y) = \operatorname{Re} f(z)$ постоянна ($u(x; y) = c$), то и $f(z) = \operatorname{const}$ в области D ;

б) $v(x; y) = c$, то и $f(z) = \operatorname{const}$ в области D .

8. Предполагая выполненными условия Коши – Римана в декартовых прямоугольных координатах, доказать справедливость условий Коши –

Римана в полярных координатах: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

Указание. Использовать правила дифференцирования сложной функции двух переменных $u(x; y) = u(r \cos \varphi; r \sin \varphi)$ $v(x; y) = v(r \cos \varphi; r \sin \varphi)$ и условия Коши – Римана в декартовых координатах.

9. Доказать, что если $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в области D функции, то функции $f(z) \pm g(z)$ также аналитические в области D .

10. Восстановить дифференцируемую функцию $w = f(z)$ по ее действительной или мнимой части.

а) $v(x; y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$; г) $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$;

б) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$; д) $v(x, y) = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$;

в) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; е) $v(x; y) = 2xy + 3x$.

11. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если

а) $u(x, y) = x^3 - 3y^2x + 2$; $f(0) = 2 + i$.

б) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$; $f(1) = 6 + i$.

в) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$; $f(0) = 0$.

г) $v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$; $f(0) = 0$.

12. Будут ли непрерывны на плоскости z функции:

$$\text{a) } w = \operatorname{Re} z; \quad \text{б) } w = \frac{\operatorname{Im} z}{z}; \quad \text{в) } w = z^2 + 1; \quad \text{г) } w = \frac{z^2 + 1}{z - i}.$$

2.4. Ответы к задачам

$$1. \text{ а) } w = 1 + 3i \quad \text{б) } w = -1 + i \quad \text{в) } w = 0.$$

$$2. \text{ а) } i; \quad \text{б) } -2i; \quad \text{в) } -1 - i; \quad \text{г) } -\left(e + \frac{i}{e}\right); \quad \text{д) } 1.$$

$$3. \text{ а) } f(z) = z^3 + 3; \quad \text{б) } f(z) = z^2 + 2z; \quad \text{в) } f(z) = 3z + \bar{z}; \quad \text{г) } f(z) = (z + 1)\operatorname{Re} z.$$

$$4. \text{ а) } 2i; \quad \text{б) } \text{не существует}; \quad \text{в) } -6i; \quad \text{г) } 0.$$

$$5. \text{ а) } f'(z) \text{ нет}; \quad \text{б) } f'(z) \text{ нет}; \quad \text{в) } f'(z) = 3z^2 + 1; \quad \text{г) } f'(z) = 3z^2.$$

$$10. \text{ а) } f(z) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + C_1 \right) + i \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } f(z) = z^2 + 2z + iC;$$

$$\text{в) } f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i \left(-\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C \right); \quad \text{г) } f(z) = 2iz^2 + iz + C;$$

$$\text{д) } f(z) = \frac{1}{z + 1} + C; \quad \text{е) } f(z) = z^3 + 2iz + C.$$

$$11. \text{ а) } z^3 + 2 + i; \quad \text{б) } z^2 + (5 - i)z - \frac{i}{z}; \quad \text{в) } \frac{1}{2}(2 - i)z^2; \quad \text{г) } (2 + i)z^3.$$

$$12. \text{ а); б) } - \text{будут}; \quad \text{в) } \text{кроме } z = 0; \quad \text{г) } \text{кроме } z = i.$$

3. Элементарные функции комплексного переменного

3.1. Определение и свойства элементарных функций комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами:

1. Линейная функция: $w = az + b$; $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

2. Дробно – линейная функция: $w = \frac{az + b}{cz + d}$; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $cd - bc \neq 0$.

3. Степенная функция: $w = z^n$, где $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

а) n – целое число, тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

б) $n = \frac{1}{q}$, где $q = 2, 3, 4, \dots$

$$w = z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{q} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{q} \right), \text{ где } k = 0, 1, \dots, q-1.$$

в) $n = \frac{p}{q}$, где $p, q = 2, 3, 4, \dots$, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь.

$$w = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{r^p} \left(\cos \frac{p(\varphi + 2k\pi)}{q} + i \sin \frac{p(\varphi + 2k\pi)}{q} \right), \text{ где } k = 0, 1, \dots, q-1.$$

В случае: а) степенная функция однозначна, а в б); в) – многозначна.

4. Показательная функция: $w = e^z$ $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Из определения следует:

а) e^z определена и непрерывна при любом z ; б) $|e^z| = e^x$; в) $\arg e^z = y$.

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$;

б) $e^{z_1} \div e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$;

в) $(e^z)^n = e^{zn}$;

г) $e^{z+2\pi i} = e^z$, то есть функция периодическая с периодом $T = 2\pi i$.

5. Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все свойства тригонометрических функций действительного переменного имеют место и для тригонометрических функций комплексного переменного, кроме ограниченности $\sin z$ и $\cos z$. $|\sin z|$ и $|\cos z|$ могут быть больше единицы. Все формулы для тригонометрических функций действительного переменного также действительны и для функций комплексного переменного.

6. Гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

$\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ – периодические функции с периодом $T = 2\pi i$;

$\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ – с периодом πi .

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\begin{array}{l} \sin z = -i \operatorname{sh} iz \\ \cos z = \operatorname{ch} iz \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} \operatorname{sh} iz = i \sin z \\ \operatorname{ch} iz = \cos z \end{array}.$$

7. Логарифмическая функция: $w = \operatorname{Ln} z$.

Логарифмическая функция определяется, как обратная к показательной функции $z = e^w$.

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \text{ где } r = |z|, \varphi = \arg z, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Главное значение логарифма: $\ln z = \ln |z| + i\varphi$.

Свойства логарифмической функции:

а) $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$;

б) $\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$;

в) $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z \quad (n \in \mathbb{N})$.

8. Обобщенная показательная и степенная функция:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}; z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \text{ где } \alpha \text{ и } a \neq 0 \text{ любые комплексные числа.}$$

9. Обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right);$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}; \quad z \neq \pm i.$$

10. Обратные гиперболические функции:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z \pm \sqrt{z^2 + 1} \right);$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}; \quad z \neq \pm 1.$$

Все указанные выше основные элементарные (однозначные) функции дифференцируемы в области определения, причем имеют место формулы:

1) $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$; 2) $(e^z)' = e^z$; 3) $(\sin z)' = \cos z$; 4) $(\cos z)' = -\sin z$;

5) $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$; 6) $(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$; 7) $(\operatorname{sh})' = \operatorname{ch} z$; 8) $(\operatorname{ch})' = \operatorname{sh} z$;

9) $(\ln z)' = \frac{1}{z}$; 10) $(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$; 11) $(\operatorname{cth})' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$.

Все свойства и правила дифференцирования действительного анализа переносятся и на комплексный случай.

3.2. Методические указания к решению задач

1. Нахождение значения функции в указанной точке.

а) Найти значение функции $\cos z$ в точке $z = i$.

Решение: Т. к. $\cos z = \operatorname{ch} iz$, получим $\cos i = \operatorname{ch} i^2 = \operatorname{ch}(-1) = \operatorname{ch} 1$.

б) Найти значение функции $\sin z$ в точке $z = 1 + 2i$.

Решение:

$$\sin(1 + 2i) = \sin 1 \cdot \cos 2i + \cos 1 \cdot \sin 2i = \sin 1 \cdot \operatorname{ch}(2i \cdot i) + \cos 1 \cdot (-\operatorname{ish}(2i \cdot i)) = \sin 1 \operatorname{ch}(-2) - i \cos 1 \operatorname{sh}(-2) = \sin 1 \operatorname{ch} 2 + i \cos 1 \operatorname{sh} 2.$$

в) Найти значение функции e^z в точке $z = 2 - 3i$.

Решение:

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) \quad z = 2 - 3i \Rightarrow x = 2, y = -3.$$

$$e^{2-3i} = e^2 (\cos(-3) + i \sin(-3)) = e^2 (\cos 3 - i \sin 3).$$

г) Найти $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$ и $\ln(\sqrt{3} + i)$.

Решение:

$$z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = \sqrt{3+1} = 2; \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i) = \ln|\sqrt{3} + i| + i(\arg(\sqrt{3} + i) + 2\pi k) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), \text{ где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\text{При } k = 0 \quad \ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + \frac{\pi}{6}i.$$

д) Найти $\operatorname{Ln}(3 + 4i)$ и $\ln(3 + 4i)$.

Решение:

$$z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{9+16} = 5; \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{Ln}(3 + 4i) = \ln 5 + i\left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2\pi k\right), k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\ln(3 + 4i) = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

2. Найти модули и главные значения аргумента

а) $z = e^{3+2i}$; б) $z = e^{1-7i}$; в) $z = e^{-5i}$.

Решение:

Воспользуемся формулой $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ и тем, что $|e^z| = e^x$; $\operatorname{Arg} e^z = y$.

$$\text{а) } |e^{3+2i}| = e^3 \quad \arg(e^{3+2i}) = 2;$$

$$\text{б) } |e^{1+7i}| = e \quad \operatorname{Arg}(e^{1+7i}) = 7 \quad \arg(e^{1-7i}) = 7 - 2\pi;$$

$$\text{в) } |e^{-5i}| = e^0 = 1 \quad \operatorname{Arg}(e^{-5i}) = -5 \quad \arg(e^{-5i}) = 2\pi - 5.$$

3. Найти действительные и мнимые части значений функций:

а) $\sin(2+i)$; б) $\operatorname{tg}(3+i)$; в) $\operatorname{cth}\left(\ln 7 + \frac{\pi}{2}i\right)$.

Решение:

а) $\sin(2+i) = \sin 2 \cos i + \cos 2 \sin i = \sin 2 \operatorname{ch} 1 + \cos 2(-\operatorname{sh} 1) = \sin 2 \operatorname{ch} 1 - i \cos 2 \operatorname{sh} 1 =$
 $= \sin 2 \operatorname{ch} 1 + i \cos 2 \operatorname{sh} 1.$

$\operatorname{Re}[\sin(2+i)] = \sin 2 \operatorname{ch} 1$

$\operatorname{Im}[\sin(2+i)] = \cos 2 \operatorname{sh} 1.$

б)

$$\operatorname{tg}(3+i) = \frac{\sin(3+i)}{\cos(3+i)} = \frac{\sin 3 \cos i + \cos 3 \sin i}{\cos 3 \cos i - \sin 3 \sin i} = \frac{\sin 3 \operatorname{ch} 1 + \cos 3(-\operatorname{sh} 1)}{\cos 3 \operatorname{ch} 1 - \sin 3(-\operatorname{sh} 1)} = \frac{\sin 3 \operatorname{ch} 1 + i \cos 3 \operatorname{sh} 1}{\cos 3 \operatorname{ch} 1 - i \sin 3 \operatorname{sh} 1}$$

Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(3+i) &= \frac{(\sin 3 \operatorname{ch} 1 + i \cos 3 \operatorname{sh} 1)(\cos 3 \operatorname{ch} 1 + i \sin 3 \operatorname{sh} 1)}{(\cos 3 \operatorname{ch} 1 - i \sin 3 \operatorname{sh} 1)(\cos 3 \operatorname{ch} 1 + i \sin 3 \operatorname{sh} 1)} = \\ &= \frac{\sin 3 \cos 3 \operatorname{ch}^2 1 + i \sin^2 3 \operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1 + i \cos^2 3 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1 - \cos 3 \sin 3 \operatorname{sh}^2 1}{\cos^2 3 \operatorname{ch}^2 1 + \sin^2 3 \operatorname{sh}^2 1} = \\ &= \frac{\sin 3 \cos 3 \operatorname{ch}^2 1 - \cos 3 \sin 3 \operatorname{sh}^2 1 + i(\sin^2 3 \operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1 + \cos^2 3 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1)}{(1 - \sin^2 3) \operatorname{ch}^2 1 + \sin^2 3 \operatorname{sh}^2 1} = \\ &= \frac{\sin 3 \cos 3 (\operatorname{ch}^2 1 - \operatorname{sh}^2 1) + i \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1 (\sin^2 3 + \cos^2 3)}{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3 \operatorname{ch}^2 1 + \sin^2 3 \operatorname{sh}^2 1} = \frac{\sin 3 \cos 3 + i \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1}{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3 (\operatorname{ch}^2 1 - \operatorname{sh}^2 1)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 6 + i \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2}{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3} = \frac{\sin 6 + i \operatorname{sh} 2}{2(\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3)} = \frac{\sin 6}{2(\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3)} + i \frac{\operatorname{sh} 2}{2(\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3)}. \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}[\operatorname{tg}(3+i)] = \frac{\sin 6}{2(\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3)}$

