

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУВО «Севастопольский государственный университет»
Кафедра высшей математики

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Методические указания к вариантам
контрольных заданий по теме модуля в
дисциплине «Высшая математика»
для студентов дневной формы обучения
технических и экономических
специальностей

Севастополь
2015

УДК 514.122

Аналитическая геометрия на плоскости. Методические указания к вариантам контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения технических и экономических специальностей / Разраб. Красовская И.Ж. — Севастополь: 2015. – 38 с.

Целью настоящих методических указаний является помощь студентам в усвоении основных теоретических сведений по разделу «аналитическая геометрия на плоскости» и привитие навыков при решении инженерных задач.

Предложено 5 заданий по 30 вариантов в каждом, приведен пример выполнения задач с достаточно полными пояснениями.

Задания могут быть использованы для практических занятий и в качестве индивидуальных заданий по теме модуля.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № __ от 1 июля 2015 года.

Рецензент: Ледаев С.Ф., доцент кафедры высшей математики

Содержание

1.	Краткие теоретические сведения.....	4
2.	Варианты заданий.....	17
3.	Пример решения нулевого варианта.....	27
4.	Библиографический список.....	37

1. Теоретический материал

I. НАЧАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Если на плоскости заданы две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то расстояние d между ними находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.1)$$

2. Направление отрезка AB определяется углом наклона этого отрезка к положительному направлению оси абсцисс (рис. 1)

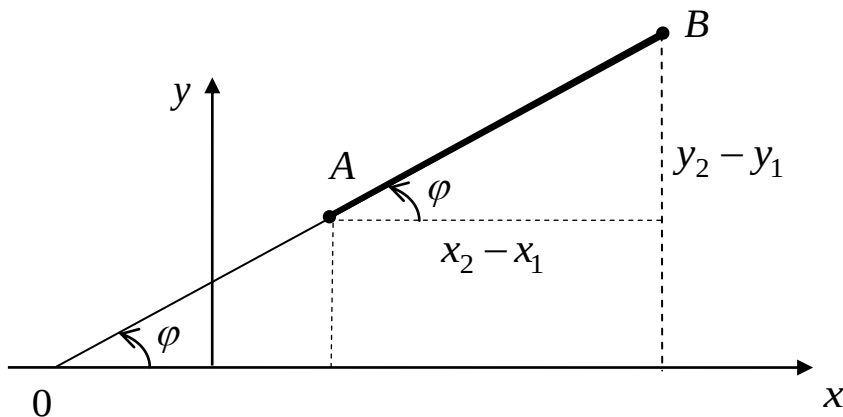


Рисунок 1 – Направление отрезка AB

Тангенс угла φ выражается через координаты концов отрезка по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \kappa = \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \quad (1.2)$$

3. Преобразование декартовых координат

Координаты $(x; y)$ в данной системе преобразуются к координатам $(x_1; y_1)$ в новой системе по формулам:

а) при параллельном сдвиге осей и перенесении начала координат в точку $O_1(\alpha; \beta)$:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases} \quad (1.3)$$

б) при повороте осей на угол φ

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{cases} \quad (1.4)$$

в) при параллельном сдвиге осей координат и последующем их повороте на угол φ

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi + \alpha \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi + \beta \end{cases} \quad (1.5)$$

II. ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Определение Уравнением линии называется уравнение $F(x; y) = 0$ с переменными x и y , которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только они.

Входящие в уравнение линии переменные x и y называются текущими координатами, а буквенные значения – параметрами.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

В декартовых координатах каждая прямая линия определяется уравнением первой степени и, наоборот, каждое уравнение первой степени определяет прямую линию.

В прямоугольных координатах уравнение прямой линии на плоскости задается в одном из следующих видов:

1. Общее уравнение прямой линии:

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.1)$$

где A , B и C числовые коэффициенты, коэффициенты A и B являются координатами вектора нормали $\vec{N}(A; B)$, который перпендикулярен данной прямой.

2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору нормали

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (2.2)$$

где коэффициенты A и B координаты вектора нормали, а x_0 и y_0 - координаты заданной точки.

3. Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad (2.3)$$

где m и n являются координатами направляющего вектора $\vec{S}$, расположенного параллельно заданной прямой, а x_0 и y_0 являются координатами заданной точки прямой.

4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (2.4)$$

где x_0 и y_0 являются координатами заданной точки, а k - угловой коэффициент прямой.

5. Уравнение с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \quad (2.5)$$

где k - угловой коэффициент прямой, b - величина отрезка, отсекаемого данной прямой на оси ординат, считая от начала координат.

6. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, имеющие координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (2.6)$$

7. Уравнение прямой в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.7)$$

где a и b - величины отрезков, которые прямая линия отсекает на осях координат, считая от начала координат.

8. Нормальное уравнение прямой:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (2.8.1)$$

где p - расстояние от начала координат до прямой, $\bar{n}(\cos \alpha; \sin \alpha)$ - нормальный вектор, перпендикулярный прямой линии, α - угол, между нормальным вектором и положительным направлением оси OX (рис. 2).

