

П85

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Севастопольский государственный университет»

Политехнический институт

В.М. Прусов, Л.О. Наголюк, Н.К. Корнеева

**КИНЕМАТИКА
В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ**

Учебное пособие для подготовки студентов
к тестированию по теоретической механике

Севастополь
2015

УДК [531/534+621] (076)

ББК 22.21я73

П85

Р е ц е н з е н т ы:

д.т.наук, профессор В.А. Маньковский,
доцент Э.Б. Фролова.

П85 Кинематика в вопросах и ответах : учеб. пособие для подгот. студентов к тестированию по теорет. механике / М-во образования и науки РФ, ФГАОУ ВО «Севастоп. гос. ун-т» ; В. М. Прусов, Л. О. Наглюк, Н. К. Корнеева. - Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. – 76 с. : ил.

Цель пособия оказать студентам помощь в подготовке их к проверке усвоения учебного материала второго содержательного модуля по дисциплине «Теоретическая механика».

В учебном пособии приводятся базовые теоретические вопросы кинематики и в краткой форме ответы на эти вопросы. На их основе разобраны задачи и приведены решения, рекомендованы задачи для самоконтроля.

Данное учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Техническая механика и машиноведение» протокол № 6 от 29.06.2015

© ФГАОУ ВО Севастопольский
государственный
университет, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Выписка из программы по кинематике	7
Основные темы программы и базовые теоретические вопросы	7
1. Введение в кинематику	7
2. Кинематика точки	7
3. Простейшие движения твердого тела	8
4. Плоское движение твердого тела	8
Литература	9
Ответы на базовые теоретические вопросы	11
1. Введение в кинематику	11
Вопрос № 1. Предмет кинематики. Относительность механического движения материального тела. Система отсчета	11
Вопрос № 2. Пространство и время в классической механике	11
2. Кинематика точки	12
Вопрос № 3. Основные задачи кинематики точки	12
Вопрос № 4. Три способа определения положения и описания (задания) движения точки: векторный, координатный и естественный. Кинематические уравнения движения точки	12
Задачи для самоконтроля	14
Вопрос № 5. Пройденный путь l точкой за некоторый промежуток времени и формула для ее определения. Различия между дуговой координатой s точки и ее пройденным путем l	15
Задачи для самоконтроля	17
Вопрос № 6. Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания ее движения	18
Задачи для самоконтроля	20
Вопрос № 7. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения	20
Задачи для самоконтроля	23
Вопрос № 8. Естественный трехгранник и естественные оси координат. Кривизна линии	23
Вопрос № 9. Определение скорости точки при естественном способе задания ее движения	24
Вопрос № 10. Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения. Касательное и нормальное ускорения точки и что характеризуют эти ускорения	26
Вопрос № 11. Ускоренное и замедленное движения точки. Определение характера движения точки (ускоренное или замедленное) в данный момент времени, если задано уравнение движения точки по траектории $s = s(t)$	28
Задачи для самоконтроля	29

Вопрос № 12. Равномерное и равнопеременное движения точки. Линии, изображающие графики этих движений	29
Задачи для самоконтроля	33
Вопрос № 13. Определение радиуса кривизны траектории точки по ее заданным уравнениям движения в декартовых координатах	34
Задачи для самоконтроля	36
3. Простейшие движения твердого тела	36
Вопрос № 14. Основные задачи кинематики твердого тела	36
Вопрос № 15. Поступательное движение твердого тела и определение его положения относительно выбранной системы отсчета $Oxyz$. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1z_1$	36
Вопрос № 16. Кинематические уравнения поступательного движения твердого тела	37
Вопрос № 17. Траектории, скорости и ускорения точек твердого тела при его поступательном движении	37
Вопрос № 18. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси и определение его положения относительно выбранной системы отсчета $Oxyz$. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1z_1$	38
Вопрос № 19. Кинематическое уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси	38
Вопрос № 20. Угол поворота $\varphi_{\text{пов}}$ твердого тела за некоторый промежуток времени и формула для его определения. Различия между угловой координатой φ тела и его углом поворота $\varphi_{\text{пов}}$	39
Задачи для самоконтроля	41
Вопрос № 21. Выражение угла поворота $\varphi_{\text{пов}}$ через число оборотов N за данный промежуток времени	41
Вопрос № 22. Расчетные формулы для определения угловой скорости и углового ускорения тела	41
Задачи для самоконтроля	44
Вопрос № 23. Ускоренное и замедленное вращения тела. Определение характера вращения тела (ускоренное или замедленное) в данный момент времени, если задано уравнение движения тела $\varphi = \varphi(t)$	44
Задачи для самоконтроля	45
Вопрос № 24. Равномерное и равнопеременное вращения тела. Линии, изображающие графики этих движений	46
Задачи для самоконтроля	50
Вопрос № 25. Выражение угловой скорости ω тела через частоту вращения n	51
Задачи для самоконтроля	53
Вопрос № 26. Расчетная формула для определения вращательной (линейной) скорости любой точки вращающегося тела	53

Вопрос № 27. Расчетные формулы для определения вращательного ускорения w^ε , центростремительного ускорения w^ω и полного ускорения w любой точки вращающегося тела	54
Задачи для самоконтроля	57
Вопрос № 28. Векторная формула Эйлера, выражающая вращательную скорость любой точки тела	58
4. Плоское движение твердого тела	59
Вопрос № 29. Плоское движение твердого тела и определение его положения относительно выбранной системы отсчета. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, определяющей положение плоской фигуры S (сечения тела плоскостью Π_1 , параллельной основной плоскости Π), относительно неподвижной системы координат $Oxyz$	59
Вопрос № 30. Кинематическое уравнение движения плоской фигуры, или плоского движения твердого тела	60
Вопрос № 31. Разложение движения плоской фигуры на два простейших движений. Кинематические характеристики составных движений плоской фигуры	60
Вопрос № 32. Определение скорости любой точки плоской фигуры как суммы скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса	61
Задачи для самоконтроля	65
Вопрос № 33. Распределение скоростей точек плоской фигуры в момент времени, когда угловая скорость фигуры равна нулю	65
Вопрос № 34. Физический смысл утверждения о том, что проекции скоростей двух любых точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны	66
Вопрос № 35. Мгновенный центр скоростей (МЦС) плоской фигуры и условия его существования. Геометрическое определение положения МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры не параллельны друг другу. Геометрическое определение положения МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу	68
Вопрос № 36. Определение скорости любой точки плоской фигуры, если известно положение МЦС	68
Задачи для самоконтроля	71
Вопрос № 37. Различие между формулой, определяющей скорости точек плоской фигуры с помощью МЦС, и формулой, по которой находят скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	71
Вопрос № 38. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как суммы трех ускорений	72
Задачи для самоконтроля	76

ПРЕДИСЛОВИЕ

Систематический контроль над учебной работой студентов был и остается важной составной частью процесса подготовки в высшем учебном заведении будущих высоко квалифицированных специалистов.

Проверка и оценка успеваемости это средство, стимулирующее познавательную активность студентов.

Наиболее эффективным является плановый контроль. При кредитно – модульной системе организации учебного процесса основным объективным инструментом оценки качества знаний, навыков и умений является оценивание учебных достижений студентов с помощью тестов. Массовое тестирование позволяет выявить уровень усвоения каждым студентом учебного материала любого раздела и учебной дисциплины в целом, установить его рейтинг в классе.

Теоретическая механика состоит из трех содержательных модулей (СМ), во второй из которых включён материал по кинематике. Тестированию по кинематике должна предшествовать систематическая и активная самостоятельная работа студента по освоению учебного материала согласно учебной программе и календарному плану. Студент должен хорошо изучить теорию по конспекту или по одному из учебников, указанных в списке литературы, ответить на контрольные вопросы при подготовке к очередному практическому занятию, своевременно выполнить расчетно-графическую работу.

В результате приобретенные знания и умения студент сможет использовать при решении двух основных задач кинематики:

- 1) определять положение и описывать движение материального объекта относительно выбранной системы отсчета;
- 2) по заданным уравнениям движения материального объекта определять его кинематические характеристики.

Данное пособие поможет студенту проверить свою готовность к тестированию и устранить возможные пробелы в понимании некоторых вопросов кинематики.

Тестирование по статике может проводиться как с помощью компьютерной программы, так и специальных карт.

ВЫПИСКА ИЗ ПРОГРАММЫ ПО КИНЕМАТИКЕ

ОСНОВНЫЕ ТЕМЫ ПРОГРАММЫ И БАЗОВЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Введение в кинематику.
2. Кинематика точки.
3. Простейшие движения твердого тела.
4. Плоское движение твердого тела.
5. Литература

1. Введение в кинематику

1. Предмет кинематики. Относительность механического движения материального тела. Система отсчёта.
2. Пространство и время в классической механике.

2. Кинематика точки

3. Основные задачи кинематики точки.
4. Три способа определения положения и описания (задания) движения точки: векторный, координатный и естественный. Кинематические уравнения движения точки.
5. Пройденный путь l точкой за некоторый промежуток времени и формула для её определения. Различия между дуговой координатой s точки и её пройденным путем l .
6. Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания ее движения.
7. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения.
8. Естественный трехгранник и естественные оси координат. Кривизна линии.
9. Определение скорости точки при естественном способе задания ее движения.
10. Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения. Касательное и нормальное ускорения точки и что характеризуют эти ускорения.
11. Ускоренное и замедленное движения точки. Определение характера движения точки (ускоренное или замедленное) в данный момент времени, если задано уравнение движения точки по траектории $s = s(t)$.
12. Равномерное и равнопеременное движения точки. Линии, изображающие графики этих движений.

13. Определение радиуса кривизны траектории точки по ее заданным уравнениям движения в декартовых координатах.

3. Простейшие движения твердого тела

14. Основные задачи кинематики твердого тела.

15. Поступательное движение твердого тела и определение его положения относительно выбранной системы отсчёта $Oxyz$. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

16. Кинематические уравнения поступательного движения твердого тела.

17. Траектории, скорости и ускорения точек твердого тела при его поступательном движении.

18. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси и определение его положения относительно выбранной системы отсчета $Oxyz$. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

19. Кинематическое уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

20. Угол поворота $\varphi_{\text{пов}}$ твердого тела за некоторый промежуток времени и формула для его определения. Различия между угловой координатой φ тела и его углом поворота $\varphi_{\text{пов}}$.

21. Выражение угла поворота $\varphi_{\text{пов}}$ через число оборотов N за данный промежуток времени.

22. Расчетные формулы для определения угловой скорости и углового ускорения тела.

23. Ускоренное и замедленное вращения тела. Определение характера вращения тела (ускоренное или замедленное) в данный момент времени, если задано уравнение движения тела $\varphi = \varphi(t)$.

24. Равномерное и равнопеременное вращения тела. Линии, изображающие графики этих движений.

25. Выражение угловой скорости ω тела через частоту вращения n .

26. Расчетная формула для определения вращательной (линейной) скорости любой точки вращающегося тела.

27. Расчетные формулы для определения вращательного ускорения ω^{ω} , центростремительного ускорения ω^{ε} и полного ускорения ω любой точки вращающегося тела.

28. Векторная формула Эйлера, выражающая вращательную скорость любой точки тела.

4. Плоское движение твердого тела

29. Плоское движение твердого тела и определение его положения относительно выбранной системы отсчета. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1$, определяющей положение плоской фигуры S (сечения тела

плоскостью Π_1 , параллельной основной плоскости Π), относительно неподвижной системы координат $Oxuz$.

30. Кинематическое уравнение движения плоской фигуры, или плоского движения твердого тела.

31. Разложение движения плоской фигуры на два простейших движений. Кинематические характеристики составных движений плоской фигуры.

32. Определение скорости любой точки плоской фигуры как суммы скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

33. Распределение скоростей точек плоской фигуры в момент времени, когда угловая скорость фигуры равна нулю.

34. Физический смысл утверждения о том, что проекции скоростей двух любых точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны.

35. Мгновенный центр скоростей (МЦС) плоской фигуры и условия его существования. Геометрическое определение положения МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры не параллельны друг другу. Геометрическое определение положения МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу.

36. Определение скорости любой точки плоской фигуры, если известно положение МЦС.

37. Различие между формулой, определяющей скорости точек плоской фигуры с помощью МЦС, и формулой, по которой находят скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

38. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как суммы трёх ускорений.

Литература

Основная

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский. – Ч. 1. - М.: Высшая школа, 1971.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. - М.: Наука, 1986.

3. Прусов В.М. Кинематика / В.М. Прусов, В.В. Ковригина В.В. – Севастополь: СВМИ, 1996.

4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. - М.: Наука, 1986.

5. Бражниченко Н.А. Сборник задач по теоретической механике / Н.А. Бражниченко. и др. - М.: Высшая школа, 1986.

6. Прусов В.М. Практические занятия по кинематике / В.М. Прусов, Г.И. Николаев, Т.М. Сапенюк. - Севастополь: СВВМИУ, 1985.

Дополнительная

1. *Павловский М.А.* Теоретическая механика. Статика. Кинематика / М.А. Павловский и др. - К.: Вища школа, 1990.
2. *Павловський М.А.* Теоретична механіка / М.А. Павловський. - К.: Техніка, 2002.
3. *Бутенин Н.В.* Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин и др. - Т. 1. - М.: Наука, 1970.

ОТВЕТЫ НА БАЗОВЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

Вопрос 1. Предмет кинематики. Относительность механического движения материального тела. Система отсчета.

О т в е т . Кинематика изучает механическое движение материальных объектов с геометрической точки зрения без учёта их масс и действующих на них сил.

Механическое движение не абсолютно, а *относительно*: один и тот же материальный объект может двигаться по – разному по отношению к различным телам. Поэтому, чтобы задача о движении изучаемого объекта была вполне определённой, нужно обязательно указывать твёрдое тело, по отношению к которому рассматривается движение этого объекта. Такое тело для данного объекта называется *телом отсчёта*.

Для математического описания движения выбранного объекта используют систему отсчёта.

Системой отсчёта называется совокупность, состоящая из:

- 1) *тела отсчёта;*
- 2) *системы координат, жёстко связанной с телом отсчёта;*
- 3) *прибора, для измерения времени (часов);*
- 4) *прибора для измерения расстояний (масштабной линейки).*

Вопрос 2. Пространство и время в классической механике.

О т в е т . В классической механике принимают, что движение материальных объектов происходит в трёхмерном евклидовом пространстве, гомогенном, изотропном и неограниченном. Гомогенность означает, что геометрические свойства пространства одинаковы во всех его точках, а изотропность — одинаковость этих свойств во всех направлениях.

Кроме того, свойства такого пространства считаются совершенно не зависящими от материи и её движения. В этом смысле оно может быть названо **абсолютным пространством**.

Время считается непрерывной величиной, не зависящей от материи, и **универсальной**, то есть одинаково изменяющейся во всех системах отсчёта.

Евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближённо и практически вполне пригодны для движения материального тела со скоростями, значительно меньшими скорости света.

По представлению современной физики пространство и время неразрывно связаны не только с материей и её движением, но и друг с другом.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Вопрос 3. Основные задачи кинематики точки.

О т в е т. Первая основная задача состоит в том, чтобы *определить положение точки и описать с помощью уравнений, графиков как изменяется её положение с течением времени относительно выбранной системы координат.*

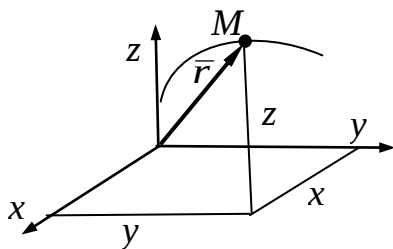
Вторая основная задача состоит в том, чтобы *по уравнениям движения точки определить её кинематические характеристики (скорость, ускорение и др.) в любой момент времени.*

Вопрос 4. Три способа определения положения и описания (задания) движения точки: векторный, координатный и естественный. Кинематические уравнения движения точки.

О т в е т. 1) Векторный способ состоит в том, что *положение точки M относительно выбранной системы координат Oxyz определяется её радиус – вектором $\vec{r}$ относительно начала координат O.*

При движении точки этот вектор будет изменяться по модулю и направлению с течением времени, то есть

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$



Данное уравнение — *кинематическое уравнение движения, или закон движения точки в векторной форме.*

Если вектор $\vec{r}$ разложить по осям координат, то уравнение движения примет вид

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты координатных осей;

$x(t), y(t), z(t)$ - выражения, показывающие изменения координат точки в зависимости от времени.

2) Координатный способ состоит в том, что *положение точки M относительно выбранной системы координат Oxyz определяется тремя декартовыми координатами x, y, z .*

При движении точки эти координаты будут изменяться с течением времени, то есть

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Данные уравнения — *кинематические уравнения движения, или закон движения точки в координатной форме (в декартовых координатах).*

Если из уравнений движения исключим время t , то получим уравнения траектории точки в декартовых координатах.

Задача 4.1. Точка движется согласно уравнениям

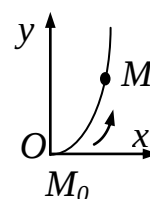
$$x = 2t, \quad y = 8t^2.$$

Определить уравнение её траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения.

Решение. Из первого уравнения находим $t = \frac{x}{2}$ и подставляем это выражение t во второе уравнение.

В результате получаем

$$y = 2x^2.$$



Это уравнение параболы. В начальный момент времени $t = t_0 = 0$ точка находилась в пункте $M_0(0,0)$. Так как в любой момент движения точки $x \geq 0$, то её траекторией является правая ветвь параболы. С течением времени x и y возрастают.

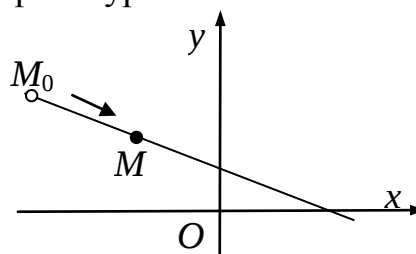
Задача 4.2. По заданным уравнениям движения точки

$$x = 3t - 5, \quad y = 4 - 2t$$

определить уравнение её траектории в координатной форме.

Решение. Чтобы из уравнений движения исключить время t , умножим обе части первого уравнения на 2, а второго уравнения – на 3. Складывая эти уравнения, получаем

$$\begin{array}{rcl} x = 3t - 5, & | & 2 \\ + & & \\ y = 4 - 2t, & | & 3 \\ \hline 2x + 3y = 2 \end{array}$$



Траекторией точки является полупрямая с началом в пункте $M_0(-5,4)$, в котором она находилась в момент времени $t = t_0 = 0$.

Задача 4.3. Определить уравнение траектории точки в декартовых координатах, если её движение задаётся уравнениями

$$x = 2\cos \pi t, \quad y = 3\sin \pi t.$$

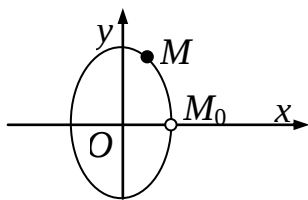
Решение. Уравнения движения представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \cos \pi t, \\ \frac{y}{3} &= \sin \pi t. \end{aligned}$$

Возведём обе части каждого уравнения в квадрат

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2^2} &= \cos^2 \pi t, \\ \frac{y^2}{3^2} &= \sin^2 \pi t. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем



$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Таким образом, траекторией точки является эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = 2$, $b = 3$. При $t = t_0 = 0$ точка находилась в пункте $M_0(2,0)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 4.3. По заданным уравнениям движения точки

$$x = 3 + 2\cos 2t, \quad y = 2 - 3\sin 2t$$

определить уравнение её траектории в координатной форме.

О т в е т: окружность $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$; $M_0(5,2)$.

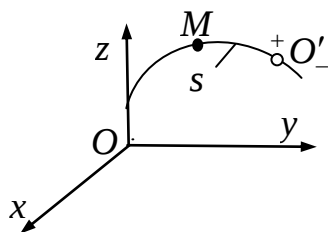
Задача 4.4. Точка движется согласно уравнениям

$$x = e^{2t} - 1, \quad y = 2e^{2t} + 1$$

Определить уравнение её траектории в координатной форме.

О т в е т: Луч $y = 2x + 3$; $M_0(0,3)$.

