

УДК 681.515

А.Н. Балабанов, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет,**ул. Университетская 33, г. Севастополь**E-mail: alexey.balabanov83@gmail.com***ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ПОПЛАВКОВЫМ УСТРОЙСТВОМ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ БАССА**

Рассматриваются особенности решения задачи линейно-квадратической оптимизации (ЛКО) движения поплавкового устройства при поиске стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати на основе уравнения Басса. Решение задачи ЛКО получено в аналитическом виде, реализуется в виде простого и быстрого алгоритма и применимо для бортовой реализации.

Ключевые слова: *линейно-квадратическая оптимизация, алгебраическое уравнение Риккати, уравнение Басса, управление движением поплавковым устройством.*

1. Постановка задачи. Поплавковые устройства (ПУ), как объекты управления осуществляют управляемое погружение или всплытие за счёт изменения их плавучести. Существует класс задач, где управление ПУ должно быть выполнено с хорошей точностью, например, в задаче погружения ПУ на заданную глубину для измерения параметров "тонкой" структуры океанской среды.

ПУ обладают специфическими свойствами [1], которые проявляются в существенном изменении их динамических характеристик вследствие изменения условий окружающей среды и параметров движения. Это приводит к тому, что обычные регуляторы с постоянными параметрами настройки не могут обеспечить приемлемое управление ПУ.

При применении адаптивных или робастных регуляторов приходится "платить" за универсальность тем, что законы управления могут быть несколько хуже законов управления сконструированных с учётом конкретных условий окружающей среды и движения. Преодолением данной сложности мог бы стать расчёт алгоритма оптимального управления в бортовом компьютере ПУ. При этом нужно учесть, что бортовой компьютер имеет строго ограниченные ресурсы и должен работать в реальном масштабе времени.

Как будет показано ниже, для рассматриваемого ПУ с помощью простого и быстрого алгоритма, возможен синтез линейно-квадратического оптимального регулятора в аналитической форме, что делает возможным расчёт линейно-квадратического оптимального закона управления в бортовом компьютере ПУ.

2. Опорные соотношения и обозначения. В задаче линейно-квадратической оптимизации (ЛКО) [2] объекта

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \quad (1)$$

с оценкой по интегрально-квадратическому функционалу качества

$$J(u(t)) = \int_0^\infty [x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $A, B, P = P^T \geq 0, R = R^T > 0$ – заданные матрицы соответствующих размерностей, управление ищется в виде

$$u(t) = Sx(t) \quad (3)$$

с матрицей обратных связей

$$S = -R^{-1}B^TK, \quad (4)$$

где K – стабилизирующее решение (СР) алгебраического уравнения Риккати (АУР)

$$A^TK + KA + P - KBR^{-1}B^TK = 0_{n,n}, \quad (5)$$

$0_{n,n}$ – здесь и далее нулевая матрица указанной размерности $n \times m$.

Термин СР подразумевает такое решение АУР (5), что система автоматического управления (1), (3) – устойчива [2].

Таким образом, сложность решения задачи ЛКО (1), (2) определяется сложностью поиска СР АУР (5). Современное программное обеспечение для поиска СР АУР использует относительно сложные итерационные методы на основе матричных преобразований, что является препятствием для реализации этих методов в бортовых компьютерах объектов управления.

Поиск СР АУР можно осуществить на основе уравнения Басса [2]

$$q(\mathbf{H}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2n,n}, \quad (6)$$

где $\mathbf{I}_n$ – $n \times n$ единичная матрица,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{P} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \in R^{2n \times 2n}$$

– матрица Гамильтона,

$$q(\mathbf{H}) = \mathbf{H}^n + q_{n-1}\mathbf{H}^{n-1} + \dots + q_1\mathbf{H} + q_0\mathbf{I}_{2n}, \quad q(\mathbf{H}) \in R^{2n \times 2n}, \quad (7)$$

$\mathbf{I}_{2n}$ – $2n \times 2n$ единичная матрица,

$$q_r, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad q_n = 1 \text{ – коэффициенты многочлена } q(s) = \sum_{k=0}^n q_k s^k.$$

