

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Севастопольский государственный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольных работ
«РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

по дисциплинам «Исследование операций»,
«Методы оптимальных решений»
для студентов экономических специальностей
всех форм обучения

Севастополь
2014

УДК 519.852

Методические указания к выполнению контрольных работ «Решение оптимизационных задач линейного программирования» по дисциплинам «Исследование операций», «Методы оптимальных решений» для студентов экономических специальностей всех форм обучения / Сост. Н.А. Русина.- Севастополь: Изд-во СевГУ, 2014.- 31с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам при подготовке к контрольным работам по дисциплинам «Исследование операций», «Методы оптимальных решений».

Методические указания утверждены на заседании кафедры менеджмента и экономико-математических методов, протокол № 3 от 5.11.2014

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний

Рецензент: Кокодей Т.А., доцент кафедры Менеджмента и экономико-математических методов.

СОДЕРЖАНИЕ

Цель работы	4
1. Теоретические сведения	4
1.1. Постановка задачи линейного программирования	4
1.2. Графический метод решения задач линейного программирования	5
1.3. Симплексные таблицы	8
1.4. Транспортная задача	11
1.5. Метод потенциалов	12
2. Варианты заданий	20
2.1. Решение задач линейного программирования графическим и симплекс-методом.	20
2.2. Решение транспортной задачи методом потенциалов	28
3. Содержание отчета	30
4. Контрольные вопросы	31
Библиографический список	31

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков построения и решения задач линейного программирования, используя симплекс-метод, метод потенциалов.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основой исследования операций является построение экономико-математических моделей, т.е. математического описания исследуемого экономического процесса или объекта. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике и менеджменте позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область использования экономической информации, интенсифицировать расчеты [2].

Примеры задач линейного программирования:

- задача об использовании ресурсов (задача планирования производства);
- задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях);
- задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования);
- задача о раскрое материалов;
- транспортная задача.

В методических указаниях приведено описание методов решения задач линейного программирования и примеры решения этих задач.

Задача студента – разобраться в методе и решить задачи по предложенному варианту.

1.1. Постановка задачи линейного программирования

Задача об использовании ресурсов

Обозначим x_j ($j=1,2,\dots,n$) – число единиц продукции P_j , запланированной к производству; b_i ($i=1,2,\dots,m$) – запас ресурса R_i , a_{ij} – число единиц ресурса R_i , затрачиваемого на изготовление единицы продукции P_j ; c_j – прибыль от реализации единицы продукции P_j .

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании ресурсов в общей постановке примет вид: найти такой план $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выпуска продукции, удовлетворяющий системе

[illegible]

и условию

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (1.2)$$

при котором функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.3)$$

принимает максимальное значение.

Пример

Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 используют четыре вида ресурсов R1, R2, R3 и R4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на единицу продукции, приведены в Таблице 1 (цифры условные).

Таблица 1 - Исходные данные

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
R1	18	1	3
R2	16	2	1
R3	5	-	1
R4	21	3	-
Прибыль от ед.продукции		2	3

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_1 , x_2 – число единиц продукции соответственно P1 и P2, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется ($1 x_1 + 3 x_2$) единиц ресурса S1 и т.д. Так как потребление ресурсов S1, S2, S3 и S4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и запасами выражается системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21. \end{cases} \quad (1.4)$$

По смыслу задачи переменные положительны

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (1.5)$$

Суммарная прибыль составит

$$F = 2x_1 + 3x_2. \quad (1.6)$$

Итак, цель задачи: найти такой план $X=(x_1, x_2)$ выпуска продукции, удовлетворяющий системе (1.4) и условию (1.5), при котором функция (1.6) принимает максимальное значение.

1.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Множество допустимых решений (многогранник решений) задачи линейного программирования представляет собой выпуклый многогранник (или выпуклую многогранную область), а оптимальное решение задачи находится, по крайней мере, в одной из угловых точек многогранника решений.

Рассмотрим задачу в стандартной форме (1.1)—(1.3) с двумя переменными ($n = 2$). К такой форме может быть сведена и каноническая задача (с ограничениями в виде уравнений), когда число переменных n больше числа уравнений m на 2, т.е. $n - m = 2$.

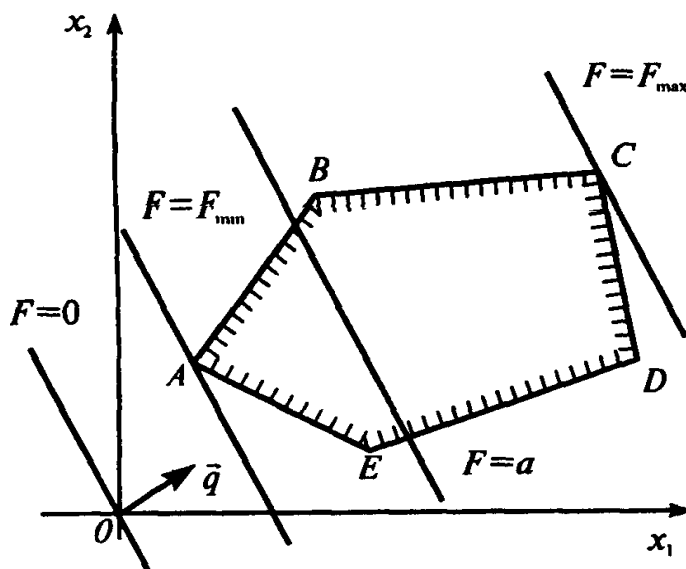


Рисунок 1 – Графическое решение задачи

Пусть геометрическим изображением системы ограничений является многоугольник $ABCDE$ (рисунок 1). Необходимо среди точек этого многоугольника найти такую точку, в которой линейная функция $F = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает максимальное (или минимальное) значение.

Рассмотрим так называемую *линию уровня* линейной функции F , т.е. линию, вдоль которой эта функция принимает одно и то же фиксированное значение a , т.е. $F = a$, или

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a. \quad (1.7)$$

Уравнение линии уровня функции (1.7) есть уравнение прямой линии. При различных уровнях a линии уровня параллельны. Таким образом, линии уровня функции F — это своеобразные "параллели", расположенные обычно под углом к осям координат.

Важное свойство линии уровня линейной функции состоит в том, что при параллельном смещении линии в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую сторону — только убывает.