$\operatorname{Im}[\operatorname{tg}(3+i)] = \frac{\operatorname{sh} 2}{2(\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 3)}.$

в) $\operatorname{cth}\left(\ln 7 + \frac{\pi}{2}i\right)$

Воспользуемся формулой $\operatorname{cthz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$, где $z = \ln 7 + \frac{\pi}{2}i$

$$\operatorname{cth}\left(\ln 7 + \frac{\pi}{2}i\right) = \frac{e^{\ln 7 + \frac{\pi}{2}i} + e^{-\ln 7 - \frac{\pi}{2}i}}{e^{\ln 7 + \frac{\pi}{2}i} - e^{-\ln 7 - \frac{\pi}{2}i}}, \text{ но}$$

$$e^{\ln 7 + \frac{\pi}{2}i} = e^{\ln 7} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = 7 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 7 \cdot (0 + i \cdot 1) = 7i.$$

$$e^{-\ln 7 - \frac{\pi}{2}i} = e^{-\ln 7} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{\ln 7^{-1}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{7} \cdot (0 + i \cdot (-1)) = -\frac{1}{7}i.$$

$$\operatorname{cth}\left(\ln 7 + \frac{\pi}{2}i\right) = \frac{7i + \left(-\frac{1}{7}i\right)}{7i - \left(-\frac{1}{7}i\right)} = \frac{\frac{48}{7}i}{\frac{50}{7}i} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$$

$$\text{Значит } \operatorname{Re}\left[\operatorname{cth}\left(\ln 7 + \frac{\pi}{2}i\right)\right] = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{Im}\left[\operatorname{cth}\left(\ln 7 + \frac{\pi}{2}i\right)\right] = 0.$$

4. Найти значение: а) i^i , б) 2^{1+i} .

Решение:

$$\text{а) } i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i(\arg(i) + 2\pi k), \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$z = i \Rightarrow |z| = 1; \quad \arg z = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$i^i = e^{i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, \quad \text{где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\text{б) } 2^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Ln} 2}$$

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln|2| + i(\arg(2) + 2\pi k), \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\text{Т.к. } z = 2 \Rightarrow |z| = 2, \quad \arg z = 0$$

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + i(0 + 2\pi k) = \ln 2 + 2\pi ki, \quad \text{где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\begin{aligned} 2^{1+i} &= e^{(1+i)(\ln 2 + 2\pi ki)} = e^{\ln 2 + 2\pi ki + i \ln 2 - 2\pi k} = e^{(\ln 2 - 2\pi k) + i(2\pi k + \ln 2)} = e^{\ln 2 - 2\pi k} \cdot e^{i(2\pi k + \ln 2)} = \\ &= e^{\ln 2 - 2\pi k} \cdot (\cos(\ln 2 + 2\pi k) + i \sin(\ln 2 + 2\pi k)) = e^{\ln 2 - 2\pi k} \cdot (\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)) \end{aligned}$$

5. Пользуясь определением $\cos z$ доказать формулу $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$.

Доказательство:

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1 + z_2)} + e^{-i(z_1 + z_2)}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} + e^{iz_1} \cdot e^{-iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}}{4} - \frac{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{iz_1} \cdot e^{-iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}}{4i^2} = \\ &= \frac{e^{i(z_1 + z_2)} + e^{i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 + z_2)}}{4} + \frac{e^{i(z_1 + z_2)} - e^{-i(z_1 - z_2)} - e^{-i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 + z_2)}}{4} = \\ &= \frac{e^{i(z_1 + z_2)} + e^{i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 + z_2)} + e^{i(z_1 + z_2)} - e^{-i(z_1 - z_2)} - e^{-i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 + z_2)}}{4} = \\ &= \frac{2e^{i(z_1 + z_2)} + 2e^{-i(z_1 + z_2)}}{4} = \frac{e^{i(z_1 + z_2)} + e^{-i(z_1 + z_2)}}{2}. \end{aligned}$$

Формула доказана.

6. Для функции $w = \sin z$ найти множество точек z , где она принимает:

а) действительные значения; б) чисто мнимые значения.

Решение:

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

а) функция принимает действительные значения там, где

$$\operatorname{Im} w = 0, \text{ т.е. } \cos x \sinh y = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sinh y = 0.$$

$$x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad y = 0.$$

Т.е. функция $w = \sin z$ принимает только действительные значения в точках

$$\operatorname{Re}(z) = (2k+1) \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{Im}(z) = 0.$$

б) функция принимает чисто мнимые значения там, где

$$\operatorname{Re} w = 0, \text{ т.е. } \sin x \cdot \cosh y = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cosh y = 0$$

$$x = k\pi \quad \text{решений нет.}$$

Функция принимает чисто мнимые значения там, где $\operatorname{Re}(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

7. Доказать аналитичность функции $\cos z$.

Решение:

Чтобы функция была аналитической, должны выполняться условия

$$\text{Эйлера–Даламбера} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Имеем,

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

$$u(x, y) = \cos x \cosh y \quad v(x, y) = -\sin x \sinh y.$$

Найдем частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\sin x \cosh y & \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin x \sinh y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sin x \cosh y & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\cos x \sinh y \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Значит функция $\cos z$ аналитическая для любых значений z .

8. Доказать, что $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$

Доказательство:

Пользуясь правилом умножения комплексных чисел, найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) &= \ln|z_1 \cdot z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = (\ln|z_1| + i \operatorname{Arg} z_1) + \\ &+ (\ln|z_2| + i \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \end{aligned}$$

т.е. $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

9. Найти аналитическое выражение для функции $\operatorname{Arccos} z$ при любом комплексном z . Вычислить $\operatorname{Arccos} 2$.

Решение:

Так как равенство $w = \operatorname{Arg} \cos z$ равносильно равенству $\cos w = z$, то можем записать что $z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. Отсюда находим $2z = e^{iw} + \frac{1}{e^{iw}}$ или

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0.$$

Обозначим $t = e^{iw}$, тогда $t^2 - 2zt + 1 = 0$

$$t = z \pm \sqrt{z^2 - 1};$$

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}, \text{ т.е.}$$

$$iw = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) \text{ или } w = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

Итак, $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$

Вычислим по этой формуле $\operatorname{Arc} \cos 2 = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{4-1}) = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

10. Найти область аналитичности функции $f(z) = \frac{\sin 2z}{z^2 - 1}$ и ее производную.

Решение:

Знаменатель дроби обращается в нуль в точках $z_{1,2} = \pm 1$. Областью определения этой функции является вся комплексная плоскость, кроме точек $z_{1,2} = \pm 1$, то есть $D(f) = \{z : z \in \mathbb{C}; z \neq \pm 1\}$. Эта область и является областью аналитичности данной функции.

$$f'(z) = \frac{(\sin 2z)'(z^2 - 1) - \sin 2z(z^2 - 1)'}{(z^2 - 1)^2} = \frac{2 \cos 2z(z^2 - 1) - 2z \sin 2z}{(z^2 - 1)^2} = \frac{2((z^2 - 1) \cos 2z - z \sin 2z)}{(z^2 - 1)^2}.$$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить значения показательной функции:

а) $e^{\frac{\pi}{2}i}$; б) e^{-3+2i} ; в) e^{2+3i} ; г) e^{-8-7i} .

Определить их действительные и мнимые части.

2. Используя определение функции e^z , доказать следующие утверждения:

а) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; б) $e^{z_1} \div e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$; в) $e^{z+2\pi i} = e^z$.

3. Найти модули и главные аргументы комплексных чисел:

а) e^{2+i} ; б) e^{2-3i} ; в) e^{5+7i} ; г) e^{3-4i} ; д) e^{-6i} ; е) e^{-4-5i} ; ж) $e^{i\varphi}$.

4. Вычислить значения следующих тригонометрических функций и указать их действительные и мнимые части:

а) $\sin(1-3i)$; б) $\cos 3i$; в) $\cos(1+i)$; г) $\sin(2+3i)$; д) $\sin 7i$; е) $\operatorname{tg}(2+i)$;

ж) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$.

5. Определить действительные и мнимые части функций:

а) e^{2z+3i} ; б) e^{5iz-1} ; в) $\sin(3z+2)$, г) $\cos(z-i)$; д) $z^3 + 5z - 1$.

6. Пользуясь определением $\sin z$ и $\cos z$, вывести формулы:

а) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; б) $\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z$;
в) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$; г) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

7. Для каждой из функций $e^z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ch} z$ найти множество точек z , где она принимает а) действительные значения; б) чисто мнимые значения.

8. Доказать тождества: $\operatorname{sh} iz = i \sin z$; $\operatorname{ch} iz = \cos z$; $\sin iz = i \operatorname{sh} z$; $\cos iz = \operatorname{ch} z$.

9. Вычислить значения функций в указанных точках:

а) $\operatorname{ch} i$; б) $\operatorname{sh}(-2+i)$; в) $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi}{6}i\right)$; г) $\operatorname{sh}(-1+5i)$; д) $\operatorname{th}\left(\ln 5 - \frac{\pi}{4}i\right)$.

10. Доказать аналитичность функций: $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$.

11. Пользуясь определением гиперболических функций доказать равенства:

а) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; б) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z$;
в) $\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$; г) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

12. Вычислить значения логарифмов в указанных точках:

а) $\operatorname{Ln}(-1), \ln(-1)$; б) $\ln i$; в) $\operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \ln \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; г) $\ln(1-i)$;
д) $\ln(\sqrt{3}+i)$; е) $\operatorname{Ln}(-i), \ln(-i)$; ж) $\ln(-3+4i)$.

13. Пользуясь определением логарифма доказать свойства:

а) $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$; б) $\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$; в) $n \ln z = \ln z^n, n \in \mathbb{N}$.

14. Найти все значения следующих степеней:

а) 2^i ; б) $(-1)^i$; в) $(1+i)^i$; г) $(-1)^{\sqrt{2}}$; д) $(3-4i)^{1+i}$; е) $(-3+4i)^{1+i}$; ж) i^{2+i} ; з) $(-1+i)^{3i}$.

15. Получить аналитические выражения для указанных функций и для каждой из них найти значение в соответствующей точке z_0 :

а) $w = \operatorname{Arc} \sin z, z_0 = i$; б) $w = \operatorname{Arctg} z, z_0 = \frac{i}{3}$; в) $w = \operatorname{Argsh} z, z_0 = i$;
г) $w = \operatorname{Argch} z, z_0 = -1$; д) $w = \operatorname{Arth} z, z_0 = 1-i$.

16. Используя правила дифференцирования (суммы, произведения, частного) и таблицу производных п3.1, найти области аналитичности функций и их производные:

а) $f(z) = \operatorname{tg} z$; б) $f(z) = z \cdot e^{-z}$; в) $f(z) = \frac{z \cos z}{1+z^2}$; г) $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$;
д) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$; е) $f(z) = \frac{e^z}{z}$; ж) $f(z) = \operatorname{cth} z$; з) $f(z) = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z}$.

