

**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический
университет**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕРАТОРА
ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ**

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
для студентов, обучающихся по
направлению **6.050101 “Компьютерные
науки”**
очной и заочной форм обучения

**Севастополь
2014**

УДК 004. 94

Исследование генератора временных интервалов: методические указания / Сост. Ю. В. Коваленко, В. Ю. Карлусов. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014— 10 с.

Целью методических указаний является:

1. Получение практических навыков в генерации последовательностей псевдослучайных чисел с распределениями Пуассона и Эрланга.
2. Оценить качество генерации указанных последовательностей.
3. Изучить и рассмотреть на практике свойства, приписываемые распределениям Пуассона и Эрланга.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Управление информационно-вычислительными ресурсами» для студентов направления 6.050101 и утверждены на заседании кафедры Информационных систем, протокол № 1 от 29 августа 2014 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Кожаев Е.А., кандидат технических наук, доцент кафедры ИТиКС.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Цель работы	4
2. Краткое теоретическое введение	4
3. Порядок работы	7
4. Контрольные вопросы	8
5. требования к оформлению и содержанию отчёта	8
6. Библиографический список	10

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Получить практические навыки в генерации последовательностей псевдослучайных чисел с распределениями Пуассона и Эрланга.
2. Оценить качество генерации указанных последовательностей.
3. Изучить и рассмотреть на практике свойства, приписываемые распределениям Пуассона и Эрланга.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Практически любая вычислительная система, ориентированная на информационное взаимодействие, может быть исследована в рамках теории систем массового обслуживания (СМО). Одним из важнейших компонентов научных исследований вообще, а СМО в частности, является процесс имитационного моделирования. Неотъемлемой частью такой модели будет служить так называемый источник требований (заявок) на обслуживание, а последовательность заявок образует поток заявок.

Источник заявок представляет собой генератор псевдослучайных чисел с заданным законом распределения. В качестве распределений используют: пуассоновское (экспоненциальное), эрланговское, гиперэкспоненциальное и ряд других. Наиболее часто применяют распределения Пуассона и Эрланга. Генерируемая источником псевдослучайная величина интерпретируется в модели как интервал времени между поступлениями требований (заявок) на вход СМО, то есть как квант времени, прошедший с момента появления предыдущей заявки до прихода текущей заявки.

Модель Пуассона имеет вид

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda\tau}, \tau \geq 0$$

и характеризует вероятность поступления k требований за отрезок времени, равный τ . Параметр λ – интенсивность потока требований, равный математическому ожиданию числа событий, происходящих в единицу времени.

Данной модели соответствует экспоненциальная плотность распределения вероятностей наступления событий, получившее своё название по виду функции, входящей в состав выражения:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad (1)$$

Для этого распределения характерно равенство

$$m_\tau = \sigma_\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (2)$$

– средний интервал времени между соседними заявками совпадает со среднеквадратическим его отклонением.

В этом случае известный в статистике коэффициент вариации случайной величины

$$V_\tau = \frac{\sigma_\tau}{m_\tau} = 1. \quad (3)$$

Пуассоновский поток обладает следующими свойствами:

- стационарен, по крайней мере, в широком смысле;
- ординарен (ни какие два события в потоке не происходят одновременно, всегда существует такой минимальный квант времени τ , в течение которого происходит только одно событие);
- не имеет последствий (события потока не связаны между собой).

Если простейший поток прореживается, то есть сохраняется каждое k -ое событие, а остальные не учитываются (отбрасываются, отбраковываются), то возникает **поток Эрланга** k -ого порядка, $k = 2, 3, \dots$. Обычно такой поток формируется за счёт пропущенных или отвергнутых заявок. Отметим, что простейший поток можно считать эрланговским при $k = 1$.

Плотность распределения вероятностей такого потока описывается формулой:

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (4)$$

Для потока Эрланга характерно следующее:

$$\bullet \quad m_k = \frac{k}{\lambda} \text{ – математическое ожидание наступления события,} \quad (5)$$

$$\bullet \quad \sigma_k^2 = \frac{k}{\lambda^2} \text{ – дисперсия времени между наступлениями событий,} \quad (6)$$

$$\bullet \quad V_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ коэффициент вариации.} \quad (7)$$

Поток Эрланга обладает следующими свойствами:

- стационарен;
- ординарен;
- обладает последствием;
- при возрастании k становится почти периодическим.

