

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Севастопольский государственный университет»**

**РАСЧЕТ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
И ЭНТРОПИИ НЕПРЕРЫВНОЙ
СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ**

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
для студентов, обучающихся по направлению
6.050101 “Компьютерные науки” очной и заочной
форм обучения

**Севастополь
2012**

УДК 621.391

Расчет числовых характеристик и энтропии непрерывной случайной величины: методические указания к лабораторной работе №2 по дисциплине «Специальные разделы теории информации» для студентов направления 6.050101 «Компьютерные науки» / Сост. **С.В. Доценко, Ю.В. Коваленко, С.А. Кузнецов.** – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. – 21 с.

Цель указаний: оказание помощи студентам направления 6.050101 «Компьютерные науки» при выполнении лабораторной работы №2 по дисциплине «Специальные разделы теории информации» в интегрированной среде MAPLE.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Специальные разделы теории информации» для студентов направления 6.050101 «Компьютерные науки» и утверждены на заседании кафедры «Информационные системы» протоколом № 8 от 5 декабря 2012 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: профессор кафедры Технической кибернетики Скороход Б.А.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	4
2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	4
2.1 Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей.	4
2.2 Числовые характеристики непрерывной случайной величины...	5
2.3 Дифференциальная энтропия.....	6
2.4 Некоторые законы распределения непрерывной случайной величины	6
3. ПРОГРАММА И МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	8
4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ.....	9
СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА	22
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	22
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	22

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1.1 Изучение способов описания *непрерывных случайных величин*.
- 1.2 Приобретение практических навыков расчета *числовых характеристик и энтропии* непрерывной случайной величины по ее *плотности распределения вероятности*.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей.

Случайные величины, возможные значения которых *непрерывно* заполняют некоторый промежуток, называются *непрерывными случайными величинами*. Для непрерывных случайных величин справедливо следующее положение: *вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*. Механическая интерпретация непрерывной случайной величины сводится к *непрерывному* распределению единичной массы (суммарной вероятности, равной единице) по оси абсцисс, причем *ни одна* точка не обладает конечной массой. Подавляющее число непрерывных случайных величин, встречающихся в задачах практики, имеют *непрерывный и дифференцируемый* интегральный закон распределения $F(x)$.

Пусть имеется непрерывная случайная величина ξ с интегральной функцией распределения $F(x)$, которая является непрерывной и дифференцируемой. Функция

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) \quad (2.1)$$

носит название *плотность распределения вероятностей*. Иногда функцию $p(x)$ называют *дифференциальной функцией распределения* или *дифференциальным законом распределения*. С точки зрения механической интерпретации распределения функция $p(x)$ характеризует *линейную плотность* распределения единичной массы по оси абсцисс.

Вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[x_1, x_2]$ можно выразить через плотность вероятности $p(x)$ следующим образом:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx. \quad (2.2)$$

Зная дифференциальный закон распределения, можно получить интегральный закон:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx. \quad (2.3)$$

Плотность распределения вероятностей обладает следующими основными свойствами:

- 1) условие неотрицательности: $p(x) \geq 0$,
- 2) условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1. \quad (2.4)$$

2.2 Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Начальным моментом s -го порядка непрерывной случайной величины ξ называется интеграл вида

$$\alpha_s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s p(x) dx. \quad (2.5)$$

Первый начальный момент случайной величины ξ называется ее *математическим ожиданием*:

$$\alpha_1(\xi) = M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \quad (2.6)$$

Центральным моментом s -го порядка непрерывной случайной величины ξ называется интеграл вида

$$\mu_s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^s p(x) dx. \quad (2.7)$$

Второй центральный момент случайной величины ξ называется ее дисперсией:

$$\mu_2(\xi) = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^2 p(x) dx. \quad (2.8)$$

Такие числовые характеристики как *среднее квадратическое отклонение*, *коэффициент асимметрии* и *коэффициент эксцесса* для непрерывных случайных величин определяются *аналогично* соответствующим числовым характеристикам дискретных случайных величин (см. методические указания к лабораторной работе №1).

2.3 Дифференциальная энтропия

Дифференциальной энтропией непрерывной случайной величины ξ , характеризуемой плотностью вероятности $p(x)$, называется величина

$$H(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx. \quad (2.9)$$

Дифференциальная энтропия является мерой априорной неопределенности непрерывной случайной величины.