Для определения направления возрастания рекомендуется изобразить две линии уровня и определить, на которой из них уровень больше. Например, одну из линий можно взять проходящей через начало координат (если линейная функция

имеет вид $F = c_1x_1 + c_2x_2$, т.е. без свободного члена, то это соответствует нулевому уровню). Другую линию можно провести произвольно, так, например, чтобы она проходила через множество решений системы ограничений. Далее, определив направление возрастания линейной функции (обозначим его вектором q), найдем точку, в которой функция принимает максимальное или минимальное значение (на рисунок 1 — это точка C или A).

Пример. Решить геометрически задачу сформулированную ранее:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, (I) \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, (II) \\ x_2 \leq 5, (III) \\ 3x_1 \leq 21, (IV) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (V, VI) \end{cases}$$

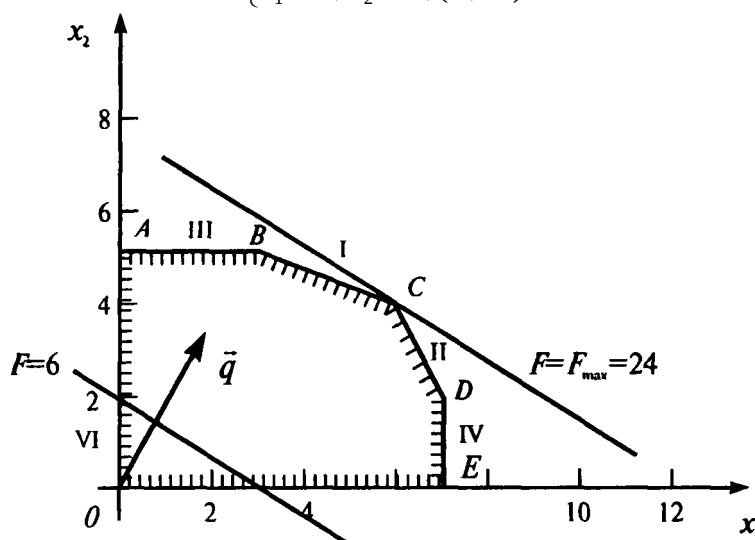


Рисунок 2 – Графическое решение примера

Решение. Изобразим многоугольник решений на рисунке 2. Очевидно, что при $F = 0$ линия уровня $2x_1 + 3x_2 = 0$ проходит через начало координат (строить ее не обязательно). Зададим, например, $F = 6$ и построим линию уровня $2x_1 + 3x_2 = 6$. Ее расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор q). Так как рассматриваемая задача — на отыскание максимума, то оптимальное решение — в угловой точке C , находящейся на пересечении прямых I и II, т.е. координаты точки C определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16, \end{cases} \text{ откуда } x_1 = 6, x_2 = 4, \text{ т.е. } C(6,4).$$

Максимум (максимальное значение) линейной функции равен $F_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$. Итак, $F_{\max} = 24$ при оптимальном решении $x_1 = 6, x_2 = 4$, т.е. максимальная прибыль в 24 руб. может быть достигнута при производстве 6 единиц продукции P_1 и 4 единиц продукции P_2 .

Определяем $\min_i \left\{ \left| \frac{b_i}{a_{is}} \right| \right\}$. Если конечного минимума нет, то задача не имеет

конечного оптимума ($F_{\max} = \infty$). Если минимум конечен, то выбираем строку q , на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее *разрешающей строкой*. На пересечении разрешающих строки и столбца находится *разрешающий элемент* a_{qs} .

V. Переходим к следующей таблице по правилам:

- а) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной x_q — переменную x_s
- б) в столбцах, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы: 1 — против "своей" основной переменной, 0 — против "чужой" основной переменной, 0 — в последней строке для всех основных переменных;
- в) новую строку с номером q получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{qs} ,
- г) все остальные элементы a'_{ij} , вычисляем по *правилу прямоугольника*:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} a_{qj}}{a_{qs}},$$

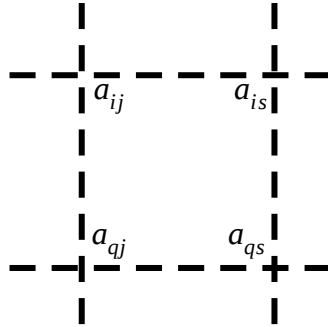
$$b'_i = b_i - \frac{a_{is} b_q}{a_{qs}}$$


Рисунок 3 – правило прямоугольника

Далее переходим к п. III алгоритма.

Пример. Решить задачу об использовании ресурсов с помощью симплексных таблиц.

Решение. Расширенная система задачи имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21. \end{cases}$$

Линейную функцию представим в виде $F - 2x_1 - 3x_2 = 0$. Заполняем первую симплексную таблицу (таблица 2), в которой переменные x_3, x_4, x_5, x_6 основные. Последняя строка заполняется коэффициентами линейной функции с противоположным знаком (см. п. II алгоритма).

Таблица 2 – Первая симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_3	18	1	3	1	0	0	0	18/3
X_4	16	2	1	0	1	0	0	16
X_5	5	0	1	0	0	1	0	5
X_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
F	0	-2	-3	0	0	0	0	

В соответствии с п. III алгоритма проверяем критерий оптимальности. В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем из них наибольший по модулю (-3); второй столбец разрешающий, переменная x_2 перейдет в основные. В соответствии с п. IV находим оценочные отношения и $x_2 = \min\{18/3; 16; 5; \infty\} = 5$. Третья строка является разрешающей. На пересечении разрешающих строки и столбца стоит разрешающий элемент $a_{33} = 1$.

Строим таблицу 3 по правилам п. V алгоритма:

а) в новом базисе основные переменные: x_3, x_4, x_2, x_6

б) расставляем нули и единицы; например, в клетке, соответствующей основной переменной x_3 по столбцу и строке, ставим 1, а в клетке, соответствующей основной переменной x_3 по строке, а основной переменной x_2 — по столбцу, ставим 0 и т.п. В последней строке против всех основных переменных ставим 0. Третья строка получается делением на разрешающий элемент $a_{33} = 1$. Остальные клетки заполняем по правилу прямоугольника. На пример: $b'_1 = 18 - \frac{3 \cdot 5}{1} = 3$, $a'_{11} = 1 - \frac{3 \cdot 0}{1} = 1$ и т.д.

Получим вторую симплексную таблицу (таблица 3).