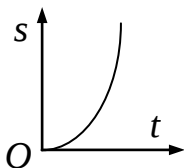
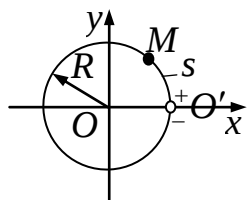
3) Естественный способ состоит в том, что *положение точки M относительно выбранной системы координат $Oxyz$ определяется её положением на заданной траектории с помощью дуговой координаты s* . На траектории выбирается начало отсчёта O' и указывается положительное и отрицательное направления отсчёта величины s .



При движении точки координата s будут изменяться с течением времени, то есть $s = s(t)$.

Данное уравнение — *кинематическое уравнение движения в естественной форме, или закон движения точки по траектории*.

Линия, изображающая зависимость между s и t называется *графиком движения точки*.



Траектория и график движения — понятия разные: траектория — линия, по которой движется точка, а график движения — линия, показывающая как движется точка по траектории.

Пусть, например, траектория выражается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а график движения — уравнением

$$s = 2t^2.$$

Как видно, траекторией является окружность с центром в начале координат и радиусом R , а графиком движения — правая ветвь параболы ($t \geq 0$).

Заметим, что уравнения движения точки в *Кинематике* должны задаваться, так как в этом разделе движение точки изучается без учёта сил. Поэтому способы описания движения точки называют также способами задания её движения.

Вопрос 5. Пройденный путь Π точкой за некоторый промежуток времени и формула для её определения. Различия между дуговой координатой s точки и её пройденным путём Π .

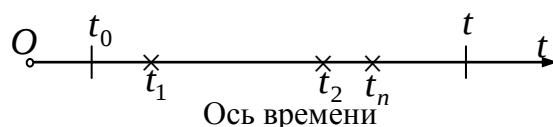
О т в е т . Путь Π , пройденный точкой за некоторый промежуток времени $t - t_0$, — *длина соответствующей дуги траектории точки, измеряемая в направлении её движения.*

Формула для определения пути имеет вид:

1) в случае движения точки *всё время в одном направлении* путь равен абсолютному значению разности дуговой координаты в моменты t и t_0

$$\Pi = |s - s_0|.$$

2) в случае, когда *в промежутке $t - t_0$ направление движения точки*



изменяется в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$, путь равен сумме путей точки за промежутки времени при её движении в одном направлении

$$\Pi = |s_1 - s_0| + |s_2 - s_1| + \dots + |s - s_n|.$$

Чтобы из двух предложенных формул для нахождения пути Π выбрать одну из них необходимо предварительно определить моменты изменения направления движения точки. Для этого по заданному уравнению движения точки следует определить скорость точки и приравнять её нулю, то есть

$$v(t) = 0.$$

Корни этого уравнения являются искомыми моментами.

Различия между величинами s и Π .

s

Π

1) Определяет положение точки на 1) Определяет длину дуги траекто-

траектории в любой момент времени t , которую проходит точка за промежуток времени $t - t_0$.

2) Величина алгебраическая.

2) Величина арифметическая.

3) При движении точки может и возрастать и, убывать.

3) При движении точки может только монотонно возрастать.

Задача 5.1. Определить момент времени, когда точка изменяет направления движения по траектории, если её движение задано уравнением

$$s = 3t^2 - 12t + 10.$$

Решение. Скорость

$$v = \dot{s} = 6t - 12$$

приравниваем нулю

$$6t - 12 = 0.$$

Откуда находим

$$t_1 = 2 \text{ с.}$$

Задача 5.2. Определить моменты времени, когда точка изменяет направления движения по траектории, если её движение задано уравнением

$$s = 2t^3 - 19t^2 + 12t.$$

Решение. Скорость

$$v = \dot{s} = 6t^2 - 18t + 12$$

приравниваем нулю, сокращая при этом на 6

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения

$$t_1 = 1 \text{ с} \quad t_2 = 2 \text{ с.}$$

Задача 5.3. Определить ближайший после начала движения момент времени, когда точка изменяет направление движения, если её движение задано уравнением

$$s = 4 \sin \frac{\pi t}{2}.$$

Решение. Приравниваем скорость точки нулю

$$v = \dot{s} = 2\pi \cos \frac{\pi t}{2} = 0.$$

Корнями этого простейшего тригонометрического уравнения являются

$$\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Ближайший момент находим из уравнения $\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2}.$

Откуда следует $t_1 = 1 \text{ с.}$

Задача 5.4. Определить дуговую координату s точки в конце второй секунды после начала движения и пройденный путь Π к этому моменту времени, если движение точки по траектории задано уравнением

$$s = t^2 - 6t + 2.$$

Решение. В момент времени $t_2 = 2\text{с}$ имеем

$$s_2 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = -6\text{ м.}$$

Затем найдём момент изменения направления движения точки

$$v = \dot{s} = 2t - 6 = 0 \Rightarrow t_3 = 3\text{с}.$$

Этот момент лежит вне промежутка $0 \leq t \leq 2$. Поэтому путь определяется одночленной формулой

$$\Pi_{0-2} = |s_2 - s_0|.$$

Вычисляем $s_0 = 2\text{ м}$. Наконец определяем

$$\Pi_{0-2} = |-6 - 2| = 8\text{ м}.$$

Отметим, $\Pi_{0-2} \neq s_2$!

Задача 5.5. Движение точки происходит согласно уравнению

$$s = t^2 - 6t + 2,$$

приведённому в задаче 5.4.

Определить дуговую координату s точки в конце четвёртой секунды после начала движения и пройденный путь Π от момента $t_2 = 2\text{с}$ до момента $t_4 = 4\text{с}$.

Решение. В момент времени $t_4 = 4\text{с}$ имеем

$$s_4 = 4^2 - 6 \cdot 4 + 2 = -6\text{ м}.$$

Так как момент $t_3 = 3\text{с}$ изменения направления движения точки лежит внутри промежутка $2 \leq t \leq 4$, то путь определяется двучленной формулой

$$\Pi_{2-4} = |s_3 - s_2| + |s_4 - s_3|.$$

Вычисляем $s_3 = -7\text{ м}$. Подставляя известные значения s_2, s_3, s_4 в формулу, определяющую пройденный путь, получаем

$$\Pi_{2-4} = |-7 + 6| + |-6 + 7| = 2\text{ м}.$$

Опять $\Pi_{2-4} \neq s_4$!

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 5.6. Определить ближайший после начала движения момент времени, когда точка изменяет направление движения, если её движение задано уравнением

$$s = 6 \cos \frac{\pi t}{2}.$$

О т в е т: $t_2 = 2 \text{ с}.$

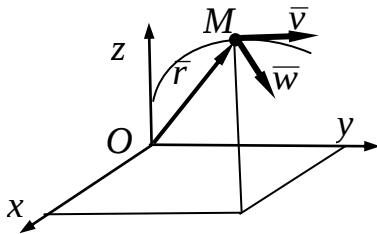
Задача 5.7. Определить дуговую координату s точки в конце второй секунды после начала движения и пройденный путь Π к этому моменту времени, если движение точки по траектории задано уравнением, приведённым в задаче 5.3

$$s = 4 \sin \frac{\pi t}{2}.$$

О т в е т: $s_2 = 0, \Pi_{0-2} = 8 \text{ м}.$

Вопрос 6. Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания её движения.

Скоростью точки называется векторная мера движения, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления радиус-вектора точки.



Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора точки по времени, то есть

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Вектор $\bar{v}$ направлен по касательной к траектории и всегда в сторону движения точки.

Ускорением точки называется векторная мера движения, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени, то есть

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Вектор $\bar{w}$ направлен всегда в сторону вогнутости траектории.

Задача 6.1. Определить вектор скорости точки, если её движение задано уравнением

$$\bar{r} = t\bar{i} + t^2\bar{j} - 2t^3\bar{k}.$$

Р е ш е н и е . Дифференцируя это уравнение, находим

$$\bar{v} = \bar{i} + 2t\bar{j} - 6t^2\bar{k}.$$

Задача 6.2. Определить вектор и модуль скорости точки в момент времени $t = 1 \text{ с}$, если её движение задано уравнением

$$\bar{r} = t\bar{i} + t^2\bar{j} - 2t\bar{k}.$$

Решение. Вектор скорости в любой момент времени t равен

$$\bar{v} = \bar{i} + 2t\bar{j} - 2\bar{k}.$$

При $t = 1$ с

$$\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Заметим, коэффициенты при ортах в этом выражении являются проекциями вектора скорости на координатные оси

$$v_x = 1 \text{ м/с}, v_y = 2 \text{ м/с}, v_z = -2 \text{ м/с}.$$

По найденным проекциям определяем модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 3 \text{ м/с}.$$

Задача 6.3. Определить вектор ускорения точки, если её скорость задана уравнением

$$\bar{v} = t\bar{i} + 2t^2\bar{j} - 3t^3\bar{k}.$$

Решение. Дифференцируя это уравнение, находим

$$\bar{w} = \bar{i} + 4t\bar{j} - 9t^2\bar{k}.$$

Задача 6.4. Определить вектор скорости точки, если её вектор ускорения задан уравнением

$$\bar{w} = \bar{i} + 4t\bar{j} - 9t^2\bar{k}.$$

Принять $\bar{v} = 6\bar{j}$ при $t = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой $\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{w}$, которую по условию задачи можно записать в виде

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{i} + 4t\bar{j} - 9t^2\bar{k}.$$

Или

$$d\bar{v} = (\bar{i} + 4t\bar{j} - 9t^2\bar{k}) dt.$$

Интегрируя, получаем

$$\bar{v} = t\bar{i} + 2t^2\bar{j} - 3t^3\bar{k} + \bar{C}.$$

В это общее решение подставляем начальные условия

$$6\bar{j} = \bar{C}.$$

Откуда находим

$$\bar{C} = 6\bar{j}.$$

Подставляя константу $\bar{C}$ в общее решение, получаем искомое частное решение

$$\bar{v} = t\bar{i} + (6 + 2t^2)\bar{j} - 3t^3\bar{k}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 6.5. Определить модуль скорости и модуль ускорения точки в момент времени $t = 1$ с, если её движение задано уравнением

$$\vec{r} = t^3 \vec{i} - 2t^2 \vec{j} + 3\vec{k}.$$

О т в е т: $v = 5 \text{ м/с}$, $w = 7,2 \text{ м/с}^2$.

Задача 6.6. Определить вектор скорости точки, если её вектор ускорения задан уравнением

$$\vec{w} = 6t^2 \vec{i} - 2t \vec{j}.$$

Принять $\vec{v} = 6\vec{j}$ при $t = 0$.

О т в е т: $\vec{v} = 2t^3 \vec{i} + (6 - t^2) \vec{j}$.

Вопрос 7. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания её движения.

Ответ. Если уравнения движения точки заданы в декартовых координатах, то *проекции вектора скорости на координатные оси выбранной системы координат равны первым производным от соответствующих координат по времени*, то есть

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Модуль вектора скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

или

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Направление скорости определяется направляющими косинусами

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

Проекция вектора ускорения на координатные оси выбранной системы координат равны первым производным от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат по времени, то есть

$$w_x = \dot{v}_x, \quad w_y = \dot{v}_y, \quad w_z = \dot{v}_z,$$

или

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

Модуль вектора ускорения равен

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2},$$

или

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Направление ускорения определяется направляющими косинусами

$$\cos(\bar{w}, \bar{i}) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\bar{w}, \bar{j}) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos(\bar{w}, \bar{k}) = \frac{w_z}{w}.$$

Задача 7.1. Определить модуль скорости точки в момент времени $t = 1$ с, если её движение задано уравнениями

$$x = t^3 + 3t, \quad y = t^3 + 5t.$$

Решение. По известным формулам находим проекции скорости точки

$$v_x = \dot{x} = 3t^2 + 3, \quad v_y = \dot{y} = 3t^2 + 5.$$

При $t = 1$ с получаем

$$v_x = 6 \text{ м/с}, \quad v_y = 8 \text{ м/с}.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10 \text{ м/с}.$$

Задача 7.2. Вычислить модуль скорости и угол между вектором скорости точки и осью Ox в момент времени $t = 1$ с, если её движение задано уравнениями

$$x = 2t^2, \quad y = t^3.$$

Решение. Проекции скорости точки:

$$v_x = 4t, \quad v_y = 3t^2.$$

В момент $t = 1$ с:

$$v_x = 4 \text{ м/с}, \quad v_y = 3 \text{ м/с}. \quad v = 5 \text{ м/с}.$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = 0,8 \Rightarrow \alpha = 36,9^\circ.$$

Задача 7.3. Определить момент времени, когда модуль скорости точки имеет наименьшее значение, если её движение задано уравнениями

$$x = 3t, \quad y = 4t - t^2.$$

Решение. По проекциям скорости точки

$$v_x = 3, \quad v_y = 4 - 2t$$

находим её модуль

$$v = \sqrt{9 + (4 - 2t)^2}.$$

Скорость будет иметь наименьшее значение, когда

$$4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ с}.$$

В момент $t = 2$ с имеем $v = 3 \text{ м/с}$.

Задача 7.4. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t = 1$ с, если её движение задано уравнениями

$$x = 8t^2, \quad y = 2t^3.$$

Решение. Определяем проекции ускорения точки

$$w_x = \ddot{x} = 16, \quad w_y = \ddot{y} = 12t^2.$$

При $t = 1$ с получаем

$$w_x = 16, \text{ м/с}^2, \quad w_y = 12 \text{ м/с}^2; \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 20 \text{ м/с}^2.$$

Задача 7.5. Определить ускорение точки в момент времени, когда она пересекает ось Ox , если её движение задано уравнениями

$$x = \frac{1}{2}t^3, \quad y = 20 - 10t.$$

Решение. По заданным уравнениям находим

$$w_x = \ddot{x} = 3t, \quad w_y = \ddot{y} = 0.$$

Затем определяем момент времени, в которой точка пересекает ось Ox :

$$y = 20 - 10t = 0. \Rightarrow t = 2 \text{ с}.$$

В этот момент: $w_x = 6 \text{ м/с}^2$, $w_y = \dot{y} = 0$ и $w = w_x = 6 \text{ м/с}^2$.

Задача 7.6. Определить угол между векторами скорости и ускорения точки в момент времени $t = 1/6$ с, если её движение задано уравнениями

$$x = 3t, \quad y = 4t - 3t^2.$$

Решение. Проекция скорости и ускорения точки соответственно равны

$$v_x = 3, \quad v_y = 4 - 6t;$$

$$w_x = 0, \quad w_y = -6.$$

При $t = 1/6$ с получаем

$$v_x = 3, \quad v_y = 3; \quad v = 3\sqrt{2} \text{ м/с};$$

$$w_x = 0, \quad w_y = -6; \quad w = |w_y| = 6 \text{ м/с}^2.$$

Запишем скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos \delta, \quad (*)$$

где δ – угол между этими векторами.

Как известно, скалярное произведение векторов можно выразить через их проекции

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y. \quad (**)$$

Принимая во внимание формулы (*) и (**), приходим к уравнению

$$vw \cos \delta = v_x w_x + v_y w_y$$

Откуда следует

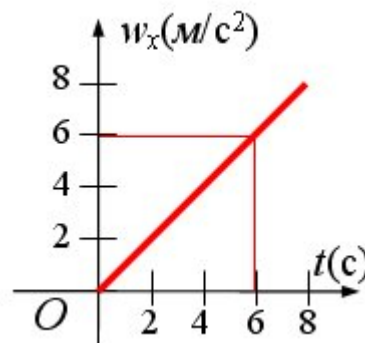
$$\cos \delta = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{vw}.$$

При $t=1c$ получаем: $\cos \delta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \delta = 135 \text{ град.}$

Задача 7.7. Точка совершает прямолинейное движение. С помощью графика ускорения определить скорость точки в момент времени $t = 6 \text{ с}$, если скорость $v=0$ при $t=0$.

Решение. Площадь нижнего прямоугольного треугольника определяет значение скорости точки в момент $t = 6 \text{ с}$

$$v = \frac{1}{2} 6 \cdot 6 = 18 \text{ м/с}.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

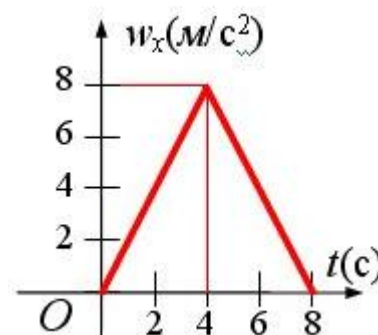
Задача 7.8. Определить модуль ускорения и угол между вектором ускорения точки и осью Ox в момент времени $t = 1 \text{ с}$, если её движение задано уравнениями

$$x = 3t, \quad y = \frac{2}{t}.$$

Ответ: 4 м/с^2 ; $4,90 \text{ град.}$

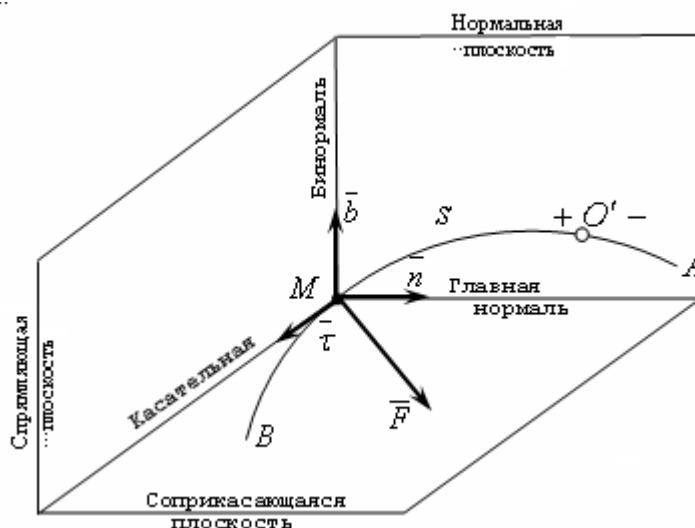
Задача 7.9. Точка совершает прямолинейное движение. С помощью графика ускорения определить скорость точки в момент времени $t = 8 \text{ с}$, если скорость $v=0$ при $t=0$.

Ответ: $v = 32 \text{ м/с}.$



Вопрос 8. Естественный трехгранник и естественные оси координат. Кривизна линии.

Ответ. Трёхгранник с вершиной в точке M линии (траектории), образованный соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостями, называется естественным (подвижным) трёхгранником. Оси, совпадающие по направлению с ортами $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, называются естественными осями координат, а их совокупность — естественной системой координат. Орт $\bar{\tau}$, направленный по касательной к траектории в пункте M всегда в положительном направлении, называется ортом касательной.



Орт $\bar{n}$, направленный по главной нормали в сторону вогнутости траектории, называется *ортом главной нормали*. Орт $\bar{b}$, направленный по бинормали так, чтобы векторы $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ образовали правую тройку векторов, называется *ортом бинормали*.

Заметим, для плоской траектории *соприкасающейся плоскостью* будет

плоскость самой траектории. В случае пространственной траектории в соприкасающейся плоскости будет находиться лишь бесконечно малый элемент траектории, содержащий точку M.

Кривизна линии (траектории) в любой точке M

$$k = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|,$$

где $\Delta \theta$ — угол смежности, соответствующий дуге MM_1

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны линии* в данной точке

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Точка C, находящаяся на главной нормали на расстоянии $MC = \rho$, называется *центром кривизны линии* в точке M.

Вопрос 9. Определение скорости точки при естественном способе задания её движения.

Ответ. Скорость точки равна первой производной от дуговой координаты по времени $v = \dot{s}$ и называется *алгебраической скоростью*.

Её знак показывает направление движения точки: если $v > 0$, то точка движется в сторону возрастания дуговой координаты s, если $v < 0$ — в сторону убывания.

Задача 9.1. Определить алгебраическую скорость точки в момент времени $t = 1/3$ с, если её движение по траектории задано уравнением

$$s = \frac{2}{\pi} \sin \pi t \text{ (м)}.$$

Решение. Дифференцируя заданное уравнение, получаем

$$v = 2 \cos \pi t.$$

В момент времени $t = 1/3$ с находим $v = 1$ м/с.

Задача 9.2. Определить момент времени, когда алгебраическая скорость точки обращается в нуль, если её движение по траектории задано уравнением

$$s = t^2 - 6t + 4 \quad (\text{м}).$$

Решение. Скорость точки в любой момент времени равна

$$v = \dot{s} = 2t - 6.$$

Полагая $v = 0$, получаем уравнение для определения искомого момента времени

$$2t - 6 = 0.$$

Откуда находим $t = 3$ с.