В отличие от энтропии дискретной случайной величины дифференциальная энтропия является *относительной* мерой неопределенности. Ее значение зависит от масштаба случайной величины, а, следовательно, и от выбора единицы измерения. Дифференциальная энтропия может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Как и энтропия дискретной случайной величины, дифференциальная энтропия не зависит от математического ожидания случайной величины.

2.4 Некоторые законы распределения непрерывной случайной величины

1. Закон арксинуса

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty), \\ \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, & x \in (-a, a), \end{cases} \quad (2.10)$$

где $a > 0$.

2. Экспоненциальный односторонний закон

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ ae^{-ax}, & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (2.11)$$

где $a > 0$.

3. Показательно-степенной закон

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (2.12)$$

где m – целое неотрицательное число.

4. Закон Рэлея

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (2.13)$$

где $\sigma > 0$.

5. Закон Максвелла

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{4x^2}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (2.14)$$

где $\sigma > 0$.

6. Логарифмически-нормальный закон

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (2.15)$$

где $\sigma > 0$.

3. ПРОГРАММА И МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя вариант задания.
2. Написать функцию, определяющую *распределение вероятностей непрерывной случайной величины* в соответствии с заданным законом распределения.
3. Проверить *условие нормировки*.
4. Написать функцию для определения *начального момента s-го порядка*. Выписать соответствующую формулу.
5. Найти *начальный момент нулевого порядка*. Объяснить результат.
6. Написать функцию для определения *математического ожидания*. Выписать соответствующую формулу.
7. Построить графики зависимости математического ожидания от параметров распределения.
8. Написать функцию для определения *центрального момента s-го порядка*. Выписать соответствующую формулу.
9. Найти *центральный момент нулевого порядка*. Объяснить результат.
10. Найти *центральный момент первого порядка*. Объяснить результат.
11. Написать функцию для определения *дисперсии*. Выписать соответствующую формулу.
12. Построить графики зависимости дисперсии от параметров распределения.
13. Написать функцию для определения *среднего квадратического отклонения*. Выписать соответствующую формулу.
14. Построить графики зависимости среднего квадратического отклонения от параметров распределения.
15. Написать функцию для определения *коэффициента асимметрии*. Выписать соответствующую формулу.
16. Построить графики зависимости коэффициента асимметрии от параметров распределения.
17. Написать функцию для определения *коэффициента эксцесса*. Выписать соответствующую формулу.
18. Построить графики зависимости коэффициента эксцесса от параметров распределения.

19. Построить графики распределения вероятностей для разных параметров распределения.
20. Написать функцию, определяющую *интегральный закон распределения* непрерывной случайной величины, подчиненной заданному закону распределения.
21. Построить графики интегрального закона распределения для разных параметров распределения.
22. Написать функцию для вычисления *энтропии*.
23. Построить графики зависимости энтропии от параметров распределения.
24. Сделать развернутые выводы по результатам исследований.

4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ.

Распределение непрерывной случайной величины, подчиненной логарифмически-нормальному закону, описывается формулой (2.15).

4.1 Опишем *ограничения*, накладываемые на параметры распределения (2.15)

```
> assume(x>0); # при x<0 плотность вероятности равна нулю
> assume(sigma>0); # параметр логнормального распределения
```

4.2 Проверка ограничений

```
> about(x,sigma);
Originally x, renamed x~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)

Originally sigma, renamed sigma~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)
```

4.3 Напишем функцию, определяющую *плотность распределения вероятностей* (2.15)

```
> p:=(x,sigma,mu)->(1/(sqrt(2*Pi)*sigma*x))*exp(-(ln(x)-mu)^2/(2*(sigma^2)));
```

$$p := (x, \sigma, \mu) \rightarrow \frac{e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{(\ln(x) - \mu)^2}{\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2 \pi \sigma x}}$$

4.4 Выполним проверку условия нормировки

```
> int(p(x,sigma,mu),x=0..infinity); # проверка условия нормировки
1
```

4.5 Напишем функцию для определения *начального момента s-го порядка*

Очевидно, с учетом (2.15) выражение для начального момента s-го порядка (2.5) можно записать в виде

$$\alpha_s(\sigma, \mu) = \int_0^{\infty} x^s p(x, \sigma, \mu) dx. \quad (2.16)$$

```
> alpha:=(sigma,mu,s)->int((x^s)*p(x,sigma,mu),x=0..infinity); #
начальный момент s-го порядка
```

$$\alpha := (\sigma, \mu, s) \rightarrow \int_0^{\infty} x^s p(x, \sigma, \mu) dx$$

```
> simplify(alpha(sigma,mu,s));
e(1/2 s (sigma^2 + 2 mu))
```