Известно свойство спектра $\sigma(\mathbf{H})$ матрицы $\mathbf{H}$ [2]: если $\lambda \in \sigma(\mathbf{H})$, то и $(-\lambda) \in \sigma(\mathbf{H})$. Пусть спектр $\sigma(\mathbf{H})$ не имеет λ с $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Тогда возможна факторизация вида

$$\Delta(s) = (-1)^n q(s)q(-s) \quad (8)$$

с гурвицевым многочленом $q(s)$, где $\Delta(s) = \det(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{H})$ – характеристический многочлен матрицы Гамильтона. В силу указанного свойства симметрии расположения корней, многочлен $\Delta(s)$ имеет также представление

$$\Delta(s) = \delta(s^2), \quad \delta(x) = \sum_{k=0}^n \delta_k x^k. \quad (9)$$

Факторизацию (8) можно осуществить, вычислив корни $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ многочлена $\delta(x)$, а затем все корни многочлена $\Delta(s)$ как $\lambda_i = \pm\sqrt{x_i}$. Далее по соотношению $q(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = \sum_{k=0}^n q_k s^k$, $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ определяются коэффициенты многочлена $q(s)$. Запишем выше сказанное относительно факторизации (8) в виде выражения

$$q(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = \sum_{k=0}^n q_k s^k, \quad \operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad \lambda_i = \pm\sqrt{x_i}, \quad \delta(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

На последнем этапе поиска СР АУР при обозначении $q(\mathbf{H}) = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2]$, $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in R^{2n \times n}$, уравнение (6) принимает вид

$$\mathbf{V}_2 \mathbf{K} + \mathbf{V}_1 = \mathbf{0}_{2n,n}. \quad (11)$$

Не сложно видеть, что существование аналитического представления для СР АУР (представления через известные параметры уравнения (5)) определяется возможностью аналитического выполнения факторизации (8) (например, указанным способом сепарацией корней (10)). Известно [3], что аналитическое решение в общем виде существует для алгебраических уравнений не более четвертой степени. Например, решение кубического уравнения

$$x^3 + \delta_2 x^2 + \delta_1 x + \delta_0 = 0 \quad (12)$$

строится на основе формулы Кардано, где уравнение (12) подстановкой $x = y - \frac{\delta_2}{3}$ приводится к «неполному» кубическому уравнению вида

$$y^3 + py + q = 0, \quad (13)$$

$$\text{где } p = \delta_1 - \frac{\delta_2^2}{3}, \quad q = \frac{2\delta_2^3}{27} - \frac{\delta_2\delta_1}{3} + \delta_0. \quad (14)$$

Корню y_* кубического уравнения (13) соответствует корень $x_* = y_* - \frac{\delta_2}{3}$ уравнения (12). В свою очередь корни «неполного» кубического уравнения (13) равны

$$y_1 = \alpha + \beta, \quad y_{2,3} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i \frac{\alpha - \beta}{2} \sqrt{3}, \quad (15)$$

где

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad (16)$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \quad (17)$$

В качестве α и β берутся любые значения кубических корней из соответствующих комплексных чисел, удовлетворяющие соотношению $\alpha\beta = -p/3$. Так как рассматриваемое кубическое уравнение вещественное, то следует по возможности выбирать вещественные значения α, β . По знаку Q можно определить тип корней уравнения (12):

$Q > 0$ – один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня;

$Q < 0$ – три различных вещественных корня (в этом случае также все три корня $x_* = 2 \operatorname{Re} \alpha_* - \frac{\delta_2}{3}$ уравнения (12) можно найти перебором всех кубических корней α в (16));

$Q = 0$ – один однократный вещественный корень и один двукратный. Или, если $p=q=0$, то один трёхкратный вещественный корень.

Напомним, что для вычисления корней n -ой степени из ненулевого комплексного числа используется формула Муавра

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

3. Математическая модель движения ПУ. Рассмотрим описанное в [1] ПУ с изменяемым объёмом. Движение ПУ в вертикальной плоскости (режимы погружения и всплытия) происходит под действием сил показанных на рисунке 1. Условно предполагается, что действующие силы приложены к центру масс ПУ.