3.4. Ответы к задачам

1. а) $\operatorname{Re} e^{\frac{\pi}{2}} = 0$; $\operatorname{Im} e^{\frac{\pi}{2}} = 1$; б) $\frac{\cos 2}{e^3} + i \frac{\sin 2}{e^3}$; в) $e^2 \cos 3 + i e^2 \sin 3$; г) $\frac{\cos 7}{e^8} - i \frac{\sin 7}{e^8}$.
3. а) e^2 ; 1; б) e^2 ; -3 ; в) e^5 ; $7 - 2\pi$; г) e^3 ; $2\pi - 4$; д) 1; $2\pi - 6$; е) e^{-4} ; $2 - 5\pi$; ж) 1; $\varphi - \pi$, если $\varphi > 0$ и $\varphi + \pi$, если $\varphi \leq 0$.
4. а) $\sin 1 \operatorname{ch} 3 - i \cos 1 \operatorname{sh} 3$; б) $\operatorname{ch} 3$; в) $\operatorname{ch} 1 \cos 1 - i \operatorname{sh} 1 \sin 1$; г) $\sin 2 \operatorname{ch} 3 + i \cos 2 \operatorname{sh} 3$; д) $i \operatorname{sh} 7$; е) $\frac{\sin 4}{2(\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 2)} + i \frac{\operatorname{sh} 2}{2(\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 2)}$.
5. а) $\operatorname{Re} e^{2z+3i} = e^{2x} \cos(2y+3)$, $\operatorname{Im} e^{2z+3i} = e^{2x} \sin(2y+3)$; б) $\operatorname{Re} e^{5iz-1} = e^{-5y-1} \cos 5x$, $\operatorname{Im} e^{5iz-1} = e^{-5y-1} \sin 5x$; в) $\operatorname{Re} \sin(3z+2) = \sin(3x+2) \operatorname{ch} 3y$, $\operatorname{Im}(3z+2) = \cos(3x+2) \operatorname{sh} 3y$; г) $\operatorname{Re} \cos(z-i) = \cos x \operatorname{ch}(y-1)$, $\operatorname{Im} \cos(z-i) = -\sin x \operatorname{sh}(y-1)$; д) $\operatorname{Re}(z^3 + 5z - 1) = x^3 - 3xy^2 + 5x - 1$, $\operatorname{Im}(z^3 + 5z - 1) = 3x^2y - y^3 + 5y$.
9. а) $\cos 1$; б) $-\operatorname{sh} 2 \cos 1 + i \operatorname{ch} 2 \sin 1$; в) $\frac{80}{91} + \frac{9\sqrt{3}}{91}i$; г) $\cos 3 \operatorname{sh} 2 + i \sin 3 \operatorname{ch} 2$; д) $\frac{312}{313} + \frac{25}{313}i$.
12. а) $(2k+1)\pi i$; πi , $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}i$; в) $\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi i$; $\frac{\pi}{4}i$, $k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{1}{2} \ln 2 + \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$; д) $\ln 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$; е) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$; $-\frac{\pi}{2}i$, $k \in \mathbb{Z}$; ж) $\ln 5 + i\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)$.
14. а) $e^{2k\pi}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $e^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $e^{\left(2k - \frac{1}{4}\right)\pi} \left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; г) $\cos(\sqrt{2}(2k+1)\pi) + i \sin(\sqrt{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; д) $5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} - 2k\pi} \left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right) + i \sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; е) $-5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} - (2k+1)\pi} \left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right) + i \sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; ж) $-e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$; з) $e^{-\frac{3\pi}{4} - 2\pi k} \left(\cos\left(\frac{3}{2} \ln 2\right) + i \sin\left(\frac{3}{2} \ln 2\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
15. а) $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\operatorname{Arcsin} i = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$, $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3} = k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$, $\operatorname{Arshi} = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\Gamma) \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \operatorname{Arch}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z};$$

$$\Delta) \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \operatorname{Arth}(1-i) = \frac{1}{4} \ln 5 + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} 2 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

$$16. \text{ а) Вся плоскость, кроме точек } z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, k \in \mathbb{Z}, f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z};$$

$$\text{б) Вся плоскость, } f'(z) = e^{-z}(1-z);$$

$$\text{в) Вся плоскость, кроме точек } z_{1,2} = \pm i; f'(z) = \frac{(1-z^2)\cos z - z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2};$$

$$\Gamma) \text{ Вся плоскость, кроме точек } z_k = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}, f'(z) = -\frac{2e^2}{(e^z - 1)^2};$$

$$\Delta) \text{ Вся плоскость, кроме точек } z_k = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}, f'(z) = \cos 2z;$$

$$\text{е) Вся плоскость, кроме точки } z = 0; f'(z) = \frac{e^z(z-1)}{z^2};$$

$$\text{ж) Вся плоскость, кроме точек } z_k = \pi k i, k \in \mathbb{Z}, f'(z) = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 z};$$

$$\text{з) Вся плоскость, кроме точек } z_k = \left(k + \frac{1}{4}\right) \pi, k \in \mathbb{Z}, f'(z) = \frac{1}{1 - \sin 2z}.$$

4. Интегрирование функций комплексного переменного

4.1. Справочный материал теории интегрирования функций комплексного переменного

1. Определение интеграла по кривой линии и функции комплексного переменного.

Если L -направленная кусочно гладкая кривая в плоскости (z) и для всех $z \in L$ определена функция $f(z)$, то при условии существования предела в правой части полагают по определению:
$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(C_k) \Delta z_k.$$

Здесь $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $z_k \in L, k = 0, 1, \dots, n$, точки $c_k \in l$ выбраны на участках l между точками z_k и z_{k+1} .

2. Основные свойства интеграла:

$$1) \int_L (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int_L f_1(z)dz \pm \int_L f_2(z)dz;$$

$$2) \int_L kf(z)dz = k \int_L f(z)dz \quad (k - \text{const});$$

$$3) \int_{L^+} f(z)dz = - \int_{L^-} f(z)dz;$$

4) если дуга L состоит из дуг $L_1, L_2, \dots, L_n$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \dots + \int_{L_n} f(z)dz.$$

5) Если $|f(z)| \leq M$ во всех точках дуги L и длина дуги L равна l , то

$$\left| \int_L f(z)dz \right| \leq M \cdot l.$$

3. Вычисление интеграла.

Если непрерывна функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и $dz = dx + idy$, то интеграл представляется в виде суммы двух криволинейных интегралов 2-го рода:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

4. Теорема Коши.

Определение. Число несвязных между собой частей из которых состоит вся граница области называется порядком связности этой области.

Пример:



Теорема Коши (для односвязной области). Если функция $f(z)$ аналитическая в каждой точке связной области D , ограниченной линией L , и непрерывна в замкнутой области $\bar{D} = D + L$, то $\oint_L f(z)dz = 0$.

Теорема Коши (для многосвязной области). Если функция $f(z)$ аналитична в каждой точке многосвязной области D , ограниченной кривой L и внутренними по отношению к ней кривыми $l_1, l_2, \dots, l_n$ и непрерывна в замкнутой области $\bar{D} = D + L + l_1 + l_2 + \dots + l_n$, то

$\oint_L f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz + \dots + \int_{l_n} f(z)dz$, где вся граница $L, l_1, l_2, \dots, l_n$ обходится в одном направлении либо против часовой стрелке, либо по часовой стрелке.

Понятие первообразной.

Если функция $f(z)$ определена и непрерывна в односвязной области D и такова, что для любого замкнутого контура $l \subset D$ $\oint_l f(z)dz = 0$, то при

фиксированном $z_0 \in D$ функция $F(z) = \int_{z_0}^z f(z)dz$ является аналитической в

области D функцией, для которой $F'(z) = f(z)$. Функция $F(z)$ называется первообразной от $f(z)$, а совокупность всех первообразных от функции $f(z)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(z)dz = F(z) + C$.

Для аналитической функции справедлива формула Ньютона – Лейбница: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

Если функция $f(z)$ аналитическая в области D , то интеграл от неё не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от положения начальной z_0 и конечной z точек, т.е. $\int_L f(z)dz = \int_{z_0}^z f(z)dz$.

5. Интегральная формула Коши.

Если $f(z)$ аналитична в области $D, z_0 \in D$ и $L \prec D$ - замкнутая кривая, охватывающая точку z_0 , то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \text{ При этом функция } f(z) \text{ имеет всюду в } D \text{ производные}$$

любого порядка, для которых справедливы формулы

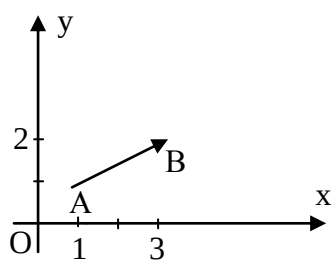
$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz; \quad k = 1, 2, \dots$$

4.2. Методические рекомендации к решению задач

1. Если под знаком интеграла $\int_L f(z) dz$ функция $f(z)$ неаналитическая, то вычисление интеграла сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительного переменного. Для этого следует представить подынтегральную функцию в виде $f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$ и умножить её на $dz = dx + i dy$. При этом подынтегральное выражение преобразуется к виду: $f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy)$.

Пример. Найти $\int_L (z+1) \operatorname{Re} z dz$, где L - отрезок прямой AB , соединяющей точки $z_A = 1 + i; z_B = 3 + 2i$.

Решение:



Найдем уравнение отрезка AB . Координаты точек $A(1;1), B(3;2)$. Уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Следовательно уравнение AB будет $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{3-1}$ или $\frac{y-1}{1} = \frac{x-1}{2}$.

Отсюда $x = 2y - 1$, причем $dx = 2dy, 1 \leq y \leq 2$.

$$\begin{aligned} \int_L (z+1) \operatorname{Re} z dz &= \int_L (x + iy + 1) \cdot x \cdot (dx + i dy) = \int_L (x^2 + ixy + x)(dx + i dy) = \\ &= \int_L (x^2 + x) dx - xy dy + i \int_L xy dx + (x^2 + x) dy = \int_1^3 (x^2 + x) dx - \int_1^2 (2y-1)y dy + i \int_1^2 (2y-1)y^2 dy + \\ &+ i \int_1^3 (x^2 + x) \frac{dx}{2} = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 - \left(\frac{2y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 + i \left(\frac{4y^3}{3} - y^2 \right) \Big|_1^2 + i \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^3 = 9\frac{1}{2} + 12\frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

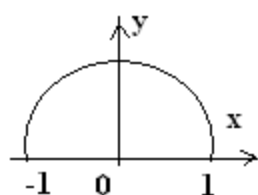
2. Если кривая интегрирования L окружность $|z| = R$ или любая её часть, то представив z в показательной форме $z = |z|e^{i\varphi}$, получим для окружности

$$z = Re^{i\varphi}, \quad dz = iRe^{i\varphi} d\varphi, \quad \int_L f(z)dz = iR \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(Re^{i\varphi})e^{i\varphi} d\varphi, \quad \text{где } [\varphi_1, \varphi_2] \text{ отрезок,}$$

отвечающий заданной части окружности.

Пример. Вычислить $\int_L |z|\bar{z}dz$, где L - верхняя полуокружность $|z|=1$ с обходом против часовой стрелки.

Решение:



Так как $|z|=1$, а $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, то

$$\int_L |z|\bar{z}dz = \int_0^\pi 1 \cdot e^{-i\varphi} i e^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^\pi d\varphi = i\varphi \Big|_0^\pi = \pi i.$$

Данный интеграл можно вычислить и предыдущим способом:

$$\begin{aligned} \int_L |z|\bar{z}dz &= \int_L \sqrt{x^2 + y^2} (x - iy)(dx + idy) = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} (xdx + ydy) + \\ &+ i \int_L \sqrt{x^2 + y^2} (-ydx + xdy). \end{aligned}$$

Переходя к параметрическому уравнению кривой $L: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ и учитывая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = 1$ в точках кривой, получаем

$$\int_L |z|\bar{z}dz = \int_0^\pi (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt + i \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = i \int_0^\pi dt = it \Big|_0^\pi = \pi i.$$

3. Интегралы от аналитических функций комплексного переменного z вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и интегралы от функций действительного переменного.

