

УДК 534.231

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ ИСТОЧНИКА СЛУЧАЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

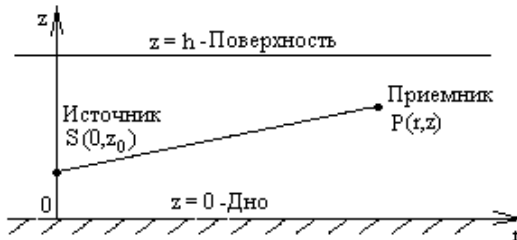
Доценко С.В., Ислямов Э.З.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

Рассмотрено акустическое поле источника случайных колебаний с заданной спектральной функцией, расположенного в плоском волноводе. Получены корреляционные функции полей давления и компонентов колебательной скорости и функции спектральной плотности выходного сигнала. Приведены результаты численных расчетов для первой распространяющейся моды.

Рассмотрим гидроакустический волновод с идеальными плоскопараллельными границами ($z=0$ – дно, $z=h$ – поверхность) и источником звука (пульсирующая сфера малого диаметра), излучающим гармонические



акустические колебания частоты ω и расположенным на оси Oz в точке $z = z_0$ (рисунок 1).

Скалярное поле звукового давления и векторное поле колебательной скорости могут быть выражены

Рисунок 1 – Схема взаимного расположения

через скалярный потенциал скорости $\Phi(\vec{r}, t)$, который удовлетворяет волновому уравнению и при рассматриваемых условиях в цилиндрической системе координат может быть представлен в виде суммы нормальных мод [1]

$$\Phi(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ i \frac{2\pi}{h} \sum_{l=0}^{\infty} \cos(b_l z_0) \cos(b_l z) H_0^{(1)}(\xi_l r) \cdot e^{-i\omega t} \right\}, \quad (1)$$

где $H_0^{(1)}(\xi_l r)$ – функция Ханкеля 1-го рода;

$$b_l = \frac{(l + \frac{1}{2})\pi}{h}, \quad \xi_l = \sqrt{k^2 - b_l^2} = \sqrt{k^2 - \left[\frac{(l + 1/2)\pi}{h} \right]^2} \quad - \text{ поперечное и}$$

продольное волновые числа.

Для характеристик гидроакустического поля – давления и

колебательной скорости, запишем выражения через потенциал скорости

$$p(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = -\text{grad} \Phi(\vec{x}, t), \quad (3)$$

где ρ_0 – плотность невозмущенной жидкости; $\vec{x} = (r, z)$ – радиус вектор точки наблюдения (приема) поля.

Для удобства выкладок перейдем к безразмерным величинам, взяв за единицу длины некоторый параметр λ_c , смысл которого будет уточнен позже; за единицу времени – время прохождения длины λ_c волной со скоростью c – скорость звука при отсутствии границ; за единицу массы m – массу невозмущенной жидкости в объеме λ_c^3 . Для перехода к размерным величинам будем пользоваться следующими формулами:

$$h = \lambda_c \cdot h', \quad \vec{x} = \lambda_c \cdot \vec{x}', \quad \omega = \frac{c}{\lambda_c} \omega', \quad \lambda = \lambda_c \cdot \lambda', \quad \xi_l = \frac{1}{\lambda_c} \xi'_l, \quad b_l = \frac{1}{\lambda_c} b'_l.$$

В предыдущих формулах величины со штрихами – безразмерные переменные.