Таблица 3 – Вторая симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_3	3	1	0	1	0	-3	0	3
X_4	11	2	0	0	1	-1	0	11/2
X_2	5	0	1	0	0	1	0	∞
X_6	21	3	0	0	0	0	1	7
F	15	-2	0	0	0	3	0	

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь первый столбец разрешающий; x_1 — переходит в основные, $\min\{3/1; 11/2; \infty; 7\} = 3$; первая строка разрешающая, a_{11} — разрешающий элемент.

Новая симплексная таблица примет следующий вид:

Таблица 4 – Третья симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_1	3	1	0	1	0	-3	0	ОС
X_4	5	0	0	-2	1	5	0	5/5
X_2	5	0	1	0	0	1	0	5/1
X_6	12	0	0	-3	0	9	1	12/9
F	21	0	0	2	0	-3	0	

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен; пятый столбец и вторая строка разрешающие, $a_{25} = 5$ — разрешающий элемент. Переходим к таблице 5.

Таблица 5 – Четвертая симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_1	6	1	0	-1/5	3/5	0	0	ОС
X_5	1	0	0	-2/5	1/5	1	0	5/5
X_2	4	0	1	2/5	-1/5	0	0	5/1
X_6	3	0	0	3/5	-9/5	0	1	12/9
F	24	0	0	4/5	3/5	0	0	

Критерий оптимальности выполнен, значит $F_{\max} = 24$, оптимальное базисное решение (6;4;0;0;1;3).

1.4. Транспортная задача

Практически все задачи линейного программирования можно решить, используя ту или иную модификацию симплексного метода. Однако существуют более эффективные вычислительные процедуры решения некоторых типов задач линейного программирования, основанные на специфике ограничений этих задач. Рассмотрим так называемую транспортную задачу по критерию стоимости, которую можно сформулировать следующим образом.

В пунктах отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$, которые в дальнейшем будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим a_i ($i=1, 2, \dots, m$). Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим b_j ($j=1, 2, \dots, n$). Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j , которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C=(c_{ij})$.

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, т.е. план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j , через x_{ij} . Совокупность всех переменных x_{ij} , для краткости обозначим $\bar{X}$, тогда целевая функция задачи будет иметь вид:

$$f(\bar{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1.8)$$

а ограничения выглядят следующим образом:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; j = \overline{1, n}, \quad (1.9)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; i = \overline{1, m}, \quad (1.10)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Условия (1.9) означают полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления; условия (1.10) определяют полный вывоз продукции от всех поставщиков.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1.8) — (1.10) является условие баланса:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1.11)$$

Транспортная задача, в которой имеет место равенство (1.11), называется закрытой и может быть решена, как задача линейного программирования с помощью симплексного метода. Однако благодаря особенностям переменных задачи и системы ограничений разработаны специальные, менее громоздкие методы ее решения.

1.5. Метод потенциалов

Наиболее применяемым методом является метод потенциалов, при котором каждой i -й строке (i -му поставщику) устанавливается потенциал u_i , который можно интерпретировать как цену продукта в пункте поставщика, а каждому столбцу j (j -му потребителю) устанавливается потенциал V_j , который можно принять условно за цену продукта в пункте потребителя. В простейшем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пункте поставщика плюс транспортные расходы на его доставку, т.е.

$$v_j = u_i + c_{ij} \quad (1.12)$$

Первым этапом алгоритма метода потенциалов для закрытой транспортной задачи является составление начального распределения (начального плана перевозок). Для реализации этого начального этапа имеется в свою очередь ряд методов: северо-западного угла, наименьших стоимостей, аппроксимаций Фогеля и др. Вторым этапом служат построение системы потенциалов на основе равенства (1.12) и проверка начального плана на оптимальность; в случае его не оптимальности переходят к третьему этапу, содержание которого заключается в реализации так называемых циклов перераспределения (корректировка плана прикрепления потребителей к поставщикам), после чего переходят опять ко второму этапу. Совокупность процедур третьего и второго этапов образует одну итерацию. Эти итерации повторяются, пока план перевозок не окажется оптимальным по критерию (1.8).

Если баланс (1.11) не выполняется, то ограничения (1.9) или (1.10) имеют вид неравенств типа «меньше или равно». Транспортная задача в таком случае называется открытой. Для решения открытой транспортной задачи методом потенциалов ее сводят к закрытой задаче путем ввода или фиктивного потребителя, если в неравенства превращаются условия (1.10), или фиктивного поставщика — в случае превращения в неравенства ограничений (1.9).

Рассмотрим этапы реализации метода потенциалов для закрытой транспортной задачи более подробно. Прежде всего следует отметить, что при условии баланса (1.11) ранг системы линейных уравнений (1.9), (1.10) равен $m + n - 1$. Таким образом из общего числа $m \times n$ неизвестных базисных неизвестных будет $m + n - 1$. Вследствие этого при любом допустимом базисном распределении в матрице перевозок (таблице поставок), представленной в общем виде в табл. 6, будет занято ровно $m + n - 1$ клеток, которые будем называть базисными в отличие от остальных свободных клеток. Занятые клетки будем отмечать диагональной чертой.

Таблица 6 – Матрица перевозок

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} / x_{11}	c_{12} / x_{12}	...	c_{1n} / x_{1n}
a_2	c_{21} / x_{21}	c_{22} / x_{22}	...	c_{2n} / x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} / x_{m1}	c_{m2} / x_{m2}	...	c_{mn} / x_{mn}

Этап 1. Первоначальное закрепление потребителей за поставщиками. Рассмотрим два метода получения начального распределения (начального опорного плана): метод северо-западного угла и метод наименьших стоимостей. При каждом

из этих методов при заполнении некоторой клетки, кроме последней, вычеркивается или только строка матрицы перевозок, или только столбец; лишь при заполнении последней клетки вычеркиваются и строка, и столбец. Такой подход будет гарантировать, что базисных клеток будет ровно $m + n - 1$. Если при заполнении некоторой (не последней) клетки одновременно удовлетворяются мощности и поставщика, и потребителя, то вычеркивается, например, только строка, а в соответствующем столбце заполняется незанятая клетка так называемой «нулевой поставкой», после чего вычеркивается и столбец. Для идентификации клетки обычно в скобках указываются номера ее строки и столбца. В методе северо-западного угла всегда в первую очередь заполняется клетка (из числа невычеркнутых), стоящая в верхнем левом (северо-западном) углу матрицы перевозок. Пример составления начального распределения данным методом показан в табл. 7: заполняется клетка (1;1) и вычеркивается первый столбец, заполняется клетка (1;2) и вычеркивается первая строка; заполняется клетка (2;2) и вычеркивается второй столбец; заполняется клетка (2;3) и вычеркивается вторая строка; заполняется клетка (3;3) и вычеркивается третий столбец; наконец, заполняется клетка (3;4) и вычеркиваются последние строка и столбец. Число занятых клеток равно $m+n-1=3+4-1=6$. Суммарные затраты на реализацию данного плана перевозок составят:

$$f(\bar{X}) = 4 \cdot 30 + 5 \cdot 30 + 3 \cdot 70 + 6 \cdot 30 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 110 = 1170$$