Задача 9.3. Алгебраическая скорость точки определяется формулой

$$v = 3t^2 + 2t - 1.$$

Определить уравнение движения точки по траектории, отсчитывая дуговую координату s от начального положения точки.

Решение. Как известно,

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Откуда следует

$$ds = (3t^2 + 2t - 1)dt.$$

К этому дифференциальному уравнению присоединяем начальные условия

$$s = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Интегрируя уравнение, получаем его общее решение

$$s = t^3 + t^2 - t + C.$$

Согласно начальным условиям постоянная интегрирования $C = 0$.

Таким образом, точка будет двигаться по закону

$$s = t^3 + t^2 - t.$$

Задача 9.4. Точка движется по траектории согласно уравнению

$$s = t^2 + 8t + 4 \quad (\text{м}).$$

Определить момент времени, когда скорость точки станет равной 20 м/с.

Решение. Найдём скорость точки в любой момент времени t

$$v = 2t + 8.$$

Полагая в этом равенстве $v = 20 \text{ м/с}$, получаем уравнение

$$2t - 12 = 0,$$

из которого определяем искомый момент: $t = 6 \text{ с}$.

Задача 9.5. Точка движется по траектории с постоянной скоростью $v = 4 \text{ м/с}$.

Определить дуговую координату s точки в момент $t = 5 \text{ с}$, если при $t = t_0 = 0$ координата $s = s_0 = 10 \text{ м}$.

Решение. При равномерном движении точки её уравнение имеет вид

$$s = s_0 + vt.$$

Подставляя в это уравнение заданные числовые величины, получаем

$$s = 10 + 4 \cdot 5 = 30 \text{ м}.$$

Вопрос 10. Определение ускорения точки при естественном способе задания её движения. Касательное и нормальное ускорения точки и что характеризуют эти ускорения.

Ответ. Если заданы траектория и уравнение её движения по траектории, то вектор ускорения точки равен сумме двух ускорений

$$\bar{w} = \bar{w}_\tau + \bar{w}_n,$$

где $\bar{w}_\tau = \frac{dv}{dt} \bar{\tau}$ – касательная (тангенциальная) составляющая ускорения,

всегда направленная по касательной к траектории;

$\bar{w}_n = \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$ – нормальная составляющая ускорения, всегда направленная

по главной нормали к центру кривизны траектории.

Вектор ускорения $\bar{w}$ лежит в соприкасающейся плоскости и всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Проекции вектора $\bar{w}$ на естественные оси координат определяются формулами

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0.$$

Проекции w_τ и w_n принято называть соответственно касательным ускорением и нормальным ускорением.

Касательное ускорение возникает при неравномерном движении точки по траектории и характеризует изменении вектора скорости по модулю.

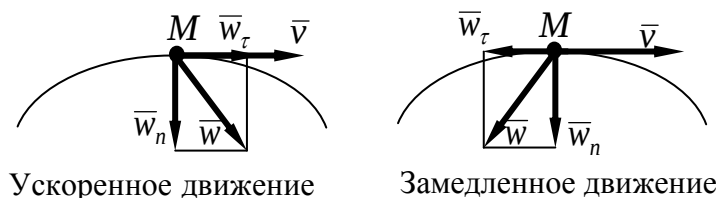
Нормальное ускорение возникает при криволинейном движении точки и характеризует изменении вектора скорости по направлению.

Так как $\bar{w}_\tau \perp \bar{w}_n$, то модуль и направление вектора ускорения $\bar{w}$ определяются формулами

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2};$$

$$\cos(\bar{w}, \bar{\tau}) = \frac{w_{\tau}}{w}, \quad \cos(\bar{w}, \bar{n}) = \frac{w_n}{w}.$$

При ускоренном движении точки векторы $\bar{w}_{\tau}$ и $\bar{v}$ направлены в одну сторону, при замедленном движении – в противоположные стороны.



Задача 10.1 Точка движется по окружности радиусом $R = 9/2$ м. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 1$ с, если её дуговая координата изменяется согласно уравнению

$$s = 3t^2.$$

Решение. Определяем алгебраическую скорость точки в любой момент времени t

$$v = 6t.$$

Затем находим касательное и нормальное ускорения

$$w_{\tau} = 6, \quad w_n = \frac{36t^2}{R}.$$

При $t = 1$ с и $R = 9/2$ м получаем

$$w_{\tau} = 6 \text{ м/с}^2, \quad w_n = \frac{36 \cdot 2}{9} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно,

$$w = \sqrt{w_{\tau}^2 + w_n^2} = 10 \text{ м/с}.$$

Задача 10.2 Точка движется по окружности радиусом $R = 16$ см так, что за любые 2 с её скорость увеличивается на 8 см/с. Определить нормальное ускорение точки в момент времени $t = 5$ с. Принять $v = 0$ при $t = 0$.

Решение. По условию задачи движение точки является равнопеременным. Касательное ускорение равно

$$w_{\tau} = \frac{8}{2} = 4 \text{ см/с}^2.$$

Скорость в любой момент определяется формулой (см. вопрос 12)

$$v = v_0 + w_{\tau}t,$$

которая в данном случае принимает вид $v = 4t$.

Наконец, вычисляем нормальное ускорение в момент $t = 5$ с

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{16 \cdot 25}{16} = 25 \text{ см/с}^2.$$

Вопрос 11. Ускоренное и замедленное движения точки. Определение характера движения точки (ускоренное или замедленное) в данный момент времени, если задано уравнение движения точки по траектории $s = s(t)$.

Ответ. Движение точки называется ускоренным, если абсолютное значение её алгебраической скорости $|v|$ возрастает с течением времени, в противном случае замедленным.

О характере движения точки в данный момент времени можно судить, сравнивая знаки алгебраической скорости v и касательного ускорения w_τ : если знаки одинаковые, то движение в этот момент ускоренное, если знаки противоположные, то движение в этот момент замедленное. Другими словами,

$$v \cdot w_\tau \begin{cases} > 0 \text{ ускоренное движение;} \\ < 0 \text{ замедленное движение.} \end{cases}$$

Задача 11.1. Выяснить характер движения точки в момент времени $t=1$ с, если её движение по траектории задаётся уравнением

$$s = t - 6t^2 + t^3 \text{ (м).}$$

Решение. Определяем алгебраическую скорость, и касательное ускорение в любой момент времени

$$v = \dot{s} = 1 - 12t + 2t^2, \quad w_\tau = \dot{v} = -12 + 4t.$$

При $t = 1$ с получаем

$$v = -9 \text{ м/с}, \quad w_\tau = -8 \text{ м/с}^2.$$

Так как в этот момент времени $v \cdot w_\tau > 0$, то движение точки будет ускоренным.

Задача 11.2. . Выяснить характер движения точки в момент времени $t = 1$ с, если её движение по траектории задаётся уравнением

$$s = 7 \sin \frac{\pi t}{4} \text{ (м).}$$

Решение. Определяем алгебраическую скорость, и касательное ускорение в любой момент времени

$$v = \frac{7\pi}{4} \cos \frac{\pi t}{4}, \quad w_\tau = -\frac{7\pi^2}{16} \sin \frac{\pi t}{4}.$$

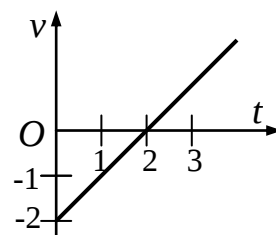
При $t = 1$ с получаем

$$v = \frac{7\sqrt{2}\pi}{8}, \quad w_\tau = -\frac{7\sqrt{2}\pi^2}{32}.$$

Откуда следует, что в момент времени $t = 1\text{с}$ точка движется замедленно.

Задача 11.3. . Используя график изменение скорости $v = v(t)$ точки, выяснить характер её движения.

Решение. В промежутке $0 \leq t \leq 2$ скорость $v < 0$, а её абсолютная величина $|v|$ уменьшается. Следовательно, точка движется замедленно. При $t > 2$ скорость $v > 0$, а её абсолютная величина $|v|$ увеличивается. Следовательно, точка движется ускоренно.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 11.4. Движение точки по траектории задано уравнением

$$s = 1,5t^2 - 4t \text{ (м)}.$$

Определить характер движения точки в моменты времени $t_1 = 1\text{с}$ и $t_2 = 2\text{с}$.

Ответ: при $t_1 = 1\text{с}$ движение замедленное; при $t_1 = 2\text{с}$ движение ускоренное.

Задача 11.5. . Выяснить характер движения точки в момент времени $t = 1\text{с}$, если её движение по траектории задаётся уравнением

$$s = 3\sin \frac{\pi t}{3} \text{ (м)}.$$

Ответ: движение ускоренное.

Вопрос 12. Равномерное и равнопеременное движения точки. Линии, изображающие графики этих движений.

Ответ. *Равномерным движением называется такое движение точки, при котором алгебраическая скорость остаётся всё время постоянной*

$$v = \text{const}.$$

Движение точки происходит согласно уравнению

$$s = s_0 + vt,$$

где s_0 - значение дуговой координаты в начальный момент времени $t = t_0 = 0$.

При равномерном движении точки по оси Ox последнее уравнение записывается в виде

$$x = x_0 + v_x t,$$

Графиком равномерного движения точки является прямая линия. *Равнопеременным движением называется такое движение точки, при котором касательное ускорение точки остаётся всё время постоянным*

$$w_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \text{const.}$$

Движение точки происходит согласно уравнениям

$$v = v_0 + w_{\tau} t,$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{w_{\tau}^2 t^2}{2}.$$

Из первой формулы следует, что скорость точки при равнопеременном движении за любые равные промежутки времени изменяется на одну и ту же величину.

При равнопеременном движении точки по оси Ox последние уравнения записываются в виде

$$v_x = v_{0x} + w_x t,$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{w_x^2 t^2}{2}.$$

Различают *равноускоренное движение* ($v \cdot w_{\tau} > 0$ или $v_x \cdot w_x > 0$) и *равнозамедленное* точки ($v \cdot w_{\tau} < 0$ или $v_x \cdot w_x < 0$).

Графиком равнопеременного движения точки является квадратичная парабола.

При решении некоторых задач на равнопеременное движение точки рекомендуется использовать следующие формулы

$$s = s_0 + \frac{v + v_0}{2} t, \quad x = x_0 + \frac{v_x + v_{0x}}{2} t,$$

или

$$s = s_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2w_{\tau}}, \quad x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2w_x}.$$

Задача 12.1. Определить среднюю скорость точки, если она преодолела:

первый участок пути Π_1 за $t_1 = 1$ с со скоростью $v_1 = 3$ м/с,

второй участок пути Π_2 за $t_2 = 4$ с со скоростью $v_2 = 2$ м/с,

третий участок пути Π_3 за $t_3 = 1$ с со скоростью $v_3 = 1$ м/с.

Решение. Средняя скорость точки определяется формулой

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Pi}{t},$$

где $\Pi = v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 = 12$ м;

$t = t_1 + t_2 + t_3 = 6$ с.

Таким образом,

$$v_{\text{cp}} = \frac{12}{6} = 2 \text{ м/с}.$$

Задача 12.2. По заданному графику скорости точки определить среднюю скорость за 10 с.

Решение. Воспользуемся формулой

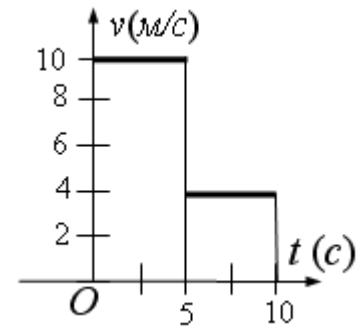
$$v_{\text{cp}} = \frac{\Pi}{t}.$$

Пройденный путь за время $t = 10$ с согласно графику равен

$$\Pi = \Pi_{0-5} + \Pi_{5-10} = 10 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 70 \text{ м.}$$

Следовательно,

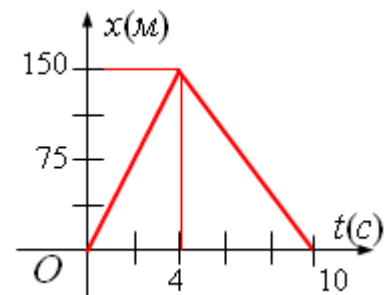
$$v_{\text{cp}} = \frac{70}{10} = 7 \text{ м/с.}$$



Задача 12.3. По заданному графику движения точки определить её скорость в первые 4 с и в следующие 6 с.

Решение. Изображённый график показывает, что в промежутке $0 \leq t \leq 4$ точка движется в положительном направлении с постоянной скоростью, равной тангенсу наклона левой прямой к оси t , то есть

$$v_1 = \frac{150}{4} = 37,5 \text{ м/с.}$$



В промежутке $4 < t \leq 6$ точка движется в отрицательном направлении с постоянной скоростью, равной тангенсу наклона правой прямой к оси t , то есть

$$v_2 = -\frac{150}{6} = -25 \text{ м/с.}$$

Задача 12.3. Определить начальную координату, начальную скорость и ускорение точки, если её прямолинейное движение задано уравнением

$$x = 2 + 3t - t^2 \text{ (м).}$$

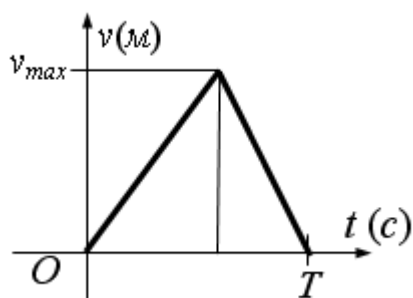
Решение. Данное уравнение описывает равнопеременное движение точки, которое в общем случае имеет вид

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{w_x^2 t}{2}.$$

Из сравнения этих уравнений следует, что искомые величины имеют следующие значения:

$$x_0 = 2 \text{ м, } v_{0x} = 3 \text{ м/с, } w_x = -2 \text{ м/с}^2.$$

Задача 12.4. С помощью графика скорости определить максимальную скорость точки, если за время $T = 10$ с она переместилась по траектории из состояния покоя на расстояние $s = 15$ м.

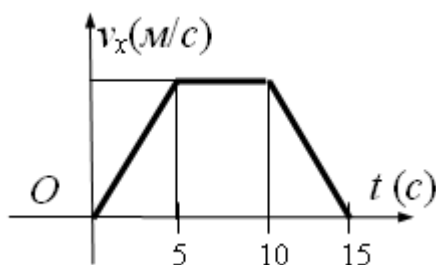


Решение. Изображённый график показывает изменение скорости при равнопеременном её движении. Пройденное расстояние s равно площади треугольника с основанием, равным T , и высотой, равной $v_{\max}$,

$$s = \frac{1}{2} T \cdot v_{\max}.$$

Откуда находим

$$v_{\max} = \frac{2s}{T} = 3 \text{ м/с}.$$



Задача 12.4. На рисунке изображён график скорости точки, совершающей прямолинейное движение. Определить её среднюю скорость за 15 с после начала движения, если ускорение точки на первом и на третьем участках пути одинаково по модулю и равно $|w_x| = 3 \text{ м/с}^2$.

Решение. На первом участке пути ($0 \leq t \leq 5$) точка движется равноускоренно с заданным ускорением $w_x = 3 \text{ м/с}^2$, величина которого определяет тангенс угла наклона прямой на этом участке пути. В момент времени $t_5 = 5 \text{ с}$ скорость v_{x5} изображается вертикальным катетом прямоугольного треугольника. Из этого треугольника находим

$$v_{x5} = 5 \cdot w_x = 15 \text{ м/с}.$$

На втором участке пути ($0 < t \leq 10$) точка движется равномерно со скоростью $v_x = v_{x5} = 15 \text{ м/с}$.

На третьем участке пути ($10 < t \leq 15$) точка движется равнозамедленно с заданным ускорением $w_x = -3 \text{ м/с}^2$.

Средняя скорость точки определяется формулой

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Pi}{t}.$$

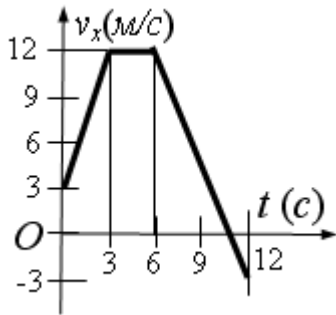
В этом соотношении время $t = 15 \text{ с}$, а путь Π необходимо вычислить. Пройденный путь Π равен площади изображённой трапеции с известными нижним и верхним основаниями и высотой, равной по величине v_{x5} . Таким образом,

$$\Pi = \frac{15 + 5}{2} \cdot 15 = 150 \text{ м}.$$

Наконец, определяем

$$v_{cp} = \frac{150}{15} = 10 \text{ м/с}.$$

Задача 12.5. Точка совершает прямолинейное движение. С помощью её графика скорости построить соответствующий график ускорения.



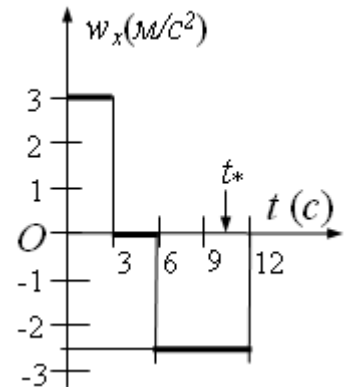
к оси t , то есть

$$w_x = \frac{6}{3} = 2 \text{ м/с}^2.$$

При $3 < t \leq 6$ точка движется равномерно, то есть $w_x = 0$.

При $6 < t \leq 12$ точка движется равнозамедленно до момента $t_* = 10,5 \text{ с}$ и равноускоренно после этого момента с ускорением, равным по величине тангенсу угла наклона правой прямой к оси t , то есть

$$w_x = -\frac{15}{6} = -2,5 \text{ м/с}^2.$$

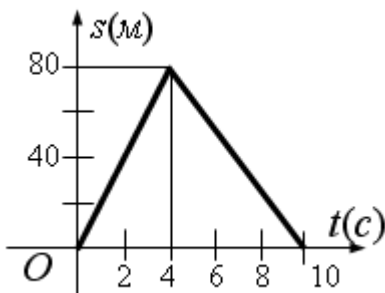


ЗАДАЧА ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 12.6. Определить среднюю скорость поезда, если он проехал участки:

первый длиной $L_1 = 4 \text{ км}$ со скоростью $v_1 = 40 \text{ км/ч}$,
 второй длиной $L_2 = 10 \text{ км}$ со скоростью $v_2 = 50 \text{ км/ч}$,
 третий длиной $L_3 = 8 \text{ км}$ со скоростью $v_3 = 80 \text{ км/ч}$.

О т в е т : 55 км/ч .



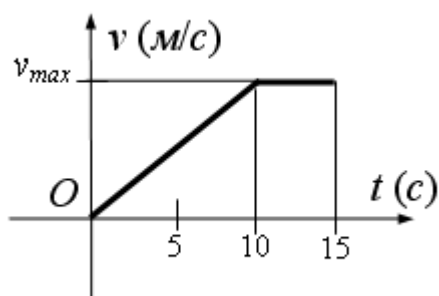
Задача 12.7. По заданному графику движения точки определить её скорость в первые 4 с и в следующие 6 с.

О т в е т : $v_{0-4} = 20 \text{ м/с}$, $v_{4-10} = -13,3 \text{ м/с}$.

Задача 12.8. Определить начальную координату, начальную скорость и касательное ускорение точки, если её криволинейное движение задано уравнением

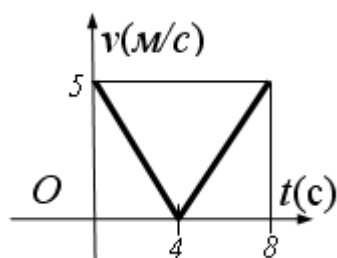
$$s = 1 - 4t + t^2 \text{ (м)}.$$

О т в е т : $s_0 = 1 \text{ м}$, $v_0 = -4 \text{ м/с}$, $w_\tau = 2 \text{ м/с}^2$



Задача 12.9. С помощью графика скорости определить максимальную скорость точки, если за время $T = 15$ с она переместилась по траектории из состояния покоя на расстояние $s = 40$ м.

О т в е т : $v_{max} = 4$ м/с.



Задача 12.10. На рисунке изображён график скорости точки при её прямолинейном движении. Определить ускорение w_x точки на каждом участке пути, а также пройденный путь Π_{0-8} и среднюю скорость v_{0-8} за 8 с после начала движения.

О т в е т : на первом участке : $w_x = 1,25$ м/с², на втором участке $w_x = -1,25$ м/с², $\Pi_{0-8} = 20$ м,

$v_{0-8} = 2,5$ м/с.