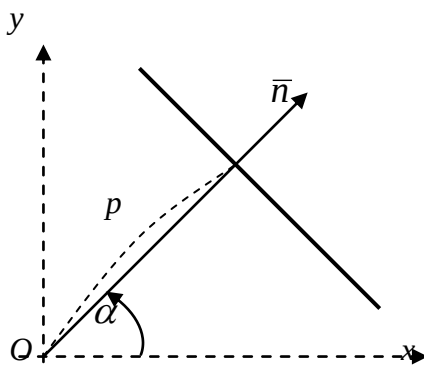


Рисунок 2 - Нормальное уравнение прямой

Общее уравнение прямой можно привести к нормальному виду. Для этого необходимо уравнение прямой умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.8.2)$$

В результате мы получим уравнение прямой линии в нормальном виде:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (2.8.3)$$

Знак нормирующего множителя выбирается противоположный знаку свободного члена C .

Пусть заданы две прямые линии своими уравнениями с угловыми коэффициентами или общими уравнениями:

$$\begin{aligned} l_1: \quad y &= k_1x + b_1 & A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ l_2: \quad y &= k_2x + b_2 & A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{или}$$

1. Угловой коэффициент прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.9.1) \quad \text{или} \quad k = -\frac{A}{B} \quad (2.9.2)$$

2. Угол между прямыми, которые не индивидуализированы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (2.10.1)$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right| \quad (2.10.2)$$

В том случае, когда не указано, какая прямая является первой, а какая второй, то в числителе указанных выше формул можно брать коэффициенты в любом порядке. При одном порядке, мы найдем острый угол между прямыми, а при другом – смежный с ним тупой угол, потому что тангенсы смежных углов отличаются только знаком. Формулы (2.10.1) и (2.10.2) дают положительный тангенс, таким образом, всегда дают острый угол между прямыми.

3. Условия параллельности двух прямых

$$k_1 = k_2 \quad (2.11.1)$$

или

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (2.11.2)$$

4. Условия перпендикулярности прямых

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (2.12.1)$$

или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (2.12.2)$$

5. Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.13)$$

III. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение: Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат.

В общем случае это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.0)$$

1. *Окружность.*

Определение: Окружностью называется геометрическое место точек плоскости равноудаленных от данной точки плоскости (центр окружности).

Каноническое уравнение окружности со смещенным центром

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad (3.1.1)$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты центра окружности

R - радиус окружности

Если центр окружности совпадает с началом отсчета системы координат, то уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3.1.2)$$

2. Эллипс.

Определение: Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.2.1)$$

где a - большая полуось эллипса;

b - малая полуось эллипса;

центр эллипса совпадает с началом координат.

Точки $(-a; 0)$, $(a; 0)$, $(0; -b)$, $(0; b)$ - вершины эллипса.

Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ - фокусы эллипса,

где имеет место основное тождество

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (3.2.2)$$

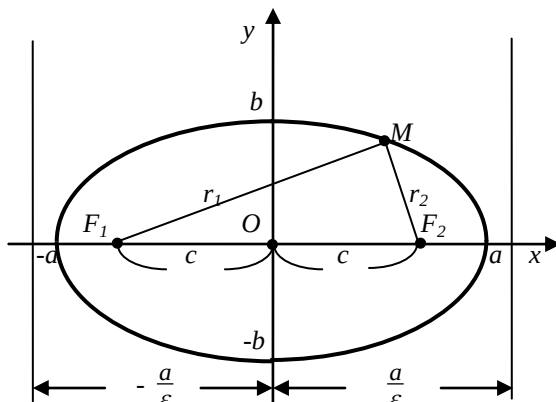


Рисунок 3 –Эллипс

Число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ если } 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (3.2.3)$$

является эксцентриситетом эллипса, являющегося мерой его «сплюснутости» (при $\varepsilon = 0$ эллипс становится окружностью).

Прямые

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (3.2.4)$$

называются директрисами эллипса (если $b > a$, то директрисы определяются уравнением $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$)

Отрезки

$$F_1M = r_1 = a + \varepsilon x \text{ и } F_2M = r_2 = a - \varepsilon x \quad (3.2.5)$$

называются фокальными радиусами.

Если центр эллипса не совпадает с началом системы координат, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (3.2.6)$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты центра эллипса,

a - большая полуось эллипса,

b - малая ось эллипса.

3. *Гипербола.*

Определение: Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов гиперболы) есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.3.1)$$

где a - действительная полуось гиперболы;
 b - мнимая полуось гиперболы;
 центр гиперболы совпадает с началом координат (рис. 4)