Пример. Вычислить $\int_L ze^z dz$, где L - произвольная линия, соединяющая

точки $z = 0, z = \frac{\pi i}{2}$.

Решение:

Подынтегральная функция $z \cdot e^z$ аналитична во всей комплексной

плоскости, поэтому интеграл можно записать в виде $\int_L ze^z dz = \int_0^{\frac{\pi i}{2}} ze^z dz$, так

как интеграл не зависит от выбора пути L .

Интегрируя по частям находим:

$$\int_0^{\frac{\pi i}{2}} ze^z dz = ze^z \Big|_0^{\frac{\pi i}{2}} - \int_0^{\frac{\pi i}{2}} e^z dz = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i}{2}} - e^z \Big|_0^{\frac{\pi i}{2}} = \frac{\pi}{2} i e^{\frac{\pi i}{2}} - e^{\frac{\pi i}{2}} + e^0 = \frac{\pi}{2} i \cdot i - i + 1 = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) - i,$$

так как $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$.

4. Из интегральной формулы Коши (3.1 п. 5) следует, что

$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$, где $f(z)$ аналитична в области, ограниченной замкнутой линией L .

Аналогично, $\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0)$, $k = 1, 2, \dots$

Пример. Вычислить интеграл $\int_L \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z^2 + 1} dz$, где L – окружность $|z - i| = 1$.

Решение:

Подынтегральная функция разрывна в точках $z^2 + 1 = 0$ или $z^2 - i^2 = 0$, $z_{1,2} = \pm i$.

В область, ограниченную окружностью $|z - i| = 1$ входит только $z = i$. Тогда

$f(z) = \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z + i}$ будет аналитична в данной области и по формуле Коши получаем:

$$\int_L \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z^2 + 1} dz = \int_L \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{(z - i)(z + i)} = \int_L \frac{\frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{2}}{\frac{z + i}{z - i}} dz = 2\pi i \cdot \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z + i} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i} = -\pi.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{z(z - i)^2}$, если L - окружность

а) $|z| = 0,5$; б) $|z - i| = 0,5$; в) $|z - 1| = 3$.

Решение:

Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z = 0$ и $z = i$.

а) Внутри области, ограниченной окружностью $|z| = 0,5$, находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль.

Запишем интеграл в виде $\int_{L_1} \frac{dz}{z(z - i)^2} = \int_{|z|=0,5} \frac{\frac{1}{(z - i)^2}}{z} dz$.

Функция $f(z) = \frac{1}{(z - i)^2}$ - аналитическая в контуре $|z| = 0,5$. По формуле Коши

$$\int_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0) \text{ получим } \int_L \frac{dz}{z(z - i)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(z - i)^2} \Big|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(-i)^2} = -2\pi i.$$

б) Точка $z=i$ находится внутри контура $|z-i|=0,5$; $z=0$ не принадлежит данному контуру. Функция $f(z)=\frac{1}{z}$ - аналитическая внутри круга, ограниченного окружностью $|z-i|=0,5$. По формуле Коши

$$\int \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \text{ получаем: } n+1=2 \Rightarrow n=1.$$

$$f'(z_0) = \left(\frac{1}{z} \right)' \Big|_{z=i} = -\frac{1}{z^2} \Big|_{z=i} = -\frac{1}{i^2} = 1.$$

$$\int_{|z-i|=0,5} \frac{dz}{z(z-i)^2} = \int_{|z-i|=0,5} \frac{\frac{1}{z}}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(z_0) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

в) В контуре $|z-1|=3$ находятся обе точки, в которых знаменатель

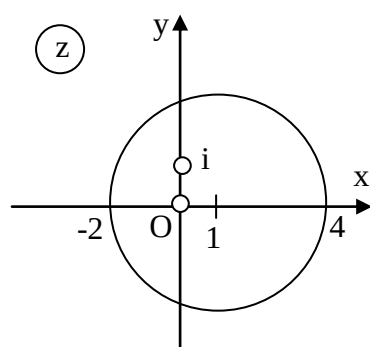
обращается в нуль $z=0$ и $z=i$.

Функция $f(z)=\frac{1}{z(z-i)^2}$ будет аналитической в трехсвязной области, являющейся кругом, ограниченным окружностью $|z-1|=3$, из которого вырезаны два круга $|z|<r$ и $|z-i|<r$, где r - достаточно малая величина.

Следовательно,

$$\int_{|z-1|=3} \frac{dz}{z(z-i)^2} = \int_{|z|=r} \frac{dz}{z(z-i)^2} + \int_{|z-i|=r} \frac{dz}{z(z-i)^2} = -2\pi i + 2\pi i = 0$$

Так как оба интеграла найдены (смотри случаи а) и б)).



4.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\int_L (\operatorname{Im} z + \bar{z}) dz$, где L - отрезок прямой, соединяющий точки

$$z_1 = 1+i, z_2 = 2+3i.$$

2. Вычислить $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, где L - отрезок прямой, соединяющий точки

$$z_A = 1+i, z_B = 2+2i.$$

3. Вычислить $\int_L \operatorname{Im} z dz$, если путь интегрирования L :

а) является прямолинейным отрезком, соединяющим точку 0 с точкой $2+i$.

б) состоит из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой i и прямолинейного отрезка соединяющего точку i с точкой $2+i$.

4. Вычислить $\int_L (1+i-2\bar{z})dz$, где L отрезок прямой, соединяющий точки

$$z_A = 0, z_B = 1+i.$$

5. Вычислить $\int_L \operatorname{Re} z dz$, где L - прямолинейный отрезок, соединяющий

$$\text{точки } z_A = 0, z_B = 1+i.$$

6. Вычислить $\int_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, где L - прямолинейный отрезок, соединяющий

$$\text{точки } z_1 = 0, z_2 = 1+i.$$

7. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Re} z dz$ по дуге параболы $L: y = 2x^2$, начало

которой в точке $z = 0$ и конец в точке $z = 1+2i$.

8. Вычислить $\int_L (2z+1)\bar{z}dz$, где L - единичная окружность $|z|=1$.

9. Вычислить $\int_L (z+2\bar{z})dz$, где L - дуга окружности $|z|=2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

10. Вычислить $\int_L |z|dz$, где L является: а) прямолинейным отрезком,

соединяющим точку -1 с точкой 1 ; б) полуокружностью радиуса 1 с центром в начале координат, лежащей в верхней полуплоскости, причем точка -1 является начальной, а точка 1 - конечной.

11. Вычислить $\int_L \bar{z}dz$, где L - замкнутый контур $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

12. Вычислить $\int_L \frac{z}{z}$, где L : а) прямолинейный отрезок, соединяющий точки

$1+i$ и $2+2i$; б) полуокружность $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

13. Вычислить $\int_1^i ze^z dz$. 14. Вычислить $\int_0^i z \sin z dz$. 15. Вычислить $\int_0^i z^3 dz$.

16. Вычислить $\int_0^{1+i} z dz$. 17. Вычислить $\int_{1+i}^{-1-i} (3z+1)dz$.

18. Вычислить $\int_1^i (3z^2 - 2z)dz$. 19. Вычислить $\int_1^i \frac{\ln z}{z} dz$.

20. Вычислить $\int_0^i \sin z \cos z dz$. 21. Вычислить $\int_0^i \sin z \cos^2 z dz$.

22. Вычислить $\int_L (z-1)\cos z dz$ по произвольной линии, соединяющей точки

$$z_1 = -\frac{\pi}{2}, z_2 = \frac{\pi}{2}.$$

23. Вычислить интеграл $\int_L (iz^2 - 2z) dz$, где L - произвольная линия, соединяющая точки $z_1 = i, z_2 = 1$.

24. Вычислить $\int_L \sin^2 z dz$, где L - ломанная, соединяющая точки $z_0 = 0, z_1 = 2 - i, z_2 = 4 - i, z_3 = 5 + 5i, z_4 = i$.

25. Вычислить $\int_L z \cos z dz$, L - ломанная, соединяющая точки $z_0 = 0, z_1 = 1 + i, z_2 = i$.

Вычислить следующие интегралы, пользуясь теоремой Коши, интегральной формулой Коши и формулами, полученными из интегральной формулы Коши дифференцированием. Направление вдоль контура L в этих задачах - против часовой стрелки:

26. $\int_L \frac{e^{2z}}{z - \pi i} dz$, где L - окружность: а) $|z| = 4$; б) $|z + i| = 1$.

27. $\int_L \frac{z - 5}{z^2 - 9} dz$, где $L: |z + 1| = 3$.

28. $\int_L \frac{e^z dz}{z^2(z - 2)}$, где L : а) $|z| = 1$; б) $|z - 3| = 2$.

29. $\int_L \frac{z^2 dz}{(z + 1)^3}$, где L : а) $|z| = \frac{1}{2}$; б) $|z| = 2$.

30. $\int_L \frac{\cos z}{z^2 + 1} dz$, где $L: |z - i| = 1$.

31. $\int_L \frac{shz dz}{(z + i)^4}$, где $L: |z + i| = 3$.

32. $\int_L \frac{2z dz}{(z^2 + 4)(z - 1)}$, где L : а) $|z - 2i| = 1$; б) $|z - 1| = 1$.

33. $\int_L \frac{dz}{(z^2 + 16)^2}$, где L : а) $|z - 4i| = 2$; б) $|z - 1| = 1$.

34. $\int_L \frac{\sin z dz}{z(z - 2i)}$, где L : а) $|z| = 1$; б) $|z - 3i| = 2$.

35. $\int_L \frac{e^{z^2}}{(z^2 + 1)(z + i)}$, где L : а) $|z - 2i| = 2$; б) $|z + i| = 1$.

36. $\int_L \frac{tgz dz}{z^3 + 3z}$, где $L: |z + 2| = 1$.

37. $\int_L \frac{e^z}{z^3(z - 1)} dz$, где $L: |z - 2| = 3$.

38. $\int_L \frac{\sin z}{(z + i)^3} dz$, где $L: |z + i| = 1$.

$$39. \int_L \frac{dz}{z^2 + 2z}, \text{ где } L: |z| = 3.$$

$$40. \int_L \frac{chzdz}{(z+1)^3(z-1)}, \text{ где } L: |z| = 2.$$

4.4. Ответы к задачам

$$1. 7,5 + 5i. \quad 2. \frac{14}{3}i. \quad 3. \text{ а) } 1 + \frac{i}{2}; \text{ б) } 2 + \frac{i}{2}. \quad 4. -2 + 2i.$$

$$5. \frac{1+i}{2}. \quad 6. \frac{1}{4}(e^2 - 1)(1+i). \quad 7. \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i. \quad 8. 2\pi i. \quad 9. 8\pi i.$$

$$10. \text{ а) } 1; \text{ б) } 2. \quad 11. 6\pi i. \quad 12. \text{ а) } i - 1; \text{ б) } -\frac{2}{3}.$$

$$13. -(\cos 1 + \sin 1) + i(\cos 1 - \sin 1). \quad 14. i(sh1 - ch1). \quad 15. \frac{1}{4}. \quad 16. i.$$

$$17. -2 - 2i. \quad 18. 1 - i. \quad 19. -\frac{\pi^2}{8}. \quad 20. -\frac{(e^2 - 1)^2}{8e^2} = \frac{1}{4}(1 - ch2).$$

$$21. \frac{1}{6} - \frac{(1 + e^2)^3}{6e^3} = \frac{1}{3}(1 - ch^3 1). \quad 22. \pi - 2. \quad 23. \frac{7}{3} - \frac{i}{3}.$$

$$24. \frac{i}{4}(2 - sh2). \quad 25. e^{-1} - 1. \quad 26. 2\pi i. \quad 27. \frac{8}{3}\pi i.$$

$$28. \text{ а) } -\frac{\pi i}{2}; \text{ б) } \frac{\pi e^2 i}{2}. \quad 29. \text{ а) } 0; \text{ б) } 2\pi i. \quad 30. \pi ch1. \quad 31. \frac{\pi i}{3} \cos 1.$$

$$32. \text{ а) } \frac{2\pi}{5}(2 - i); \text{ б) } \frac{4}{5}\pi i. \quad 33. \text{ а) } \frac{\pi}{2}; \text{ б) } 0. \quad 34. \text{ а) } 0; \text{ б) } \pi sh2.$$

$$35. \text{ а) } -\frac{\pi i}{e}; \text{ б) } \frac{\pi i}{2e}. \quad 36. \frac{2}{3}\pi itg3. \quad 37. \pi(2e - 5). \quad 38. -\pi sh1.$$

$$39. 0. \quad 40. -\frac{\pi i}{2e}.$$

5. Комплексные ряды

5.1. Справочный материал по теории комплексных рядов

1. Числовые ряды с комплексными числами.