Согласно формулам (2), (3) с учетом (1) получим в безразмерном виде представления для характеристик акустического поля

$$p'(r', z', t', \omega) = p'_c(r', z', \omega) \cos(\omega' t') + [p'_s(r', z', \omega) - p'_d(r', z', \omega)] \sin(\omega' t') \quad (4)$$

– поле давления;

$$v'_r(r', z', t', \omega) = [v'_{rd}(r', z', \omega) - v'_{rc}(r', z', \omega)] \cos(\omega' t') + v'_{rs}(r', z', \omega) \sin(\omega' t') \quad (5)$$

– радиальная составляющая вектора колебательной скорости;

$$v'_z(r', z', t', \omega) = [v'_{zd}(r', z', \omega) - v'_{zc}(r', z', \omega)] \cos(\omega' t') + v'_{zs}(r', z', \omega) \sin(\omega' t') \quad (6)$$

– вертикальная составляющая вектора колебательной скорости,

где

$$\begin{bmatrix} p'_c \\ p'_s \end{bmatrix}(r', z', \omega) = \frac{2\pi\omega' A'}{h'} \sum_{l=0}^{l_m} C(b'_l, z') \begin{bmatrix} J_0 \\ N_0 \end{bmatrix}(\xi'_l r'); \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} v'_{rc} \\ v'_{rs} \end{bmatrix}(r', z', \omega) = \frac{2\pi A'}{h'} \sum_{l=0}^{l_m} \xi'_l C(b'_l, z') \begin{bmatrix} N_1 \\ J_1 \end{bmatrix}(\xi'_l r'); \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} v'_{zc} \\ v'_{zs} \end{bmatrix}(r', z', \omega) = \frac{2\pi A'}{h'} \sum_{l=0}^{l_m} b'_l S(b'_l, z') \begin{bmatrix} N_0 \\ J_0 \end{bmatrix}(\xi'_l r'); \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
p'_d(r', z', \omega') &= \frac{4\omega' A'}{h'} \sum_{l=l_m+1}^{\infty} C(b_l', z') K_0(|\xi_l'| r'); \\
v'_{rd}(r', z', \omega') &= \frac{4A'}{h'} \sum_{l=l_m+1}^{\infty} |\xi_l'| C(b_l', z') K_1(|\xi_l'| r'); \\
v'_{zd}(r', z', \omega') &= \frac{4A'}{h'} \sum_{l=l_m+1}^{\infty} b_l' S(b_l', z') K_0(|\xi_l'| r');
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
C(b, z) &= \cos(bz_0) \cos(bz), \quad S(b, z) = \cos(bz_0) \sin(bz); \\
k' &= \frac{2\pi}{\lambda'} = \omega', \quad b_l' = \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{h'}, \quad \xi_l' = \xi_l'(\omega') = \sqrt{(\omega')^2 - (b_l')^2}, \quad l_m \leq \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2}. \tag{11}
\end{aligned}$$

В формулах (7)-(10) l_m – максимальный номер распространяющейся волны, определяемый из неравенства (11).

В последующих выкладках штрихи над безразмерными переменными опускаются. Суммы (7)-(9) отвечают за распространяющиеся моды, (10) – за затухающие.

Теперь будем считать, что сигнал на выходе точечного источника акустических волн представляет собой случайный стационарный процесс, и применим методику, предложенную в работе [2]. Представим сигнал в виде бесконечного набора гармонических колебаний с бесконечно малыми случайными амплитудами $dA(\omega)$ и случайными фазами $\varphi(\omega)$, соответствующими всему спектру частот ω . Так как для такого источника нет оснований отдавать предпочтение каким-либо определенным частотам, естественно считать $\varphi(\omega)$ равномерно распределенной в пределах $(-\pi; \pi)$ для любой частоты ω . В общем случае значения фаз $\varphi(\omega)$ и амплитуд $dA(\omega)$ определяются разными физическими механизмами, поэтому их можно считать статистически независимыми и осреднение производить по обоим этим величинам.

Для осреднения по ансамблю $dA(\omega)$ воспользуемся необходимым и достаточным условием стационарности [3]

$$M\{dA(\omega) dA(\omega')\} = 2Q(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega', \tag{12}$$

где $Q(\omega)$ – неотрицательная функция, имеющая смысл спектральной плотности поля потенциала скорости по частотам; $\delta(\omega)$ – дельта функция Дирака; выражение $M\{\}$ обозначает операцию осреднения по ансамблю $dA(\omega)$ величины, стоящей в фигурных скобках.