Итак, для начального момента s-го порядка можно выписать следующую формулу:

$$\alpha_s(\sigma, \mu) = \exp\left[\frac{s}{2}(\sigma^2 + 2\mu)\right]. \quad (2.17)$$

4.6 Найдем начальный момент нулевого порядка

```
> alpha(sigma,mu,0); # начальный момент нулевого порядка
1
```

```
> # соответствует условию нормировки
```

4.7 Напишем функцию для определения *математического ожидания*

```
> M:=(sigma,mu)->alpha(sigma,mu,1); # математическое ожидание
M:=(sigma,mu)->alpha(sigma,mu,1)
```

```
> simplify(M(sigma,mu));
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
e(mu+1/2 sigma^2)
```

Таким образом, для математического ожидания справедливо выражение

$$M(\sigma, \mu) = \alpha_1(\sigma, \mu) = \exp(\mu + \sigma^2/2). \quad (2.18)$$

4.8 Построим график зависимости математического ожидания от параметров σ и μ распределения

```
> plot3d(M(sigma,mu),sigma=0..1.2,mu=-
2..2,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,14],
labels=["sigma","mu","M"],orientation=[225,50],shading=ZGRAYSCALE,
title="график зависимости МО от параметров\логнормального
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.1.



Рисунок 1.1 – График зависимости математического ожидания от параметров σ и μ логнормального распределения

4.9 Напишем функцию для определения *центрального момента s-го порядка*

Очевидно, с учетом (2.15) выражение для центрального момента s-го порядка (2.7) можно записать в виде

$$\mu_s(\sigma, \mu) = \int_0^{\infty} [x - M(\sigma, \mu)]^s p(x, \sigma, \mu) dx. \quad (2.19)$$

```
> mu:=(sigma,mu,s)->int((x-
M(sigma,mu))^s*p(x,sigma,mu),x=0..infinity); # центральный момент
s-го порядка
```

$$\mu := (\sigma, \mu, s) \rightarrow \int_0^{\infty} (x - M(\sigma, \mu))^s p(x, \sigma, \mu) dx$$

```
> simplify(mu(sigma,mu,s));
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(x - e^{(1/2 \sigma^2 + \mu)})^s}{\sqrt{\pi} \sigma x} \sqrt{2} e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{(\ln(x) - \mu)^2}{\sigma^2}\right)} dx$$

4.10 Найдем центральный момент нулевого порядка

```
> simplify(mu(sigma,mu,0)); # центральный момент нулевого порядка
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
1
```

4.11 Найдем центральный момент первого порядка

```
> simplify(mu(sigma,mu,1)); # центральный момент первого порядка
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu
Will now try indefinite integration and then take limits.
0
```

4.12 Напишем функцию для определения дисперсии

```
> Dsp:=(sigma,mu)->mu(sigma,mu,2); # дисперсия
Dsp := (σ, μ) → μ(σ, μ, 2)

> simplify(Dsp(sigma,mu));
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+2
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu
Will now try indefinite integration and then take limits.
e^(2μ+2σ^2) - e^(σ^2+2μ)
```

Итак, оказалось, что для дисперсии справедливо следующее выражение:

$$D(\sigma, \mu) = \mu_2(\sigma, \mu) = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]. \quad (2.20)$$