На рисунке 1 обозначены: P – сила тяжести; $F_\theta = F_n + F_u$ – выталкивающая сила, включающая в себя постоянную составляющую F_n и управляющую силу F_u , возникающую в результате приращения объёма корпусной части за счёт изменения объёма $V_{kn}(t)$ камеры плавучести; F_c – сила гидродинамического сопротивления, направленная в сторону противоположную движению; $L_0, l^{\max}, d_{\max}, d_c$ – размеры габаритов ПУ. Конструктивно ПУ выполнен в виде цилиндра с диаметром корпусной части d_c ; $d_{\max}$ – указывает максимальный диаметр в поперечном сечении, равен диаметру стабилизатора.

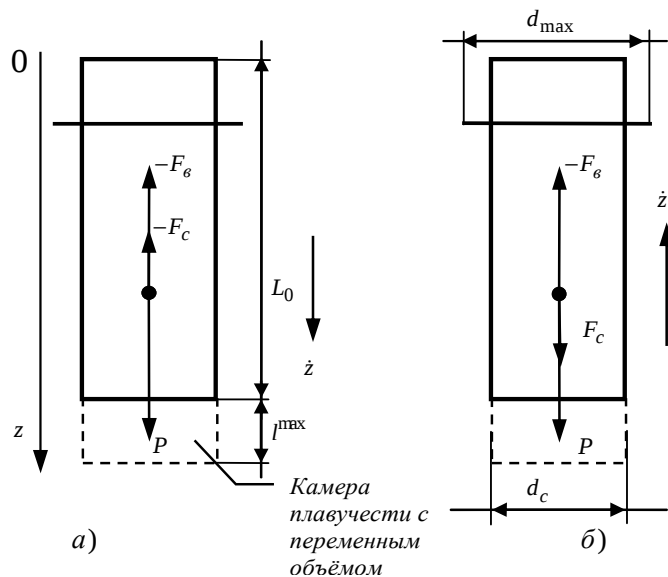


Рисунок 1 – Система сил, действующих на ПУ во время погружения (а) и во время всплытия (б)

В [1] составлена математическая модель ПУ в виде нелинейных дифференциальных уравнений

$$\ddot{z}(t) = -\operatorname{sign}(\dot{z}(t)) \frac{C_x S_{\max}}{2V_\theta^0} \dot{z}(t)^2 - \frac{S_c g k_p}{V_\theta^0} u(t) + \left[1 - \frac{\Delta \rho_\theta(z)}{\rho_\theta(z)} \right] g \quad (18)$$

с начальными условиями $z(0) = z_0$; $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$.

В уравнении (18) C_x – коэффициент лобового сопротивления; $S_{\max}$ – наибольшая площадь поперечного сечения корпуса ПУ; V_0^0 – номинальный объем корпусной части ПУ, в свою очередь объем $V_0(t)$ погруженной в воду корпусной части ПУ имеет выражение $V_0(t) = V_0^0 + V_{kn}(t)$. Объем камеры плавучести $V_{kn}(t)$ может целенаправленно изменяться под действием управляющего напряжения питания $u(t)$ электрогидравлического устройства, линейно изменяющего перемещение поршня насоса $l(t)$ в пределах $0 \leq l(t) \leq l^{\max}$. Принято, что нейтральная плавучесть достигается при $l(t) = \frac{l^{\max}}{2}$. Далее в уравнении (18) S_c – площадь поперечного сечения корпусной части ПУ; g – ускорение свободного падения; k_p – коэффициент передачи электрогидравлического устройства; $\rho_e(z)$ – плотность морской воды и $\Delta\rho_e(z)$ – приращение плотности морской воды (знакопеременная величина), зависящая от распределения этой характеристики по глубине. Для последних величин имеет место выражение $\rho_e(z) = \rho_e^0 + \Delta\rho_e(z)$, где ρ_e^0 – среднее значение плотности морской воды для конкретного региона. Плотность морской воды $\rho_e(z)$ в зависимости от времени года, региона и глубины может изменяться. Изменения $\rho_e(z)$ во времени носят чаще всего сезонный характер. Изменение плотности морской воды приводит к изменению силы сопротивления, а также возникновению возмущения в виде поправки к выталкивающей силе, состоящей из двух составляющих, одна из которых влияет на характеристики (параметры) объекта управления, а другая – на управляющую силу.