Таблица 7 – Пример составления начального распределения методом северо-западного угла

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	30	100	40	110
60	4 30	5 30	2	3
100	1	3 70	6 30	2
120	6	2	7 10	4 110

Недостатком данного метода является то, что он не учитывает значения элементов c_{ij} матрицы транспортных расходов, в результате чего полученное этим методом начальное распределение (начальный опорный план перевозок) может быть достаточно далеко от оптимального.

В различных модификациях метода наименьших стоимостей заполнение клеток матрицы перевозок проводится с учетом значений величин c_{ij} . Так, в модификации «двойного предпочтения» отмечают клетки с наименьшими стоимостями перевозок сначала по каждой строке, а затем по каждому столбцу. Клетки, имеющие две отметки, заполняют в первую очередь, затем заполняют клетки с одной отметкой, а данные о нераспределенном грузе записывают в неотмеченные клетки с наименьшими стоимостями. При этом из двух клеток с одинаковой стоимостью перевозок предпочтение отдается клетке, через которую осуществляется больший

объем перевозок. Вычеркивание строк и столбцов при заполнении клеток проводится по описанным выше правилам. Пример начального распределения методом наименьших стоимостей для тех же исходных данных, что и ранее, представлен в табл. 8.

Таблица 8 - Пример начального распределения методом наименьших стоимостей

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	30	100	40	110
60	4	5	2	3
100	1	3	6	2
120	6	2	7	4

Порядок заполнения клеток: (2;1), (3;2), (1;3), (2;4), (1;4), (3;4). Суммарные затраты на перевозки, представленные в табл. 3.7, составляют:

$$f(X) = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 70 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 20 = 590.$$

Следовательно, данный план перевозок значительно ближе к оптимальному, чем план, составленный по методу северо-западного угла.

Этап 2. Проверка оптимальности полученного плана перевозок. Введем специальные показатели u_i для каждой строки матрицы перевозок (каждого поставщика), где $i = 1, m$, и показатели V_j для каждого столбца (каждого потребителя), где $j = 1, n$. Эти показатели называются потенциалами поставщиков и потребителей, их удобно интерпретировать как цены продукта в соответствующих пунктах поставщиков и потребителей. Потенциалы подбираются таким образом, чтобы для заполненной клетки $(i;j)$ выполнялось равенство (14). Совокупность уравнений вида (14), составленных для всех заполненных клеток (всех базисных неизвестных), образует систему $m + n - 1$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными u_i и v_j . Эта система всегда совместна, причем значение одного из неизвестных можно задавать произвольно (например, $u_1 = 0$), тогда значения остальных неизвестных находятся из системы однозначно.

Рассмотрим процесс нахождения потенциалов для базисного начального распределения по методу северо-западного угла, представленного в табл. 7. Задав $u_1 = 0$ и используя формулу (14) для заполненных клеток (1;1) и (1;2), находим $v_1 = 4$ и $v_2 = 5$. Зная v_2 , по заполненной клетке (2;2) находим $u_2 = 2$, а зная u_2 , по заполненной клетке (2;3) находим $v_3 = 8$. Зная v_3 , по заполненной клетке (3;3) находим $u_3 = 1$, а затем по заполненной клетке (3;4) находим $v_4 = 5$. Результаты представлены в табл. 9, где потенциалы поставщиков приведены в последнем столбце, а потенциалы потребителей — в последней строке.

Таблица 9 - Нахождение потенциалов для базисного начального распределения по методу северо-западного угла

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				u_i
	30	100	40	110	
60	4 30	5 30	2 30	3	0
100	1	3 70	6 - 30	2	2
120	6	2	7 10	4 110	1
v_j	4	5	8	5	

Смысл прямоугольного контура, проведенного пунктиром в табл. 3.8, и знаков при его вершинах пояснен далее при описании этапа 3 метода потенциалов.

Аналогичные результаты для начального распределения по методу наименьших стоимостей, приведенного в табл. 8, представлены в табл. 10.

Таблица 10 - Нахождение потенциалов для базисного начального распределения по методу наименьших стоимостей

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				u_i
	30	100	40	110	
60	4	5	2 40	3 20	0
100	1 30	3	6	2 70	1
120	6	2 100	7	4 20	-1
v_j	2	1	2	3	

Чтобы оценить оптимальность распределения, для всех клеток $(i;j)$ матрицы перевозок определяются их *оценки*, которые обозначим через d_{ij} , по формуле:

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - v_j \quad (1.13)$$

Используя ранее принятую интерпретацию, выражение $(u_i + c_{ij})$ можно трактовать как сумму цены продукта у поставщика и стоимости перевозки; эта сумма путем вычитания сравнивается с ценой продукта у соответствующего потребителя V_j . Очевидно, оценки заполненных клеток равны нулю (цена потребителя покрывает цену поставщика и стоимость перевозок). Таким образом, об оптимальности распределения можно судить по величинам оценок свободных клеток. Если оценка некоторой свободной клетки отрицательна, это можно интерпретировать так: цена, предлагаемая соответствующим потребителем, больше суммы цены поставщика и стоимости перевозки, т.е. если бы эта клетка была занята,

то можно было бы получить дополнительный экономический эффект. Следовательно, условием оптимальности распределения служит условие неотрицательности оценок свободных клеток матрицы перевозок.

Оценки клеток по формуле (1.13) удобно представить в виде матрицы оценок. Для ранее рассматриваемого распределения, полученного методом северо-западного угла (см. табл. 9), матрица оценок клеток имеет вид:

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Наличие большего числа отрицательных оценок свободных клеток свидетельствует о том, что данный план перевозок далек от оптимального (напомним, что суммарные затраты на перевозку по этому плану равны 1170).