Ряд с комплексными членами $w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n w_k$ сходится. Число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называется его суммой. Ряд с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ (в этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ также сходится).

Для рядов с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ справедливы следующие признаки сходимости:

- 1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ (необходимый признак сходимости числового ряда).
- 2) Если для всех $n \geq n_0$ выполнено условие $|w_n| \leq a_n$, $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится абсолютно.
- 3) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = l$, то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ абсолютно сходится, а при $l > 1$ расходится (признак Даламбера).
- 4) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|} = l$, то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ абсолютно сходится, а при $l > 1$ расходится (признак Коши).

2. Степенные ряды с комплексными членами.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где z - комплексное переменное, а c_n и a - комплексные числа.

Если $a = 0$, то степенной ряд имеет вид: $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Т.е. значения z , при которых ряд сходится, называются точками сходимости, т.е. значения z , при которых ряд расходится – точками расходимости.

Для каждого степенного ряда существует круг с центром в точке a , внутри которого степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ сходится, а вне его расходится. На

границе круга степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Этот круг называется кругом сходимости, его радиус R – радиусом сходимости степенного ряда ($R=\infty$, если степенной ряд сходится во всей плоскости; $R=0$, если он сходится лишь в центре круга, в точке a). Во всех точках внутри круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится и его сумма

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ аналитична.}$$

Если степенной ряд абсолютно сходится в какой-нибудь точке границы круга сходимости, то он абсолютно сходится во всех точках границы.

Для отыскания радиуса сходимости степенного ряда могут применяться признаки Даламбера $\left(R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \right)$ и Коши $\left(R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \right)$.

Областью сходимости степенного ряда по отрицательным степеням $(z-a)$

$\frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-a)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$ является внешняя часть круга с центром в точке a некоторого радиуса R .

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ сходится в круге $|z-a| < R$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$ сходится вне круга $|z-a| > r$, то при $0 \leq r < R < \infty$ областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ является кольцо $r < |z-a| < R$; при $r > R$ этот ряд всюду расходится.

3. Ряды Тейлора и Лорана.

Функция $f(z)$ аналитичная в круге $|z-a| < R$, $0 \leq R < \infty$ разлагается в ряд по степеням $(z-a)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n=0,1,\dots$, где $0 < r < R$.

Этот ряд называется рядом Тейлора функции $f(z)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в области D , и точка a принадлежит этой области, то ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ функции $f(z)$ сходится к ней внутри максимального круга с центром в точке a , лежащего в области D .

Функция $f(z)$ аналитична внутри кольца $r < |z-a| < R$, $0 \leq r < R \leq \infty$, разлагается в ряд $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$, $n = 0, 1, \dots$,

где $r < \rho < R$. Этот ряд называется рядом Лорана функции $f(z)$; при этом ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ - правильной частью. Сумма ряда Лорана является аналитической функцией в кольце $r < |z-a| < R$.

Ряды Тейлора и Лорана определяются единственным образом. В частности, это означает, что каким бы способом мы не разлагали $f(z)$ в ряд Тейлора или Лорана, этот ряд будет одним и тем же. Ряды Тейлора и Лорана в области сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

5.2. Методические рекомендации к решению задач

1. Для исследования на сходимость числового комплексного ряда используются признаки сходимости 5.1 п. 1.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$.

Решение:

Общий член ряда $w_n = \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$, его модуль

$$|w_n| = \left| \frac{\cos n + i \sin n}{n^2} \right| = \sqrt{\frac{\cos^2 n + \sin^2 n}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, так как является обобщенным гармоническим рядом ($n \in N$, $p = 2$).

Следовательно, рассматриваемый ряд сходится абсолютно (п.1 св-во 2).

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3} \right)^{n^2}$

Решение:

Применим признак Коши (п.1 св-во 4):

$$\sqrt[n]{|w_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|2-i|^{n^2}}{3^{n^2}}} = \frac{|2-i|^n}{3^n} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 0, \text{ так как } \sqrt{5} < 3.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|} < 1$, следовательно ряд абсолютно сходится.

2. Нахождение области сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ сводится к следующим шагам:

а) Находим радиус сходимости по формулам $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ или $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

б) Определяем область сходимости (круг $|z-a| < R$, комплексная плоскость, точка $z = a$).

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{2^n}$.

Решение:

$$c_n = \frac{n}{2^n}; c_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}. \text{ Найдём радиус сходимости } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)} = 2.$$

Область сходимости $|z| < 2$.

Пример 4. Исследовать на сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Решение:

$$c_n = \frac{1}{n!}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$\text{Радиус сходимости } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Это значит, что степенной ряд сходится во всех точках комплексной плоскости.

Замечание 1. Если степенной ряд неполный (то есть вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{2n}$ или $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{2n+1}$), то при отыскании области сходимости используются непосредственно признаки Даламбера и Коши.

Пример 5. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 3^n}$.

Решение:

$$\text{Применим признак Даламбера: } w_n = \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 3^n}, \quad w_{n+1} = \frac{(z+2)^{2(n+1)}}{(n+1)^2 3^{n+1}}$$

$$\text{и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+2)^{2n+2} n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1} (z+2)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+2)^2 n^2}{3(n+1)^2} \right| = \frac{|z+2|^2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|z+2|^2}{3}.$$

Ряд будет сходиться, если $\frac{|z+2|^2}{3} < 1$ или $|z+2| < \sqrt{3}$. Область сходимости круг $|z+2| < \sqrt{3}$.

Замечание 2. С помощью признаков Даламбера и Коши исследуется на сходимость и степенной ряд по отрицательным степеням $(z-a)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}.$$

Пример 6. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}$.

Решение:

Найдем область сходимости для каждого ряда этой суммы.

$$а) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)}: w_n = \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)}, \quad c_n = \frac{1}{2^n(n+1)}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}((n+1)+1)}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 2.$$

Область сходимости степенного ряда по положительным степеням круг $|z-2i| < 2$.

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}: w_n = \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}, \quad w_{n+1} = \frac{(n+1)^2+5}{(z-2i)^{n+1}}.$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{((n+1)^2+5)(z-2i)^n}{(z-2i)^{n+1}(n^2+5)} \right| = \frac{1}{|z-2i|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+6}{n^2+5} = \frac{1}{|z-2i|} < 1.$$

Следовательно, область сходимости ряда по отрицательным степеням $|z-2i| > 1$.

Таким образом, весь ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-2i)$ будет сходиться в кольце $1 < |z-2i| < 2$.

3. Для разложения аналитической в круге $|z-a| < R$ функции можно использовать разложение в ряд Тейлора в форме, известной из курса математического анализа для действительной переменной:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

При $a=0$ разложение имеет вид:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \text{ (ряд Маклорена).}$$

В частности, ряды Маклорена для элементарных функций имеют вид:

$$а) e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\text{б) } \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in C;$$

$$\text{в) } \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C;$$

$$\text{г) } \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\text{д) } \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$$

$$\begin{aligned} \text{е) } (1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1, \alpha \in R \setminus N. \end{aligned}$$

(если $\alpha = m \in N$ функция $(1+z)^m$ раскладывается по закону Ньютона в многочлен, причем разложение имеет место во всей комплексной плоскости);

ж) при $\alpha = -1$ из е) получим бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -z$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots, |z| < 1.$$

Пример 7. Разложить функцию $f(z) = shz$ в ряд по степеням z .

Решение:

Требуется разложить функцию shz в ряд Маклорена. Заметим, что функция shz аналитична во всей комплексной плоскости. Производные нечетного порядка $(shz)^{2n+1} = chz$, $n = 0, 1, \dots$, а четного - $(shz)^{2n} = shz$, $n \in N$.

$$\text{Следовательно } c_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{sh0}{(2n)!} = 0, \text{ а } c_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{ch0}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\text{Искомое разложение имеет вид: } shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C.$$

Пример 8. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $\ln(z-5z)$.

Решение:

Требуется данную функцию разложить в ряд Тейлора в круге с центром в точке $a = -3$. Преобразуем аргумент нашей функции, выделяя с некоторым коэффициентом выражение $(z+3)$. Имеем:

$$\ln(2-5z) = \ln(2-5(z+3)+15) = \ln(17-5(z+3)) = \ln 17 \left(1 - \frac{5}{17}(z+3) \right) = \ln 17 + \ln \left(1 - \frac{5(z+3)}{17} \right)$$

Воспользуемся разложением г) для $\ln(1+u)$, полагая $u = -\frac{5}{17}(z+3)$. Так как разложение г) имеет место при $|u| < 1$, то наше разложение будет иметь

место при $\frac{5}{17} \cdot |z+3| < 1$. Таким образом,

$$\ln(2-5z) = \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(-\frac{5}{17}(z+3) \right)^n \frac{1}{n} = \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{17} \right)^n \frac{(z+3)^n}{n}, \quad |z+3| < \frac{17}{5}.$$

Пример 9. Разложить в ряд по степеням $(z-3)$ функцию $f(z) = \frac{1}{5+2z}$.

Решение:

Преобразуем данную функцию следующим образом

$$\frac{1}{5+2z} = \frac{1}{5+2(z-3+3)} = \frac{1}{5+2(z-3)+6} = \frac{1}{11+2(z-3)} = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{11}(z-3)}.$$

Воспользуемся разложением ж) для $\frac{1}{1+u}$, полагая $u = \frac{2}{11}(z-3)$. Так как разложение имеет место при $|u| < 1$, то $\left| \frac{2}{11}(z-3) \right| < 1$.

Заменяя u на $\frac{2}{11}(z-3)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{5+2z} &= \frac{1}{11} \left(1 - \frac{2}{11}(z-3) + \frac{2^2}{11^2}(z-3)^2 - \dots + (-1)^n \frac{2^n}{11^n}(z-3)^n + \dots \right) = \frac{1}{11} - \frac{2}{11^2}(z-3) + \\ &+ \frac{2^2}{11^3}(z-3)^2 - \dots + (-1)^n \frac{2^n}{11^{n+1}}(z-3)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{11^{n+1}}(z-3)^n. \end{aligned}$$

Полученный ряд сходится при $\frac{2}{11} \cdot |z-3| < 1$, то есть в круге $|z-3| < \frac{11}{2}$.

Пример 10. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = \frac{2}{(z-3)^2}$.