Предположим, что плотность морской воды $\rho_e(z) = \rho_e$ в малых пределах изменений глубины есть постоянная величина, тогда тоже справедливо и для постоянной составляющей выталкивающей силы $F_n(z) = \left[1 - \frac{\Delta\rho_e(z)}{\rho_e(z)}\right] g = F_n$. Предположим также, что управление плавучестью происходит за счёт

малых отклонений поршня насоса от положения, соответствующего нейтральной плавучести. В этом случае компенсируется сила F_n , а также в малых отклонениях от номинального режима изменяются переменные состояния модели (18). Тогда от рассмотрения нелинейных дифференциальных уравнений можно перейти к линейным дифференциальным уравнениям, записанным в вариациях от номинального режима. Рассмотрим далее модель соответствующую режиму погружения. Линейные уравнения в нормальной форме Коши в векторно-матричной форме в отклонениях от номинального режима $z_n = 0$, $\dot{z}_n = v_n$, $u_n = 0$ будут иметь вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (19)$$

где $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ z_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}$, $a = \frac{C_x S_{\max}}{V_0^0} v_n$, $b = \frac{S_c g k_p}{V_0^0}$,

$$x_1(t) = \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad x_2(t) = z(t), \quad x_3(t) = \dot{z}_2(t) = \dot{z}(t). \quad (20)$$

Переменная состояния $x_1(t)$ введена в рассмотрение для построения астатического закона управления по глубине.

Один из вариантов исполнения корпусной части ПУ имеет следующие размеры [1]: $L_0 = 1\text{ м}$, $l_{\max}(t) = 0,2\text{ м}$, $d_{\max} = 0,2\text{ м}$, $d_c = 0,12\text{ м}$, $S_m = 0,053\text{ м}^2$, $S_c = 0,011\text{ м}^2$. Соответственно параметры модели (19) $a = 2,042 \left[\text{м}^{-1} \right]$, $b = 982,1 \left[\text{м} / \text{Бс}^2 \right]$ при $k_p = 0,05 \left[\text{м} / \text{Б} \right]$, $v_n = 0,01\text{ м} / \text{с}$ и $C_x = 0,87$, $\rho_e = 1022$, $\Delta\rho_e = 0,02\rho_e$.

Величина v_n выбрана как малая, положительная, близкая к желаемой особой рабочей точке $v_n = 0$. Следствием этого при применении управления $u(t)$ к системе (18), рассчитанного для линейной системы (19), будет присутствие в установившемся режиме движения малой остаточной скорости, что также проявится в присутствии статической ошибки управления. При смене знака скорости погружения на отрицательный следует изменить закон управления на синтезированный для модели (19) с отрицательным значением параметра a или, если переменные состояния находятся вблизи желаемой рабочей точки, следует полностью отключить управление.

4. Синтез ЛКО управления ПУ. По выше изложенному, можно заключить, что синтез управления ПУ должен происходить многократно с перерасчётом для изменяющихся параметров внешней среды и движения, также необходимо учесть ограниченность входного сигнала. Перспективным средством в этом отношении являются методы ЛКО, где синтезированное управление гарантирует сходимость переходных процессов, а оптимизация по функционалу качества (2) даёт возможность учесть как быстроедействие переходных процессов в системе, так и ограниченность управляющего сигнала.