Для распределения, полученного методом наименьших стоимостей (табл. 10), матрица оценок клеток имеет вид:

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как все оценки неотрицательны, то не имеется возможности улучшить данный план перевозок, т.е. он оптимален (суммарные затраты на перевозку по этому плану равны 590). Кроме того, следует отметить, что в данном случае оценки всех свободных клеток строго больше нуля, т.е. любой другой план, предусматривающий занятие хотя бы одной из этих клеток, будет менее оптимален. Это говорит о том, что найденный оптимальный план является единственным. Наличие нулевых оценок свободных клеток в оптимальном плане перевозок, наоборот, свидетельствует о неединственности оптимального плана.

Этап 3. Улучшение неоптимального плана перевозок (циклы перераспределения). Чтобы улучшить неоптимальный план перевозок, выбирается клетка матрицы перевозок с отрицательной оценкой; если таких клеток несколько, то обычно (но необязательно) выбирается клетка с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой. Например, для распределения, представленного в табл. 9, такой клеткой может служить клетка (1;3) (см. матрицу оценок (1.14)).

Для выбранной клетки строится замкнутая линия (контур), начальная вершина которой лежит в выбранной клетке, а все остальные вершины находятся в занятых клетках; при этом направления отдельных отрезков контура могут быть только горизонтальными и вертикальными. Вершиной контура, кроме первой, является занятая клетка, где отрезки контура образуют один прямой угол (нельзя рассматривать как вершины клетки, где горизонтальные и вертикальные отрезки контура пересекаются). Очевидно, число отрезков контура, как и его вершин, будет четным. В вершинах контура расставляются поочередно знаки «+» и «-», начиная со знака «+» в выбранной свободной клетке. Пример простого контура показан

пунктиром в табл. 9, хотя вид контура может быть самым разнообразным (например, контур в табл. 12).

Величина перераспределяемой поставки определяется как наименьшая из величин поставок в вершинах контура со знаком «-», и на эту величину увеличиваются поставки в вершинах со знаком «+» и уменьшаются поставки в вершинах со знаком «-». Это правило гарантирует, что в вершинах контура не появится отрицательных поставок, начальная выбранная клетка окажется занятой, в то время как одна из занятых клеток при этом обязательно освободится. Если величина перераспределяемой поставки равна поставкам не в одной, а в нескольких вершинах контура со знаком «-» (это как раз имеет место в контуре перераспределения в табл. 9), то освобождается только одна клетка, обычно с наибольшей стоимостью перевозки, а все другие такие клетки остаются занятыми с нулевой поставкой.

Результат указанных операций для представленного в табл. 9 распределения поставок показан в табл. 11. Суммарные затраты на перевозки по этому плану составляют

$f(X) = 4 \cdot 30 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 110 = 990$, что значительно меньше предыдущей суммы затрат 1170, хотя план перевозок в табл. 11 еще не является оптимальным. Об этом свидетельствует наличие отрицательных значений в матрице оценок клеток этого плана (соответствующие потенциалы u_i и V_j найдены способом, изложенным при описании этапа 2):

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 5 \\ -3 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица 11 – Результаты решения транспортной задачи методом потенциалов для базисного начального распределения по методу северо-западного угла

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				u_i
	30	100	40	110	
60	4 30	5 0	2 30	3	0
100	1	3 100	6	2	2
120	6	2	7 10	4 110	-5
v_j	4	5	2	-1	

Транспортные задачи, в базисном плане перевозок которых имеют место занятые клетки с нулевой поставкой (или в первоначальном распределении, или в процессе итераций), называются вырожденными; пример такой задачи представлен в табл. 11. В случае вырожденной транспортной задачи существует опасность заикливания, т.е. бесконечного повторения итераций (бесконечного перебора одних и тех же базисных комбинаций занятых клеток). Как правило, в практических задачах транспортного типа заикливание не встречается; тем не менее следует знать, что

существуют специальные правила, позволяющие выйти из цикла, если заикливание все же произойдет. При отсутствии вырождения метод потенциалов конечен и приводит к оптимальному плану перевозок за конечное число шагов.

Пример.

Решим методом потенциалов закрытую транспортную задачу, заданную в табл. 3.11, в которую уже внесено некоторое допустимое базисное распределение. Суммарные транспортные расходы составляют при этом плане перевозок $f(X) = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 15 + 4 \cdot 20 = 230$. Потенциалы по формуле (14) находим следующим образом: задавая $u_1 = 0$, находим по клетке (1;1) $v_1 = 3$, по клетке (1;2) $v_2 = 2$, а по клетке (1;4) $v_4 = 1$; затем по клетке (2;1) находим $u_2 = 1$ и по клетке (2;3) $v_3 = 2$; наконец, по клетке (3;3) находим $u_3 = -2$.

Таблица 12 - Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				u_i
	30	25	35	20	
50	3 + 5	2 - 25	4	1 20	0
40	2 25	3	1 15	5	1
20	3	2 +	4 - 20	4	-2
v_j	3	2	2	1	

Матрица оценок клеток для этого плана рассчитывается по формуле (1.13):

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Наличие отрицательных оценок свидетельствует о том, что план неоптимален. Построим контур перераспределения, например, для клетки (3;2); в табл. 12 он показан пунктиром и его вершинам присвоены соответствующие знаки.

Наименьшая поставка в вершине контура со знаком «-» равна 20, поэтому проведем перераспределение поставок, уменьшив поставки в клетках со знаком «-» на 20 и увеличив поставки в клетках со знаком «+» также на 20; при этом клетка (3;2) заполняется, а клетка (3;3) освобождается. Новый план представлен в табл. 13; соответствующие значения потенциалов показаны в последних столбце и строке.

Матрица оценок клеток этого распределения не содержит отрицательных значений:

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

следовательно, данный план перевозок является оптимальным. Стоимость перевозок по этому плану равна:

$$f(X) = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 20 = 180.$$

Таблица 13 - Результаты решения транспортной задачи методом потенциалов

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				u_i
	30	25	35	20	
50	3 25	2 5	4	1 20	0
40	2 5	3	1 35	5	1
20	3	2 20	4	4	0
v_j	3	2	2	1	

Наличие нулевой оценки незанятой клетки (3;1) говорит о том, что оптимальный план не является единственным. Можно отметить также, что применяя для начального распределения в этой транспортной задаче модификацию двойного предпочтения метода наименьших стоимостей, мы сразу же получили бы оптимальное распределение, представленное в табл. 13.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

2.1. Решение задач линейного программирования графическим и симплекс-методом.

Решить задачу линейного программирования по варианту графическим и симплекс-методом. Сделать выводы.

Вариант 1.