Вопрос 13. Определение радиуса кривизны траектории точки по её заданным уравнениям движения в декартовых координатах.

О т в е т . Из формулы

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}$$

следует

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}.$$

Чтобы по последней формуле определить радиус кривизны траектории точки по её заданным уравнениям в декартовых координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

необходимо произвести следующие операции:

1) найти проекции скорости точки на координатные оси и модуль скорости

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

2) найти проекции ускорения точки на координатные оси и квадрат модуля ускорения

$$w_x = \dot{v}_x, \quad w_y = \dot{v}_y, \quad w_z = \dot{v}_z, \quad w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2$$

3) найти касательное ускорение точки

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{v}.$$

4) найти нормальное ускорение точки

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}.$$

5) значения v и w_n , полученные в пунктах 1) и 4), подставить в формулу для ρ .

Задача 13.1. Точка движется согласно заданным уравнениям

$$x = 3t \quad y = 4t - 3t^2 \quad (x, y - \text{в см}, t - \text{в с}).$$

Определить уравнение траектории в декартовых координатах и радиус кривизны траектории точки в те моменты времени, когда она пересекает ось Ox .

Решение. Исключив из уравнений движения время t , получим

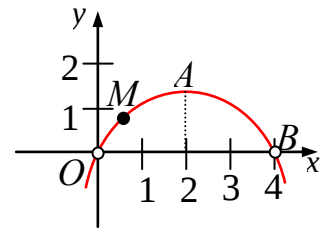
$$y = \frac{4}{3}x - 3x^2.$$

В правой части этого равенства выделим полный квадрат

$$y = -\frac{1}{3}[(x^2 - 4x + 2^2) - 2^2] = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + 4.$$

Или

$$y - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(x - 2)^2.$$



Как видно, траекторией является парабола с вершиной в точке $A(2, \frac{4}{3})$ и осью симметрии, параллельной оси Oy . В начальный момент $t_0 = 0$, точка находилась в пункте O .

В моменты, когда траектория пересекает ось Ox , координата y равна нулю

$$y = 4t - 3t^2 = 0.$$

Откуда находим $t_0 = 0$, $t_1 = 4/3$ с. В момент $t_1 = 4/3$ с точка проходит пункт B с координатами $x_1 = 4$ см, $y_1 = 0$.

Так как пункты O и B располагаются симметрично относительно оси параболы, то радиусы кривизны траектории точки в моменты t_0 и t_1 равны..

Вычислим ρ в момент $t_0 = 0$. Выполним операции, рекомендованные выше:

1) находим проекции и модуль скорости точки.

В любой момент t

$$v_x = 3, \quad v_y = 4 - 6t, \quad v = \sqrt{9 + (4 - 6t)^2}.$$

В момент $t_0 = 0$

$$v_x = 3, \quad v_y = 4, \quad v = 5 \text{ (см/с)};$$

2) находим проекции и модуль ускорения точки.

В любой момент t

$$w_x = 0, w_y = -6, w = 6 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

3) находим касательное ускорение точки.

В момент $t_0 = 0$

$$w_\tau = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v} = -\frac{24}{5} = -4,8 \text{ см/с}^2;$$

4) находим нормальное ускорение точки.

В момент $t_0 = 0$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = 3,6 \text{ см/с};$$

5) находим радиус кривизны

В момент $t_0 = 0$

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = 6,9 \text{ см.}$$

ЗАДАЧА ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 13.2. Движение точки задано уравнениями

$$x = t \quad y = t^2 \quad (x, y - \text{в м, } t - \text{в с}).$$

Определить уравнение траектории в декартовых координатах и радиус кривизны траектории точки в момент времени $t = t_0 = 0$.

О т в е т: $y = x^2$, $\rho = 0,5 \text{ м}$.

3. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Вопрос 14. Основные задачи кинематики твёрдого тела.

О т в е т. Первая основная задача состоит в том, чтобы *определить положение твёрдого тела и описать с помощью уравнений, графиков как изменяется его положение с течением времени относительно выбранной системы координат.*

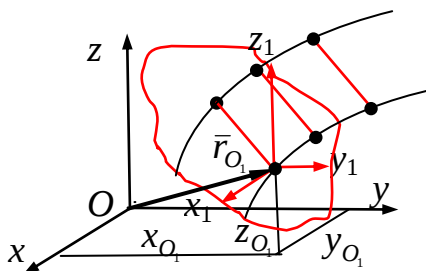
Вторая основная задача состоит в том, чтобы *по уравнениям движения твёрдого тела определить кинематические характеристики этого тела в целом, а затем по ним – и каждой его точки в отдельности в любой момент времени.*

Заметим, что уравнения движения твёрдого тела в *Кинематике* должны задаваться, так как в этом разделе движение тела изучается без учёта сил.

Вопрос 15. Поступательное движение твёрдого тела и определение его положения относительно выбранной системы отсчёта $Oxyz$. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

О т в е т. Движение твёрдого тела называется *поступательным*, если любая прямая, скреплённая с телом, остаётся при движении параллельной своему первоначальному направлению в рассматриваемой системе координат.

Чтобы определить положение тела относительно выбранной неподвижной системы координат $Oxyz$ скрепляют жёстко с этим телом систему координат $O_1x_1y_1z_1$. Её начало помещают в любую точку O_1 тела и называют *полюсом*. В данном случае целесообразно оси этой системы в начальный момент движения тела направить параллельно осям системы координат $Oxyz$: параллельность осей сохранится во всё время пока тело будет совершать поступательное движение.



Положение твёрдого тела в целом относительно основной системы координат определяется положением системы $O_1x_1y_1z_1$, которую принято называть *связанной системой координат*.

При указанном выборе связанной системы координат положение тела в пространстве будет определяться абсолютными координатами $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ полюса O_1 . Назовём эти координаты *определяющими параметрами*.

Вопрос 16. Кинематические уравнения поступательного движения твёрдого тела.

О т в е т. При движении тела определяющие параметры $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ будут изменяться с течением времени, то есть будут некоторыми функциями времени

$$x_{O_1} = f_1(t), \quad y_{O_1} = f_2(t), \quad z_{O_1} = f_3(t).$$

Эти уравнения называются *кинематическими уравнениями поступательного движения твёрдого тела*. Если они заданы, то можно определить положение тела относительно основной системы координат $Oxyz$ в любой момент времени.

Вопрос 17. Траектории, скорости и ускорения точек твёрдого тела при его поступательном движении.

О т в е т. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть как прямыми, так и кривыми линиями, но обязательно одинаковыми (совпадающими при наложении их друг на друга).

В зависимости от вида траекторий точек тела различают:

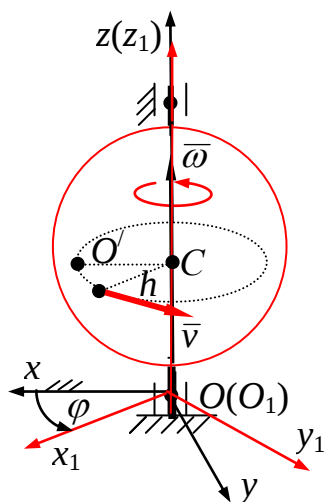
- а) *прямолинейное поступательное* движение тела;
- б) *криволинейное поступательное* движение тела.

$$\bar{v} = \bar{v}_{O_1} = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt}, \quad \bar{w} = \bar{w}_{O_1} = \frac{d^2\bar{r}_{O_1}}{dt^2}.$$
$$\begin{aligned} v_{O_1x} &= \dot{x}_{O_1}, & v_{O_1y} &= \dot{y}_{O_1}, & v_{O_1z} &= \dot{z}_{O_1}; \\ w_{O_1x} &= \ddot{x}_{O_1}, & w_{O_1y} &= \ddot{y}_{O_1}, & w_{O_1z} &= \ddot{z}_{O_1}. \end{aligned}$$

О т в е т. Движение твёрдого тела называется вращательным вокруг неподвижной оси, если две какие-нибудь его точки A и B остаются неподвижными в рассматриваемой системе координат.



The diagram shows a 3D coordinate system. A vertical axis is labeled $z(z_1)$ with an upward-pointing arrow. To the left of this axis, there is a symbol consisting of two parallel diagonal lines, which typically represents a fixed axis of rotation in mechanics. A small circle is drawn on the z -axis near the origin.



Положение вращающегося твёрдого тела в целом относительно основной (неподвижной) системы координат $Oxyz$ определяется положением *связанной системы координат* $O_1x_1y_1z_1$.

Оси связанной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ проведём так, чтобы полюс O_1 совпал с началом O , а ось O_1z_1 – с осью Oz .

Вопрос 19. Кинематическое уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

$$\varphi = \varphi(t) \, .$$

Это уравнение называется *кинематическим уравнением вращательного движения твёрдого тела*. Если он задан, то можно определить положение тела относительно основной системы координат $Oxuz$ в любой момент времени.

Вопрос 20. Угол поворота $\varphi_{\text{пов}}$ твёрдого тела за некоторый промежуток времени и формула для его определения. Различия между угловой координатой φ тела и его углом поворота $\varphi_{\text{пов}}$.

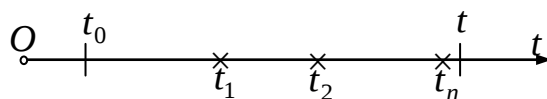
О т в е т . Угол поворота $\varphi_{\text{пов}}$ твёрдого тела за некоторый промежуток времени $t - t_0$ — *угловое перемещение тела, измеряемое в направлении его вращения*.

Ф о р м у л а для определения пути имеет вид:

1) в случае вращения тела *всё время в одном направлении* угол поворота равен абсолютному значению разности угловой координаты в моменты t и t_0

$$\varphi_{\text{пов}} = |\varphi - \varphi_0|.$$

2) в случае, когда в промежутке $t - t_0$ *направление вращения тела изменяется* в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$,



Ось времени

угол поворота тела равен сумме его углов поворота за промежутки времени при его вращении в одном направлении

$$\varphi_{\text{пов}} = |\varphi_1 - \varphi_0| + |\varphi_2 - \varphi_1| + \dots + |\varphi - \varphi_n|.$$

Чтобы из двух предложенных формул для нахождения угла поворота $\varphi_{\text{пов}}$ выбрать одну из них, **н е о б х о д и м о** **п р е д в а р и т е л ь н о** определить моменты изменения направления движения точки. Для этого по заданному уравнению движения тела следует определить угловую скорость тела, которая равна первой производной по времени от угловой координаты φ , и приравнять её нулю, то есть $\omega(t) = 0$.

Корни этого уравнения, лежащие внутри промежутка времени $t - t_0$, являются искомыми моментами.

Различия между величинами φ и $\varphi_{\text{пов}}$:

φ	$\varphi_{\text{пов}}$
1) Определяет положение тела в любой момент времени t .	1) Определяет величину углового перемещения, совершаемого телом за промежуток времени $t - t_0$.
2) Величина алгебраическая.	2) Величина арифметическая.
3) При вращении тела может и возрастать и, убывать.	3) При вращении тела может только монотонно возрастать.

Задача 20.1. Определить момент времени изменения направления вращения тела, если его угловая координата изменяется согласно уравнению

$$\varphi = 48t - t^3 + 1.$$

Решение. Определяем угловую скорость тела

$$\omega = \dot{\varphi} = 48 - 3t^2$$

приравнять её нулю

$$48 - 3t^2 = 0.$$

Откуда находим искомый момент времени $t_4 = 4\text{с}$.

Задача 20.2. Определить угловую координату тела в момент времени $t = 2\text{с}$ и угол поворота к этому моменту после начала вращения, если оно вращается согласно уравнению

$$\varphi = t^3 - 27t + 6.$$

Решение. При $t = t_2 = 2\text{с}$ угловая координата равна

$$\varphi_2 = 2^3 - 27 \cdot 2 + 6 = -40 \text{ рад}.$$

Найдём момент изменения направления вращения тела:

$$\omega = \dot{\varphi} = 3t^2 - 27 = 0 \Rightarrow t_3 = 3\text{с}.$$

Так как в промежутке $0 \leq t \leq 2\text{с}$ тело вращается в одном направлении, то его угол поворота за указанный промежуток времени определяется формулой

$$\varphi_{0-2} = |\varphi_2 - \varphi_0|.$$

Подставляя в это выражение $\varphi_0 = 6 \text{ рад}$ и $\varphi_2 = -40 \text{ рад}$, получаем

$$\varphi_{0-2} = 46 \text{ рад}.$$

Задача 20.3. Определить момент времени изменения направления вращения и угол поворота тела за 2 с между 1 и 3 секундами, если его вращение задано уравнением

$$\varphi = 32t - t^4.$$

Решение Находим момент изменения направления вращения тела:

$$\omega = \dot{\varphi} = 32 - 4t^3 = 0 \Rightarrow t_2 = 2\text{с}.$$

Так как в промежутке $1 \leq t \leq 3\text{с}$ тело изменяет направление вращения в момент $t_2 = 2\text{с}$, то его угол поворота за этот промежуток времени определяется формулой

$$\varphi_{1-3} = |\varphi_2 - \varphi_1| + |\varphi_3 - \varphi_2|.$$

Вычисляем. $\varphi_1 = 31 \text{ рад}$, $\varphi_2 = 48 \text{ рад}$, $\varphi_3 = 15 \text{ рад}$

В результате получаем $\varphi_{1-3} = 50 \text{ рад}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 20.4. Определить момент времени изменения направления вращения и угол поворота тела за первые 3 с, если его вращение задано уравнением

$$\varphi = t^3 - 3t^2 + 10.$$

О т в е т: $t_2 = 2\text{ с}$; $\varphi_{3-0} = 8\text{ рад}$.

Задача 20.5. Определить моменты времени изменения направления вращения тела, если его угловая скорость изменяется согласно закону

$$\omega = t^2 - 4t + 3.$$

О т в е т: $t_1 = 1\text{ с}$, $t_3 = 3\text{ с}$.

Вопрос 21. Выражение угла поворота $\varphi_{\text{пов}}$ через число оборотов N за данный промежуток времени.

О т в е т. На практике часто угол поворота $\varphi_{\text{пов}}$ в радианах выражают числом оборотов N за данный промежуток времени $t - t_0$. Эти величины связаны между собой следующим выражением

$$\varphi_{\text{пов}} = 2\pi N.$$

Задача 21.1. Твёрдое тело за некоторый промежуток времени поворачивается на $100\pi\text{ рад}$. Определить число оборотов N .

Р е ш е н и е. Число N определяется формулой

$$N = \frac{\varphi_{\text{пов}}}{2\pi}, \quad N = \frac{100\pi}{2\pi} = 50\text{ об}.$$

Задача 21.2. Определить момент времени изменения направления вращения и число оборотов тела за первые 3 с, если его вращение задано уравнением

$$\varphi = \pi(t^3 - 6t^2 + 9t + 20).$$

Р е ш е н и е. Легко обнаружить, что тело изменяет направление вращения в моменты $t_1 = 1\text{ с}$, $t_3 = 3\text{ с}$. Поэтому угол поворота найдём по формуле

$$\varphi_{0-3} = |\varphi_1 - \varphi_0| + |\varphi_3 - \varphi_1|$$

Определяем $\varphi_0 = 20\pi\text{ рад}$, $\varphi_1 = 24\pi\text{ рад}$, $\varphi_3 = 20\pi\text{ рад}$

Следовательно, $\varphi_{0-3} = 8\pi\text{ рад}$, $N = 4\text{ об}$.

Вопрос 22. Расчётные формулы для определения угловой скорости и углового ускорения тела.

Угловой скоростью твёрдого тела называется скалярная мера его вращательного движения, характеризующая быстроту изменения угловой координаты с течением времени.

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угловой координаты, то есть

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Её знак показывает направление вращения тела: если $\omega > 0$, то тело вращается *против часовой стрелки*, если $\omega < 0$ – то *по часовой стрелке*, глядя с положительного конца оси z .

Угловым ускорением твёрдого тела называется скалярная мера его вращательного движения, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени.

Угловое ускорение тела равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угловой координаты, то есть

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Задача 22.1. Определить угловую скорость и угловое ускорение тела в момент времени $t = 1$ с, если его вращательное движение задано уравнением

$$\varphi = t^3 - t^2.$$

Решение. Сначала определяем угловую скорость, и угловое ускорение в любой момент времени

$$\omega = \dot{\varphi} = 3t^2 - 2t, \quad \varepsilon = 6t - 2.$$

При $t = t_1 = 1$ с находим $\omega_1 = 1 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_1 = 4 \text{ рад/с}^2$.

Задача 22.2. Определить угловую скорость и угловое ускорение тела в момент времени $t = 1$ с, если его вращательное движение задано уравнением

$$\varphi = 32 \sin \frac{\pi t}{2}.$$

Решение. Находим в любой момент времени

$$\omega = 16\pi \cos \frac{\pi t}{2}, \quad \varepsilon = -8\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2}.$$

При $t = t_1 = 1$ с получаем $\omega_1 = 0$, $\varepsilon_1 = -8\pi^2 = -78,9 \text{ рад/с}^2$.

Задача 22.3. Определить наименьший момент времени, в который происходит изменение направления вращения тела, если его угловая координата изменяется согласно закону

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2}.$$

Решение. В моменты изменения направления вращения тела его угловая скорость обращается в нуль

$$\omega = \cos \frac{\pi t}{2} = 0.$$

Данное элементарное тригонометрическое уравнение определяет все эти моменты. Его корнями являются

$$\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Первый корень соответствует искомому наименьшему моменту

$$\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{\text{н}} = 1 \text{ с}.$$

Задача 22.4. Определить угловую скорость, если его угловое ускорение изменяется согласно уравнению

$$\varepsilon = 2t - 2,$$

причём $\omega = 2 \text{ рад/с}$ при $t = 0$.

Решение. По определению

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon.$$

В данном случае

$$\frac{d\omega}{dt} = 2t - 2.$$

Откуда следует

$$d\omega = (2t - 2)dt.$$

Проинтегрируем это выражение в соответствующих пределах

$$\int_2^{\omega} d\omega = \int_0^t (2t - 2)dt.$$

В результате получаем

$$\omega - 2 = t^2 - 2t, \text{ или } \omega = t^2 - 2t + 2.$$

Задача 22.5. Определить среднюю угловую скорость и среднее угловое ускорение тела за вторые 2 секунды, если его вращение задано уравнением

$$\varphi = t^3 - t^2.$$

Решение. Искомые величины определяются соответственно формулами

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{t_4 - t_2}, \quad \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_4 - \omega_2}{t_4 - t_2}.$$

Так как $t_2 = 2 \text{ с}$, $t_4 = 4 \text{ с}$, $\varphi_2 = 4 \text{ рад}$, $\varphi_4 = 48 \text{ рад}$, то

$$\omega_{\text{ср}} = 22 \text{ рад/с}.$$

Затем находим

$$\omega = 3t^2 - 2t;$$

$$\omega_2 = 8 \text{ рад/с}, \quad \omega_4 = 40 \text{ рад/с}$$

Наконец, вычисляем

$$\varepsilon_{\text{ср}} = 16 \text{ рад/с}^2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 22.5. Определить угловую скорость и угловое ускорение тела в момент времени $t = 1 \text{ с}$, если его вращательное движение задано уравнением

$$\varphi = 8 + 32t - t^4.$$

О т в е т: $\omega_1 = 28 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon_1 = -12 \text{ рад/с}^2.$

Задача 22.6. Определить наименьший момент времени, в который происходит изменение направления вращения тела, если его угловая скорость изменяется согласно закону

$$\omega = 2\pi \cos \frac{\pi t}{4}.$$

О т в е т: $t_{\text{н}} = 2 \text{ с}.$

Задача 22.7. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 2 \text{ с}$, если его угловое ускорение изменяется согласно уравнению

$$\varepsilon = 3t^2,$$

причём $\omega = 1 \text{ рад/с}$ при $t = 0$.

О т в е т: $\omega_2 = 7 \text{ рад/с}.$

Задача 22.8. Определить среднюю угловую скорость и среднее угловое ускорение тела за первые 2 секунды, если его вращение задано уравнением

$$\varphi = 9t^2 - 2t^3 + 3.$$

О т в е т: $\omega_2 = -7 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon_2 = 6 \text{ рад/с}^2.$

Вопрос 23. Ускоренное и замедленное вращения тела. Определение характера вращения тела (ускоренное или замедленное) в данный момент времени, если задано уравнение движения тела $\varphi = \varphi(t)$.