Осреднение по случайным равномерно распределенным фазам $\varphi(\omega)$ какой-либо функции $f(\varphi(\omega))$ обозначим через $\langle f(\varphi(\omega)) \rangle$ и вычислим по формуле

$$\langle f(\varphi(\omega)) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi.$$

Будем предполагать, что среда, заполняющая волновод, линейна. Тогда давление, создаваемое полем случайного сигнала в точке $\mathbf{\dot{x}} = (r, z)$ в момент t , представляет собой суперпозицию давлений всех элементарных гармонических колебаний. Поэтому в рассматриваемом случае вместо отдельного гармонического колебания (4) получим случайный процесс, описываемый стохастическим интегралом Стильтьеса

$$p(\mathbf{\dot{x}}, t, \omega) = \int \{ dp_c(\mathbf{\dot{x}}, \omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) + [dp_s(\mathbf{\dot{x}}, \omega) - dp_d(\mathbf{\dot{x}}, \omega)] \sin(\omega t - \varphi(\omega)) \}, \quad (13)$$

где в соответствии с выражениями (8) и (11)

$$dp_v(\mathbf{\dot{x}}, \omega) = p_v(\mathbf{\dot{x}}, \omega) \frac{dA(\omega)}{A},$$

а v – любой из индексов c, s или d .

Аналогично из (5) и (6) получим представление для случайных компонент вектора колебательной скорости

$$v_n(\mathbf{\dot{x}}, t, \omega) = \int \{ [dv_{nd}(\mathbf{\dot{x}}, \omega) - dv_{nc}(\mathbf{\dot{x}}, \omega)] \cos(\omega t - \varphi(\omega)) + dv_{ns}(\mathbf{\dot{x}}, \omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)) \}, \quad (14)$$

где $n=r$ определяет радиальный компонент вектора скорости, а $n=z$ – вертикальный, и согласно выражениям (7)-(8) и (10)

$$dv_\mu(\mathbf{\dot{x}}, \omega) = v_\mu(\mathbf{\dot{x}}, \omega) \frac{dA(\omega)}{A},$$

где μ – любой из индексов rc, rs, rd, zc, zs, zd .

Учитывая эти выражения и условие стационарности (12), можно найти корреляционные и взаимные корреляционные функции процессов (13) и (14) по формуле

$$B(\mathbf{\dot{x}}_1, \mathbf{\dot{x}}_2; t, \tau) = \langle M \{ X_1(\mathbf{\dot{x}}_1, t, \omega) X_2(\mathbf{\dot{x}}_2, t + \tau, \omega) \} \rangle, \quad (15)$$

где $X_i(\mathbf{\dot{x}}, t, \omega)$, $i = 1, 2$ – один из процессов: давление или компоненты колебательной скорости, а τ – временной сдвиг (если $X_1(\mathbf{\dot{x}}, t, \omega) = X_2(\mathbf{\dot{x}}, t, \omega)$, то получим корреляционные, иначе – взаимные корреляционные функции).

Поскольку практический интерес представляет рассмотрение полей характеристик акустического поля на большом расстоянии от источника сигнала, будем учитывать только распространяющиеся моды (т.е. $p_d(r, z, \omega) = 0$, $v_{rd}(r, z, \omega) = 0$ и $v_{zd}(r, z, \omega) = 0$). Кроме того, для упрощения выкладок будем считать, что в волноводе распространяется только одна мода (нулевая).