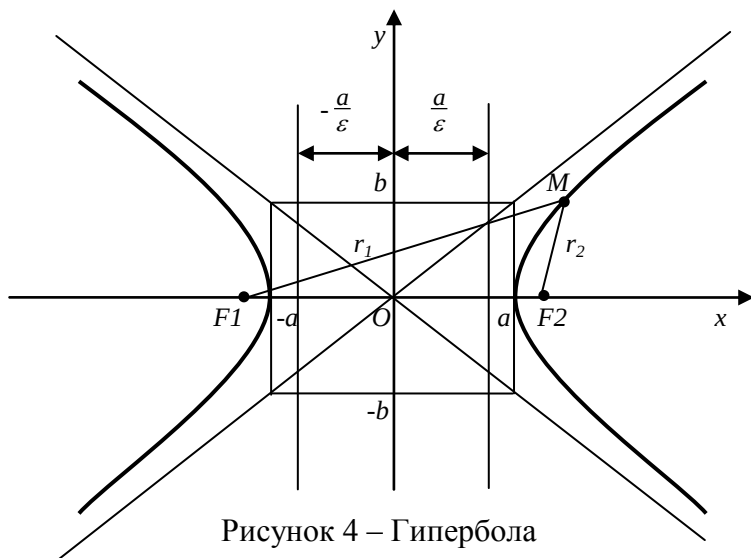


Рисунок 4 – Гипербола

Точки $(-a; 0)$, $(a; 0)$, $(0; -b)$, $(0; b)$ - вершины гиперболы.

Точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ - фокусы гиперболы, где имеет место основное тождество

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3.3.2)$$

Прямые

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (3.3.3)$$

являются асимптотами гиперболы.

Число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \text{ если } \varepsilon > 1 \quad (3.3.4)$$

называется эксцентриситетом гиперболы, который является мерой ее «сплюснутости».

Уравнение, имеющее вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (3.3.5)$$

является уравнением сопряженной гиперболы (рис. 5)

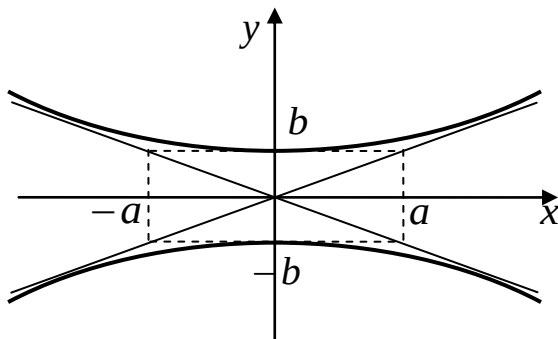


Рисунок 5 – Сопряженная гипербола

Если $a = b$, то гипербола называется равнобочной, ее эксцентриситет равен $\varepsilon = \sqrt{2}$, а угол между асимптотами равен $\frac{\pi}{2}$.

Уравнения

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (3.3.6)$$

являются директрисами гиперболы.

Если гипербола сопряженная, то директрисы определяются уравнениями:

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \quad (3.3.7)$$

Отрезки $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ являются фокальными радиус-векторами точек гиперболы, которые задаются для левой и правой ветви гиперболы:

$$\begin{cases} r_1 = -\varepsilon x - a \\ r_2 = -\varepsilon x + a \end{cases} \quad \text{для левой ветви} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{cases} r_1 = \varepsilon x + a \\ r_2 = \varepsilon x - a \end{cases} \quad \text{для правой ветви} \quad (3.3.9)$$

Если центр гиперболы не совпадает с началом координат, то уравнения гипербол имеют вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (3.3.10)$$

уравнение сопряженной гиперболы

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1, \quad (3.3.11)$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты центра гиперболы

a - действительная полуось гиперболы

b - мнимая полуось гиперболы

4. **Парабола.**

Определение: Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (называемой фокусом) и от данной прямой (называемой директрисой)

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad \text{вдоль оси } OX, \quad (3.4.1)$$

$$x^2 = 2py \quad \text{вдоль оси } OY, \quad (3.4.2)$$

где p - параметр параболы или расстояние от фокуса до директрисы; вершина параболы расположена в начале координат.

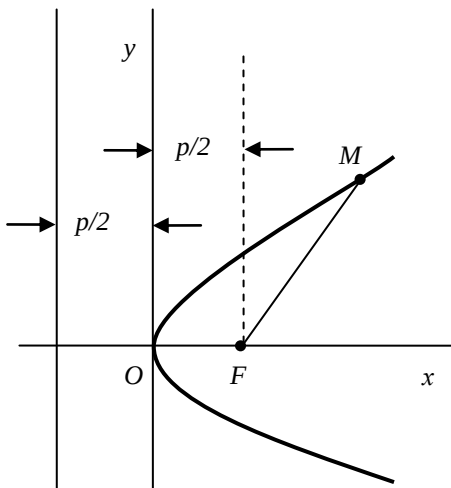


Рисунок 6 - Парабола

Точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ является фокусом параболы. (3.4.3)

Прямая $x = -\frac{p}{2}$ - директриса параболы. (3.4.4)

Отрезок $FM = r = x + \frac{p}{2}$ - фокальный радиус. (3.4.5)

Если координатная система выбрана таким образом, что вершина совпадает с началом координат и

- ось параболы совмещена с осью OX , то:

а) парабола расположена в правой полуплоскости

$$y^2 = 2px; \quad (3.4.6)$$

б) парабола расположена в левой полуплоскости

$$y^2 = -2px; \quad (3.4.7)$$

- ось параболы совмещена с осью OY , то:

а) парабола расположена в верхней полуплоскости

$$x^2 = 2py; \quad (3.4.8)$$

б) парабола расположена в нижней полуплоскости

$$x^2 = -2py. \quad (3.4.9)$$

Если вершина параболы не совпадает с началом координат, то уравнение параболы имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ с осью симметрии вдоль оси } OX; \quad (3.4.10)$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \text{ с осью симметрии вдоль оси } OY, \quad (3.4.10)$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты вершины параболы,

p - параметр параболы.