О т в е т. Движение тела называется укоренным, если абсолютное значение его угловой скорости $|\omega|$ возрастает с течением времени, в противном случае замедленным.

О характере вращения тела в данный момент времени можно судить, сравнивая знаки угловой скорости ω и углового ускорения ε : если знаки

о д и н а к о в ы е , то вращение в этот момент у с к о р е н н о е , если знаки
п р о т и в о п о л о ж н ы е , то вращение в этот момент з а м е д л е н н о е .
Другими словами,

$$\omega \cdot \varepsilon \begin{cases} > 0 \text{ ускоренное движение;} \\ < 0 \text{ замедленное движение.} \end{cases}$$

Задача 23.1. Какие из приведённых условий соответствуют ускоренному вращению тела?

А) $\omega > 0, \varepsilon < 0$. **В)** $\omega > 0, \varepsilon > 0$. **С)** $\omega < 0, \varepsilon > 0$

Д) $\omega < 0, \varepsilon < 0$. **Е)** $\omega \cdot \varepsilon > 0$.

Решение. Критерий ускоренного вращения тела выполняется в случаях **В), Д), Е)**.

Задача 23.2. Определить характер вращения тела в момент времени $t = 2 \text{ с}$, если его движение задано уравнением

$$\varphi = t^3 - t^2.$$

Решение. Находим угловую скорость, и угловое ускорение в любой момент времени

$$\omega = \dot{\varphi} = 3t^2 - 2t, \quad \varepsilon = 6t - 2.$$

При $t = t_2 = 2 \text{ с}$ имеем $\omega_2 = 8 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_2 = 10 \text{ рад/с}^2$.

Так как знаки ω_2 и ε_2 о д и н а к о в ы е , то вращение тела в данный момент времени у с к о р е н н о е .

Задача 23.3. Определить характер вращения тела в момент времени $t = 1 \text{ с}$, если его движение задано уравнением

$$\varphi = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi t}{4}.$$

Решение. Угловая скорость и угловое ускорение в любой момент времени соответственно равны

$$\omega = \cos \frac{\pi t}{4}, \quad \varepsilon = -\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi t}{4}.$$

При $t = t_1 = 1 \text{ с}$ получаем $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ рад/с}$, $\varepsilon_2 = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8} \text{ рад/с}^2$.

Поскольку знаки ω_1 и ε_1 р а з н ы е , то вращение тела в данный момент времени з а м е д л е н н о е .

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 23.4. Какие из приведённых условий соответствуют замедленному вращению тела?

А) $\omega \cdot \varepsilon < 0$. В) $\omega > 0, \varepsilon > 0$. С) $\omega < 0, \varepsilon > 0$

Д) $\omega < 0, \varepsilon < 0$. Е) $\omega > 0, \varepsilon < 0$.

О т в е т: А), С), Е).

Задача 23.5. Определить характер вращения тела в момент времени $t = 2$ с, если его движение задано уравнением

$$\varphi = t^3 - 9t^2 + 27t.$$

О т в е т: замедленное.

Задача 23.6. Определить характер вращения тела в момент времени $t = 1$ с, если его движение задано уравнением

$$\varphi = \frac{9}{\pi} \cos \frac{\pi t}{3}.$$

О т в е т: замедленное.

Вопрос 24. Равномерное и равнопеременное вращения тела. Линии, изображающие графики этих движений.

О т в е т. Равномерным вращением называется такое вращение тела, при котором угловая скорость остаётся всё время постоянной

$$\omega = \text{const}.$$

Вращение тела происходит согласно уравнению

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 - значение угловой координаты в начальный момент времени $t = t_0 = 0$.

Графиком равномерного вращения тела является *прямая линия*.

Равнопеременным вращением тела называется такое движение тела, при котором угловое ускорение тела остаётся всё время постоянным

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const}.$$

Движение точки происходит согласно уравнениям

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Из первой формулы следует, что угловая скорость тела при равнопеременном вращении за любые равные промежутки времени изменяется на одну и ту же величину.

Различают *равноускоренное вращение* ($\omega \cdot \varepsilon > 0$) и *равнозамедленное вращение тела* ($\omega \cdot \varepsilon < 0$).

Графиком равнопеременного вращения тела является *квадратичная парабола*.

При решении некоторых задач на равнопеременное вращение тела рекомендуется использовать следующие формулы

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega + \omega_0}{2} t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$$

Задача 24.1. Определить угловую координату тела в момент времени $t = 10$ с и угол поворота к этому моменту после начала вращения, если оно вращается согласно уравнению

$$\varphi = 5 - 2t.$$

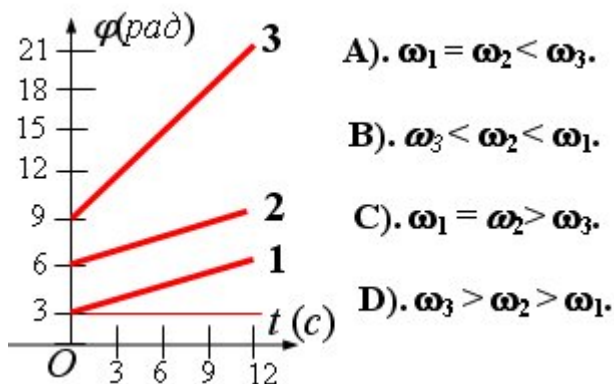
Решение. Тело вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = -2 \text{ рад/с}$ по ходу часовой стрелки. В момент $t = 10$ с угловая координата $\varphi_{10} = -15 \text{ рад}$.

Так как при равномерном вращении тело не изменяет направление вращения, то его угол поворота определяется формулой

$$\varphi_{0-10} = |\varphi_{10} - \varphi_0|.$$

Значения $\varphi_0 = 5 \text{ рад}$, $\varphi_{10} = -15 \text{ рад}$ подставляем в последнее уравнение и получаем $\varphi_{0-10} = 20 \text{ рад}$.

Задача 24.2. Тела вращаются согласно графикам, изображённым на рисунке. Определить правильное соотношение между их угловыми скоростями.

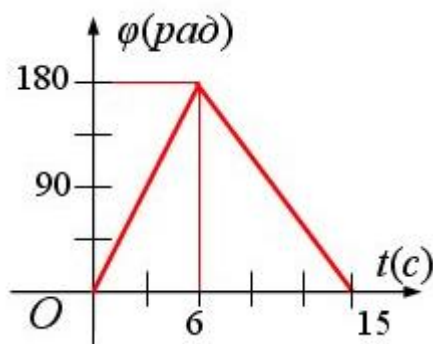


Решение. Изображённые графики показывают, что тела вращаются против хода часовой стрелки с постоянными угловыми скоростями, равными тангенсам углов наклона прямых к оси t .

Так как прямые 1 и 2 параллельны друг другу, то тангенсы углов их наклона одинаковы и, следовательно, $\omega_1 = \omega_2$. Прямая 3 более крутая, чем прямые 1 и 2. Это означает, что $\omega_3 > \omega_1 = \omega_2$. Таким образом, правильное соотношение между угловыми скоростями указано в случае А).

Задача 24.3. По заданному графику вращательного движения тела определить его угловую скорость в первые 6 с и в следующие 9 с.

Решение. Изображённый график показывает, что в промежутке $0 \leq t \leq 6$ с тело вращается против хода часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной тангенсу угла наклона левой прямой к оси t , то есть



$$\omega_1 = \frac{180}{6} = 30 \text{ рад/с}.$$

В промежутке $6 < t \leq 15$ тело вращается по ходу часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной тангенсу угла наклона правой прямой к оси t , то есть

$$\omega_2 = -\frac{180}{9} = -20 \text{ рад/с}.$$

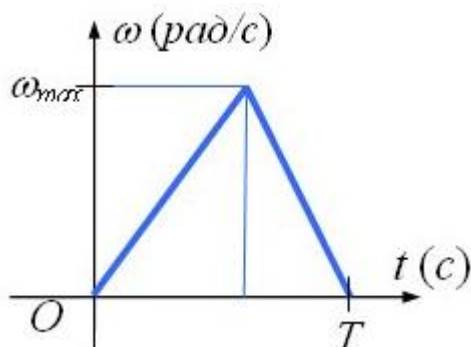
Задача 24.4. Определить начальную угловую координату, начальную угловую скорость и угловое ускорение тела, если его вращательное движение задано уравнением

$$\varphi = t^2 - 9t - 8.$$

Решение. Данное уравнение описывает равнопеременное вращение тела, которое представим в виде

$$\varphi = -8 - 9t + t^2.$$

Сравним его с уравнением, которое характеризует равнопеременное вращение тела в общем случае



$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

В результате получаем

$$\varphi_0 = -8 \text{ рад}, \quad \omega_0 = -9 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Задача 24.5. С помощью изображённого на рисунке графика определить максимальную угловую скорость ротора, если за время $T = 10$ с он повернулся из состояния покоя на угол $\varphi = 300 \text{ рад}$.

Решение. Данный график показывает изменение угловой скорости тела в зависимости от времени при его равнопеременном вращении.

Площадь треугольника, опирающегося основанием на ось времени, определяет величину угла поворота за время T :

$$\frac{1}{2} T \cdot \omega_{\max} = \varphi.$$

Откуда получаем

$$\omega_{\max} = \frac{2\varphi}{T} = 60 \text{ рад/с}.$$

Задача 24.6. Диск, начав вращаться равноускоренно, сделал 8 оборотов за первые 4 с. Определить угловое ускорение диска.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Учтём, что $\varphi_{\text{пов}} = \varphi - \varphi_0 = 2\pi N$, $\omega_0 = 0$. Тогда уравнение равнопеременного вращения ротора примет вид

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Откуда находим

$$\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2} = 6,28 \text{ рад/с}^2.$$

Задача 24.7. Угловая скорость ротора при его повороте вокруг оси на 2400 рад увеличилась в 2 раза и стала равной 40 рад/с. Определить угловое ускорение ротора, предполагая его вращение равнопеременным.

Решение. Применим вспомогательную формулу для равнопеременного вращения тела

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$$

или

$$\varphi_{\text{пов}} = \frac{3\omega_0^2}{2\varepsilon}, \text{ так как } \varphi_{\text{пов}} = \varphi - \varphi_0, \quad \omega = 2\omega_0.$$

Искомая величина

$$\varepsilon = \frac{3\omega_0^2}{2\varphi_{\text{пов}}}.$$

По условию задачи $\varphi_{\text{пов}} = 2400 \text{ рад}$, $\omega = 2\omega_0 = 40 \text{ рад/с}$ и тем самым $\omega_0 = 20 \text{ рад/с}$, $\varepsilon = 0,25 \text{ рад/с}^2$.

Задача 24.8. Определить угловую скорость ω_3 , если $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$, $r_1 = 30 \text{ см}$, $r_2 = 15 \text{ см}$.

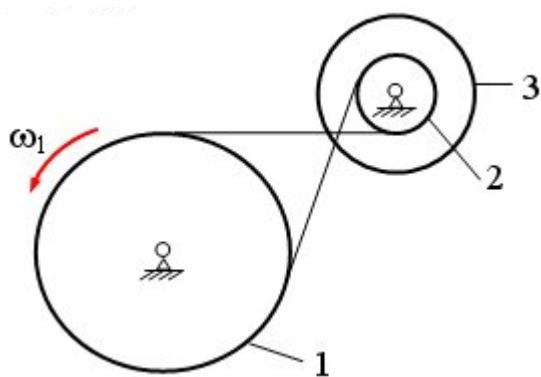
Решение. Скорости точек шкивов 1 и 2, в которых ремень касается этих тел, одинаковы:

$$v = |\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2.$$

Откуда находим

$$|\omega_2| = \frac{r_1}{r_2} |\omega_1|.$$

Так как $|\omega_3| = |\omega_2|$, то



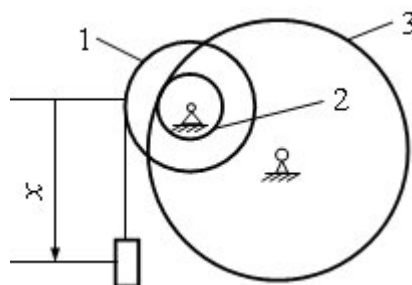
$$|\omega_3| = \frac{r_1}{r_2} |\omega_1| = 40 \text{ рад/с}.$$

Задача 24.9. Груз опускается согласно уравнению $x = 120 t$ (см). Определить угловую скорость ω_3 , если $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 30$ см.

Решение. Находим скорость груза

$$v = \dot{x} = 120 \text{ см/с}.$$

Такую же скорость получит точка барабана 1, в которой трос касается этого тела. Поэтому угловую скорость барабана 1 можно определить по формуле



$$|\omega_1| = \frac{v}{r_1}.$$

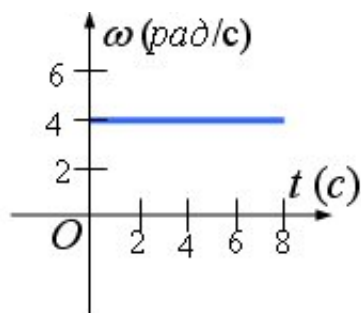
Затем воспользуемся тем, что скорости точек касания зубчатых колёс 2 и 3 одинаковы. Поэтому

$$|\omega_2| r_2 = |\omega_3| r_3.$$

Если учтём, что $|\omega_2| = |\omega_1|$, то получим

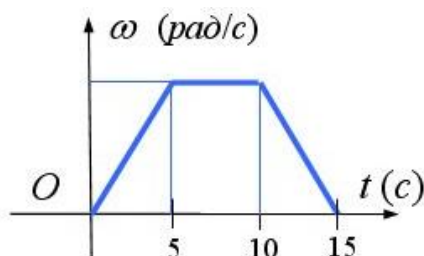
$$|\omega_3| = \frac{r_2}{r_3 r_1} v = 2 \text{ рад/с}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ



Задача 24.8. Тело вращается согласно графику, изображённому на рисунке. Определить его угловую координату в момент времени $t = 6$ с и угол поворота к этому моменту после начала вращения, если $\varphi = 2 \text{ рад}$ при $t = 0$.

Ответ: $\varphi_6 = 26 \text{ рад}$, $\varphi_{0-6} = 24 \text{ рад}$.



Задача 24.9. С помощью изображённого на рисунке графика угловой скорости ротора определить угол поворота за время $T = 15$ с, если его угловое ускорение на первом и втором участках вращения одинаково модулю и равно $|\varepsilon| = 4 \text{ рад/с}^2$.

Ответ: $\varphi_{0-15} = 200 \text{ рад}$.

Задача 24.10 Ротор сначала вращается равноускоренно, а затем равномерно, причём угол поворота в обоих случаях одинаков. Определить угол поворота за время $T = 20$ с, если угловая скорость равномерного вращения равна 30 рад/с.

О т в е т: $\varphi_{0-20} = 400 \text{ рад}$.

Задача 24.11. Определить число оборотов N ротора при разгоне за 5 с, если его угловая скорость изменяется согласно уравнению

$$\omega = 4\pi t.$$

О т в е т: $N = 25 \text{ об}$.

Вопрос 25. Выражение угловой скорости ω тела через частоту вращения n .

О т в е т. При решении задач скорость вращения твёрдого тела измеряют не только угловой скоростью ω (рад/с), но и частотой вращения n (об/мин).

Эти величины связаны между собой следующим уравнением

$$|\omega| = \frac{\pi n}{30}.$$

Задача 25.1. Ротор турбины делает 6000 об/мин. Чему равна его угловая скорость?

Р е ш е н и е. По формуле, приведённой выше, находим

$$|\omega| = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 6000}{30} = 200\pi \text{ рад/с}, \text{ или } |\omega| = 628 \text{ рад/с}.$$

Задача 25.2. Определить угловую скорость Земли.

Р е ш е н и е. Земля совершает 1 оборот за 24 часа. Следовательно, её частота вращения равна

$$n = \frac{1}{24 \cdot 60} = 0,000069 \text{ об/мин}.$$

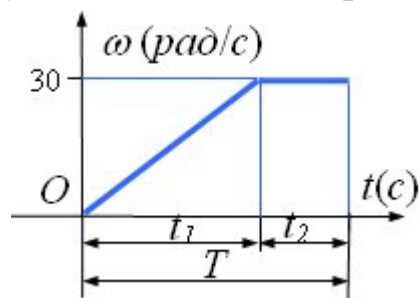
Соответственно получаем

$$|\omega| = \frac{\pi \cdot 0,000069}{30} = 0,00007 \text{ рад/с}.$$

Задача 25.3. Начальная частота вращения маховика, равная 30 об/мин, при его равнопеременном вращении уменьшилась в 2 раза за 5 с. Определить угловое ускорение маховика.

Р е ш е н и е. При равнопеременном вращении тела его угловая скорость изменяется согласно закону

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$



В рассматриваемом случае $\omega = \frac{1}{2} \omega_0$. Поэтому имеем

$$-\frac{1}{2} \omega_0 = \varepsilon t, \text{ или } -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi n_0}{30} = \varepsilon t.$$

Из последнего уравнения находим

$$\varepsilon = -\frac{\pi n_0}{60t}.$$

При $n_0 = 30 \text{ об/мин}$, $t = 5 \text{ с}$ ускорение $\varepsilon = -0,1\pi = -0,314 \text{ рад/с}^2$.

Задача 25.4. Вал, имевший частоту вращения $n_0 = 600 \text{ об/мин}$, остановился через $t = 20 \text{ с}$ вследствие трения в подшипниках. Определить угловое ускорение и число оборотов вала до остановки, считая его вращение равнопеременным.

Решение. Для определения углового ускорения применим формулу

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

В момент остановки вала $\omega = 0$. Поэтому

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t,$$

откуда находим

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} \text{ или } \varepsilon = -\frac{\pi n_0}{30t} = -3,14 \text{ рад/с}^2.$$

Затем воспользуемся выражением

$$\varphi_{\text{пов}} = \frac{\omega + \omega_0}{2} t.$$

Это уравнение с помощью соотношений

$$\varphi = 2\pi N, \quad \omega_0 = \frac{\pi n_0}{30}, \quad \omega = 0$$

преобразуем к виду

$$2\pi N = \frac{\pi n_0 t}{30 \cdot 2}.$$

Решая это уравнение, определяем

$$N = \frac{n_0 t}{120} = 100 \text{ об}.$$

Задача 25.5. Определить угловую скорость секундной стрелки.

Решение. Секундная стрелка совершает 1 оборот за 1 минуту, то есть её частота вращения $n = 1 \text{ об/мин}$. Поэтому

$$|\omega| = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi}{30} = 0,105 \text{ рад/с}.$$

Задача 25.6. Какая скорость вращения больше из указанных ниже?

А). $\omega = 30 \text{ рад/с.}$ В). $n = 50 \text{ об/мин.}$

С). $n = 120 \text{ об/мин.}$ D). $n = 2 \text{ об/с.}$?

Решение. Скорость вращения в случаях А) и С) выразим в об/мин:

А) $n = \frac{30\omega}{\pi} = 286,6 \text{ об/мин};$ С) $n = 2 \text{ об/с} = 2 \cdot 60 = 120 \text{ об/мин.}$

Как видно, наибольшую скорость тело имеет в случае А).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 25.7. Вал вращается с постоянной частотой, равной 240 об/мин. За сколько секунд вал повернётся на угол, равный 72π ?

Ответ: 9 с.

Задача 25.8. Определить угловую скорость минутной стрелки.

Ответ: 0,00175 рад/с.

Задача 25.9. Какая скорость вращения больше из указанных ниже?

А). $\omega = 20 \text{ рад/с.}$ В). $n = 5 \text{ об/с.}$

С). $n = 120 \text{ об/мин.}$ D). $n = 2 \text{ об/с.}$?

Ответ: в случае В).

Вопрос 26. Расчётная формула для определения вращательной (линейной) скорости любой точки вращающегося тела.

Ответ. Модуль вращательной (линейной) скорости любой точки M вращающегося тела равен произведению расстоянию h этой точки от оси вращения на абсолютную величину $|\omega|$ угловой скорости тела

$$v = h \cdot |\omega|.$$

Вектор $\vec{v}$ направлен перпендикулярно к радиусу CM окружности, описываемой точкой, в сторону вращения тела (см. вопрос 19).

Задача 26.1. Определить скорость точки тела на расстоянии $h = 0,2 \text{ м}$ от оси вращения в момент времени $t = 5 \text{ с}$, если тело вращается согласно закону

$$\varphi = \frac{1}{2}t^2.$$

Решение. Определяем угловую скорость тела $\omega = t$.