4.13 Построим график зависимости дисперсии от параметров σ и μ распределения

```
> plot3d(Dsp(sigma,mu),sigma=0..1,mu=-
0.8..0.8,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["sigma","mu","D"],orientation=[200,50],shading=ZGRAYSC
ALE,title="график зависимости дисперсии от
параметров\нлогнормального
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.2.

график зависимости дисперсии от параметров
логнормального распределения

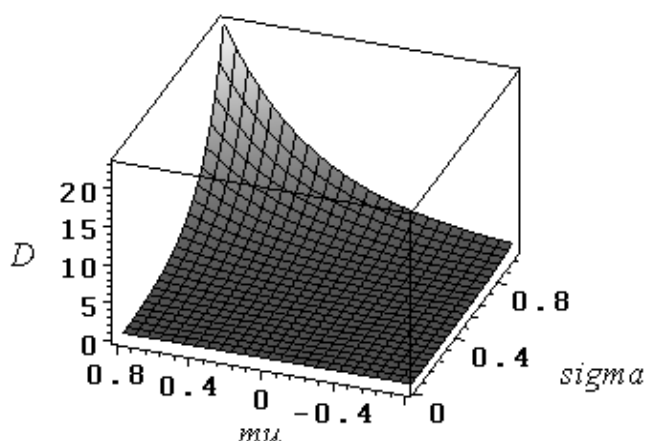


Рисунок 1.2 – График зависимости дисперсии
от параметров σ и μ логнормального распределения

4.14 Напишем функцию для определения *среднего квадратического отклонения*

```
> Sko:=(sigma,mu)->(Dsp(sigma,mu))^(1/2);
      Sko := ( $\sigma$ ,  $\mu$ )  $\rightarrow \sqrt{Dsp(\sigma, \mu)}$ 
```

```
> simplify(Sko(sigma,mu));
```

Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> $1/\sigma^2\mu+1$

Will now try indefinite integration and then take limits.

Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> $1/\sigma^2\mu+2$

Will now try indefinite integration and then take limits.

Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> $1/\sigma^2\mu+1$

Will now try indefinite integration and then take limits.

Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> $1/\sigma^2\mu$

Will now try indefinite integration and then take limits.

$$\sqrt{e^{(\sigma^2)} - 1} \sqrt{e^{(\sigma^2 + 2\mu)}}$$

Для определения среднего квадратического отклонения можно выписать следующее выражение:

$$Sko(\sigma, \mu) = \sqrt{D(\sigma, \mu)} = \sqrt{\exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]}. \quad (2.21)$$

4.15 Построим график зависимости среднего квадратического отклонения от параметров σ и μ распределения

```
> plot3d(Sko(sigma,mu),sigma=0..1,mu=-
0.8..0.8,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["sigma","mu","CKO"],orientation=[200,50],shading=ZGRAY
SCALE,title="график зависимости CKO от параметров\нлогнормального
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.3.

график зависимости CKO от параметров
логнормального распределения

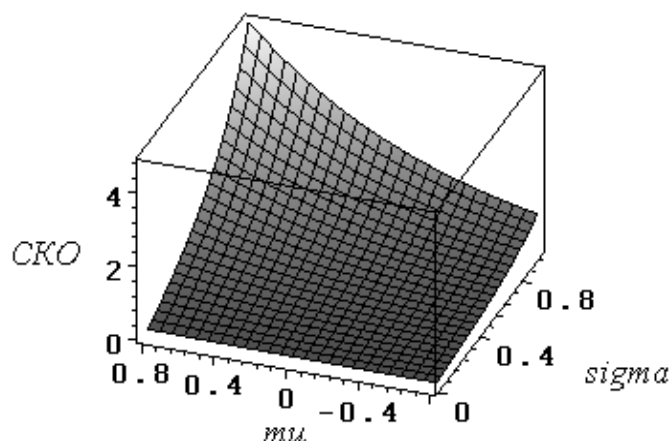


Рисунок 1.3 – График зависимости CKO
от параметров σ и μ логнормального распределения

4.16 Напишем функцию для определения *коэффициента асимметрии*

```
> Sk:=(sigma,mu)->mu(sigma,mu,3)/((Sko(sigma,mu))^3); #
коэффициент асимметрии
```

$$Sk:=(\sigma, \mu) \rightarrow \frac{\mu(\sigma, \mu, 3)}{Sko(\sigma, \mu)^3}$$

```
> simplify(Sk(sigma,mu));
```

$$\frac{(e^{(9/2 \sigma^2 + 3 \mu)} - 3 e^{(5/2 \sigma^2 + 3 \mu)} + 2 e^{(3 \mu + 3/2 \sigma^2)}) e^{(-3/2 \sigma^2)}}{\sqrt{e^{(6 \mu)}} (e^{(\sigma^2)} - 1)^{(3/2)}}$$

Очевидно, для коэффициента асимметрии можно выписать следующую формулу:

$$Sk(\sigma, \mu) = \frac{\mu_3(\sigma, \mu)}{[Sko(\sigma, \mu)]^3} = \frac{\exp(\sigma^2) [\exp(2\sigma^2) - 3] + 2}{[\exp(\sigma^2) - 1]^{3/2}}. \quad (2.22)$$

Оказывается, что коэффициент асимметрии непрерывной случайной величины, распределенной по логнормальному закону, зависит только от параметра σ и не зависит от параметра μ . При $\sigma = 0$ распределение расположено симметрично относительно математического ожидания; при $\sigma > 0$ распределение имеет положительную асимметрию («скошено влево» относительно математического ожидания).