ЗАДАНИЕ 1.

Зная координаты трех точек A , B и C , выполнить следующие вычисления:

- 1) Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B .
- 2) Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси OY прямой, проходящей через точки A и B .
- 3) Написать уравнение прямой L_1 , параллельной прямой AB и проходящей через точку C , используя значение углового коэффициента.
- 4) Написать уравнение прямой L_2 , перпендикулярной прямой AB и проходящей через точку C , используя значение углового коэффициента.
- 5) Найти расстояние между параллельными прямыми L_1 и AB .
- 6) Написать уравнение прямой L_3 , проходящей через точку B параллельно вектору $\overrightarrow{AC}$.
- 7) Написать уравнение прямой L_4 , проходящей через точку B перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AC}$.
- 8) Найти угол между двумя прямыми L_1 и L_3 .
- 9) Вычислить площадь треугольника, образованного прямой AB и осями координат.
- 10) Построить графики всех получившихся прямых в одной системе координат.

1. $A(1; 3)$, $B(2; 2)$, $C(-1; 0)$;
2. $A(-4; 2)$, $B(2; -3)$, $C(-10; 5)$;
3. $A(7; 2)$, $B(8; -1)$, $C(3; 3)$;
4. $A(2; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(-7; -3)$;
5. $A(-1; -5)$, $B(-6; 0)$, $C(3; 6)$;
6. $A(0; -1)$, $B(-2; 3)$, $C(1; -5)$;
7. $A(5; 2)$, $B(2; 5)$, $C(1; 2)$;
8. $A(2; -1)$, $B(1; 2)$, $C(5; 0)$;

9. $A(-2; 0), B(-1; 7), C(4; -8);$
10. $A(14; 4), B(-5; -3), C(-2; -6);$
11. $A(2; 4), B(3; 3), C(0; 1);$
12. $A(-3; 3), B(3; -2), C(-9; 6);$
13. $A(8; 3), B(9; 0), C(4; 4);$
14. $A(3; 2), B(0; 6), C(-6; -2);$
15. $A(0; -4), B(-5; 1), C(4; 7);$
16. $A(1; 0), B(-1; 4), C(2; -4);$
17. $A(6; 3), B(3; 6), C(2; 3);$
18. $A(3; 0), B(2; 3), C(6; 1);$
19. $A(-1; 1), B(0; 8), C(5; -7);$
20. $A(15; 5), B(-4; -2), C(-1; -5);$
21. $A(3; 5), B(4; 4), C(1; 2);$
22. $A(-2; 4), B(4; -1), C(-8; 7);$
23. $A(9; 4), B(10; 1), C(5; 5);$
24. $A(4; 3), B(1; 7), C(-5; -1);$
25. $A(1; -3), B(-4; 2), C(5; 8);$
26. $A(2; 1), B(0; 5), C(3; -3);$
27. $A(7; 4), B(4; 7), C(3; 4);$
28. $A(4; 1), B(3; 4), C(7; 2);$
29. $A(0; 2), B(1; 9), C(6, -6);$
30. $A(16; 6), B(-3; -1), C(0; -4);$

ЗАДАНИЕ 2.

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

1. его малая ось равна 10, а эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;
2. точка $M(8; 12)$ принадлежит эллипсу, а расстояние от нее до левого фокуса равно 20;
3. точки $M_1(4; -\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ принадлежат эллипсу;
4. точка $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ принадлежит эллипсу, а эксцентриситет эллипса равен $\frac{2}{3}$;
5. расстояние между директрисами эллипса равно 32, а эксцентриситет эллипса равен $\frac{1}{2}$;
6. малая ось эллипса равна 6, а расстояние между его директрисами равно 13;
7. точка $M(\sqrt{15}; -1)$ принадлежит эллипсу, а расстояние между фокусами равно 8;
8. точка $M(-\sqrt{5}; 2)$ принадлежит эллипсу и расстояние между его директрисами равно 10;
9. расстояние между директрисами эллипса равно $\frac{50}{3}$, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;
10. расстояние между фокусами эллипса равно 6, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;
11. расстояние между директрисами эллипса равно 5, а расстояние между фокусами равно 4;
12. расстояние между фокусами эллипса равно 24, а эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;

13. расстояние между директрисами эллипса равно $\frac{32}{3}$, а эксцентриситет равен $\frac{3}{4}$;
14. большая ось эллипса равна 20, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;
15. прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, его малая ось равна 8;
16. расстояние между фокусами эллипса равно 8, а его большая ось равна 10;
17. расстояние между вершинами, лежащими на большой оси эллипса, равно 16, а расстояние между его фокусами равно 10;
18. хорда, соединяющая две соседние вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом 30° ;
19. фокусами эллипса являются точки $F_1(-1; 0)$ и $F_2(1; 0)$, а точка $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу;
20. фокусами эллипса являются точки $F_1(-2; 0)$ и $F_2(2; 0)$, а директрисами являются прямые $x = \pm 18$;
21. расстояние от директрисы до ближайшей вершины эллипса равно 4, а до вершины, лежащей на оси OY , равно 8;
22. директрисами эллипса являются прямые $x = \pm 4$, а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси – квадрат;
23. большая ось эллипса равна 16, а фокусы отстоят от вершин на $\frac{1}{5}$ ее длины;
24. расстояние между фокусами эллипса равно 6, а сумма малой и большой полуосей равно 9;
25. расстояние между фокусами эллипса равно $2\sqrt{3}$, а разность между большой полуосью и малой полуосью равно 1;