При $t = 5 \text{ с}$ имеем $\omega = 5 \text{ рад/с}$ и $v = \omega h = 1 \text{ м/с}$.

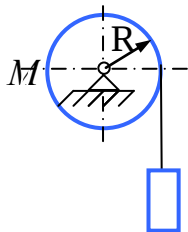
Задача 26.2. Определить скорость точки тела на расстоянии $h = 0,5 \text{ м}$ от оси вращения в момент времени $t = 5 \text{ с}$, когда угловая координата $\varphi = 18 \text{ рад}$, причём тело вращается согласно закону

$$\varphi = 2t^2.$$

Решение. Найдём момент времени, когда угловая координата достигает значения $\varphi = 18 \text{ рад}$:

$$18 = 2t^2 \Rightarrow t = 3 \text{ с}.$$

Угловая скорость тела в любой момент равна $\omega = 4t$. При $t = 3 \text{ с}$ получаем $\omega = 12 \text{ рад/с}$.



Следовательно, искомая скорость точки $v = \omega h = 6 \text{ м/с}$.

Задача 26.2. Определить скорость точки M барабана радиусом $R = 0,4 \text{ м}$ лебёдки, если вращение барабана происходит согласно уравнению

$$\varphi = 2t^3.$$

Решение Барабан вращается с угловой скоростью $\omega = 6t^2$ и тем самым скорость точки $v = \omega R = 2,4t^2 \text{ м/с}$.

Задача 26.3. Ротор вращается равномерно с частотой $n = 300 \text{ об/мин}$. Определить скорость точки ротора на расстоянии $h = 0,2 \text{ м}$ от оси вращения.

Решение Определяем угловую скорость ротора

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 10\pi \text{ рад/с}.$$

Скорость точки $v = \omega h = 2\pi = 6,28 \text{ м/с}$

Вопрос 27. Расчётные формулы для определения центростремительного ускорения w^ω , вращательного ускорения w^ε и полного ускорения w любой точки вращающегося тела.

Ответ. Вектор ускорения любой точки вращающегося тела складывается из центростремительной составляющей и вращательной составляющей

$$\bar{w} = \bar{w}^\omega + \bar{w}^\varepsilon.$$

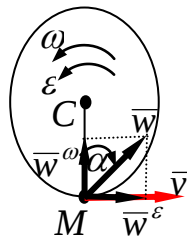
Центростремительное ускорение определяется формулой

$$w^\omega = h\omega^2.$$

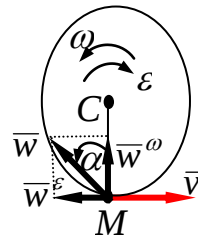
Вектор $\bar{w}^\omega$ всегда направлен по радиусу окружности, описываемой точкой, к оси вращения.

Вращательное ускорение определяется формулой

$$w^\varepsilon = h\varepsilon.$$



Ускоренное вращение



Замедленное вращение

Вектор $\bar{w}^\epsilon$ направлен перпендикулярно к радиусу CM окружности, описываемой точкой, в ту же сторону, что и вектор вращательной скорости $\bar{v}$, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторону, если вращение замедленное.

Так как $\bar{w}^\omega \perp \bar{w}^\epsilon$, то модуль полного ускорения точки можно найти по формуле

$$w = \sqrt{(w^\omega)^2 + (w^\epsilon)^2}, \text{ или } w = h\sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}.$$

Угол α отклонения вектора $\bar{w}$ от радиуса окружности, описываемой точкой, определяет направление этого вектора

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|w^\epsilon|}{w^\omega} = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}.$$

Задача 27.1. Определить центростремительное ускорение и вращательное ускорение точки тела на расстоянии $h=0,2\text{ м}$ от оси вращения в момент времени $t=4\text{ с}$, если тело вращается согласно закону

$$\varphi = \frac{1}{3}t^3.$$

Решение. Угловая скорость и угловое ускорение тела в любой момент времени соответственно равны

$$\omega = t^2, \quad \epsilon = 2t.$$

При $t=4\text{ с}$ имеем $\omega=16, \text{ рад/с}$ $\epsilon=8 \text{ рад/с}^2$ и, следовательно,

$$w^\omega = h\omega^2 = 51,2 \text{ м/с}^2, \quad w^\epsilon = h\epsilon = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

Задача 27.2. Определить центростремительное ускорение и вращательное ускорение точки тела на расстоянии $h=0,2\text{ м}$ от оси вращения в момент времени $t=3\text{ с}$, если угловая скорость тела изменяется согласно уравнению

$$\omega = \frac{1}{3}t^3.$$

Решение. Находим угловое ускорение тела в любой момент времени

$$\varepsilon = t^2.$$

При $t = 3\text{с}$ получаем $\omega = 9\text{ рад/с}$, $\varepsilon = 9\text{ рад/с}^2$. В этот момент

$$w^\omega = h\omega^2 = 16,2\text{ м/с}^2, \quad w^\varepsilon = h\varepsilon = 1,8\text{ м/с}^2.$$

Задача 27.3. Определить ускорение точки ротора на расстоянии $h = 0,08\text{ м}$ от оси вращения, если этот ротор в данный момент вращается с угловой скоростью $\omega = 2\text{ рад/с}^2$ и угловым ускорением $\varepsilon = 3\text{ рад/с}^2$.

Решение. Модуль ускорения точки вращающегося тела определяется формулой

$$w = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = 0,08\sqrt{2^4 + 3^2} = 0,4\text{ м/с}^2.$$

Задача 27.4. Определить ускорение точки диска на расстоянии $h = 0,4\text{ м}$ от оси вращения, если диск вращается согласно уравнению

$$\varphi = 5t.$$

Решение. Из заданного уравнения следует, что диск вращается равномерно:

$$\omega = 5\text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon = 0.$$

В этом случае

$$w^\omega = h\omega^2 = 10\text{ м/с}^2, \quad w^\varepsilon = h\varepsilon = 0.$$

Полное ускорение точки равно центростремительному ускорению, то есть $w = w^\omega = 10\text{ м/с}^2$.

Задача 27.5. Определить центростремительное ускорение точки диска на расстоянии $h = 0,5\text{ м}$ от оси вращения в момент времени, когда угловое ускорение диска обращается в нуль. Угловая скорость диска задаётся уравнением

$$\omega = t^2 - 4t.$$

Решение. Определяем момент равенства нулю углового ускорения диска:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2\text{ с}.$$

В этот момент угловая скорость диска $\omega = -4\text{ рад/с}$, а центростремительное ускорение его указанной точки $w^\omega = h\omega^2 = 8\text{ м/с}^2$

$$w = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = 0,08\sqrt{2^4 + 3^2} = 0,4\text{ м/с}^2.$$

Задача 27.5. Диск радиусом $R = 0,5\text{ м}$ вращается вокруг горизонтальной оси O . Определить угловую скорость этого диска, если уско-

рение его точки M равно $w = 25 \text{ м/с}^2$, а угол между вектором $\vec{w}$ и радиусом диска $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Как известно, центростремительное ускорение точки определяется формулой

$$w^\omega = h\omega^2.$$

С другой стороны, из рисунка видно, что

$$w^\omega = w \cos \alpha.$$

Из этих выражений получаем уравнение для определения угловой скорости диска

$$h\omega^2 = w \cos \alpha.$$

Откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{w \cos \alpha}{h}} = 5 \text{ рад/с}.$$

Задача 27.6. Диск радиусом $R = 0,4 \text{ м}$ вращается вокруг горизонтальной оси O . Определить угловое ускорение этого диска, если ускорение его точки M равно $w = 8 \text{ м/с}^2$, а угол между вектором $\vec{w}$ и радиусом диска $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Воспользуемся известной формулой для вращательного ускорения точки

$$w^\varepsilon = h\varepsilon.$$

Обратимся к рисунку и отметим, что

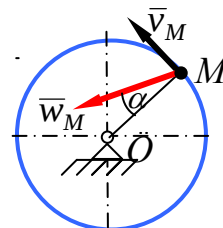
$$w^\varepsilon = w \sin \alpha.$$

Составляем уравнение

$$h\varepsilon^2 = w \sin \alpha,$$

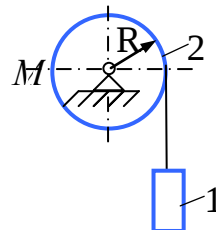
из которого находим

$$\varepsilon = \frac{w \sin \alpha}{h} = 10 \text{ рад/с}^2.$$



ЗАДАЧА ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 27.7. Груз 1 поднимается равноускоренно с помощью лебёдки из состояния покоя. Барабан 2 радиусом $R = 0,2 \text{ м}$ за время $T = 2 \text{ с}$ после начала движения совершает $N = 4 \text{ об.}$ Определить и построить в момент времени $t_4 = 4 \text{ с}$ скорость и ускорение точки обода барабана.



У к а з а н и е . Воспользоваться формулами, справедливыми для равнопеременного вращения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

О т в е т : $v_4 = 10,5 \text{ м/с}$, $w_4 = 504,82 \text{ м/с}^2$.

Вопрос 28. Векторная формула Эйлера, выражающая вращательную скорость любой точки тела.

О т в е т . Формулы

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

определяют угловую скорость и угловое ускорение как величины *скалярные (алгебраические)*

Однако ω и ε целесообразно рассматривать как *векторы*:

1) вектор $\vec{\omega}$ позволяет определить не только скорость и направление вращения тела, но и положение оси вращения;

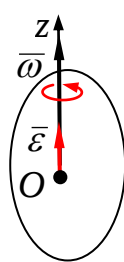
2) с помощью векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ можно получить векторные формулы, определяющие скорость и ускорение любой точки вращающегося тела по величине и направлению;

3) векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ весьма полезны при изучении сферического и общего случая движения тела.

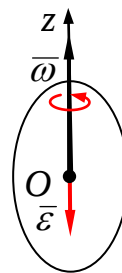
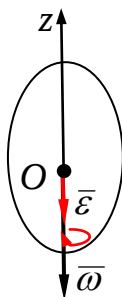
Вектор $\vec{\omega}$ принято направлять по оси вращения в правой системе координат в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. Этот вектор считается вектором скользящим, а его модуль равен абсолютной величине угловой скорости $|\vec{\omega}| = |\omega|$.

Вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен по оси вращения и определяется формулой

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



Ускоренное вращение



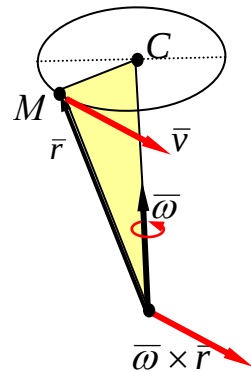
Замедленное вращение

При ускоренном вращении тела векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ направлены в одну сторону, при замедленном вращении тела – в противоположные стороны.

Векторная формула Эйлера имеет вид

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

то есть вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус – вектор этой точки.

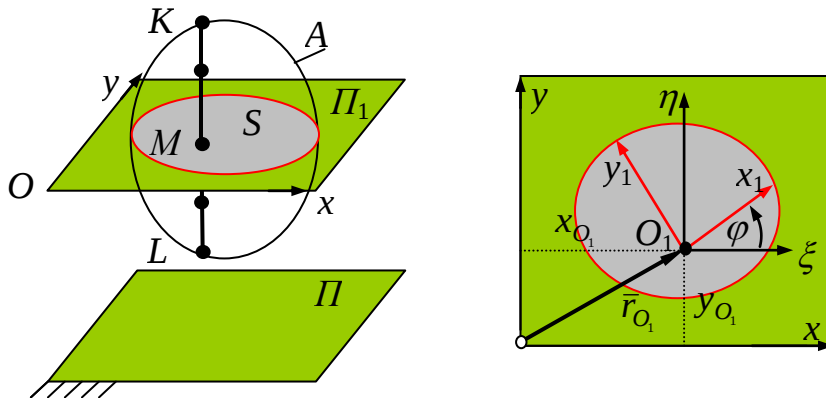


6. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Вопрос 29. Плоское движение твёрдого тела и определение его положения относительно выбранной системы отсчёта. Выбор связанной системы координат $O_1x_1y_1$, определяющей положение плоской фигуры S (сечения тела плоскостью Π_1 , параллельной основной плоскости Π), относительно неподвижной системы координат Oxy .

Ответ. Движение твёрдого тела A называется плоским, если все его точки движутся в плоскостях, параллельных данной (неподвижной) плоскости Π . Эту плоскость назовём плоскостью движения тела.

Плоское движение тела вполне определяется движением плоской фигуры S , которая представляет собой сечение тела A плоскостью Π_1 , параллельной плоскости Π . Действительно, плоская фигура будет перемещаться вместе с телом, оставаясь в плоскости Π_1 . Существенно, что при этом движение любой точки M плоской фигуры S будут повторять все точки тела A , находящиеся на отрезке KL , проходящему чрез эту точку и перпен-



дикулярному к фигуре.

Для определения положения и описания движения плоской фигуры S относительно неподвижной плоскости Π_1 связывают с последней систему координат Oxy .

Положения фигуры плоской S относительно основной системы координат Oxy определяется положением *связанной системы координат* $O_1x_1y_1$. В данном случае *определяющими параметрами* являются абсолютные координаты x_{O_1}, y_{O_1} полюса O_1 и угол φ между подвижной осью O_1x_1 и неподвижной осью Ox (или осью $O\xi$). Вспомогательная система $O_1\xi\eta\zeta$ прикреплена к фигуре только в полюсе O_1 и совершает поступательное движение

Вопрос 30. Кинематическое уравнение движения плоской фигуры, или плоского движения твёрдого тела.

О т в е т. При движении плоской фигуры *определяющие параметры* x_{O_1}, y_{O_1} и φ будут изменяться с течением времени, то есть будут некоторыми функциями времени

$$x_{O_1} = f_1(t), \quad y_{O_1} = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Эти уравнения называются *кинематическими уравнениями движения плоской фигуры S , или уравнениями плоского движения твёрдого тела A* . Если они заданы, то можно определить положение плоской фигуры относительно основной системы координат Oxy в любой момент времени.

Вопрос 31. Разложение движения плоской фигуры на два простейших движений. Кинематические характеристики составных движений плоской фигуры.

О т в е т. Из уравнений движения плоской фигуры S следует, что движение этой фигуры можно разложить на два простейших движения:

1) *поступательное движение*, определяемое произвольно выбранным полюсом O_1 ;

2) *вращательное движение* вокруг этого полюса (точнее: вокруг оси, перпендикулярной к фигуре и проходящей через полюс).

Основными кинематическими характеристиками плоской фигуры S (плоского движения тела A) являются:

1) для *поступательной части движения* – скорость и ускорение полюса

$$\bar{v}_{O_1} = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt}; \quad \bar{w}_{O_1} = \frac{d^2\bar{r}_{O_1}}{dt^2}.$$

Или в проекциях на неподвижные оси

$$v_{O_1x} = \dot{x}_{O_1}, \quad w_{O_1x} = \ddot{x}_{O_1},$$

$$v_{O_1y} = \dot{y}_{O_1}; \quad w_{O_1y} = \ddot{y}_{O_1}.$$

В этой части движения плоской фигуры все её точки повторяют движение полюса;

2) для *вращательной части движения* – угловая скорость и угловое ускорение фигуры

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Направления угловой скорости и углового ускорения принято указывать круговыми стрелками.

Отметим, линейные характеристики $\bar{v}_{O_1}$ и $\bar{w}_{O_1}$ зависят от выбора полюса, а угловые характеристики ω и ε – не зависят.

Вопрос 32. Определение скорости любой точки плоской фигуры как суммы скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

О т в е т . В соответствии с разложением движения плоской фигуры на два простейших движения *скорость её любой точки M складывается из скорости полюса O_1 , возникающей от поступательной части движения фигуры, и вращательной скорости этой точки вокруг полюса, возникающей от вращательной части движения фигуры, то есть*

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{O_1} + \bar{v}_{MO_1}.$$

Вектор вращательной скорости определяется **формулой Эйлера**

$$\bar{v}_{MO_1} = \bar{\omega} \times \overline{O_1M}, \quad \bar{v}_{MO_1} \perp \overline{O_1M},$$

а её модуль равен

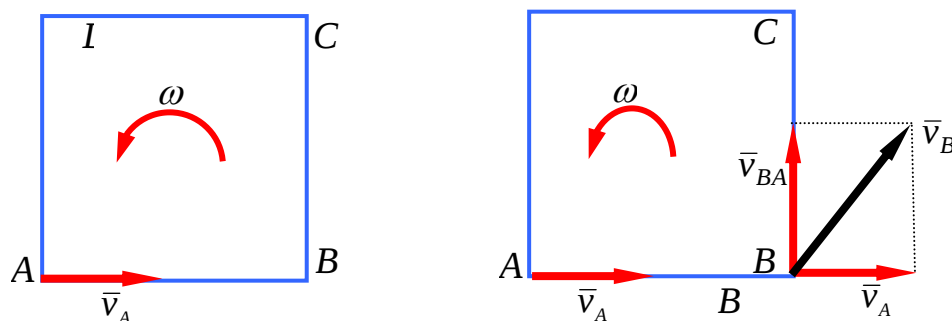
$$v_{MO_1} = |\omega| \cdot O_1M.$$

Скорость $\bar{v}_M$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{v}_{O_1}$ и $\bar{v}_{MO_1}$.

Задача 32.1. Определить скорость точки B квадрата со стороной a , если в данный момент времени $v_A = 3 \text{ м/с}$, $\omega = 4 \text{ рад/с}$, $a = 1 \text{ м}$.

Р е ш е н и е . За полюс выберём точку A , скорость которой известна. Тогда

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \quad v_A = 3 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_{BA} \perp AB, \quad v_{BA} = |\omega| AB = 4 \text{ м/с}.$$



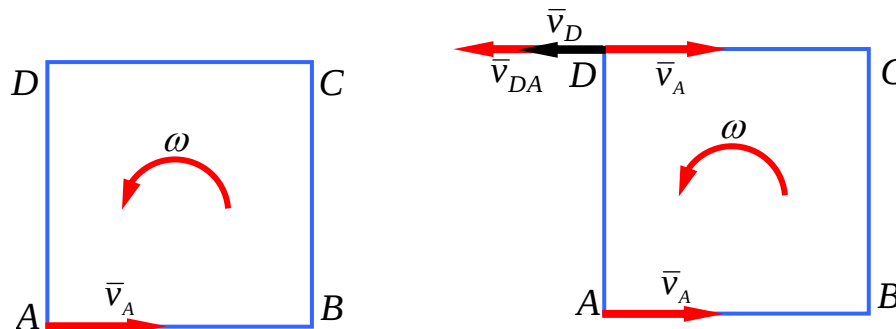
Вектор $\bar{v}_B$ изображается диагональю прямоугольника, построенного на векторах $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_{BA}$. Его модуль равен

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2} = 5 \text{ м/с}.$$

Задача 32.2. Определить скорость точки D квадрата со стороной a , если в данный момент времени $v_A = 6 \text{ м/с}$, $\omega = 4 \text{ рад/с}$, $a = 2 \text{ м}$.

Решение. За полюс выберём точку A, скорость которой известна. Тогда

$$\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{DA}; \quad v_A = 6 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_{DA} \perp AD, \quad v_{DA} = |\omega| AD = 8 \text{ м/с}.$$



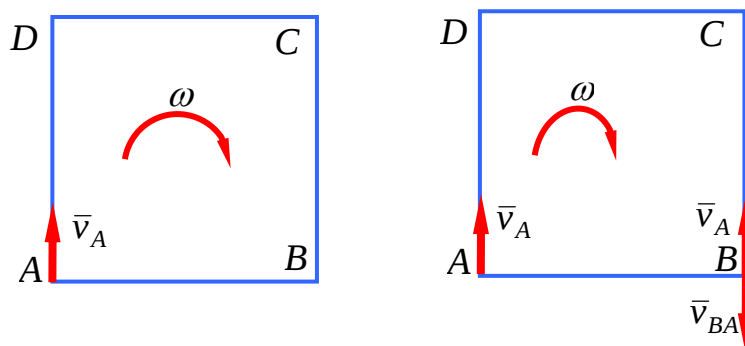
Скорости $\bar{v}_{DA}$ и $\bar{v}_A$ направлены по одной прямой и противоположны по направлению. Поэтому модуль вектора $\bar{v}_D$ равен

$$v_D = v_{DA} - v_A = 2 \text{ м/с}.$$

Задача 32.3. Определить скорость точки B квадрата со стороной a , если в данный момент времени $v_A = 10 \text{ м/с}$, $\omega = 5 \text{ рад/с}$, $a = 2 \text{ м}$.