Подставим выражения для полей давления и компонент колебательной скорости в формулу (15) и получим корреляционные функции для нулевой моды соответствующих полей:

$$B_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{4\pi^2}{h^2} C(b_0, z_1) C(b_0, z_2) \times \\ \times \int_{b_0}^{\infty} \omega^2 [J_0(\xi_0 r_1) J_0(\xi_0 r_2) + N_0(\xi_0 r_1) N_0(\xi_0 r_2)] Q(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega$$

– поля давления;

$$B_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{4\pi^2}{h^2} C(b_0, z_1) C(b_0, z_2) \times \\ \times \int_{b_0}^{\infty} \xi_0^2 [J_1(\xi_0 r_1) J_1(\xi_0 r_2) + N_1(\xi_0 r_1) N_1(\xi_0 r_2)] Q(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega$$

– поля радиального компонента колебательной скорости;

$$B_z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{4\pi^2}{h^2} b_0^2 S(b_0, z_1) S(b_0, z_2) \times \\ \times \int_{b_0}^{\infty} [J_0(\xi_0 r_1) J_0(\xi_0 r_2) + N_0(\xi_0 r_1) N_0(\xi_0 r_2)] Q(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega$$

– поля вертикального компонента колебательной скорости,

и взаимные корреляционные функции:

$$B_{pr}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{4\pi^2}{h^2} C(b_0, z_1) C(b_0, z_2) \times \\ \times \int_{b_0}^{\infty} \omega \xi_0 [N_0(\xi_0 r_1) J_1(\xi_0 r_2) - J_0(\xi_0 r_1) N_1(\xi_0 r_2)] Q(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega$$

– полей давления и радиального компонента колебательной скорости;

$$B_{pz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{4\pi^2}{h^2} b_0 C(b_0, z_1) S(b_0, z_2) \times \\ \times \int_{b_0}^{\infty} \omega [N_0(\xi_0 r_1) J_0(\xi_0 r_2) - J_0(\xi_0 r_1) N_0(\xi_0 r_2)] Q(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega$$

– полей давления и вертикального компонента колебательной скорости;

$$B_{rz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{4\pi^2}{h^2} b_0 C(b_0, z_1) S(b_0, z_2) \times \\ \times \int_{b_0}^{\infty} \xi_0 [N_1(\xi_0 r_1) N_0(\xi_0 r_2) - J_1(\xi_0 r_1) J_0(\xi_0 r_2)] Q(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega$$

– полей радиального и вертикального компонентов колебательной скорости.

Корреляционные функции не зависят от моментов измерения, а зависит только от разности моментов τ , что определяется стационарностью процесса.

Если считать, что $r \gg 1$ (приемник находится на большом расстоянии от источника), можно воспользоваться асимптотическим представлением для функций Бесселя, и последние выражения упростить:

$$B_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{C(b_0, z_1)C(b_0, z_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\omega^2 \cos(\xi_0(r_1 - r_2))Q(\omega) \cos(\omega\tau)}{\sqrt{\omega^2 - b_0^2}} d\omega;$$

$$B_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{C(b_0, z_1)C(b_0, z_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \int_{\pi/2}^{\infty} \sqrt{\omega^2 - b_0^2} \cos(\xi_0(r_1 - r_2))Q(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega;$$

$$B_z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{b_0^2 S(b_0, z_1)S(b_0, z_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos(\xi_0(r_1 - r_2))Q(\omega) \cos(\omega\tau)}{\sqrt{\omega^2 - b_0^2}} d\omega;$$

$$B_{pr}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{C(b_0, z_1)C(b_0, z_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \int_{\pi/2}^{\infty} \omega \cos(\xi_0(r_1 - r_2))Q(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega;$$

$$B_{pz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{b_0 C(b_0, z_1)S(b_0, z_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\omega \sin(\xi_0(r_1 - r_2))Q(\omega) \cos(\omega\tau)}{\sqrt{\omega^2 - b_0^2}} d\omega;$$

$$B_{rz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{b_0 C(b_0, z_1)S(b_0, z_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \int_{\pi/2}^{\infty} \sin(\xi_0(r_1 - r_2))Q(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega.$$