Решение:

Заметим, что дробь $\frac{2}{z-3}$ можно разложить по формуле ж) (бесконечно геометрической прогрессии): $\frac{2}{z-3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} \right)^n, \quad |z| < 3.$

Производная $\left(\frac{2}{z-3} \right)' = -\frac{2}{(z-3)^2}$, учитывая, что в круге $|z| < 3$ ряд можно

почленно дифференцировать, получим $\frac{2}{(z-3)^2} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{3^n}$. Если

суммирование начинать с $n=0$, то $\frac{3}{(z-3)^2} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3.$

4. Общие формулы для коэффициентов ряда Лорана (5.1 п. 3) обычно мало удобны для вычислений, поэтому в некоторых случаях можно применять более простые приемы. Так, простейшая дробь вида $\frac{1}{z-a}$

разлагается в ряд по степеням z , являющийся геометрической прогрессией. Дробь вида $\frac{1}{(z-a)^k}$, где $k > 1, k \in \mathbb{Z}$ разлагается в ряд, полученный с помощью $(k-1)$ - кратного дифференцирования геометрической прогрессии. Заметим, что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму дробей вида $\frac{A}{(z-a)^n}$, где A, a - комплексные числа.

При разложении в ряд Лорана иррациональных и трансцендентных функций иногда можно использовать разложения в ряд Тейлора функций $e^z, \sin z, \cos z, \ln(1+z), \dots$ (5.2 п.3).

Пример 11. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}.$$

Решение:

Так как аналитичность функции нарушается в точках $z=0$ и $z=1$, то областью сходимости ряда Лорана будет: 1) кольцо $0 < |z| < 1$; 2) внешность круга $|z| > 1$. Представим дробь в виде суммы двух дробей $\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$.

1) Получим разложение в кольце $0 < |z| < 1$.

Первое слагаемое $\frac{1}{z}$ уже является членом разложения ряда Лорана по степеням z . Второе слагаемое есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем z , ($|z| < 1$): $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Тогда ряд Лорана будет иметь вид $\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$.

Заметим, что главная часть его содержит один член $\frac{1}{z}$, а правильная – бесконечное число членов.

2) Разложение в области $|z| > 1$.

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(z-\frac{1}{z}\right)}, \quad \text{так как } |z| > 1, \quad \text{то } \left|\frac{1}{z}\right| < 1, \quad \text{тогда } \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \quad \text{можно}$$

рассматривать, как сумму геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \quad \text{Итак,}$$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots - \frac{1}{z^{n+1}} + \dots = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Ряд Лорана в области $|z| > 1$ содержит только главную часть.

Пример 12. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$

Решение:

Аналитичность функции нарушается в точках $z=1$ и $z=2$. Следовательно, функция будет аналитической в областях 1) $0 < |z-1| < 1$; 2) $|z-1| > 1$.

1) Разложение в кольце $0 < |z-1| < 1$.

$$\text{Дробь представим в виде: } \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}.$$

Разложим в ряд

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -(1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots + (z-1)^n + \dots) = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

Чтобы найти разложение $\frac{1}{(z-2)^2}$, продифференцируем равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n. \text{ Получим} \\ -\frac{1}{(z-2)^2} &= -(0 + 1 + 2(z-1) + 3(z-1)^2 + \dots + n(z-1)^{n-1} + (n+1)(z-1)^n + \dots) = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z-1)^n, \text{ то есть } \frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z-1)^n. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z-1)^n = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(z-1)^n.$$

2) Разложение вне круга $|z-1| > 1$.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}.$$

$$\text{Разложим } \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}.$$

$$\text{Продифференцируем данное равенство: } -\frac{1}{(z-2)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-1)^{n+1}} \text{ или}$$

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-1)^{n+1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} &= \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{(z-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Пример 13. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

Решение:

Функция $z^3 e^{\frac{1}{z}}$ неаналитическая в точке $z = 0$. Следовательно, в области $0 < |z| < \infty$ ее можно разложить в ряд Лорана.

Используем формулу $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ (5.2 п.3а). Полагая $u = \frac{1}{z}$ находим

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots \text{тогда,}$$

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^3}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4! z} + \dots$$

Полученный ряд сходится в области $0 < |z| < \infty$.

Пример 14. Разложить в ряд Лорана в области $0 < |z+i| < \infty$ функцию $(z+i)^2 \cos \frac{1}{z+i}$.

Решение:

Так как данная функция аналитическая в области $0 < |z+i| < \infty$, то она может быть разложена в окрестности точки $z = -i$, то есть по степеням $(z+i)$.

Используем формулу $\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}$.

Если $u = \frac{1}{z+i}$, то $\cos \frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z+i)^{2n} \cdot (2n)!}$. Тогда,

$$\begin{aligned} (z+i)^2 \cos \frac{1}{z+i} &= (z+i)^2 \left(1 - \frac{1}{2!(z+i)^2} + \frac{1}{4!(z+i)^4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z+i)^{2n}} + \dots \right) = (z+i)^2 - \frac{1}{2!} + \\ &+ \frac{1}{4!(z+i)^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z+i)^{2n-2}} + \dots \end{aligned}$$

Ряд Лорана имеет вид: $(z+i)^2 \cos \frac{1}{z+i} = (z+i)^2 - \frac{1}{2!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+2)!(z+i)^{2n}}$.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i(2n+i)}{4n}\right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n + i \sin 3n}{n^3}$;
 5) $\sum_{i=1}^n \frac{e^{in}}{n^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in}}{3^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+i}{2}\right)^n$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (3+4i)^n$;
 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2+i)n}}{n!}$.

Найти области сходимости следующих рядов:

- 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n \sqrt{2n+1}}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{2n}}{n}$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$;
 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)} (z-2)^n$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^n$; 17) $\sum_{n=1}^{\infty} n! (z-i)^n$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n (2n+1)}$;
 19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^n}$; 20) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n \ln n}$; 21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (z-2)^{2n}}{n}$; 22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 (z-1)^n}$;
 23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(z-1)^n}$; 24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(z-2)^n}$; 25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(3n-2)^n} z^n$; 26) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$;
 27) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{3^n (n-i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{(z+1+i)^n}$; 28) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{(2n+1)4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(z-3)^n}$.

29) Разложить в ряд по степеням z (в ряд Маклорена) и указать области сходимости: а) e^{-z^2} ; б) $\cos 2z$; в) $\sin^2 z$; г) $\frac{z}{4+z^2}$;

д) $\frac{z}{3+4z}$; е) $\ln(2z+1)$; ж) $\ln(z^2+3z+2)$.

30) Разложить функции в ряд по степеням $(z-a)$ (в ряд Тейлора) и определить области сходимости полученных рядов:

- а) $e^{3z-2}; a=1$; б) $(z+1)\cos(2z+2); a=-1$; в) $\sin(z+i); a=i$;
 г) $z^3-2z^2-5z-2; a=-4$; д) $z^5-z^3+2z-3; a=2$; е) $\frac{1}{1-z}; a=2$;
 ж) $\frac{1}{1-z}; a=3i$; з) $\frac{1}{z^2-6z+5}; a=3$; и) $\ln(5z+3); a=1$; к) $e^{z^2-4z+1}; a=2$.

31) Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-a)$ следующие функции:

- а) $e^{\frac{1}{z^2}}; a=0$; б) $\cos \frac{1}{z+1}; a=-1$; в) $\sin \frac{1}{(z-i)^3}; a=i$; г) $(z+i)\sin \frac{1}{z+i}; a=-1$;
 д) $e^{\frac{1}{z-1}}(z-1)^3; a=1$; е) $\frac{\cos z}{z^3}; a=0$; ж) $\cos \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}; a=2$.

32) Разложить в ряд Тейлора или Лорана по степеням $(z-a)$ следующие функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{1}{z-2}; a=0; & \text{б) } \frac{1}{(z-1)(z-2)}; a=0; & \text{в) } \frac{1}{(z-1)(z-2)}; a=1; \\ \text{г) } \frac{1}{z(z-1)}; a=1; & \text{д) } \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}; a=-1; & \text{е) } \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}; a=2. \end{array}$$

33) Разложить в ряд Лорана функцию $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$ в окрестности точек

а) $z_0 = 1$; б) $z_0 = 2$.

5.4. Ответы к задачам

- 1) Сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) сходится;
 6) сходится; 7) сходится; 8) расходится; 9) расходится; 10) сходится;
 11) $|z+1| < 2$; 12) $|z+2| < 1$; 13) $|z| < e$; 14) $|z| < 2$; 15) $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 16) Комплексная плоскость ($|z| < \infty$); 17) $z = i$; 18) $|z-3| < \sqrt{3}$;
 19) Комплексная плоскость ($|z| < \infty$); 20) $|z| < 2$; 21) $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 22) $|z-1| > 2$; 23) $|z-1| > 1$; 24) $|z-2| > 1$; 25) $|z| > \frac{1}{3}$; 26) $1 < |z| < 5$;
 27) $2 < |z+1+i| < 3$; 28) $1 < |z-3| < 4$; 29) а) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}; |z| < \infty$;
 б) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$; в) $\sin^2 z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}; |z| < \infty$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}; |z| < 2$;
 д) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n z^n}{n}; |z| < \frac{1}{2}$; ж) $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1+2^{-n})^n}{n}; |z| < 1$;
 30) а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot e}{n!} (z-1)^n; |z| < \infty$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} (z+1)^{2n+1}; |z| < \infty$;
 в) $ch 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} + ish 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{2n}}{(2n)!}; |z| < \infty$;
 г) $-78 + 59(z+4) - 14(z+4)^2 + (z+4)^3$;
 д) $25 + 70(z-2) + 74(z-2)^2 + 39(z-2)^3 + 10(z-2)^4 + (z-2)^5$;
 е) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n; |z-2| < 1$;
 ж) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}; |z-3i| < |1-3i| = \sqrt{10}$; з) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{4^{n+1}}; |z-3| < 2$;

$$\text{и) } 3\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n (z-1)^n}{n \cdot 8^n}; |z-1| < \frac{8}{5}; \text{к) } e^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{2n}}{n!}; |z| < \infty.$$

$$31) \text{ а) } e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}; \quad \text{б) } \cos \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)! (z+1)^{2n}};$$

$$\text{в) } \sin \frac{1}{(z-i)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! (z-i)^{3(2n+1)}}; \quad \text{г) } (z+1) \sin \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! (z+1)^{2n}};$$

$$\text{д) } (z-1)^3 e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (z-1)^{n-3}}; \quad \text{е) } \frac{\cos z}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!};$$

$$\text{ж) } \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\cos 1}{(z-2)^{4n}} + \frac{4 \sin 1}{(2n+1)! (z-2)^{4n+2}} \right);$$

$$32) \text{ а) } \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{2^{n+1}}; \quad |z| < 2; \quad \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}; \quad |z| > 2;$$

$$\text{б) } \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n; \quad |z| < 1, \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}; \quad |z| > 2;$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}; \quad 1 < |z| < 2;$$

$$\text{в) } \frac{1}{(z-1)(z-2)} = - \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n; \quad 0 < |z-1| < 1; \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}; \quad |z-1| > 1;$$

$$\text{г) } \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n; \quad 0 < |z-1| < 1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}; \quad 1 < |z-1| < \infty;$$

$$\text{д) } \frac{z}{(z+1)(z-2)^2} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{3^{n+3}} (z+1)^n, \quad 0 < |z+1| < 3;$$

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)3^{n-1}}{(z+1)^{n+2}}; \quad |z+1| > 3;$$

$$\text{е) } \frac{z}{(z+1)(z-2)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{3}{2(z-2)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{3^{n+3}}; \quad 0 < |z-2| < 3;$$

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(z-2)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-2)^{n+3}}; \quad |z-2| > 3;$$

$$33) \text{ а) } \frac{z+1}{z^2-3z+2} = -\frac{2}{z-1} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n; \quad \text{б) } \frac{z+1}{z^2-3z+2} = \frac{3}{z-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n.$$

6. Особые точки. Вычеты

6.1 Особые точки их классификация. Основные формулы теории вычетов

1. Особые точки.