Псевдослучайная величина, подчиняющаяся экспоненциальному закону (1), может быть легко вычислена по выражению

$$\tau_{\text{exp}} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi, \quad (8)$$

где ξ – есть псевдослучайная величина, равномерно распределённая на интервале $(0, 1)$.

Псевдослучайная величина, подчиняющаяся распределению Эрланга (4) может быть получена аналогично:

$$\tau_{\text{Erl}} = -\frac{(k-1)!}{\lambda(\lambda \cdot t)^{k-1}} \cdot \ln \xi, \quad (9)$$

либо непосредственным прореживанием ряда случайных величин (8). В последнем случае необходимо суммировать “отброшенные” значения ряда (8), которые и будут выступать в качестве псевдослучайных величин (4).

По результатам моделирования, с помощью известных процедур статистики, можно определить математическое ожидание m_τ (m_k) и среднеквадратическое отклонение σ_τ (σ_k), рассчитать коэффициенты вариации V_τ и V_k .

Наличие или отсутствие последействия поможет определить корреляционный анализ. Корреляционную функцию последовательности x_r , $r = 1, 2, \dots, N$ несложно рассчитать по выражению

$$B_k = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{i=1}^{N-k} x_i \cdot x_{i+k}, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (10)$$

где M – длина корреляционной функции в лагах.

3. ПОРЯДОК РАБОТЫ

1. Для заданного преподавателем варианта в Приложении А произведите вычисление теоретических параметров распределений: величин (2), (3), (5) – (7).

2. Сгенерируйте выборки псевдослучайных чисел обладающих свойствами распределений (1) и (4). Для распределения Эрланга значения k полагать последовательно из ряда Фибоначчи: 2, 3, 5, 8, 13, 21

Вам понадобятся следующие функции среды MatLab:

- `rand(1, n)` – генерирует вектор из n чисел с равномерным распределением в интервале (0, 1);
- `log(x)` – вычисление натурального логарифма x .

3. Постройте графические модели (графики) потоков событий.

Вам понадобятся:

- `sumsum(x)` – вычисление накопленной суммы ряда, позволит построить временную ось (абсцисс) путём суммирования отдельных временных интервалов;
- `ones(size(x))` – генерирует массив из единиц, изображающих факт наступления события;
- `stem(x, y)` – позволит вывести график наступления событий в виде набора вертикальных линий;
- `subplot(m, n, k)` – для совмещения графиков в пределах одного графического окна.

4. Рассчитайте оценки математического ожидания, среднеквадратического отклонения и, на их основании, коэффициенты вариации, используя формулы (3) и (7) для каждого вида моделируемых потоков событий.

В MatLab для этих целей имеются функции:

- `mean(x)` – возвращает среднее значение массива чисел;
- `std(x)` – возвращает среднеквадратическое отклонение случайной выборки от среднего.

5. Найдите абсолютные и относительные погрешности расчёта оценок, полученных по экспериментальным данным в п.4, от точных значений, рассчитанных по формулам в п.1.

6. Постройте гистограммы для псевдослучайных величин простейшего потока и потока Эрланга, используя функции MatLab:

- `[p, g] = hist(x)` – формирует координаты “точек” гистограммы;
- `bar(g, p)` – выводит гистограмму в виде столбцов.

7. Рассчитайте корреляционные функции рядов псевдослучайных чисел, моделирующих потоки. Запрограммируйте алгоритм (10), либо найдите готовое решение в дебрях среды MatLab. Постройте графики полученных функций. Для совмещения линий на одном чертеже воспользуйтесь:

- `plot (x, y)` – “рисует” график, заданный точками, размещёнными в массивах абсцисс и ординат;
- `hold` – фиксирует текущее изображение и позволяет пополнять его новыми элементами.

8. Оформить отчёт, защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое стационарность в широком и узком смысле?
2. Как вы понимаете термин “ординарен”?
3. Как вы объясните, что означает отсутствие последствия?
4. Как связаны интенсивность и среднее время между событиями потока?
5. Что такое поток?
6. Каковы единицы измерения интенсивности потока?
7. Почему в моделях потоков положено $t \geq 0$?
8. Поясните, почему при больших значениях k поток Эрланга вырождается в периодическую последовательность?
9. По какой причине для проведения расчётов очень часто используется простейший (пуассоновский) поток?

5. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ И СОДЕРЖАНИЮ ОТЧЁТА

Авторы считают целесообразным оформление отчета в отдельной тетради, которая по окончании изучения дисциплины сдается преподавателю. В этом случае, во-первых, результаты выполнения предыдущих работ доступны для анализа; во-вторых, наработанный материал может быть с пользой для дела употреблён на этапе подготовки к экзамену или зачёту.