4.17 Построим график зависимости коэффициента асимметрии от параметра σ распределения

```
>
plot(Sk1(sigma), sigma=0..2, axes=BOXED, axesfont=[COURIER,BOLD,12], c
olor=black, font=[TIMES,ITALIC,14], labels=["sigma", "Sk"], linestyle=
[SOLID,DOT,DASHDOT], thickness=2, title="графики зависимости коэф.
асимметрии\n от параметра sigma\nлогнормального
распределения", titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.4.

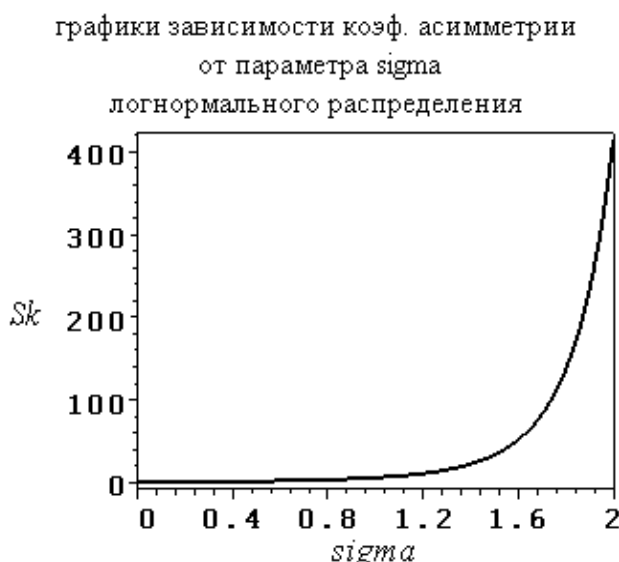


Рисунок 1.4 – График зависимости коэффициента асимметрии от параметра σ логнормального распределения

4.18 Напишем функцию для определения коэффициента эксцесса

```
> Ex:=(sigma,mu)->(mu(sigma,mu,4)/((Sko(sigma,mu))^4))-3; #
коэффициент эксцесса
```

$$Ex := (\sigma, \mu) \rightarrow \frac{\mu(\sigma, \mu, 4)}{Sko(\sigma, \mu)^4} - 3$$

```
> simplify(Ex(sigma,mu));
```

$$-\frac{e^{(8\sigma^2+4\mu)} + 4e^{(4\mu+5\sigma^2)} - 12e^{(4\mu+3\sigma^2)} + 6e^{(4\mu+2\sigma^2)} + 3e^{(4\mu+4\sigma^2)}}{(e^{(2\mu+2\sigma^2)} + e^{(2\mu+\sigma^2)})^2}$$

Очевидно, для коэффициента эксцесса можно выписать следующую формулу:

$$Ex(\sigma, \mu) = \frac{\mu_4(\sigma, \mu)}{[Sko(\sigma, \mu)]^4} - 3 = \frac{\exp(6\sigma^2) - 4\exp(3\sigma^2) - 3\exp(2\sigma^2) + 12\exp(\sigma^2) - 6}{[\exp(\sigma^2) - 1]^2}. \quad (2.23)$$

Таким образом, коэффициент эксцесса непрерывной случайной величины, распределенной по логнормальному закону, как и коэффициент асимметрии, зависит только от параметра σ и не зависит от параметра μ . При $\sigma = 0$ островершинность распределения такая же, как и для соответствующего нормального распределения; при $\sigma > 0$ островершинность логнормального распределения превосходит островершинность соответствующего нормального распределения.

4.19 Построим график зависимости коэффициента эксцесса от параметра σ распределения

```
>
plot(Ex1(sigma), sigma=0..1, axes=BOXED, axesfont=[COURIER,BOLD,12], c
olor=black, font=[TIMES,ITALIC,14], labels=["sigma", "Ex"], linestyle=
[SOLID,DOT,DASHDOT], thickness=2, title="графики зависимости коэф.
эксцесса\n от параметра sigma\nлогнормального
распределения", titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.5.