Положив в предыдущих формулах $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, получим соответствующие временные корреляционные функции. При этом взаимные корреляционные функции полей давления – вертикальной составляющей скорости и радиальной – горизонтальной составляющей скорости обнуляются

$$B_p(\mathbf{r}, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{C^2(b_0, z)}{r} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\omega^2 Q(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - b_0^2}} \cos(\omega\tau) d\omega; \quad (16)$$

$$B_r(\mathbf{r}, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{C^2(b_0, z)}{r} \int_{\pi/2}^{\infty} \sqrt{\omega^2 - b_0^2} Q(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega; \quad (17)$$

$$B_z(\mathbf{r}, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{b_0^2 S^2(b_0, z)}{r} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - b_0^2}} \cos(\omega\tau) d\omega; \quad (18)$$

$$B_{pr}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{8\pi}{h^2} \frac{C^2(b_0, z)}{r} \int_{\pi/2}^{\infty} \omega Q(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (19)$$

Из вида корреляционных функций для полей давления и компонентов колебательной скорости следует, что они являются стационарными по времени, но не являются стационарными (однородными) ни по одной из пространственных координат.

Выражения (16)-(19) позволяют исследовать корреляционные функции полей давления, компонентов колебательной скорости, а также взаимную корреляционную функцию поля давления и радиального компонента скорости выходного сигнала. В качестве спектральной

плотности входного сигнала возьмем функцию вида $Q(\omega) = e^{-(0,25 \cdot \omega)^2}$ (рисунок 2 – штриховая линия).

При этом в качестве единицы длины λ_c возьмем длину волны, соответствующую характерной частоте ω_c для данной спектральной плотности, которая определяется выражением

$$\omega_c = \frac{1}{Q_{\max}} \int_0^{\infty} Q(\omega) d\omega.$$

На рисунке 3 показаны графики корреляционных функций нулевой моды характеристик гидроакустического поля (16)-(19) при $z = z_0 = 0,5h$, $r = 20$ и $h = 1$.

Как видно из графика, с увеличением временного сдвига корреляционная зависимость убывает. На рисунке 4 изображена зависимость энергии

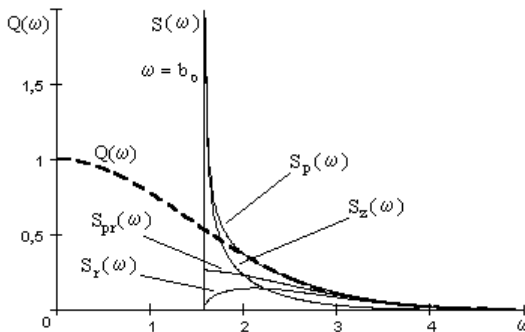


Рисунок 2 – Функции спектральной плотности входного сигнала $Q(\omega)$ и полей давления $S_p(\omega)$, компонентов скорости $S_r(\omega)$, $S_z(\omega)$ и взаимный спектр поля давление – радиальный компонент скорости нулевой моды

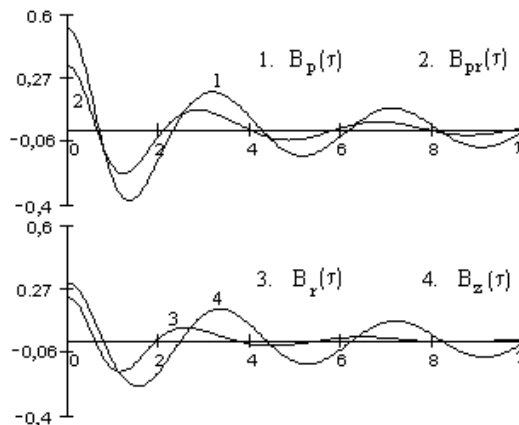


Рисунок 3 – Корреляционные функции полей давления и компонентов колебательной скорости

нулевой моды от глубины слоя на соответствующих приемниках, которая равна дисперсии сигнала, т.е. значению корреляционной функции при $\tau = 0$.