26. точки $M_1\left(4; \frac{9}{5}\right)$ и $M_2\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}; 2\right)$ принадлежат эллипсу;
27. точка $M(-4; \sqrt{21})$ принадлежит эллипсу и эксцентриситет равен $\frac{3}{4}$;
28. расстояние между фокусами эллипса равно 6, а расстояние между его директрисами равно $\frac{50}{3}$;
29. большая полуось эллипса равна 5, а эксцентриситет равен 0,64;
30. эллипс проходит через точки $M_1(2; 2)$ и $M_2(4; 1)$.

ЗАДАНИЕ 3.

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

1. точка $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ принадлежит гиперболе и уравнения директрис $x = \pm \frac{4}{3}$;
2. известны уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $\frac{64}{5}$;
3. известны уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm \frac{16}{5}$;

4. расстояние между директрисами гиперболы равно $\frac{32}{5}$, а мнимая ось равна 6;
5. точка $M\left(\frac{9}{2}; 1\right)$ принадлежит гиперболе, а уравнения её асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;
6. расстояние между директрисами гиперболы равно $\frac{228}{13}$, а расстояние между фокусами равно 26;
7. уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{4}{3}x$, а расстояние между фокусами равно 20;
8. расстояние между фокусами гиперболы равно 10 и мнимая ось равна 8;
9. расстояние между фокусами гиперболы равно 6, а эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$;
10. действительная ось гиперболы равна 16 и эксцентриситет равен $\frac{5}{4}$;
11. расстояние между директрисами гиперболы равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$;
12. уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $\frac{64}{5}$;
13. точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ принадлежат гиперболе;
14. одна из точек гиперболы имеет координаты $M(5; 3)$ и эксцентриситет равен $\sqrt{2}$;

15. длина действительной оси гиперболы равна 1, а точка $M(1; 3)$ принадлежит гиперболе;
16. директрисами гиперболы являются прямые $x = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}$, а точка $M(-9; 4)$ принадлежит гиперболе;
17. длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении 4:1;
18. эксцентриситет гиперболы равен $\frac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2;
19. точка $M(7; -2\sqrt{3})$ принадлежит гиперболе и удалена от левого фокуса на расстояние $4\sqrt{7}$;
20. точка $M\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$ принадлежит гиперболе, а асимптотами являются прямые $y = \pm 2x$;
21. расстояние между фокусами гиперболы равно 16, а эксцентриситет равен $\frac{4}{3}$;
22. асимптоты заданы уравнениями прямых $y = \pm \frac{3}{5}x$ и гипербола проходит через точку $M(10; -3\sqrt{3})$;
23. асимптоты заданы уравнениями $y = \pm \frac{1}{2}x$ и расстояние между фокусами равно 10;
24. расстояние между фокусами гиперболы равно 10, а расстояние между вершинами равно 8;
25. эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$ и одна из её точек $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$;
26. гипербола проходит через точку $M(9; 8)$, а асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$;

27. эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;
28. действительная ось гиперболы равна 48, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$
29. действительная ось гиперболы равна 16 и угол φ между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$;
30. уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{5}{12}x$ и точка $M(24; 5)$ принадлежит гиперболе.

ЗАДАНИЕ 4.

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус и уравнение директрисы:

1. $F(9; 3), \quad x - 2 = 0$
2. $F(5; 3), \quad x + 2 = 0$
3. $F(5; -3), \quad y + 2 = 0$
4. $F(-2; 4), \quad y + 2 = 0$
5. $F(-4; -3), \quad y - 2 = 0$
6. $F(5; -4), \quad x + 9 = 0$
7. $F(-1; -5), \quad y + 9 = 0$
8. $F(6; -3), \quad x = 0$
9. $F(4; -6), \quad y = 0$
10. $F(6; 4), \quad x = 0$
11. $F(-1; -3), \quad y - 1 = 0$

12. $F(2; -3), \quad y-1=0$
13. $F(-4; 3), \quad y+1=0$
14. $F(3; 3), \quad y+1=0$
15. $F(-7; -2), \quad x-3=0$
16. $F(-7; 2), \quad x-3=0$
17. $F(7; -2), \quad x+3=0$
18. $F(7; 2), \quad x+3=0$
19. $F(-5; -1), \quad x-1=0$
20. $F(-5; 1), \quad x-1=0$
21. $F(5; -1), \quad x+1=0$
22. $F(5; 1), \quad x+1=0$
23. $F(4; 0), \quad x+2=0$
24. $F(0; 4), \quad y+2=0$
25. $F(6; 1), \quad x+2=0$
26. $F(-6; 1), \quad x-2=0$
27. $F(3; 3), \quad x+3=0$
28. $F(-3; 3), \quad y+3=0$
29. $F(3; -3), \quad x+3=0$
30. $F(-3; -3), \quad y-3=0$

ЗАДАНИЕ 5.