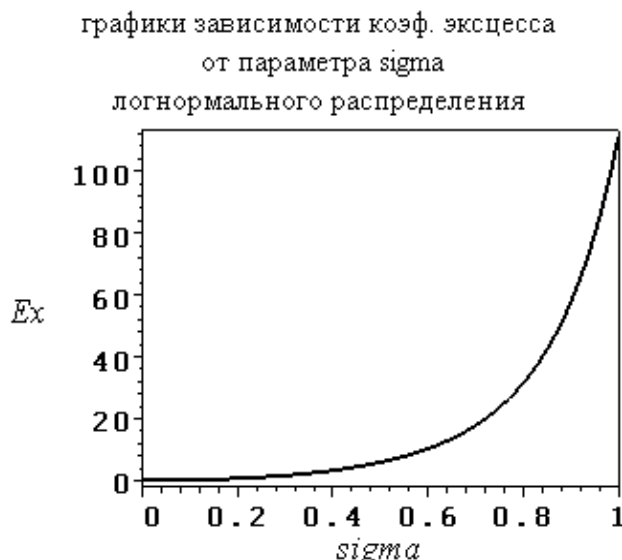


Рисунок 1.5 – График зависимости коэффициента эксцесса от параметра σ логнормального распределения

4.20 Построим графики плотности распределения вероятностей для различных значений параметров σ и μ

```
> plot3d(p(x,0.1,mu),x=0.4..1.5,mu=-
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["x","mu","p(x)"],orientation=[220,45],shading=ZGRAYSCALE,title="плотность распределения
вероятностей",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.6.

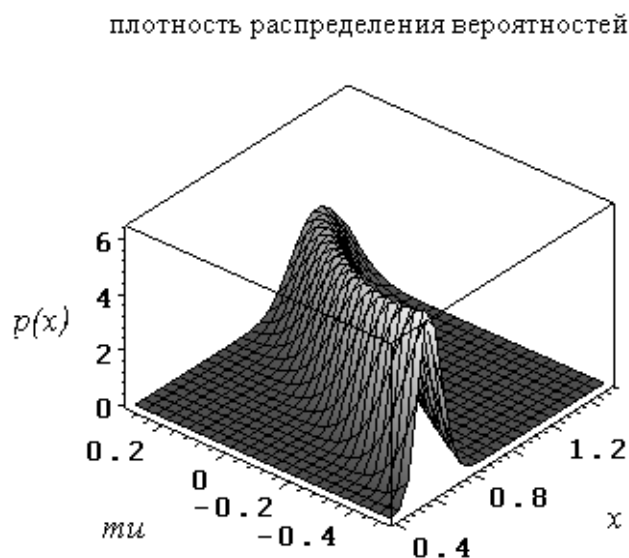


Рисунок 1.6 – График плотности распределения вероятностей, $\sigma = 0,1$

```
> plot3d(p(x,0.7,mu),x=0..3,mu=-
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["x","mu","p(x)"],orientation=[250,55],shading=ZGRAYSCALE,title="плотность распределения
вероятностей",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.7.



Рисунок 1.7 – График плотности распределения вероятностей, $\sigma = 0,7$

```
> plot3d(p(x,1,mu),x=0..2,mu=-
0.3..1,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,14],
labels=["x","mu","p(x)"],orientation=[240,50],shading=ZGRAYSCALE,
title="плотность распределения
вероятностей",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.8.



Рисунок 1.8 – График плотности распределения вероятностей, $\sigma = 1$

4.21 Напишем функцию, определяющую *интегральный закон распределения* непрерывной случайной величины, распределенной по логнормальному закону

```
> F:=(x,sigma,mu)->int(p(chi,sigma,mu),chi=0..x); > #
интегральный закон распределения
```

$$F := (x, \sigma, \mu) \rightarrow \int_0^x p(\chi, \sigma, \mu) d\chi$$

```
> simplify(F(x,sigma,mu)); >
simplify(F(0,sigma,mu));simplify(F(infinity,sigma,mu));
```

$$\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} (\ln(x) - \mu)}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}$$

0
1

Таким образом, для интегральной функции можно выписать следующую формулу:

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2}, \quad (2.24)$$

где $erf(x)$ – интеграл вероятностей.

4.22 Построим графики интегральной функции для различных значений параметров σ и μ

```
> plot3d(F(x,0.1,mu),x=0.4..1.5,mu=-  
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,  
14],labels=["x","mu","F(x)"],orientation=[220,45],shading=ZGRAYSCALE,  
title="интегральный закон  
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.9.