Особая структура ПУ позволяет сделать существенные упрощения при решении задачи ЛКО при поиске СР АУР на основе уравнения Басса. Но прежде заметим, что конечной целью синтеза является получение не СР $\mathbf{K}$ АУР, а матрицы обратных связей $\mathbf{S}$ (4). Тогда, умножив уравнение (11) справа на $(-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1})$, в силу (4) получим уравнение

$$\mathbf{V}_2\mathbf{S}^T + \hat{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{0}_{2n,m}, \quad \hat{\mathbf{V}}_1 = -\mathbf{V}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}. \quad (21)$$

Уравнению (21) соответствует уравнение

$$q(\mathbf{H})\mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{S}^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2n,m},$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad q(\mathbf{H})\mathbf{W} = [\hat{\mathbf{V}}_1 \quad \mathbf{V}_2].$$

Таким образом, можно пропустить этап поиска СР АУР и ускорить процесс вычислений, перейдя от поиска ряда матриц $\mathbf{H}, \mathbf{H}^2, \mathbf{H}^3, \dots$ в (7) к поиску другого ряда матриц $\mathbf{H}_B, \mathbf{H}_B^2, \mathbf{H}_B^3, \dots$ меньшей размерности в

$$q(\mathbf{H})\mathbf{W} = \mathbf{H}_B^n + q_{n-1}\mathbf{H}_B^{n-1} + \dots + q_k\mathbf{H}_B^k + \dots + q_0\mathbf{W}. \quad (22)$$

Элементы ряда $\mathbf{H}_B, \mathbf{H}_B^2, \mathbf{H}_B^3, \dots$ вычисляются последовательно по выражению

$$\mathbf{H}_B^{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{H}_B^k, \quad k=0,1,\dots, \quad \mathbf{H}_B^0 = \mathbf{W}.$$

Рассмотрим далее задачу ЛКО объекта (19) записанного в форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t), \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\mathbf{u}}(t) = bu(t) \quad (23)$$

с функционалом качества

$$J(\bar{\mathbf{u}}) = \int_0^\infty \left[p_1 x_1^2(t) + p_2 x_2^2(t) + p_3 x_3^2(t) + \bar{\mathbf{u}}^2(t) \right] dt \rightarrow \min. \quad (24)$$

Коэффициенты $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ выбираются из расчёта обеспечения необходимых условий движения ПУ. Как известно [2], увеличение какого-либо из коэффициентов p_* приводит к убыстрению переходного процесса соответствующего сигнала x_* .

По данным задачи (23), (24) матрица Гамильтона будет иметь вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & -1 \\ -p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & 0 & -1 & a \end{bmatrix}.$$

Как видно, это сильно разряжённая матрица и по ней несложно получить компактное выражение для её характеристического многочлена $\Delta(s) = \det(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{H})$. Соответственно многочлен (9) имеет вид

$$\delta(x) = x^3 + \tilde{\delta}_2 x^2 + p_2 x - p_1, \quad \tilde{\delta}_2 = -(a^2 + p_3). \quad (25)$$

Как говорилось в пункте 2, факторизация (8) с гурвицевым многочленом $q(s)$ возможна тогда, когда у многочлена $\Delta(s)$ отсутствуют мнимые корни $\pm j\omega$. Прежде всего, заметим, что отсутствие нулевого корня многочлена $\Delta(s)$ (и соответственно многочлена $\delta(x)$) гарантирует не равенство нулю коэффициента p_1 , то есть он должен быть строго больше нуля. В общем случае, если у многочлена $\Delta(s)$ присутствуют мнимые корни, то многочлен $\delta(x)$ будет иметь вид

$$\delta(x) = (x - \lambda_1^2)(x + \omega^2)^2. \quad (26)$$

Как было сказано в пункте 2, наличие кратного корня многочлена третьей степени соответствует условию $Q=0$. Кроме указанного случая, при выполнении условия $Q=0$, многочлен $\delta(x)$ может ещё иметь представления $\delta(x) = (x - \lambda_1^2)^3$ (дополнительное условие $p=q=0$ (14)) или $\delta(x) = (x - \lambda_1^2)(x - \lambda_2^2)^2$. В последних двух случаях многочлен $\delta(-x)$, должен быть ещё и Гурвицев. В то же время многочлен (25) не может быть Гурвицев, так как для него не выполняется необходимое условие устойчивости – о положительности всех его коэффициентов (критерий Стодолы). Тогда следует исключить такие случаи из рассмотрения, то есть для рассматриваемой задачи такого распределения корней многочлена $\delta(x)$ не существует. Тогда условие $Q=0$ и не равенство нулю одновременно коэффициентов p и q является случаем распределением корней многочлена $\delta(x)$ вида (26).