Привести общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой и построить её.

1. $9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$
2. $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0$
3. $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 164 = 0$

4. $8x^2 + 5y^2 + 64x - 40y + 168 = 0$
5. $y^2 - 6x - 12y + 18 = 0$
6. $9x^2 - 8y^2 - 90x - 48y + 225 = 0$
7. $x^2 + 10x - 8y + 49 = 0$
8. $x^2 - 2y + 2x + 12y - 33 = 0$
9. $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$
10. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$
11. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$
12. $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$
13. $4x^2 + 3y^2 + 32x + 52 = 0$
14. $10x^2 - 3y^2 - 40x - 6y + 22 = 0$
15. $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$
16. $5x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$
17. $2x^2 + 5y^2 - 8x + 10y + 3 = 0$
18. $x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
19. $2x^2 + 4x - y + 2 = 0$
20. $9x^2 + 4y^2 - 72x - 32y + 172 = 0$
21. $9x^2 - 4y^2 - 72x + 32y + 44 = 0$
22. $9x^2 - 4y^2 - 72x + 32y + 116 = 0$
23. $4x^2 - 3y^2 + 32x + 52 = 0$
24. $4x^2 - 3y^2 + 32x + 76 = 0$
25. $2x^2 - 5y^2 - 8x - 10y + 3 = 0$
26. $2x^2 - 5y^2 - 8x - 10y + 13 = 0$
27. $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
28. $x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
29. $y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$
30. $y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА.

ЗАДАНИЕ 1.

Зная координаты точек $A(2; 4)$, $B(3; -2)$ и $C(0; 1)$, выполнить следующие вычисления:

- 1) Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B .

Решение:

В формулу (2.6) уравнения прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

подставим значения заданных координат. Получим:

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 4}{-2 - 4}$$

$6x + y - 16 = 0$ - искомое уравнение прямой AB .

- 2) Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси OY прямой, проходящей через точки A и B .

Решение:

Приведем уравнение прямой AB к виду [2.5] $y = kx + b$:

$$y = -6x + 16.$$

Следовательно, $k = -6$, $b = 16$.

- 3) Написать уравнение прямой L_1 , параллельной прямой AB и проходящей через точку C , используя значение углового коэффициента.

Решение:

Используем условие параллельности прямых (2.11.1) $k = k_1$, в нашем случае $k_1 = k = -6$. Зная координаты точки $C(0; 1)$, для составления уравнения прямой L_1 применим формулу (2.4)

$$y - y_C = k_1(x - x_C).$$

Тогда

$$y - 1 = -6(x - 0)$$

$$6x + y - 1 = 0 \text{ - искомое уравнение прямой } L_1.$$

- 4) Написать уравнение прямой L_2 , перпендикулярной прямой AB и проходящей через точку C , используя значение углового коэффициента.

Решение:

Используем условие перпендикулярности прямых (2.12.1)

$k_2 = -\frac{1}{k}$, в нашем случае $k_2 = \frac{1}{6}$. Зная координаты точки

$C(0; 1)$, можно применить формулу (2.4) для нахождения уравнения прямой L_2

$$y - y_C = k_2(x - x_C).$$

Получим

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x - 0)$$

$$x - 6y + 6 = 0 \text{ - искомое уравнение прямой } L_2.$$

- 5) Найти расстояние между параллельными прямыми L_1 и AB .

Решение:

Для вычисления расстояния воспользуемся формулой (2.13)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты точки не лежащей на данной прямой,

A, B, C - коэффициенты уравнения данной прямой.

Нам известны уравнения двух параллельных прямых L_1 и AB

$$L_1 : 6x + y - 1 = 0$$

$$AB : 6x + y - 16 = 0$$

Чтобы воспользоваться данной формулой возьмем произвольную точку на одной из прямых и вычислим расстояние от нее до второй прямой.

Точка $C(0; 1)$ принадлежит прямой L_1 . Следовательно, коэффициенты будут иметь значения $A=6$, $B=1$, $C=-16$.

$$\text{Тогда } d = \frac{|6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 16|}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = \frac{15\sqrt{37}}{37}$$

6) Написать уравнение прямой L_3 , проходящей через точку B параллельно вектору $\overrightarrow{AC}$.

Решение:

Вектор, параллельный данной прямой, является сонаправленным вектором для данной прямой. Поэтому можем воспользоваться формулой (2.3)

$$\frac{x - x_B}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{y - y_B}{y_{\overrightarrow{AC}}}.$$

Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, если $A(2; 4)$, $C(0; 1)$

$$\overrightarrow{AC}(-2; -3).$$

И так как $B(3; -2)$, то

$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 2}{-3},$$

$3x - 2y - 13 = 0$ - искомое уравнение L_3 .

7) Написать уравнение прямой L_4 , проходящей через точку B перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AC}$.