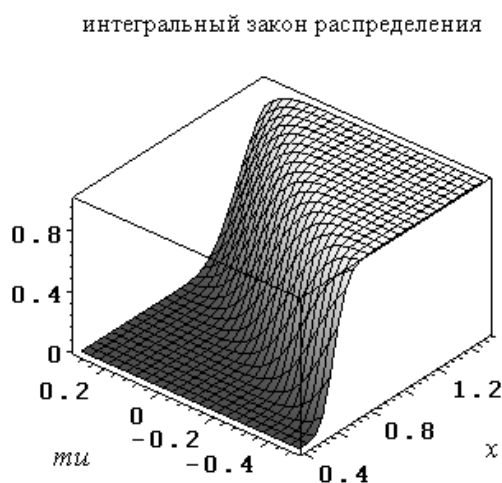


Рисунок 1.9 – График интегральной функции, $\sigma = 0,1$

```
> plot3d(F(x,0.7,mu),x=0..4,mu=-  
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,  
14],labels=["x","mu","F(x)"],orientation=[250,55],shading=ZGRAYSCALE,  
title="интегральный закон  
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.10.

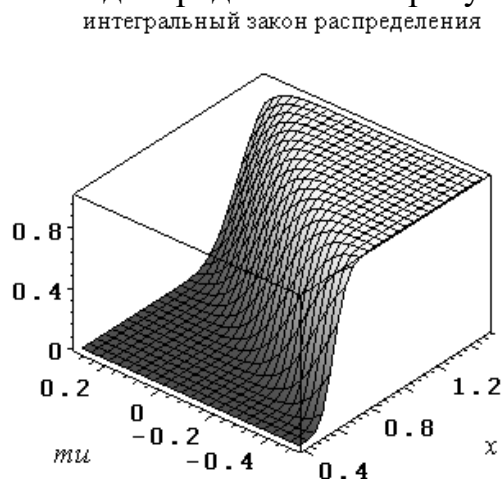


Рисунок 1.10 – График интегральной функции, $\sigma = 0,7$

```
> plot3d(F(x,1,mu),x=0..5,mu=-
0.3..1,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,14],
labels=["x","mu","F(x)"],orientation=[240,50],shading=ZGRAYSCALE,
title="интегральный закон
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.11.

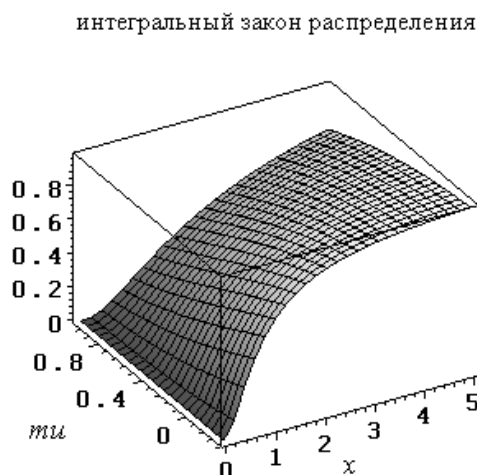


Рисунок 1.11 – График интегральной функции, $\sigma=1$

4.23 Напишем функцию для вычисления *дифференциальной энтропии*

```
> H:=(sigma,mu)->-
int(p(x,sigma,mu)*ln(p(x,sigma,mu)),x=0..infinity);
```

$$H := (\sigma, \mu) \rightarrow - \int_0^{\infty} p(x, \sigma, \mu) \ln(p(x, \sigma, \mu)) dx$$

```
> simplify(H(sigma,mu));
```

$$- \int_0^{\infty} \frac{1}{4} \sqrt{2} e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{(-\ln(x\sim) + \mu)^2}{\sigma^2} \right)} \left(\ln(2) + \ln(\pi) + 2 \ln(\sigma\sim) + 2 \ln(x\sim) - 2 \ln \left(e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{(-\ln(x\sim) + \mu)^2}{\sigma^2} \right)} \right) \right) \sqrt{\pi} \sigma\sim x\sim dx\sim$$

```
> with(student);
```

```
[D, Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changevar,
completesquare, distance, equate, integrand, intercept, intparts, leftsum,
makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, powsubs, rightbox, rightsum,
showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid]
```

```
> changevar(x=ln(u),H(sigma,mu),u);
```