При глубине слоя меньшей $1/4$ в волноводе распространяющихся мод нет, поскольку не выполняется неравенство (11). При $h = 0,25$ появляется нулевая бегущая мода. Увеличение глубины слоя волновода приводит к возрастанию полной энергии сигнала за счет того, что в волновод попадают составляющие более высоких частот (т.е. эффективная ширина спектра сигнала увеличивается). При дальнейшем увеличении глубины слоя появляются следующие распространяющиеся моды, и поскольку полное поле сигнала складывается из суммы всех мод (1), доля энергии, приходящаяся на нулевую моду, уменьшается, что и иллюстрирует рисунок 4.

Для определения функций спектральных плотностей выражения (16)-(19) для корреляционных функций можно записать в виде

$$B_v(\vec{x}, \tau) = \int_0^{\infty} S_v(\vec{x}, \omega) \cos(\omega\tau) d\omega,$$

где v – один из индексов $\{p, r, z, pr\}$;

$$S_p(\vec{x}, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{8\pi}{h^2} \frac{C^2(b_0, z)}{r} \frac{\omega^2 Q(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - b_0^2}}, & \text{при } \omega > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (20)$$

$$S_r(\vec{x}, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{8\pi}{h^2} \frac{C^2(b_0, z)}{r} \sqrt{\omega^2 - b_0^2} Q(\omega), & \text{при } \omega > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (21)$$

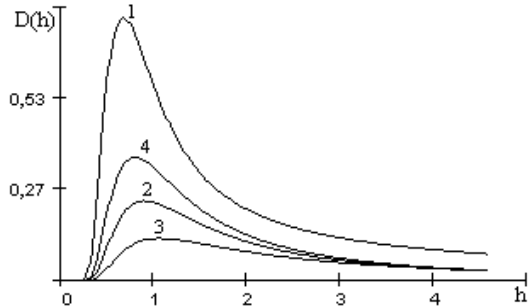


Рисунок 4 – Зависимость полной энергии сигнала от глубины волновода на приемниках давления (1), колебательной скорости (2, 3) и взаимной энергии сигнала (значение взаимной корреляционной функции при нулевом сдвиге) на приемниках давление – радиальный компонент скорости (4)

$$S_z(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{8\pi}{h^2} \frac{b_0^2 S^2(b_0, z)}{r} \frac{Q(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - b_0^2}}, & \text{при } \omega > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (22)$$

$$S_{pr}(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{8\pi}{h^2} \frac{C^2(b_0, z)}{r} \omega Q(\omega), & \text{при } \omega > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (23)$$

Поскольку корреляционные и спектральные функции случайного процесса связаны косинус-преобразованием Фурье, то функции $S_v(\mathbf{r}, \omega)$ в формулах (20)-(23) являются функциями спектральной плотности полей гидроакустических характеристик системы на соответствующих приёмниках.

На рисунке 2 изображены графики функций спектральной плотности полей давления и компонент колебательной скорости и взаимной спектральной плотности полей давления и радиального компонента скорости первой моды, соответствующие рассматриваемой спектральной плотности поля потенциала скорости источника (штриховая линия на этом же рисунке).

Как видно из рисунка 2, функции спектральной плотности всех полей кроме поля радиальной составляющей скорости имеют одну точку разрыва при $\omega = b_0$. Это обусловлено тем, что в волноводе колебания частоты $\omega \leq b_0$ не распространяются, где b_0 – критическая частота для нулевой моды.

Библиографический список

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. — М.: Наука, 1973. — 343 с.
2. Доценко С.В. Корреляционное описание акустических полей / С.В. Доценко, В.И. Ильичев // Акуст. журн. АН СССР. — 1987. — Т. XXXIII. — Вып. 3. — 1987. — С. 473–479.
3. Рыгов С.М. Введение в статистическую радиофизику / С.М. Рыгов. — М.: Наука, 1966. — 404 с.

Поступила в редакцию 27.11.2001 г.