В общем случае, отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. титульный лист с названием работы и сведениями об исполнителе;
2. цель работы;
3. вариант задания;
4. результаты предварительных расчетов и ход решения;
5. результаты, полученные в ходе вычислительного эксперимента;
6. выводы, основанные на анализе полученных результатов.

Отчёт выполняется, как правило, от руки. Тексты программ, результаты их выполнения и графики, построенные машинным способом, допускается вклеивать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания [Текст]: / Б.В. Гнеденко, М.Н. Коваленко. - М.: Наука, 1986. – 400 с.
3. Гулятьев А.К. : MatLab 5.2: имитационное моделирование в среде Windows [Текст]: / А.К. Гулятьев СПб.: КОРОНА принт, 1999. – 288 с.
4. Розенберг В.Я. Что такое теория массового обслуживания [Текст]: / В.Я. Розенберг, А.И. Прохоров. - М.: Советское радио, 1982. - 200 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

ВАРИАНТЫ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО
ИССЛЕДОВАНИЮ ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВРЕМЕННЫХ
ИНТЕРВАЛОВ И СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ,
ПОСТРОЕННЫХ С ИХ ПРИМЕНЕНИЕМ

№	λ	μ	n	№	λ	μ	n	№	λ	μ	n	№	λ	μ	n
0	0.352	0.44	2	25	0.307	0.31	3	50	0.136	0.17	2	75	7.12	7.2	3
1	0.900	0.91	3	26	0.88	1.1	2	51	0.326	0.33	3	76	3.04	3.8	2
2	0.288	0.36	2	27	1.48	1.5	3	52	0.411	0.50	2	77	9.43	9.6	3
3	0.7821	0.79	3	28	1.12	1.4	2	53	0.653	0.66	3	78	3.44	4.3	2
4	0.168	0.21	2	29	1.78	1.8	3	54	65.6	0.82	2	79	1.86	1.9	3
5	0.603	0.61	3	30	2.72	3.4	2	55	0.971	0.98	3	80	7.52	9.4	2
6	0.304	0.38	2	31	2.17	2.2	3	56	0.333	0.42	2	81	3.46	3.5	3
7	0.742	0.75	3	32	7.28	9.1	2	57	0.633	0.64	3	82	4.96	6.2	2
8	0.88	0.11	2	33	7.22	7.3	3	58	0.183	0.23	2	83	7.02	7.1	3
9	0.791	0.80	3	34	6.48	8.1	2	59	0.583	0.59	3	84	4.16	5.2	2
10	0.367	0.46	2	35	9.4	9.5	3	60	0.781	0.99	2	85	4.06	4.1	3
11	0.128	0.13	3	36	4.08	5.1	2	61	0.762	0.77	3	86	4.24	5.3	2
12	0.623	0.78	2	37	1.85	1.9	3	62	0.511	0.64	2	87	2.07	2.1	3
13	0.0891	0.09	3	38	2.16	2.7	2	63	0.445	0.45	3	88	1.36	1.7	2
14	0.321	0.40	2	39	7.62	7.7	3	64	0.473	0.60	2	89	6.23	6.3	3
15	0.681	0.70	3	40	3.76	4.7	2	65	0.147	0.15	3	90	3.84	4.8	2
16	0.231	0.29	2	41	7.91	8.0	3	66	0.564	0.71	2	91	7.82	7.9	3
17	0.573	0.58	3	42	6.24	7.8	2	67	0.276	0.28	3	92	4.64	5.8	2
18	0.674	0.86	2	43	8.11	8.2	3	68	0.191	0.24	2	93	2.37	2.4	3
19	0.673	0.68	3	44	4.1	5.0	2	69	0.742	0.75	3	94	5.3	6.5	2
20	0.748	0.95	2	45	9.61	9.7	3	70	9.6	0.12	2	95	4.45	4.5	3
21	0.207	0.21	3	46	6.95	8.7	2	71	0.177	0.18	3	96	0.64	8.3	2
22	0.576	0.82	2	47	3.56	3.6	3	72	0.483	0.61	2	97	6.03	6.1	3
23	0.465	0.47	3	48	3.91	4.9	2	73	0.474	0.48	3	98	2.1	2.5	2
24	0.128	0.16	2	49	3.66	3.7	3	74	1.84	2.3	2	99	8.81	8.9	3

Заказ № _____ от “ _____ ” _____ . Тираж 25 экз. _____

Изд-во СевГУ