Решение:

Вектор, перпендикулярный данной прямой, является вектором нормали данной прямой. Поэтому можем воспользоваться формулой (2.2)

$$x_{\overrightarrow{AC}}(x - x_B) + y_{\overrightarrow{AC}}(y - y_B) = 0$$

Зная координаты точек $A(2; 4)$, $B(3; -2)$ и $C(0; 1)$, вычислим координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ и найденные значения подставим в уравнение.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AC}(-2; -3), \\ \text{тогда} \quad & -2(x - 3) - 3(y + 2) = 0 \\ & 2x + 3y = 0 \text{ - искомое уравнение прямой } L_4 \end{aligned}$$

8) Найти угол между двумя прямыми L_1 и L_3 .

Решение

Чтобы найти угол между двумя прямыми, можно воспользоваться формулой (2.10.1) или (2.10.2). Но поскольку уравнения прямых записаны в общем виде, то удобней формула (2.10.2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|.$$

Поскольку в условии задачи не указано, какая из прямых является первой и какая второй, в таком случае в числителе этой формулы можно брать коэффициенты в любом порядке. При одном порядке мы найдем острый угол между прямыми, а при другом – смежный с ним тупой угол, потому что тангенсы смежных углов отличаются только знаком. Используемая нами формула дает положительный тангенс, т. е. всегда дает острый угол между прямыми.

Уравнения прямых:

$$\begin{aligned} L_1: \quad & 6x + y - 1 = 0, \\ L_3: \quad & 3x - 2y - 13 = 0. \end{aligned}$$

Примем, что A_1, B_1 коэффициенты прямой L_1 , A_2, B_2 - прямой L_3 . Тогда $A_1 = 6, B_1 = 1, A_2 = 3, B_2 = -2$. Следовательно

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{6 \cdot (-2) - 3 \cdot 1}{6 \cdot 3 - 2 \cdot 1} \right| = \frac{15}{16}.$$

В таком случае, $\varphi_1 = \arctg \frac{15}{16}, \varphi_2 = \pi - \arctg \frac{15}{16}$.

9) Вычислить площадь треугольника, образованного прямой AB и осями координат.

Решение:

Прямая AB отсекает прямоугольный треугольник от координатного угла. Его площадь можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} ab.$$

Значения величин отрезков можно найти, приведя уравнение прямой AB к виду уравнения прямой «в отрезках» (2.7):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Уравнение прямой AB : $6x + y - 16 = 0$.

Получим: $\frac{3x}{8} + \frac{y}{16} = 1,$

где $a = \frac{8}{3}, b = 16$

Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 16 = \frac{64}{3}$ (кв. ед.)

10) Построить графики всех получившихся прямых в одной системе координат.

Чертеж:

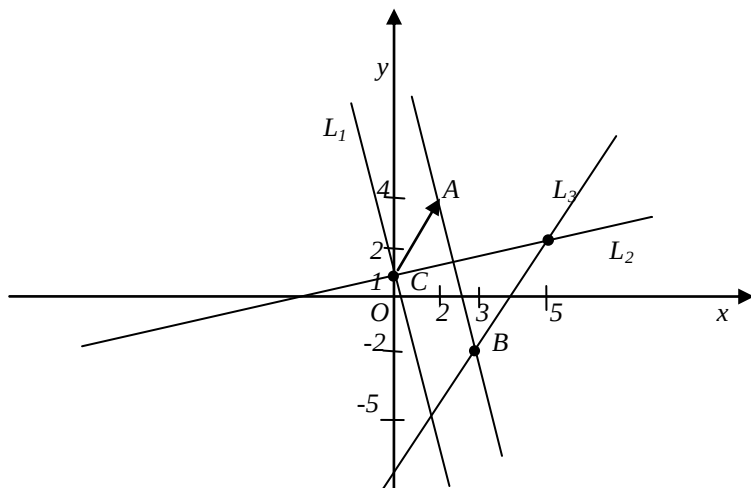


Рисунок 7 – К заданию 1

ЗАДАНИЕ 2.

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если большая полуось равна 5, а эксцентриситет равен $\frac{1}{2}$.

Решение:

Так как фокусы находятся на оси OX и лежат симметрично относительно начала координат, то уравнение эллипса будем искать в каноническом виде (3.2.1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию задачи $a=5$. Следовательно, решение задачи сводится к нахождению значения параметра b .

Для его вычисления можно воспользоваться основным тождеством эллипса (3.2.2)

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

где значение c мы можем вычислить, используя формулу эксцентриситета (3.2.3)

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

откуда $c = \varepsilon \cdot a.$

Тогда $c = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2},$

следовательно $b^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}.$

Подставим найденные значения a^2 и b^2 в уравнения эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{75} = 1 - \text{искомое уравнение эллипса.}$$

ЗАДАНИЕ 3.

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если одна из точек гиперболы имеет координаты $M(5; 3)$ и эксцентриситет равен 2.

Решение:

Так как фокусы находятся на оси OX и лежат симметрично относительно начала координат, то уравнение гиперболы будем искать в каноническом виде (3.3.1)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Значения параметров a и b неизвестны, следовательно, решение задачи сводится к нахождению этих значений.

Воспользуемся основным тождеством гиперболы (3.3.2)

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

где значение параметра c можно выразить из формулы эксцентриситета (3.3.4)

$$c = \varepsilon \cdot a .$$

Тогда

$$\varepsilon^2 \cdot a^2 = a^2 + b^2 .$$

Выразим a^2 :

$$a^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 - 1} ,$$

т.к. $\varepsilon = 2$ по условию, то $a^2 = \frac{b^2}{3}$.