Решение. За полюс выберём точку A, скорость которой известна. Тогда

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \quad v_A = 10 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_{BA} \perp AB, \quad v_{BA} = |\omega| AB = 10 \text{ м/с}.$$



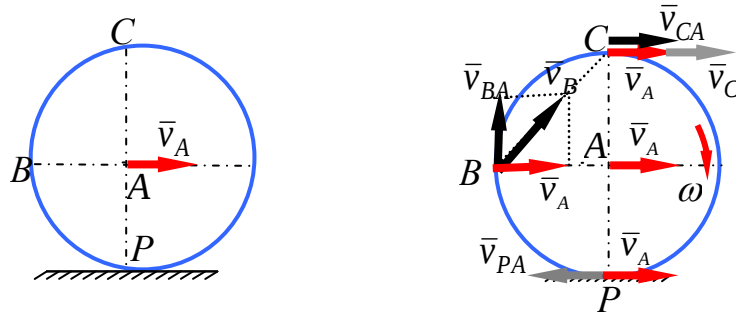
Скорости $\bar{v}_{BA}$ и $\bar{v}_A$ равны по модулю, направлены по одной прямой и противоположны по направлению. Поэтому модуль вектора $\bar{v}_B$ равен

$$v_B = v_{BA} - v_A = 0.$$

Задача 32.4. Колесо радиусом $R = 0,5 \text{ м}$ катится без скольжения по неподвижному прямолинейному рельсу. Определить угловую скорость колеса и скорости его точек B, C , если скорость $v_A = 2 \text{ м/с}$.

Решение. Выбираем в качестве полюса центр A колеса. Тогда скорости точек B, C можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \quad \bar{v}_{BA} \perp AB; \quad v_{BA} = |\omega| AB; \\ \bar{v}_C &= \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}; \quad \bar{v}_{CA} \perp AC; \quad v_{CA} = |\omega| AC,\end{aligned}$$



где $|\omega|$ – абсолютное значение пока неизвестной угловой скорости колеса.

Вращательные скорости всех точек обода колеса вокруг полюса A равны по модулю, так как они находятся на одинаковом от полюса расстоянии, равном R .

При качении без скольжения скорость точки P касания колеса опоры равна нулю:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0 \quad \bar{v}_{PA} \perp AP; \quad v_{PA} = |\omega| AP.$$

Откуда следует, что вращательная скорость точки P вокруг полюса A противоположна скорости полюса и равна ей по модулю:

$$\bar{v}_{PA} = -\bar{v}_A, \quad v_{PA} = v_A.$$

Скорость $\bar{v}_{PA}$ показывает, что колесо вращается по ходу часовой стрелки.

Теперь можно определить угловую скорость колеса

$$|\omega| = \frac{v_{PA}}{AP}, \quad \text{или} \quad |\omega| = \frac{v_A}{R} = 4 \text{ рад/с}.$$

Наконец, в точках B и C прикладываем скорость $\bar{v}_A$ полюса и их вращательные скорости $\bar{v}_{BA}$ и $\bar{v}_{CA}$, перпендикулярные к соответствующим радиусам колеса и по модулю равные величине v_A . В результате находим

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2} = v_A \sqrt{2} = 2,8 \text{ м/с};$$

$$v_C = v_A + v_{CA} = 2v_A = 2 \text{ м/с}.$$

Очевидно, вектор $\bar{v}_B$ направлен по хорде BC .

Задача 32.5. В кривошипно-ползунном механизме длина кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = \ell$; кривошип вращается с угловой

скоростью ω_0 . Определить угловую скорость шатуна и скорость точки B в положении механизма, когда $OA \perp AB$.

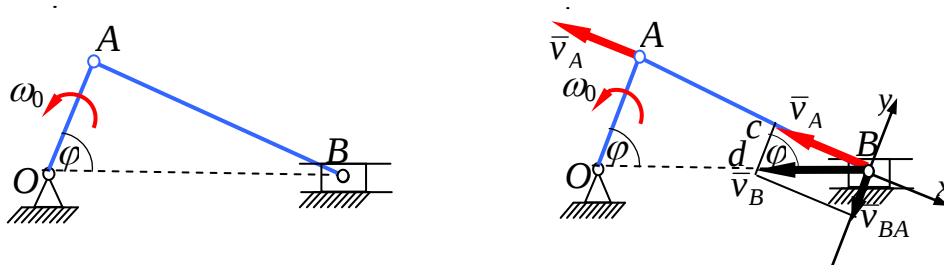
Решение. Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA и по модулю равна $v_A = \omega_0 r$.

Скорость точки B определяется формулой

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \quad \bar{v}_{BA} \perp AB; \quad v_{BA} = |\omega_{AB}| AB; \quad (*)$$

где $|\omega_{AB}|$ – абсолютное значение пока неизвестной угловой скорости шатуна.

Вектор $\bar{v}_B$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах скорости полюса A и вращательной скорости точки B вокруг этого полюса. Скорость $\bar{v}_B$ направлена по OB , поскольку точка B как центр



ползуна движется вдоль оси его направляющей

Чтобы построить этот параллелограмм, проводим через точку B прямую, перпендикулярную AB (по ней направлена скорость $\bar{v}_{BA}$), а затем через конец вектора $\bar{v}_A$ прямую, параллельную первой прямой до встречи с осью направляющей ползуна. Наконец, через точку встречи проводим прямую, параллельную вектору $\bar{v}_A$

Для определения модулей векторов $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_{BA}$ решаем прямоугольный треугольник Bcd :

$$v_B = \frac{v_A}{\sin \varphi}, \quad v_{BA} = v_A \operatorname{ctg} \varphi. \quad (**)$$

Из $\triangle OAB$ находим

$$\sin \varphi = \frac{\ell}{\sqrt{r^2 + \ell^2}}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{r}{\ell}.$$

Таким образом,

$$v_B = \frac{r\sqrt{r^2 + \ell^2}}{\ell} \omega_0, \quad v_{BA} = \frac{r^2}{\ell} \omega_0.$$

Векторное уравнение (*) можно решить методом проекций. Проецируя его на оси выбранной системы координат, получаем

$$-v_B \sin \varphi = -v_A,$$

$$-v_B \cos \varphi = -v_{BA},$$

откуда снова находим выражения (* *).

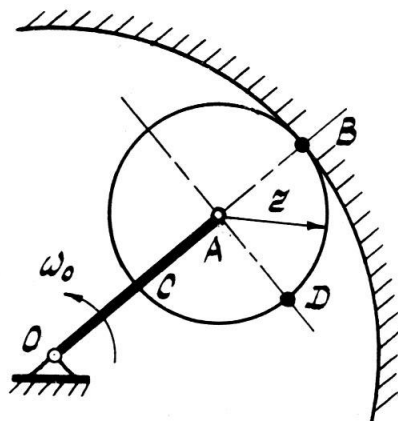
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 32.6. В изображённом механизме кривошип OA вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 5 \text{ рад/с}$ и приводит во вращение шестерню радиусом r , которая находится во внутреннем зацеплении с неподвижной шестерней. Определить скорости точек A , B , C и D , а также угловую скорость $\omega_{\text{ш}}$ бегущей шестерни.

Принять $OA = 0,4 \text{ м}$, $r = 0,2 \text{ м}$.

О т в е т: $v_A = 2 \text{ м/с}$, $v_B = 0$, $v_C = 4 \text{ м/с}$,

$v_D = 2,82 \text{ м/с}$, $\omega_{\text{ш}} = 10 \text{ рад/с}$.



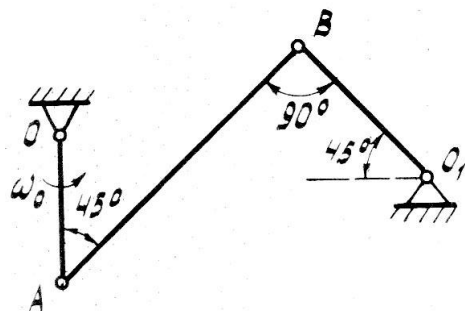
Задача 32.7. В изображённом механизме кривошип OA вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 4 \text{ рад/с}$. Определить скорости точек A , B , угловую скорость ω_{AB} шатуна AB и угловую скорость ω_{O_1B} кривошипа O_1B .

Принять $OA = O_1B = 0,5 \text{ м}$, $AB = 1 \text{ м}$.

О т в е т:

$v_A = 2 \text{ м/с}$, $v_B = 2,82 \text{ м/с}$, $\omega_{AB} = 2,82 \text{ рад/с}$,

$\omega_{O_1B} = 5,64 \text{ рад/с}$,



Вопрос 33. Распределение скоростей точек плоской фигуры в момент времени, когда угловая скорость фигуры равна нулю.

О т в е т. Если в данный момент времени угловая скорость плоской фигуры равна нулю ($\bar{\omega} = 0$), то вращательная скорость $\bar{v}_{MO_1}$ её любой точки M равна нулю и, следовательно,

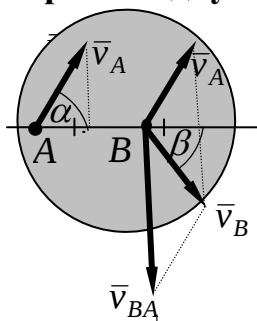
$$\bar{v}_M = \bar{v}_{O_1},$$

то есть скорость любой точки M равна скорости полюса O_1 . Другими словами, скорости точек плоской фигуры в указанный момент времени распределяются так, как при поступательном дви-

жении. Поэтому состояние фигуры в данное мгновение называется *мгновенно поступательным*.

Если, наоборот, в данный момент времени скорости двух каких – либо точек плоской фигуры равны друг другу, то в этот момент угловая скорость фигуры равна нулю и скорости всех остальных точек фигуры одинаковы.

Вопрос 34. Физический смысл утверждения о том, что проекции скоростей двух любых точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны.



Ответ Скорости точек абсолютно твёрдого тела не могут быть независимыми друг от друга, а подчиняются условию неизменяемости расстояния между ними: точки не могут ни удаляться друг от друга, ни приближаться друг к другу.

Для плоской фигуры S , которая является сечением абсолютно твёрдого тела, названное условие выражается в том, что *проекции скоростей двух любых её точек на прямую, соединяющую эти точки, равны*, то есть

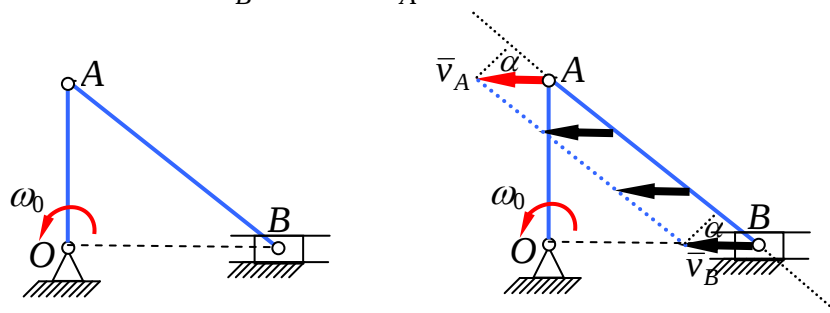
$$\text{пр}_{AB} \bar{v}_B = \text{пр}_{AB} \bar{v}_A, \quad \text{или} \quad v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

Задача 34.1. Кривошип OA кривошипно-ползунного механизма занимает верхнее вертикальное положение. Считая известными угловую скорость ω_0 кривошипа и его длину r , определить скорость ползуна B и угловую скорость шатуна AB .

Решение. Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA и по модулю равна $v_A = \omega_0 r$.

Векторы $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$ параллельны друг другу. Запишем условие равенства их проекций на прямую AB

$$v_B \cos \alpha = v_A \cos \alpha$$



После сокращения на $\cos \alpha \neq 0$ (α – острый угол) получаем

$$v_B = v_A$$

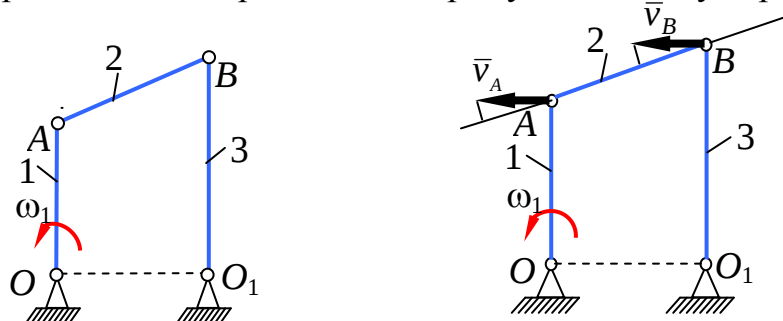
Таким образом, векторы $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$ геометрически равны друг другу:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A, \quad v_B = v_A = \omega_0 r.$$

Как отмечено выше, в этом случае угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = 0$ и скорости всех остальных его точек одинаковы.

Задача 34.2. Кривошип OA вращается с заданной угловой скоростью ω_1 . Определить в изображённом положении механизма угловую скорость ω_2 звена AB .

Решение. В данном случае скорости точек A и B параллельны друг другу. Из равенства их проекций на прямую AB следует равенство их



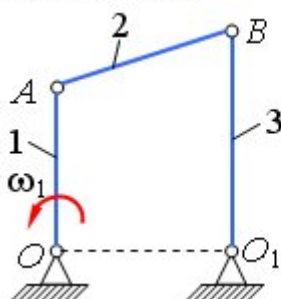
модулей: $v_B = v_A$.

В изображённом положении механизма угловая скорость звена AB будет равна нулю: $\omega_2 = 0$. Такое состояние звена AB принято называть *мгновенно поступательным*.

Задача 34.3. Кривошип OA вращается с заданной угловой скоростью ω_1 . Определить в каком соотношении между собой находятся ω_1 и ω_3 в изображённом положении механизма?

Решение. Угловые скорости ω_1 и ω_3 удовлетворяют соотношениям

$$\omega_1 = \frac{v_A}{OA}, \quad \omega_3 = \frac{v_B}{O_1B},$$



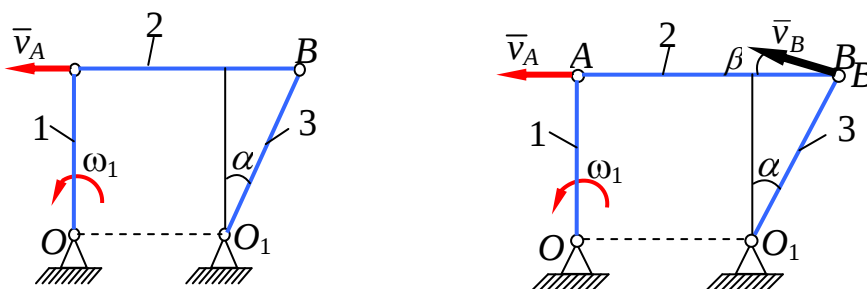
А). $\omega_1 = \omega_3$;

В). $\omega_1 > \omega_3$;

С). $\omega_1 < \omega_3$.

Так как скорость точки A кривошипа 1 равна скорости точки B кривошипа 3, а $OA < O_1B$, то $\omega_1 > \omega_3$.

Задача 34.4. Определить скорость точки B , если в изображённом положении механизма скорость $v_A = 10 \text{ м/с}$, угол $\alpha = 60^\circ$.



Решение. Скорость $\bar{v}_B$ перпендикулярна кривошпилю O_1B .

Проекции скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ на прямую AB равны, то есть

$$v_A = v_B \cos \beta.$$

Откуда находим

$$v_B = \frac{v_A}{\cos \alpha} = 20 \text{ м/с},$$

так как $\beta = \alpha$.

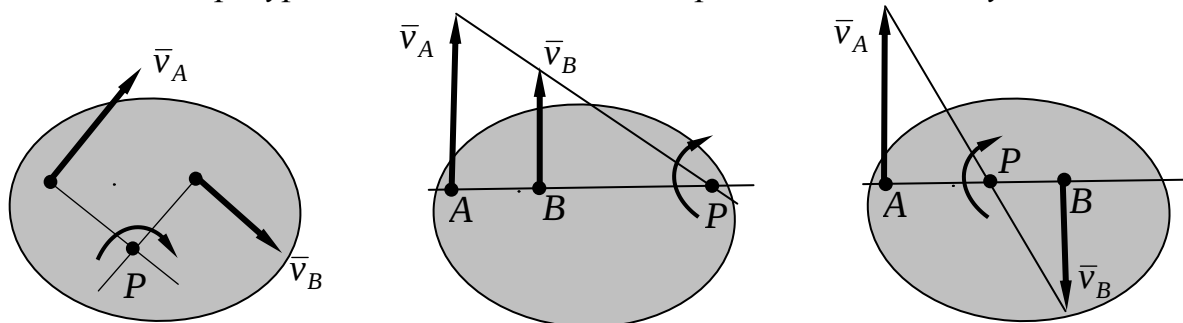
Вопрос 35. Мгновенный центр скоростей (МЦС) плоской фигуры и условия его существования. Геометрическое определение положения МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры не параллельны друг другу. Геометрическое определение положения МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу.

$\bar{v}_B$

Ответ. Точка P , неизменно скреплённая с плоской фигурой, скорость которой в данный момент равна нулю ($\bar{v}_P = 0$), называется мгновенным центром скоростей (МЦС) фигуры.

Например, при качении диска без скольжения по неподвижной опоре мгновенным центром скоростей является его точка P касания опоры.

Для плоской фигуры S , совершающей произвольное движение в плоскости самой фигуры, в каждый момент времени, когда её угловая скорость не равна нулю ($\omega \neq 0$), существует единственный МЦС.



Если скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух каких – либо точек A и B фигуры не параллельны друг другу, то в этом случае МЦС является точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках A и B к прямым, по которым направлены эти скорости. Если скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух каких – либо точек A и B фигуры параллельны друг другу, то в этом случае МЦС является точка пересечения прямой, проходящей через концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ с прямой AB .

Если скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух каких – либо точек A и B фигуры не параллельны друг другу, то в этом случае МЦС является точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках A и B к прямым, по которым направлены эти скорости. Если скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух каких – либо точек A и B фигуры параллельны друг другу, то в этом случае МЦС является точка пересечения прямой, проходящей через концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ с прямой AB .

Вопрос 36. Определение скорости любой точки плоской фигуры, если известно положение МЦС.

О т в е т . Если известно положение МЦС, то скорость любой точки M плоской фигуры равна её вращательной скорости вокруг МЦС, то есть

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{MP}, \text{ или } \bar{v}_M = \bar{\omega} \times \overline{PM}.$$

Вектор $\bar{v}_M \perp \overline{PM}$, а его модуль равен

$$v_M = |\omega| \cdot PM,$$

где PM – расстояние точки M от МЦС.

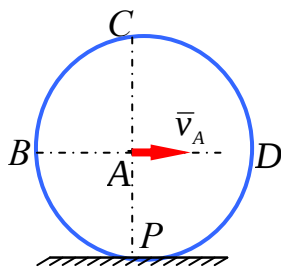
Другими словами, скорости точек плоской фигуры определяются в каждый момент времени так, как если бы фигура вращалась вокруг неподвижного центра, совпадающего в этот момент с МЦС. Поэтому МЦС называют так же мгновенным центром вращения (МЦВ).

Ось, проходящую через МЦС перпендикулярно к фигуре, называется мгновенной осью скоростей (МОС), или мгновенной осью вращения (МОВ).

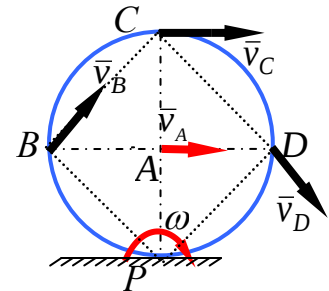
Задача 36.1. Колесо радиусом $R = 0,5$ м катится без скольжения по неподвижному прямолинейному рельсу. Определить с помощью МЦС угловую скорость колеса и скорости его точек B , C и D если скорость $v_A = 2$ м/с.

Р е ш е н и е . МЦС колеса находится в точке P его касания опоры: $\bar{v}_P = 0$.