Торговое предприятие продаёт два вида товаров (А и Б) в количествах X_1 и X_2 , используя при этом три вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 420 часов; площадь торгового зала, составляющая 80 кв.м; бумага обёрточная 510 м. Известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчёте на единицу товара и прибыли от их продажи. Требуется определить максимальную прибыль от реализации товаров.

Таблица 14 – Исходные данные

Показатели	Товар А	Товар Б
1.Расход рабочего времени на ед. товара, ч	0.6	0.7
2.Использование площади торгового зала на ед. товара, кв.м	0.1	0.2
3.Расход бумаги на упаковку ед. товара, м	0.6	2.9
4.Прибыль от реализации единицы товара, грн.	5	8

Вариант 2.

Продукцией молокозавода является молоко и сметана, расфасованные в бутылки. На производство одной тонны молока и сметаны расходуется соответственно : 1.01т и 9.45т. молока. Всего для производства молочной продукции завод может использовать 110т молока. На расфасовку 1т сметаны уходит 3.25ч, а на расфасовку 1т молока - 0.18ч. Основное оборудование может быть занято в течении 21.4ч. Тары для упаковки 1т молока необходимо 2000шт., а сметаны - 5000шт. Завод имеет в наличии 150000шт. Определить максимальное количество молокопродуктов, которое может выпустить завод.

Вариант 3.

На определенном предприятии организуется цех для использования остающихся от основного производства материалов. Цех может освоить выпуск продукции 2-х видов : столы и книжные шкафы. Эти виды продукции могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но количество рабочих мест в цехе и ресурсы основных материалов ограничены заданными пределами. Необходимо найти наибольшую возможную сумму прибыли. В таблице 7 приведены исходные числовые данные задачи, включающие нормы затрат и общий имеющийся объём ресурсов, а также величину прибыли за единицу каждого вида продукции.

Таблица 15 – Исходные данные

Вид продукции	Нормы затрат на единицу продукции			Прибыль за ед. прод. грн.
	рабочее время чел-час	Древесина куб.м	Стекло кв.м	
Стол	9.2	0.3	1	3
Шкаф	4	0.6	2	2
Имеющийся объём ресурсов (в месяц)	520	24	60	

Вариант 4.

На швейной фабрике изготавливаются два вида изделий : А и Б, на которые используется три вида ткани. Расход каждого вида ткани на единицу изделия определённого вида дан в таблице. Необходимо определить максимальный выпуск изделий фабрикой, если известно фактическое наличие ткани на фабрике : первого вида - 22000м; второго вида - 9000м; третьего вида - 56000м.

Таблица 16 – Исходные данные

Вид ткани	Расход на единицу	
	А	Б
Первый вид	1	1.5
Второй вид	0.5	0.4
Третий вид	3	4

Вариант 5.

Кондитерская фабрика для производства двух видов карамели (А и Б) использует три вида основного сырья : сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1т карамели данного вида приведена в таблице. Найти максимально возможную прибыль от реализации.

Таблица 17 – Исходные данные

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1т карамели, т		Общее количество сырья, т
	А	Б	
Сахарный песок	0.5	0.6	800
Патока	0.4	0.3	600
Фруктовое пюре	0.1	0.6	120
Прибыль от реализации 1т продукции, грн.	12	26	

Вариант 6.

При откорме животных используют определённые питательные вещества, но в различных пропорциях. Определить, какое максимальное количество может откормить хозяйство, если известно, что оно разводит два вида животных и имеет 60 кг корма А, 50 кг корма Б и 82 кг корма В. Имеются следующие данные о количестве корма каждого вида, необходимом одному животному.

Таблица 18 – Исходные данные

Вид животного	Виды корма		
	А	Б	В
Корова	3	4	7
Свинья	4	2	2

Вариант 7.

На звероферме могут выращиваться чернобурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указано общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации 1 шкурки лисицы и песца. Определить максимально возможную прибыль от реализации шкурок.

Таблица 19 – Исходные данные

Вид корма	Количество ед. корма, которое ежедневно должны получать		Общее кол-во корма
	лисица	песец	
Первый вид	2	3	180
Второй вид	4	1	240
Третий вид	6	7	426
Прибыль	16	12	-

Вариант 8.

Химический состав чугунного литья определяется содержанием в нем химических элементов. Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, для этого должен быть определенный химический состав шихты. Данные о содержании в одной тонне шихты каждого вида определенных химических элементов и о их наличии на предприятии приведены в таблице. Определить максимально возможное количество шихты, используя данные таблицы. Таблица 20 – Исходные данные

Химические элементы	Виды шихты		Запас сырья
	1	2	
Кремний	0.18	0.13	200
Марганец	0.02	0.9	92
Хром	0.9	0.13	650

Вариант 9.

Кондитерская фабрика выпускает два вида изделий : торты и вафли. На производство единицы продукции расходуется определенное количество отдельных видов сырья. Нормы расхода и имеющееся количество сырья каждого вида приведены в таблице.

Таблица 21 – Исходные данные

Вид сырья	Норма расхода сырья на одно изделие		Имеющееся количество сырья
	торты	вафли	
Сахар	0.3	0.1	2000
Масло	0.12	0.02	1000
Мука	0.5	0.1	2200

Зная, что от реализации своих изделий фабрика получает прибыль (а именно : от реализации 1 торта 5 грн., 1 пачки вафель - 1 грн.), определить максимальную прибыль, которую получит фабрика от реализации всей выпущенной продукции.

Вариант 10.

Из двух видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не более 10 единиц химического вещества А, 30 единиц вещества Б, 24 единиц вещества В. Количество единиц вещества, содержащегося в 1кг сырья каждого вида, указано в таблице. Определить максимальное количество смеси, которое можно получить, используя приведенные данные.

Таблица 22 – Исходные данные

Вещество	Количество ед. Вещества, содержащегося в 1кг сырья		Смесь
	1	2	
А	2	0.5	10
Б	2	5	30
В	1	6	24

Вариант 11.

Один из цехов предприятия выпускает детские игрушки двух видов (А и Б). В наличии у цеха имеются следующие материалы : металл (отходы основного производства) в количестве 6000кг, резина - 1000кг, краска - 19000кг. На выпуск одной игрушки А расходуется 0.2кг металла, 0.02кг резины и 0.5кг краски; на выпуск одной игрушки Б расходуется 0.1кг металла, 0.03кг резины и 0.15 кг краски. От реализации одной игрушки А предприятие получает 3 грн. прибыли, от реализации одной игрушки Б - 2.5грн. прибыли. Определите максимально возможную сумму прибыли от реализации всех выпущенных игрушек.