Точка z_0 называется нулем функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Если $f(z)$ аналитична в точке z_0 , то она разлагается в ряд Тейлора:

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots$$

При $z = z_0$ $f(z_0) = C_0$ и если z_0 - нуль функции, то $C_0 = f(z_0) = 0$.

Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора $C_0 = C_1 = \dots = C_{k-1} = 0$, но $C_k \neq 0$, то точка z_0 называется нулем функции $f(z)$ порядка m (или кратности m).

Из ряда Тейлора вытекает, что функция, имеющая в точке z_0 нуль порядка m , может быть представлена в виде $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$.

При $m=1$ нуль называется простым.

Точка z_0 называется особой точкой функции $f(z)$, если функция не аналитична в этой точке; и правильной, если в ней функция аналитична.

Особая точка функции $f(z)$ называется изолированной, если в окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Если z_0 - изолированная особая точка функции $f(z)$, то в достаточно малом круге с выколотым центром z_0 $f(z)$ ($0 < |z - z_0| < \delta$) функция $f(z)$ будет аналитической и, следовательно, разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Изолированные особые точки бывают трех типов:

1) устранимые; 2) полюсы; 3) существенно особые точки.

Тип особых точек определяется либо по количеству членов в главной части Лорана, либо по поведению функции в окрестности особой точки (см. таблицу 1)

Замечание. Бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если вне круга с центром $z_0 = 0$, достаточно большого радиуса ($0 < |z - z_0| < R, R \rightarrow \infty$), нет других особых точек функции $f(z)$.

При разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки полагают $z_0 = 0$, то есть ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{z^n} + \dots + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots$$

при этом $C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}$ - правильная часть, а $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ - главная часть.

Тип бесконечно удаленной особой точки и характер поведения функции в окрестности ее определяется аналогично конечной изолированной особой точки.

2. Вычеты.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ относительно точки z_0 называется число, определяемое равенством:

$$\operatorname{Res}(f(z); z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz \quad \text{или} \quad \operatorname{Res}[f(z); z_0] = C_{-1},$$

где L любой замкнутый контур, содержащий z_0 ; $f(z)$ аналитическая на L и в области, ограниченной L , за исключением точки z_0 ; C_{-1} - первый коэффициент главной части ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 .

Формулы для вычетов относительно особых точек даны в таблице 1.

Таблица 1: Классификация особых точек и нахождение вычетов.

№	Тип особых точек	Ряд Лорана с главной частью $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$	Поведение $f(z)$ в точке z_0	Формулы для нахождения вычетов ($\operatorname{Res}[f(z), z_0]$)
1	2	3	4	5
1.	Устранимая	Нет главной части.	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$	$\operatorname{Res}[f(z); z_0] = 0$
2.	Простой полюс	В главной части одно слагаемое: $C_{-m} \neq 0$	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$	1) $\operatorname{Res}[f(z); z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ 2) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} : \operatorname{Res}[f(z); z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

Продолжение таблицы 1.

1	2	3	4	5
3.	Полус кратнос ти	В главной части m слагаемых: $C_{-m} \neq 0$.	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$	$\operatorname{Res}[f(z); z_0] =$ $= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}$
4.	Сущест венно - особая	В главной части бесконечно много слагаемых	Не существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	Разложить в ряд Лорана, $\operatorname{Res}[f(z); z_0] = C_{-1}$

Теоремы о вычетах.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, лежащих в этой области, то для любого простого замкнутого контура $L \prec D$, охватывающего точки $z_1, z_2, \dots, z_n$, $\oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); z_k]$.

Теорема 2. Если $f(z)$ аналитическая во всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ и $z_n = \infty$, то $\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k) = 0$.

6.2. Методические указания к решению задач

1. Нули функции.

Чтобы найти нули функции $f(z)$, нужно функцию приравнять к нулю и найти корни уравнения $f(z) = 0$. Порядок нуля z_0 определяется, либо по формуле

$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, либо по производным:

$f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, то z_0 - нуль порядка m

Пример 1. Найти нули функции и определить их порядок:

$$f(z) = \frac{(z^2 + 4)^3 \cdot \sin z}{z}.$$

Решение:

Полагаем $f(z) = 0$, получаем $\sin z \cdot (z^2 + 4)^3 = 0$, откуда $(z^2 + 4)^3 = 0$ или $\sin z = 0$. Из первого уравнения получаем $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$. Из второго уравнения $\sin z = 0$ $z_n = \pi n$, ($n = \pm 1; \pm 2; \pm \dots$); $n \neq 0$, так $z = 0$ не входит в область определения $f(z)$. Определим порядок нулей. Пусть $z_1 = 2i$, представим

функцию в виде $f(z) = \frac{(z-2i)^3 \cdot (z+2i)^3 \cdot \sin z}{z} = (z-2i)^3 \cdot \varphi(z)$, где

$$\varphi(z) = \frac{(z+2i)^3 \cdot \sin z}{z} \text{ и } \varphi(2i) = \frac{-64i \cdot \sin 2i}{2i} = -32i \sin 2 \neq 0.$$

Это значит, что $z = 2i$ является нулем третьего порядка. Аналогично доказываем, что $z_2 = -2i$ также является нулем третьего порядка.

Определим порядок нулей $z = \pi n$, при $n \neq 0$.

Производная

$$f'(z) = \frac{(\cos z \cdot (z^2 + 4)^3 + \sin z \cdot 3(z^2 + 4)^2 \cdot 2z)z - \sin z \cdot (z^2 + 4)^3}{z^2} = \frac{(-1)^n \cdot ((\pi n)^2 + 4)^3}{\pi n} \neq 0,$$

следовательно точки $z = \pi n$ ($n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$) - нули первого порядка.

Ответ: $z = \pm 2i$ - нули третьего порядка; $z = \pi n$, ($n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$) - нули первого порядка или простые нули.

2. Особые точки .

Тип особой точки можно определить либо по числу членов в главной части ряда Лорана, либо по поведению функции в окрестности особой точки. (См.таблицу 1). Для определения полюса и его кратности используется факт, что если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка m , то функция

$\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке полюс того же порядка.

Пример 2. Найти все особые точки функции $\frac{1}{z(z^2 + i)^3}$ и указать их характер.

Решение:

Определим нули функции $f(z) = z(z^2 + i)^3$. Полагаем $f(z) = 0$. $z(z^2 + i)^3 = 0$. Отсюда следует: $z_1 = 0$ или $z^2 + i = 0$. Решаем уравнение $z^2 = -i$. Находим два корня $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $z_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Получаем, что $f(z) = z \cdot \left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)^3 \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)^3$, т.е функция $f(z)$ имеет

три нуля: z_1 - простой нуль; $z_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ - нули третьего порядка, что следует из разложения функции на множители.

Следовательно, функция $\frac{1}{z(z+i)^3}$ имеет в точке $z_1 = 0$ простой полюс, а в

точках $z_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ - полюса третьего порядка.

Пример 3. Найти особые точки и указать их характер для функции $e^{\frac{z}{1-z}}$.

Решение:

Функция $e^{\frac{z}{1-z}}$ определена и аналитична всюду, кроме точки $z=1$. Разложим эту функцию в ряд Лорана по степеням $z-1$.

Так как $\frac{z}{1-z} = -\frac{1-z-1}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1}$,

то $e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1} \cdot e^{-\frac{1}{z-1}} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} = e^{-1} - \frac{e^{-1}}{z-1} - \frac{e^{-1}}{2!(z-1)^2} - \dots$

Главная часть этого разложения – бесконечный ряд. Следовательно, точка $z=1$ является существенно особой точкой функции $e^{\frac{z}{1-z}}$.

Пример 4. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ и определить их характер.

Решение: Особой точкой функции $\frac{\sin z}{z}$ является $z=0$. Разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$. Так как $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, то $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$

В этом разложении отсутствует главная часть, следовательно точка $z=0$ является устранимой особой точкой. Этот факт можно было установить по поведению функции в точке $z=0$: $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой функции $\frac{\sin z}{z}$.

3. Вычисление вычетов.

Вычеты относительно особых точек находятся по формулам, данными в таблице 1.

Пример 5. Найти $\text{Res} \left[e^{\frac{3}{z-2}}; 2 \right]$

Решение: Точка $z_0 = 2$ является существенно особой, поэтому для нахождения вычета найдем коэффициент C_{-1} разложения $e^{\frac{3}{z-2}}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ /

Так как $e^{\frac{3}{z-2}} = 1 + \frac{3}{z-2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{3}{z-2} \right)^2 + \dots, 0 < |z-2| < +\infty$, то $C_{-1} = 3$. Следовательно,

$$\text{Res} \left[e^{\frac{3}{z-2}}; 2 \right] = 3$$

Пример 6. Найти $\text{Res} \left[\frac{1 - \cos 2z}{z^2}; 0 \right]$.

Решение:

Точка $z_0 = 0$ является устранимой, так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 z}{z^2} = 2$, а, следовательно, $\operatorname{Res}\left[\frac{1 - \cos 2z}{z^2}; 0\right] = 0$.

Пример 7. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$ относительно ее полюсов.

Решение:

Найдем нули знаменателя. Это $z_1 = 0$ - простой нуль и $z_{2,3} = \pm i$ нуль 2-го порядка.

Для функции $\frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$ $z_1 = 0$ - простой полюс, $z_{2,3} = \pm i$ - полюс второго порядка. Используя формулу для вычета простого полюса имеем $\operatorname{Res}[f(z); 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \cdot \frac{1}{z(z^2 + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = 1$.

Применив формулу для вычета порядка m получим при $m = 2$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z); i] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i)^2 \cdot \frac{1}{z(z^2 + 1)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{z(z+i)^2} \right]' = - \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+i)^2 + 2z \cdot (z+i)}{z^2(z+i)^4} = \\ &= - \lim_{z \rightarrow i} \frac{3z+i}{z^2(z+i)^3} = - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z); -i] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z+i)^2 \frac{1}{z(z^2 + 1)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow -i} \left[\frac{1}{z(z-i)^2} \right]' = - \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z-i)^3 + 2z(z-i)}{z^2(z-i)^4} = \\ &= - \lim_{z \rightarrow -i} \frac{3z-i}{z^2(z-i)^3} = + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Применение вычетов к вычислению контурных интегралов.

По основной теореме о вычетах (6.1 п.3.)

$\oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); z_k]$, где $z_1, z_2, \dots, z_n$ изолированные особые точки, лежащие в области D , ограниченной контуром L^+ .

Пример 8. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$, где L - окружность: $|z| = 3$.

Решение:

Внутри окружности $|z| = 3$ находятся две особые точки подынтегральной функции - полюсы первого порядка: $z_{1,2} = \pm 2i$. Поэтому

$$\oint_L \frac{e^z}{z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2 + 4}; 2i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2 + 4}; -2i\right] \right) = 2\pi i \left(\left. \frac{e^z}{2z} \right|_{z=2i} + \left. \frac{e^z}{2z} \right|_{z=-2i} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{2i}}{4i} - \frac{e^{-2i}}{4i} \right) = \pi i \left(\frac{e^{2i} - e^{-2i}}{4i} \right) = \pi i \sin 2$$

$$\text{Т.е. } \oint_L \frac{e^z}{z^2 + 4} dz = \pi i \sin 2.$$

5. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов.

а) Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$, вычисляются с помощью замены $z = e^{ix}$.

Тогда $dz = ie^{ix} dx = iz dx$;

$$dx = \frac{1}{iz} dz; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Указанная замена позволяет привести интеграл к контурному интегралу от рациональной функции относительно z по контуру $|z| = 1$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$.