Окончательно можно записать, что факторизация (8) существует, если истинно выражение

$$(p_1 > 0) \text{ и не } ((108Q = 0) \text{ и } (p \neq 0 \text{ или } q \neq 0)), \quad (27)$$

где
$$p = p_2 - \frac{\tilde{\delta}_2^2}{3}, \quad q = -\frac{p_2 \tilde{\delta}_2}{3} - p_1 + \frac{2\tilde{\delta}_2^3}{27}, \quad 108Q = 27q^2 + 4p^3.$$

Пусть условие (27) выполнено и вычислен многочлен $q(s)$ факторизации (8). Выражения коэффициентов многочлена $q(s)$ через исходные параметры задачи довольно громоздки. Пусть факторизованный многочлен $q(s)$, применением выражений (10), (12), (14) – (17), представлен в виде $q(s) = s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0$. Заметим, согласно (8), (9), (25) $q_0 = \sqrt{p_1}$.

Найдём теперь представление матрицы (22). Для рассматриваемой задачи имеют место выражения

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ -1 & q_2 & -\tilde{\delta}_2 - q_1 \\ q_0 & 0 & 0 \\ -q_1 & q_0 & p_2 \\ a + q_2 & \tilde{\delta}_2 - q_2 a - q_1 & q_0 + a q_1 - a \tilde{\delta}_2 - q_2 \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{V}}_1 = \begin{bmatrix} q_2 - a \\ q_1 - \tilde{\delta}_2 - q_2 a \\ q_0 - a q_1 + a \tilde{\delta}_2 - q_2 \tilde{\delta}_2 \\ -p_1 \\ a p_2 - p_2 q_2 \\ p_2 - p_3 q_1 + p_3 \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix}.$$

Первая, вторая и четвёртая строки этих матриц определяют уравнения (21) простой структуры. Решение этого уравнения имеет вид

$$s_1 = p_1 / q_0 = \sqrt{p_1}, \quad s_3 = q_2 - a, \quad s_2 = q_2 s_3 - (q_1 - q_2 a - \tilde{\delta}_2), \quad \mathbf{S} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3].$$

Далее, согласно (3), (4) оптимальный закон управления устроится по переменным вектора состояния

$$\bar{u}(t) = s_1 x_1(t) + s_2 x_2(t) + s_3 x_3(t).$$

Учитывая, что измеряемой переменной является только переменная $x_2(t) = z(t)$, в соответствии с обозначениями (20), можно получить структуру управления в виде ПИД закона. Окончательно, при обозначении (23)

$$u(t) = \frac{1}{b} \left(s_1 \int_0^t z(\tau) d\tau + s_2 z(t) + s_3 \dot{z}(t) \right). \quad (28)$$

В завершении, описанным подходом, с помощью разработанного программного обеспечения, было выполнено моделирование системы (19), (28), а также системы (18), (28) с коэффициентами матрицы обратных связей $\mathbf{S} = [-3,4722 \quad -12,4592 \quad -4,9677]$. Были выбраны весовые коэффициенты функционала качества (24) $p_1 = 50b^2$, $p_2 = 500b^2$, $p_3 = 0$. На рисунке 2 приведены результаты моделирования движения ПУ при его погружении. На рисунке 2 а) приведены переходные процессы глубины погружения ПУ, пунктирной линией – линейной системы (19), (28), сплошной линией – нелинейной системы (18), (28). Переходные характеристики имеют удовлетворительные показатели качества, а амплитуда управляющего сигнала не превосходит предельных значений, рисунок 2 б), что, по нашему мнению, свидетельствует об успешности решения задачи управления.