Вариант 12.

Торговое предприятие продаёт два вида товаров (А и Б), используя при этом три вида ресурсов : рабочее время продавцов в количестве 350 часов; площадь торгового зала, составляющая 120 кв.м; бумага обёрточная 720 м.

Известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчёте на единицу товара и прибыли от их продажи. Требуется определить максимальную прибыль от реализации товаров.

Таблица 23 – Исходные данные

Показатели	Товар А	Товар Б
1.Расход рабочего времени на ед. товара, ч	0.5	0.7
2.Использование площади торгового зала на ед. товара, кв.м	0.2	0.2
3.Расход бумаги на упаковку ед. товара, м	1.2	1.5
4.Прибыль от реализации единицы товара, грн.	8	5

Вариант 13.

Продукцией молокозавода является молоко и сметана, расфасованные в бутылки. На производство одной тонны молока и сметаны расходуется соответственно : 1т и 9.5т. молока. Всего для производства молочной продукции завод может использовать 120т молока. На расфасовку 1т сметаны уходит 3..3ч, а на расфасовку 1т молока - 0.2ч Основное оборудование может быть занято в течении 23ч. Тары для упаковки 1т молока необходимо 6000шт., а сметаны -5000шт. Завод имеет в наличии 150000шт. Определить максимальное количество молокопродуктов, которое может выпустить завод.

Вариант 14.

На определенном предприятии организуется цех для использования остающихся от основного производства материалов. Цех может освоить выпуск продукции 2-х видов : столы и книжные шкафы. Эти виды продукции могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но количество рабочих мест в цехе и ресурсы основных материалов ограничены заданными пределами. Необходимо найти наибольшую возможную сумму прибыли. В таблице приведены исходные числовые данные задачи, включающие нормы затрат и общий имеющийся объём ресурсов, а также величину прибыли за единицу каждого вида продукции.

Таблица 24 – Исходные данные

Вид продукции	Нормы затрат на единицу продукции			Прибыль за ед. прод. грн.
	рабочее время чел-час	древесина куб.м	стекло кв.м	
Стол	10	0.5	2	4
Шкаф	11	0.5	1	3
Имеющийся объём ресурсов (в месяц)	600	30	60	

Вариант 15.

На швейной фабрике изготавливаются два вида изделий : А и Б, на которые используется три вида ткани. Расход каждого вида ткани на единицу изделия определённого вида дан в таблице. Необходимо определить максимальный выпуск изделий фабрикой, если известно фактическое наличие ткани на фабрике : первого вида - 20000м; второго вида - 10000м; третьего вида - 60000м.

Таблица 25 – Исходные данные

Вид ткани	Расход на единицу	
	А	Б
Первый вид	1.5	2
Второй вид	0.4	0.6
Третий вид	5	4

Вариант 16.

Кондитерская фабрика для производства двух видов карамели (А и Б) использует три вида основного сырья : сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1т карамели данного вида приведена в таблице. Найти максимально возможную прибыль от реализации.

Таблица 26 – Исходные данные

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1т карамели, т		Общее количество сырья, т
	А	Б	
Сахарный песок	0.5	0.4	800
Патока	0.4	0.4	700
Фруктовое пюре	0.2	0.4	350
Прибыль от реализации 1т продукции, грн.	20	25	

Вариант 17.

При откорме животных используют определённые питательные вещества, но в различных пропорциях. Определить, какое максимальное количество может откормить хозяйство, если известно, что оно разводит два вида животных и имеет 70 кг корма А, 60 кг корма Б и 90 кг корма В. Имеются следующие данные о количестве корма каждого вида, необходимом одному животному.

Таблица 27 – Исходные данные

Вид животного	Виды корма		
	А	Б	В
Корова	4	5	8
Свинья	5	3	3

Вариант 18.

На звероферме могут выращиваться чернобурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указано общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации 1 шкурки лисицы и песца. Определить максимально возможную прибыль от реализации шкурок.

Таблица 28 – Исходные данные

Вид корма	Количество ед. корма, которое ежедневно должны получать		Общее кол-во корма
	лисица	песец	
Первый вид	3	4	220
Второй вид	5	2	300
Третий вид	7	8	500
Прибыль от реализации	15	14	-

Вариант 19.

Химический состав чугунного литья определяется содержанием в нем химических элементов. Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, для этого должен быть определенный химический состав шихты. Данные о содержании в одной тонне шихты каждого вида определённых химических элементов и о их наличии на предприятии приведены в таблице. Определить максимально возможное количество шихты, используя данные таблицы.

Таблица 29 – Исходные данные

Химические элементы	Виды шихты		Запас сырья
	1	2	
Кремний	0.2	0.15	300
Марганец	0.01	1	100
Хром	0.8	0.15	700

Вариант 20.

Кондитерская фабрика выпускает два вида изделий : торты и вафли. На производство единицы продукции расходуется определённое количество отдельных видов сырья. Нормы расхода и имеющееся количество сырья каждого вида приведены в таблице.

Зная, что от реализации своих изделий фабрика получает прибыль (а именно: от реализации 1 торта - 6 грн., 1 пачки вафель - 3 грн.), определить максимальную прибыль, которую получит фабрика от реализации всей выпущенной продукции.

Таблица 30 – Исходные данные

Вид сырья	Норма расхода сырья на одно изделие		Имеющееся количество сырья
	торты	вафли	
Сахар	0.5	0.5	2500
Масло	0.1	0.02	1000
Мука	0.5	0.2	3000

Вариант 21.

Из двух видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не более 20 единиц химического вещества А, 40 единиц вещества Б, 30 единиц вещества В. Количество единиц вещества, содержащегося в 1кг сырья каждого вида, указано в таблице. Определить максимальное количество смеси, которое можно получить, используя приведенные данные.

Таблица 31 – Исходные данные

Вещество	Количество ед. Вещества, содержащегося в 1кг сырья		Смесь
	1	2	
А	3	1	20
Б	3	6	40
В	2	7	30

Вариант 22.

Один из цехов предприятия выпускает детские игрушки двух видов (А и Б). В наличии у цеха имеются следующие материалы : металл (отходы основного производства) в количестве 6000кг, резина - 2000кг, краска - 20000кг. На выпуск одной игрушки А расходуется 0.2кг металла, 0.05кг резины и 0.4кг краски; на выпуск одной игрушки Б расходуется 0.2кг металла, 0.04кг резины и 0.2 кг краски. От реализации одной игрушки А предприятие получает 4 грн. прибыли, от реализации одной игрушки Б - 3грн. прибыли. Определите максимально возможную сумму прибыли от реализации всех выпущенных игрушек.