$$\left(-\frac{1}{2} \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} \sigma\sim \ln(2) \sqrt{\pi} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sigma\sim \ln(\pi) \sqrt{\pi} \sqrt{2} - \sigma\sim \mu \sqrt{\pi} \sqrt{2} - \sigma\sim \ln(\sigma\sim) \sqrt{\pi} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sigma\sim \sqrt{\pi} \sqrt{2} \right) \right) / (\sqrt{\pi} \sigma\sim)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(\pi) + \mu + \ln(\sigma) + \frac{1}{2}$$

```
> H1:=(sigma,mu)->1/2*ln(2)+1/2*ln(Pi)+mu+ln(sigma)+1/2;
```

$$H1:=(\sigma, \mu) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(\pi) + \mu + \ln(\sigma) + \frac{1}{2}$$

Итак, для дифференциальной энтропии справедлива следующая формула:

$$H(\sigma, \mu) = \ln \sqrt{2\pi\sigma} + \mu + 1/2. \quad (2.25)$$

4.24 Построим графики зависимости дифференциальной энтропии от параметров σ и μ

```
> plot([H1(0.01,mu),H1(1,mu),H1(5,mu)],mu=-7..7,axes=NORMAL,axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["mu","H"],linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,title="дифференциальная энтропия\n (логнормальное распределение, sigma=0.01,1,5)",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.12.

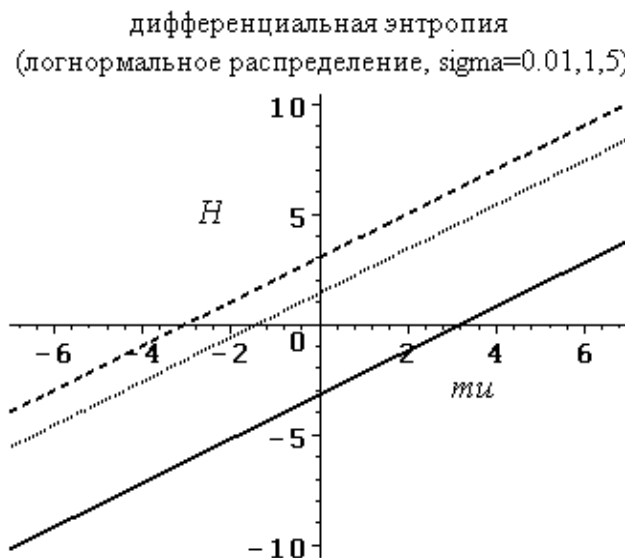


Рисунок 1.12 – Графики зависимости дифференциальной энтропии от параметров σ и μ

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать:

- Титульный лист;
- Цель работы;
- Программу и методику исследований;
- Результаты экспериментальных исследований;
- Выводы по работе.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое случайное событие?
2. Что такое исход? Что понимают под пространством исходов?
3. Охарактеризуйте операции над событиями: объединение, пересечение, дополнение.
4. Что понимают под вероятностью случайного исхода?
5. Что понимают под вероятностью случайного события?
6. Что такое случайная величина?
7. Какие случайные величины называют непрерывными?
8. Охарактеризуйте дифференциальный закон распределения и его свойства.
9. Охарактеризуйте интегральную функцию распределения непрерывной случайной величины.
10. Перечислите и охарактеризуйте числовые характеристики непрерывных случайных величин: моменты, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса.
11. Что называют дифференциальной энтропией?
12. Какова связь между энтропией дискретной случайной величины и дифференциальной энтропией?
13. Перечислите свойства дифференциальной энтропии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Доценко С. В. Теория информации и математическая статистика. - Конспект лекций.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. — М.: Высш. шк., 1998. — 576 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 448 с.
4. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А.В. Матросов. — СПб.: БХВ, 2001.— 528с.
5. Прохоров Г.В. Математический пакет Maple V Release 4: Руководство пользователя / Прохоров Г.В., Колбеев В.В., Желнов К.И., Леденев М.А. — Калуга: Облиздат, 1998. — 200с.

Заказ № _____ от «_____» _____ 2015 г. Тираж экз.