Подставим получившееся значение a^2 в уравнение гиперболы, получим:

$$\frac{3x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Из условия известно, что точка $M(5; 3)$ принадлежит гиперболе, следовательно, ее координаты будут удовлетворять уравнению гиперболы:

$$\frac{3 \cdot 25}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 .$$

Вычислим значение b^2 :

$$b^2 = 66$$

Зная значение b^2 , можем найти значение a^2 :

$$a^2 = 22$$

Найденные значения подставим в уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{22} + \frac{y^2}{66} = 1 - \text{искомое уравнение гиперболы.}$$

ЗАДАНИЕ 4.

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; 3)$ и уравнение директрисы $x + 2 = 0$.

Решение:

Сделаем рисунок:

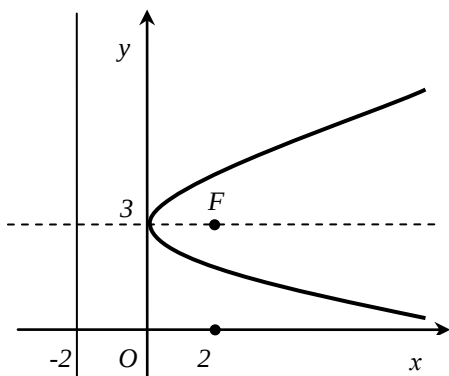


Рисунок 8 – К заданию 4

Из рисунка видно, что вершина параболы не совпадает с началом координат и ось симметрии параболы расположена вдоль оси OX , поэтому уравнение будем искать в виде (3.4.10)

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Ось симметрии параболы располагается перпендикулярно директрисе и проходит через вершину параболы. Следовательно, в нашем случае она имеет уравнение $y = 3$, тогда координата y_0 вершины параболы будет равна 3.

Вершина параболы расположена на оси симметрии между директрисой и фокусом, при этом находится на одинаковом расстоянии от них. Поэтому ее координату x_0 можно вычислить по формуле нахождения координаты середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_F + x_D}{2},$$

где x_F - координата x фокуса

x_D - координата x точки, лежащей на директрисе.

По условию $x_F = 2$, $x_D = -2$, тогда

$$x_0 = \frac{2 - 2}{2} = 0.$$

Таким образом, вершина параболы лежит в точке $(0; 3)$.

Вычислим параметр p . Его значение численно равно длине отрезка, расположенного на оси симметрии между фокусом и точкой пересечения оси симметрии с директрисой. Поскольку ось симметрии, в нашем случае, расположена вдоль оси OX , то параметр p вычислим по формуле:

$$p = x_F - x_D$$

тогда

$$p = 2 - (-2) = 4.$$

Найденные значения подставим в уравнение параболы:

$$(y - 3)^2 = 4x \text{ - искомое уравнение параболы.}$$

ЗАДАНИЕ 5.

Привести общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой и построить её.

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$$

Решение:

Для того чтобы привести общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду необходимо выделить выражения в виде формулы полного квадрата для переменных x и y :

$$\begin{aligned} &(9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) + 4 = 0 \\ &9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 4 = 0 \\ &9(x - 2)^2 - 36 + 4(y - 1)^2 - 4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Перенесем свободный член вправо относительно знака равенства и все уравнение разделим на его значение, чтобы справа получить 1.

$$\begin{aligned} &9(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36 \\ &\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1 \end{aligned}$$

Получили каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке $O_1(2;1)$, большая полуось равна 2, а малая полуось равна 3.

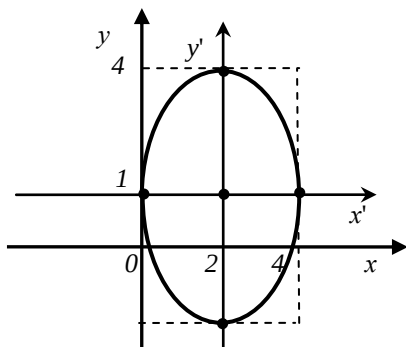


Рисунок 9 –К заданию 5

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов С.В. Сборник задач по аналитической геометрии/ С.В.Бахвалов, П.С.Моденов, А.С.Пархоменко. – М.:Наука, 1964. – 440с.
2. Бахвалов С.В. Аналитическая геометрия/ С.В.Бахвалов, Л.И. Бабшкин, В.П.Иваницкая. – М.: Просвещение, 1965. – 368с.
3. Беклимишев Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре/ Л.А. Беклемишев, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. – М.: Наука, 1987. – 496с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии/ Д.В. Клетеник. – С-П.: Специальная литература, 1998. – 200с
5. Олейник Л.В. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве/ Л.В. Олейник. – Х.: Торнадо, 1999. – 106с
6. Потоцкий М.В. Аналитическая геометрия на плоскости/ М.В. Потоцкий. – М.: Учпедгиз, 1956. – 448с.

Для заметок

Заказ № _____ от « ____ » _____ 2015 г. Тираж _____ экз.

Изд-во СевГУ