2.2. Решить транспортную задачу методом потенциалов

Решить транспортную задачу методом потенциалов. Сделать выводы. Исходные данные сведены в таблицу, где $A_1, A_2, \dots, A_m$,- поставщики, у которых сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта a_i ($i=1, 2, \dots, m$). Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим b_j ($j=1, 2, \dots, n$). Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта – A_i в пункт B_j , которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C=(c_{ij})$.

	B1	B2	B3	B4	a
A1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	a_1
A2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	a_2
A3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_3
b	b_1	b_2	b_3	b_4	

Вариант 1

	B1	B2	B3	B4	a
A1	1	3	2	2	15
A2	2	2	3	1	7
A3	3	1	2	3	8
B	10	12	5	3	

Вариант 2

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	2	1	2	5
A2	3	1	2	1	6
A3	1	1	2	2	3
B	3	5	2	4	

Вариант 3

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	3	2	1	3
A2	4	2	2	3	8
A3	1	3	3	2	5
B	5	4	5	2	

Вариант 9

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	3	3	1	10
A2	1	2	3	2	7
A3	2	3	2	2	13
B	5	5	10	10	

Вариант 4

	B1	B2	B3	B4	a
A1	1	1	3	1	5
A2	2	3	2	2	4
A3	2	1	2	2	2
B	2	3	2	4	

Вариант 10

	B1	B2	B3	B4	a
A1	5	5	6	5	20
A2	6	3	4	3	15
A3	4	4	3	6	10
B	10	5	10	20	

Вариант 5

	B1	B2	B3	B4	a
A1	5	3	3	4	5
A2	4	5	4	5	15
A3	3	5	3	3	10
B	10	5	10	5	

Вариант 11

	B1	B2	B3	B4	A
A1	3	4	5	4	10
A2	5	3	4	5	6
A3	3	5	4	3	4
B	5	5	5	5	

Вариант 6

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	1	1	2	7
A2	3	3	2	2	6
A3	1	3	1	2	2
B	3	3	4	5	

Вариант 12

	B1	B2	B3	B4	a
A1	3	4	2	3	15
A2	2	3	2	4	15
A3	3	3	2	3	15
B	10	5	10	20	

Вариант 7

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	1	1	3	2
A2	3	3	2	2	6
A3	1	3	1	1	4
B	3	4	3	2	

Вариант 13

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	3	1	3	5
A2	1	2	2	2	6
A3	1	2	2	2	4
B	4	4	4	3	

Вариант 8

	B1	B2	B3	B4	a
A1	4	4	7	6	10
A2	6	5	5	4	11
A3	5	8	3	7	3
B	6	8	2	8	

Вариант 14

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	3	1	3	6
A2	1	2	2	2	5
A3	3	2	2	2	4
B	3	4	4	4	

Вариант 15

	B1	B2	B3	B4	a
A1	4	4	7	6	8
A2	6	3	5	4	12
A3	5	8	5	7	5
B	6	7	5	7	

Вариант 20

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	2	1	3	25
A2	1	1	3	2	30
A3	3	4	2	3	45
B	20	25	30	25	

Вариант 16

	B1	B2	B3	B4	a
A1	4	4	3	6	10
A2	6	5	5	4	11
A3	5	8	4	7	6
B	7	8	3	9	

Вариант 23

	B1	B2	B3	B4	a
A1	2	2	5	2	5
A2	3	1	2	1	8
A3	5	4	4	6	5
B	7	5	2	4	

Вариант 17

	B1	B2	B3	B4	a
A1	5	5	6	5	11
A2	6	3	4	3	16
A3	7	4	7	6	3
B	12	5	11	2	

Вариант 24

	B1	B2	B3	B4	a
A1	1	1	3	4	5
A2	2	3	2	2	4
A3	4	1	1	2	2
B	2	2	2	5	

Вариант 18

	B1	B2	B3	B4	a
A1	5	5	6	5	10
A2	6	3	4	3	6
A3	7	4	7	6	4
B	7	3	5	5	

Вариант 21

	B1	B2	B3	B4	a
A1	4	5	4	6	15
A2	4	4	3	5	35
A3	5	4	6	3	10
B	5	30	20	5	

Вариант 19

	B1	B2	B3	B4	a
A1	3	4	5	3	15
A2	2	3	2	4	15
A3	5	3	5	3	15
B	12	6	17	10	

Вариант 22

	B1	B2	B3	B4	a
A1	4	3	2	5	15
A2	2	2	3	6	7
A3	3	1	2	3	8
B	10	15	3	2	

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- 1) Цель работы;
- 2) постановка задачи;
- 3) решение задач линейного программирования графическим и симплекс-методом;
- 4) решение транспортной задачи методом потенциалов;
- 5) выводы по выполнению работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1) Что такое математическая модель экономической системы?
- 2) Для решения какого типа задач используется линейное программирование?
- 3) Сформулируйте основную задачу линейного программирования?
- 4) Приведите экономическую интерпретацию двойственной задачи об использовании ресурсов?
- 5) Раскройте последовательность построения двойственной задачи?
- 6) Опишите алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом?
- 7) В чем заключается суть симплекс-метода?
- 8) Как выбирают разрешающие столбец и строку при решении задач линейного программирования методом симплекс - таблиц?
- 9) Как установить оптимальность допустимого базисного решения?
- 10) Опишите методы нахождения первоначального базисного распределения поставок?
- 11) В чем заключается суть метода потенциалов?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов.- М.:ИНФРА, 2003.-444с.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие для вузов /В.В.Федосеев [и др.]. –М.: ЮНИТИ, 1999.-391с.
3. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций. / П.В. Конюховский.- СПб.: Питер, 2001.-192с.
4. Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов /Н.Ш.Кремер [и др.]. –М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.-407с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С.Вентцель.- М.:Сов.радио, 1972.- 551с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология/ Е.С.Вентцель.- М.: Наука,- 1988.-206с.
7. Вагнер Г. Основы исследования операций. / Г. Вагнер.- М.: Мир,- 1972.- 345с.

Заказ № 184 от « 28 » ноября 2014. Тираж 50 экз.

Изд-во СевГУ