Решение:

Произведем замену $z = e^{ix}; dx = \frac{dz}{iz}; \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}$.

$$\text{Получаем } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(5 - 4 \frac{z^2 + 1}{2z} \right)} = -\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = \frac{i}{2} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2) \left(z - \frac{1}{2} \right)} =$$

$$= \frac{2\pi i^2}{2} \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z-2) \left(z - \frac{1}{2} \right)}; \frac{1}{2} \right] = -\pi \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(z - \frac{1}{2} \right)}{(z-2) \left(z - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2\pi}{3}.$$

б) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, где $f(x)$ - непрерывная функция на $(-\infty; +\infty)$ и

$f(z)$ - аналитическая в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z > 0$), за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, лежащих в конечной части верхней полуплоскости; и удовлетворяющая для достаточно больших $|z|$ условию

$$\left| f \left(z \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}} \right) \right|, \quad M > 0, \delta > 0.$$

В этом случае $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); z_k]$.

Пример 10. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.

Решение:

В верхней полуплоскости функция $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 9)^2}$ имеет один полюс второго порядка в точке $z_0 = 3i$ и $|f(z)| \leq \frac{M}{z^4}$ для достаточно больших $|z|$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^2 + 9)^2}; 3i \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{(z - 3i)^2}{(z^2 + 9)^2} \right)' = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{(z - 3i)^2}{(z^2 + 9)^2} \right)' = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 3i} \left((z + 3i)^{-2} \right)' = -\frac{4\pi i}{(z + 3i)^3} \Big|_{z=3i} = -\frac{4\pi i}{(6i)^3} = \frac{\pi}{54} \end{aligned}$$

в) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F(x) dx$, где $\alpha > 0$, а функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$.

В этом случае $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); z_k]$.

Пример 11. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$.

Решение:

Подынтегральная функция является мнимой частью функции $\frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10}$, значения которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z) = \frac{z \cdot e^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$. Функция $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $z_0 = 1 + 3i$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$, то есть выполнены сформулированы условия в)

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}; 1 + 3i \right] = 2\pi i \frac{(1 + 3i)e^{i(1+3i)}}{2(1 + 3i - 1)} = \frac{\pi}{3} (1 + 3i)^{-3+i} = \frac{\pi}{3e^3} (1 + 3i)e^i = \\ &= \frac{\pi}{3e^3} (1 + 3i)(\cos 1 + i \sin 1) = \frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1 + i(3 \cos 1 + \sin 1)) \end{aligned}$$

Заметим, что одновременно мы вычислили интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi e^{-3}}{3} (\cos 1 - 3 \sin 1)$$

6.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти нули функций и определить их порядок.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } f(z) = (z-1)(z^2+1); & \text{б) } f(z) = \frac{z^2+4}{(z+2)^2}; & \text{в) } f(z) = e^{2z}(z-3)^2; \\ \text{г) } f(z) = z^2 \cdot \cos z; & \text{д) } f(z) = z^2(z^2+9)^2 & \text{е) } f(z) = \frac{\sin z}{z}; \\ \text{ж) } f(z) = (z^3+1)^2; & \text{з) } f(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-3z+2)^2}{z+1} & \text{и) } f(z) = \sin^3 z. \end{array}$$

2. Найти особые точки и указать их характер (для полюсов определить их порядок)

$$\begin{array}{lll} \text{а) } f(z) = \frac{1}{z^2+5z+4}; & \text{б) } f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-i)^2 \cdot z}; & \text{в) } f(z) = \frac{z-3}{z^3(z^2+4)^2}; \\ \text{г) } f(z) = \frac{1}{\cos z}; & \text{д) } f(z) = \frac{\sin z}{(z+i)^3}; & \text{е) } f(z) = z^2 \cdot \sin \frac{1}{z}; \\ \text{ж) } f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}; & \text{з) } f(z) = \frac{z+6}{(z^2+9)(z-1)^2}; & \text{и) } f(z) = \frac{1}{(z-2i)(2-z^2)}; \\ \text{к) } f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}; & \text{л) } f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2z})}. \end{array}$$

3. Найти вычеты функций в их особых точках.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } f(z) = \frac{1}{z^2-2z+10}; & \text{б) } f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}; & \text{в) } f(z) = \frac{2z-5}{z^2-2z+1}; \\ \text{г) } f(z) = \sin \frac{1}{z^2}; & \text{д) } f(z) = \frac{\sin z}{z+i}; & \text{е) } f(z) = \frac{1}{(z+2)(1-z^2)}; \\ \text{ж) } f(z) = \frac{z^2+3z-4}{z-4}; & \text{з) } f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^3}; & \text{и) } f(z) = \frac{\cos z}{(z^2-5z+6)(z-1)}; \\ \text{к) } f(z) = \frac{z^2+3z+1}{(z+3)(z^2+1)}; & \text{л) } f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2(z-i)}. \end{array}$$

4. Найти $\int_L \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$, где $L: |z|=4$;

5. Найти $\int_L \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$, где $L: |z|=4$;

6. Найти $\int_L \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$; если а) $L: |z|=1$; б) $L: |z|=3$; в) $L: |z|=5$;

7. Найти $\int_L \frac{z}{(z-i)(z-3)} dz$, где $L: |z|=2$;

8. Найти $\int_L \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} dz$, где $L: |z|=1$;

9. Найти $\int_L \sin \frac{1}{z} dz$, где $L: |z| = 2$;
10. Найти $\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, если а) $L: |z| = 0,5$; б) $L: |z| = 2$; в) $L: |z-1| = 2$;
11. Найти $\int_L \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+9)}$, где $L: |z+1| = 2$;
12. Найти $\int_L \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{(z-1)(z+3)^2} dz$, где $L: |z-1| = 5$;
13. Найти $\int_L \frac{\sin z}{z^2 \left(z - \frac{\pi}{2} \right)^3} dz$, где $L: |z+i| = \frac{3}{2}$;
14. Найти $\int_L \frac{ze^{2z} dz}{z^4 + 8z^2 - 9}$, где $L: |z+i\sqrt{2}| = 2$;
15. Найти $\int_L e^{\frac{z}{1-z}} dz$, где $L: |z| = 2$;
16. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1,25 - \cos x}$; 17. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x}$; 18. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dz}{4 + \cos x}$;
19. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}$; 20. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2 \cos x)^2}$; ... 21. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$;
22. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos^2 x}$; 23. Найти $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$; 24. Найти $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$;
25. Найти $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}$; 26. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$; 27. Найти $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$
28. Найти $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$; 29. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$; 30. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$.

Вычислить следующие интегралы

31. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}$; 32. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}$; 33. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 4)(x-1)}$;
34. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx$; 35. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx$; 36. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 9} dx$;
37. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$; 38. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx$.

6.4. Ответы к задачам

1. а) $z_1 = 1, z_{2,3} = \pm i$ - нули первого порядка; б) $z_{1,2} = \pm 2i$ - простые нули;
 в) $z = 3$ - нули 2 – го порядка;
 г) $z_1 = 0$ - нуль 2 – го порядка; $z_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)(k=0;\pm 1;\pm 2;\dots)$ - нуль первого порядка;
 д) $z_1 = 0$ - нуль 3 – го порядка; $z_{2,3} = \pm 3i$ - нуль 2 – го порядка;
 е) $z = \pi k(k = \pm 1; \pm 2)$ - нули первого порядка при $k = 0$ - устранимая особая точка;
 ж) $z_1 = -1, z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ - нули второго порядка;
 з) $z_{1,2} = \pm i$ - простые нули $z_3 = 1, z_4 = 2$ - 2 – го порядка.
2. а) $z_1 = -1; z_2 = -4$ - полюса 1 – го порядка;
 б) $z_1 = 0; z_2 = 2$ - простые полюса; $z_3 = i$ - полюс 2 – го порядка;
 в) $z_1 = 0$ - полюс 3 – го порядка; $z_{2,3} = \pm 2i$ - полюса 2 – го порядка;
 г) $z = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ - простые полюса ($k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$);
 д) $z = -i$ - полюс 3 – го порядка; е) $z = 0$ - существенно особая точка;
 ж) $z = 0$ - устранимая особая точка;
 з) $z_{1,2} = \pm 3i$ - простые полюса; $z_3 = 1$ - полюс 2 – го порядка;
 и) $z_1 = 2i$ - простой полюс; $z_{2,3} = \pm \sqrt{2}$ - простые полюса;
 к) $z = 0$ - существенно особая точка;
 л) $z = 0$ - полюс 2 – го порядка, $z_k = k\pi i; k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - простые полюсы.
3. а) $\operatorname{Res}[f(z); 1-3i] = \frac{i}{6}; \operatorname{Res}[f(z); 1+3i] = -\frac{i}{6};$
 б) $\operatorname{Res}[f(z); 0] = -\frac{1}{32}; \operatorname{Res}[f(z); \pm 2i] = \frac{1}{64};$ в) $\operatorname{Res}[f(z); 1] = 2;$
 г) $\operatorname{Res}[f(z); 0];$ д) $\operatorname{Res}[f(z); -i] = -\frac{i}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right);$
 е) $\operatorname{Res}[f(z); -2] = -\frac{1}{3}; \operatorname{Res}[f(z); -1] = \frac{1}{2}; \operatorname{Res}[f(z); 1] = \frac{1}{6};$
 ж) $\operatorname{Res}[f(z); 4] = 24;$ з) $\operatorname{Res}[f(z); 3i] = -\frac{i}{3888}; \operatorname{Res}[f(z); -3i] = \frac{i}{3888};$
 к) $\operatorname{Res}[f(z); -3] = \frac{4}{25}; \operatorname{Res}[f(z); -i] = \frac{9}{10} + \frac{3}{20}i \operatorname{Res}[f(z); i] = \frac{9}{10} - \frac{3}{20}i;$
 л) $\operatorname{Res}[f(z); 0] = 1; \operatorname{Res}(f(z); i) = -\frac{1}{e}.$

4. 0; 5. $2\pi i$; 6. а) $\frac{\pi i}{4}$; б) $-\frac{\pi i}{4}$; в) 0; 7. $\frac{2\pi}{3-i} = \frac{\pi}{5}(3+i)$; 8. $\frac{2\pi i}{9}$; 9. $2\pi i$;
10. а) 0; б) 0; в) $-\frac{\pi i}{2}$; 11. $\frac{\pi i}{25}$; 12. $-\frac{\pi}{8}$; 13. $-16i$; 14. $\frac{\pi i}{5} \ln 2$;
15. $-\frac{2\pi i}{e}$; 16. $\frac{8\pi}{3}$; 17. $\frac{2\pi}{3}$; 18. $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$; 19. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 20. $\frac{6\sqrt{5}\pi}{25}$; 21. $\frac{5}{8}\pi$;
22. $\frac{7\pi}{24\sqrt{3}}$; 23. $\pi\sqrt{2}$; 24. $\frac{\pi}{12}$; 25. $\frac{\pi}{12}$; 26. $-\frac{\pi}{27}$; 27. $\frac{2\pi}{3}$; 28. $\frac{3\pi}{8}$; 29. $\frac{4}{3}\pi$;
30. $\frac{\pi}{30}$; 31. $\frac{\pi}{4e^4}(4\cos 2 + 2\sin 2)$; 32. $\pi(2\sin 2 - 3\cos 3)$; 33. $\frac{\pi}{5}(\cos 1 - e^{-2})$;
34. $\frac{\pi}{6e^3}$; 35. $\frac{\pi}{2e^4}$; 36. $\frac{\pi}{2}e^{-3}$; 37. 0; 38. $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Библиографический список

1. И.Г. Араманович, Г.Л. Лупу; Л.Э. Эльсгольц.
Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Издательство «Наука» Москва 1968 г.
2. А.Г. Свешников, А.И. Тихонов.
Теория функции комплексного переменного. Издательство «Наука» Москва 1967 г.
3. В.А. Согомонян, Н.И. Королева, А.И. Передерей.
Элементы теории функций комплексного переменного.
Издание С.В.В.М.У. г. Севастополь 1990 г.