Воспользуемся тем, что скорости точек колеса являются вращательными скоростями по отношению МЦС и тем самым пропорциональными их расстояниям от МЦС:



$$\begin{aligned} \frac{v_B}{v_A} &= \frac{PB}{PA}, & v_B &= \frac{PB}{PA} v_A, & \bar{v}_B &\perp PB; \\ \frac{v_C}{v_A} &= \frac{PC}{PA}, & v_C &= \frac{PC}{PA} v_A, & \bar{v}_C &\perp PC; \\ \frac{v_D}{v_A} &= \frac{PD}{PA}, & v_D &= \frac{PD}{PA} v_A, & \bar{v}_D &\perp PD. \end{aligned}$$



Так как $PA = R$, $PB = PD = R\sqrt{2}$, $PC = 2R$, то получаем

$$v_B = v_A \sqrt{2}, \quad v_C = 2v_A, \quad v_D = v_A \sqrt{2}.$$

Угловую скорость колеса находим по формуле

$$|\omega| = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{R}.$$

Направление вращения колеса определяется по направлению заданной скорости $\bar{v}_A$.

Задача 36.2. В кривошипно-ползунном механизме длина кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = \ell$; кривошип вращается с угловой скоростью ω_0 . Определить с помощью МЦС угловую скорость шатуна и скорость точки B в положении механизма, когда $OA \perp AB$.

Решение. Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA и по модулю равна $v_A = \omega_0 r$.

Восстанавливая перпендикуляры к известным прямым, по которым направлены скорости точек A и B , определяем их точку пересечения P — МЦС шатуна AB .

Направление угловой скорости ω_{AB} шатуна находим по направлению скорости $\bar{v}_A$, которая является вращательной скоростью по отношению МЦС. Её модуль равен

$$|\omega| = \frac{v_A}{PA}.$$

Из условия пропорциональности скоростей точек A и B расстояниям этих точек от МЦС получаем:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}, \quad v_B = \frac{PB}{PA} v_A, \quad \bar{v}_B \perp PB.$$

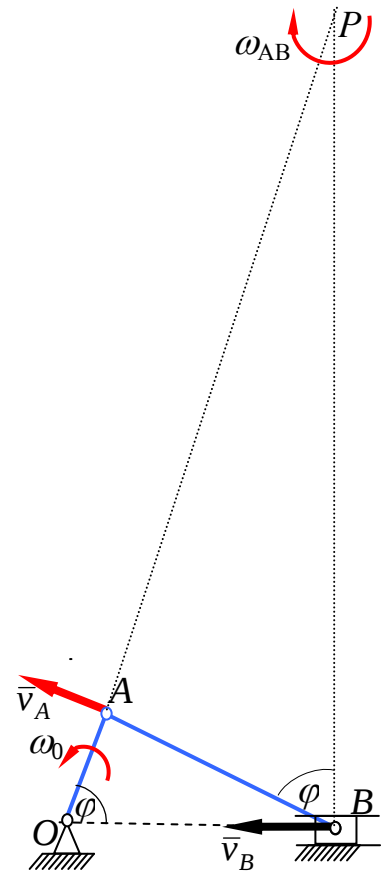
Решая прямоугольные $\triangle APB$ и $\triangle OAB$, соответственно находим

$$PA = \ell \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{PB}{PA} = \frac{1}{\sin \varphi};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\ell}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{\ell}{\sqrt{r^2 + \ell^2}} \omega_0.$$

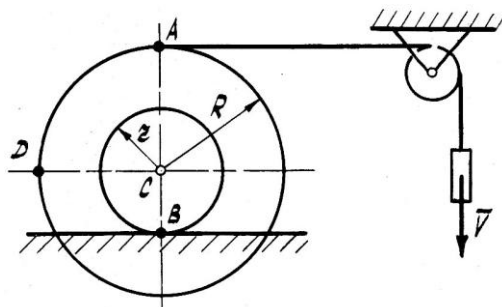
На основании последних выражений формулы для искомых величин принимают окончательный вид

$$|\omega| = \frac{r^2}{\ell^2} \omega_0, \quad v_B = \frac{r \sqrt{r^2 + \ell^2}}{\ell} \omega_0.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Задача 36.3. Катушка катится без скольжения по неподвижному прямолинейному рельсу. Определить с помощью МЦС угловую скорость катушки и скорости её точек A , B , C и D , если скорость груза $v = 12 \text{ м/с}$. Принять $R = 0,4 \text{ м}$, $r = 0,2 \text{ м}$.

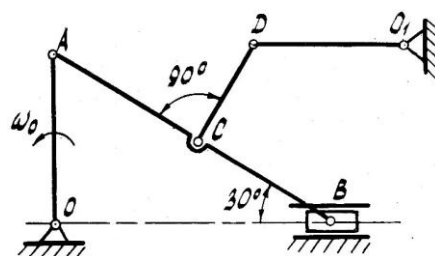


О т в е т :

$$v_A = 12 \text{ м/с}, \quad v_B = 0, \quad v_C = 4 \text{ м/с},$$

$$v_D = 8,96 \text{ м/с}, \quad \omega_K = 20 \text{ рад/с}.$$

Задача 36.4. Кривошип OA изображённого механизма вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 10 \text{ рад/с}$. Определить с помощью МЦС скорости точек A , B , C и угловую скорость ω_{AB} шатуна AB , а также скорость точки D и угловую скорость ω_{CD} шатуна CD .



Принять $OA = 0,3 \text{ м}$, $CD = 0,2 \text{ м}$.

О т в е т : $v_A = 3 \text{ м/с}$, $v_C = v_B = v_A = 3 \text{ м/с}$, $\omega_{AB} = 0$,

$$v_D = 5,19 \text{ м/с}, \quad \omega_{CD} = 30 \text{ рад/с}.$$

Вопрос 37. Различие между формулой, определяющей скорости точек плоской фигуры с помощью МЦС, и формулой, по которой находят скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

О т в е т . Формула, определяющая модуль скорости любой точки M плоской фигуры, имеет вид

$$v_M = |\omega| \cdot PM, \quad \text{или} \quad v_M = |\omega| \cdot h_\omega,$$

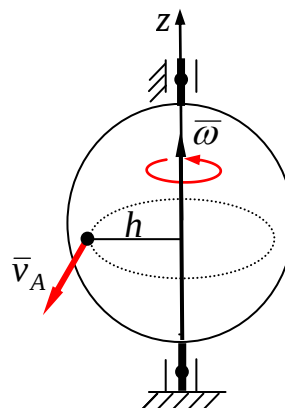
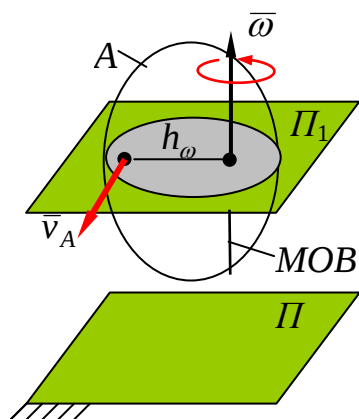
$h_\omega = PM$ – расстояние точки M от мгновенной оси вращения (МОВ).

Для любой точки M вращающегося тела вокруг неподвижной оси справедлива формула

$$v_M = |\omega| \cdot h,$$

h – расстояние точки M от неподвижной оси вращения.

Хотя эти формулы по внешнему виду одинаковы, но между ними существует принципиальное различие. Для точки M тела при его плоском движении расстояние h_ω с течением времени изменяется, так как мгновенная ось не остаётся на месте, а перемещается. Для точки M вращающегося тела вокруг неподвижной оси расстояние h является радиусом описываемой точкой окружности и поэтому остаётся постоянным.



Вопрос 38. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как суммы трёх ускорений.

О т в е т . В соответствии с разложением движения плоской фигуры на два простейших движения ускорение её любой точки M складывается из ускорения полюса O_1 , возникающего от поступательной части движения фигуры, центростремительного ускорения и вращательного ускорения этой точки вокруг полюса, возникающих от вращательной части движения фигуры, то есть

$$\bar{w}_M = \bar{w}_{O_1} + \bar{w}_{MO_1}^{\omega} + \bar{w}_{MO_1}^{\varepsilon}.$$

Вектор $\bar{w}_{MO_1}^{\omega}$ центростремительного ускорения всегда направлен по прямой MO_1 к полюсу O_1 независимо от характера вращения фигуры. Его модуль равен

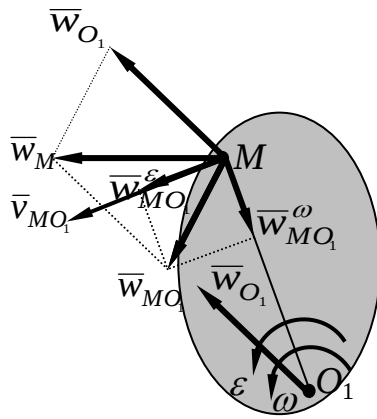
$$w_{MO_1}^{\omega} = \omega^2 \cdot O_1M.$$

Вектор $\bar{w}_{MO_1}^{\varepsilon}$ вращательного ускорения направлен перпендикулярно к прямой MO_1 . при этом:

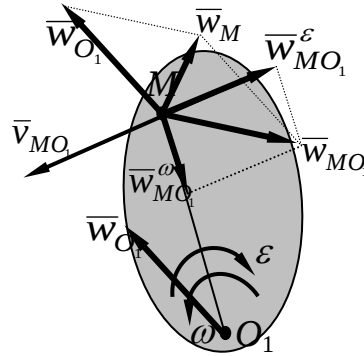
1) вектор $\bar{w}_{MO_1}^{\varepsilon}$ направлен в сторону вращения фигуры, если оно ускоренное, то есть совпадает по направлению с вращательной скоростью $\bar{v}_{MO_1}$.

2) вектор $\bar{w}_{MO_1}^{\varepsilon}$ направлен против вращения фигуры, если оно замедленное, то есть противоположен вращательной скорости $\bar{v}_{MO_1}$. Его модуль равен

$$w_{MO_1}^{\varepsilon} = |\varepsilon| \cdot O_1M$$



Ускоренное вращение



Замедленное вращение

Ускорение $\bar{w}_{MQ_1}$ точки M , возникающее только от вращательной части движения фигуры, определяется формулой

$$\bar{w}_{MQ_1} = \bar{w}_{M}^{\omega} + \bar{w}_{MQ_1}^{\epsilon}.$$

Так как $\bar{w}_{MQ_1}^{\omega} \perp \bar{w}_{MQ_1}^{\epsilon}$, то согласно последней формуле вектор $\bar{w}_{MQ_1}$ изображается диагональю прямоугольника, построенного на векторах $\bar{w}_{MQ_1}^{\omega}$ и $\bar{w}_{MQ_1}^{\epsilon}$. Его модуль определяется формулой

$$w_{MQ_1} = O_1M \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2},$$

а направление – углом α между вектором $\bar{w}_{MQ_1}$ и отрезком O_1M .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}.$$

З а м е ч а н и е . Ускорение $\bar{w}_M$ изображается замыкающей стороной векторного многоугольника, построенного из ускорений $\bar{w}_{O_1}$, $\bar{w}_{MQ_1}^{\omega}$ и $\bar{w}_{MQ_1}^{\epsilon}$.

Задача 38.1. Определить ускорение точки B квадрата со стороной $a = 1 \text{ м}$ в момент времени $t = 1 \text{ с}$ при его движении в своей плоскости, если в этот момент $w_A = 2 \text{ м/с}$, а угловая скорость квадрата изменяется по закону

$$\omega = t \text{ (рад/с)}.$$

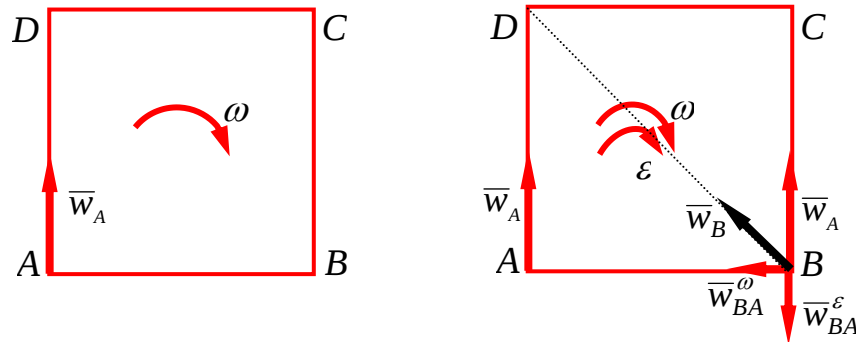
Р е ш е н и е . За полюс выберём точку A , ускорение которой известна. Тогда

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA}^{\omega} + \bar{w}_{BA}^{\epsilon}; \quad w_A = 2 \text{ м/с}^2; \quad w_{BA}^{\omega} = \omega^2 AB, \quad w_{BA}^{\epsilon} = |\epsilon| AB.$$

В момент $t = 1 \text{ с}$ имеем

$$\omega = 1 \text{ рад/с}, \quad \epsilon = 1 \text{ рад/с}^2, \quad w_{BA}^{\omega} = 1 \text{ м/с}^2, \quad w_{BA}^{\epsilon} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Изображаем составляющие вектора $\bar{w}_B$.



Из рисунка следует, что модуль вектора $\bar{w}_B$ равен

$$w_B = \sqrt{(w_{BA}^\omega)^2 + (w_A - w_{BA}^\epsilon)^2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки B направлена по диагонали BD квадрата.

Задача 38.2. Определить угловую скорость и угловое ускорение квадрата со стороной $a = 0,5 \text{ м}$ в момент его движения в своей плоскости, когда ускорения точек A и D соответственно равны $w_A = 15 \text{ м/с}$, и $w_D = 10 \text{ м/с}$.

Решение. Для определения ω и ϵ достаточно найти центростремительное ускорение w_{AD}^ω и вращательное ускорение w_{AD}^ϵ точки A квадрата в его вращении вокруг точки D (или наоборот). Действительно, из формул

$$w_{AD}^\omega = \omega^2 DA, \quad w_{AD}^\epsilon = |\epsilon| DA$$

получим

$$|\omega| = \sqrt{\frac{w_{AD}^\omega}{DA}}, \quad |\epsilon| = \frac{w_{AD}^\epsilon}{DA}$$

Выберём точку D за полюс. Тогда заданные ускорения $\bar{w}_A$ и $\bar{w}_D$ можно связать формулой

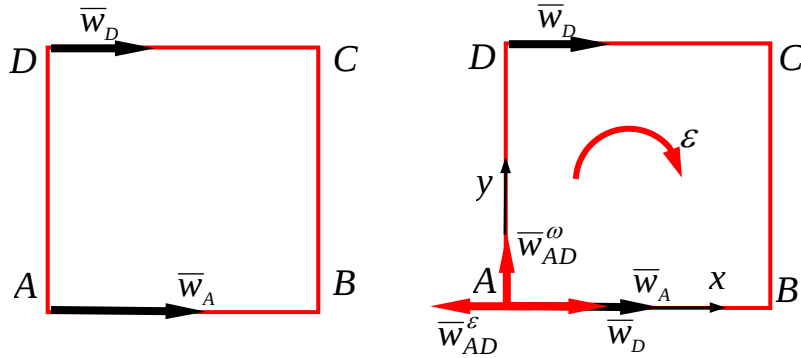
$$\bar{w}_A = \bar{w}_D + \bar{w}_{AD}^\omega + \bar{w}_{AD}^\epsilon.$$

Спроецируем это векторное уравнение на оси выбранной системы координат, предполагая, что вектор w_{AD}^ϵ направлен по стороне квадрата влево. В результате получаем два уравнения

$$w_A = w_D - w_{DA}^\epsilon;$$

$$0 = w_{DA}^\omega.$$

x



Откуда находим

$$w_{DA}^{\varepsilon} = w_A - w_D = 5 \text{ м/с}^2, \quad w_{DA}^{\omega} = 0.$$

Следовательно,

$$|\varepsilon| = \frac{w_{AD}^{\varepsilon}}{DA} = 10 \text{ рад/с}^2, \quad |\omega| = \sqrt{\frac{w_{AD}^{\omega}}{DA}} = 0.$$

Направление углового ускорения ε показывает *вращательное ускорение* $\bar{w}_{AD}^{\varepsilon}$.

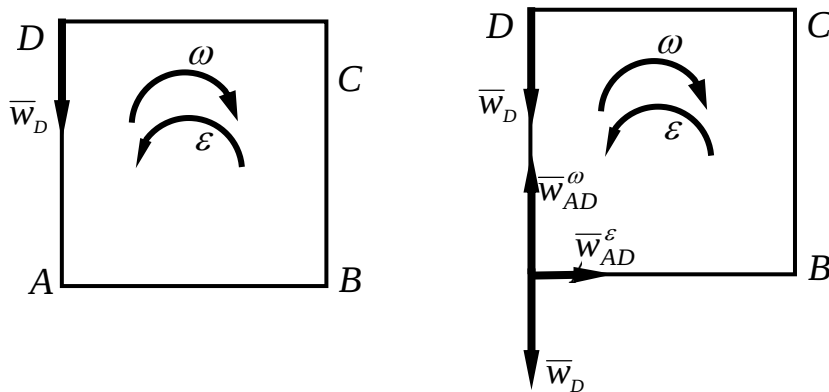
Задача 38.3. Определить ускорение точки A квадрата со стороной $a = 1 \text{ м}$ при его движении в своей плоскости в момент времени, когда $w_D = 4 \text{ м/с}$, $\omega = -2 \text{ рад/с}$, $\varepsilon = 3 \text{ рад/с}^2$.

Решение. Представим ускорение $\bar{w}_A$ в виде

$$\bar{w}_A = \bar{w}_D + \bar{w}_{AD}^{\omega} + \bar{w}_{AD}^{\varepsilon};$$

$$w_D = 4 \text{ м/с}, \quad w_{AD}^{\omega} = \omega^2 DA = 4 \text{ м/с}^2, \quad w_{AD}^{\varepsilon} = |\varepsilon| DA = 3 \text{ м/с}^2$$

Изображаем составляющие вектора $\bar{w}_A$. Так как векторы $\bar{w}_D$ и $\bar{w}_{AD}^{\omega}$ равны по модулю и противоположны по направлению, то

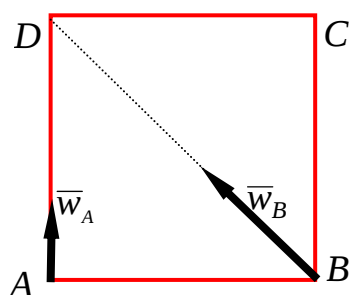


$$\bar{w}_D + \bar{w}_{AD}^{\omega} = 0$$

и, следовательно,

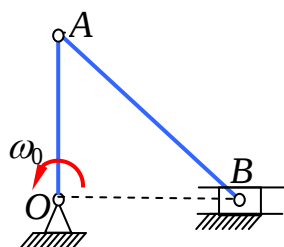
$$\bar{w}_A = \bar{w}_{AD}^{\varepsilon}, \quad w_A = w_{AD}^{\varepsilon} = 3 \text{ м/с}^2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ



Задача 38.4. Определить угловую скорость и угловое ускорение квадрата со стороной $a = 2$ см в момент его движения в своей плоскости, когда ускорения точек A и B соответственно равны $w_A = 2$ см/с, и $w_B = 6$ см/с.

О т в е т: $|\omega| = 1,4 \text{ рад/с}$, $|\varepsilon| = 1,1 \text{ рад/с}^2$.



Задача 38.5. Кривошип OA длиной r кривошипно-ползунного механизма занимает верхнее вертикальное положение. Считая угловую скорость ω_0 кривошипа постоянной величиной, определить ускорение ползуна B и угловое ускорение шатуна AB длиной ℓ .

У к а з а н и е. Использовать решение задачи 35.1.

О т в е т: $w_B = \frac{r^2}{\sqrt{\ell^2 - r^2}} \omega_0^2$, $|\varepsilon| = \frac{r}{\sqrt{\ell^2 - r^2}} \omega_0^2$,

**Василий Максимович Прусов,
Лариса Олеговна Наголюк,
Надежда Константиновна Корнеева**

К И Н Е М А Т И К А В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ

*Учебное пособие для подготовки студентов
к тестированию по теоретической механике*

Издается в авторской редакции

Технический редактор *Р.В. Дмитриева*

Подписано к печати 20.10.15. Изд. № 189/15. Зак. 389/2015. Тираж 10 экз.
Объем 4,75 п. л. Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 4,66.
Формат бумаги 60 x 84 1/16

Издательский центр СевГУ