Заключение. В работе рассмотрена особенность применения уравнения Басса при поиске СР АУР в задаче ЛКО движения ПУ. Предложенным подходом осуществлён аналитический поиск решения задачи ЛКО. Управление найдено в форме ПИД закона. Моделирование показало приемлемость резуль-

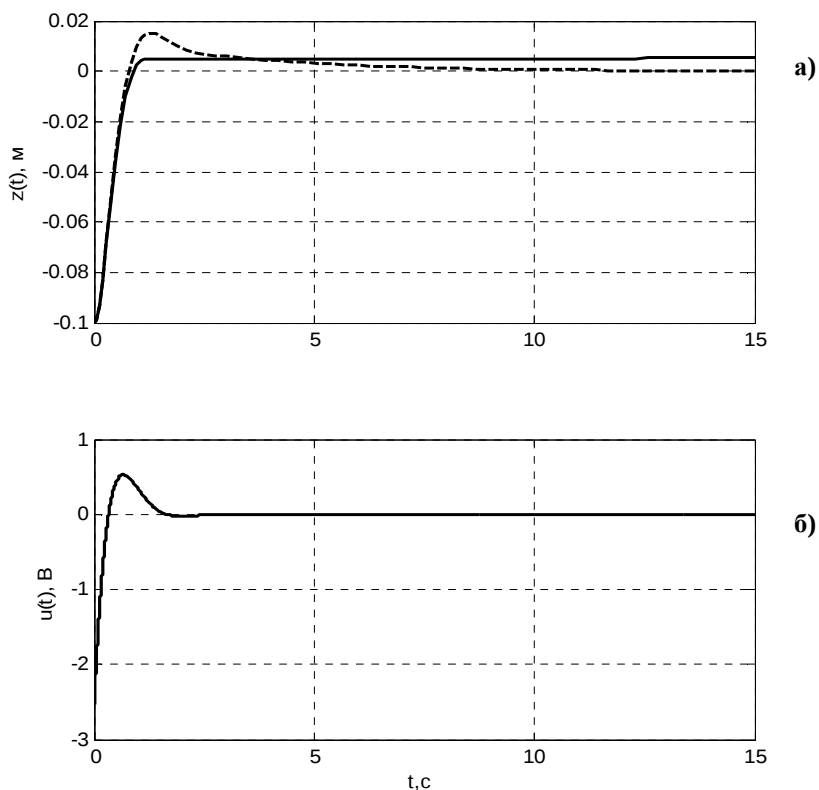


Рисунок 2 – Переходные процессы при моделировании погружения ПУ с оптимальным ПИД законом управления

татов синтеза. Дальнейшие работы, связанные с управлением ПУ, будут посвящены синтезу законов управления для более сложных и точных моделей ПУ, а также посвящены реализации оптимальных законов управления в бортовом компьютере ПУ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и г. Севастополя в рамках научного проекта 14-48-01598 «р_юг_а».

Библіографічний список використаної літератури

1. Альчаков В.В. Управление морскими подвижными платформами сбора данных при профильных измерениях: дис... канд. техн. наук: 05.13.03: защищена 24.12.2013; утв. 03.04.14 / Альчаков В.В. — Севастополь, 2013. — 140 с. — 0414U000234.
2. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван — М.: Мир, 1977. — 650 с.
3. Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / В.Б. Алексеев. — М.: МЦНМО, 2001. — 192 с.

Поступила в редакцию 28.09.2014 г.

Балабанов О.М. Лінійно-квадратичне оптимальне управління поплавковим пристроєм на основі рівняння Басса

Розглядаються особливості розв'язання задачі лінійно-квадратичної оптимізації (ЛКО) руху поплавкового пристрою при пошуку стабілізуючого рішення алгебраїчного рівняння Риккати на основі рівняння Басса. Рішення задачі ЛКО отримано в аналітичному виді, легко реалізується у вигляді простого і швидкого алгоритму та застосовно для бортової реалізації.

Ключові слова: лінійно-квадратична оптимізація, алгебраїчне рівняння Риккати, рівняння Басса, управління рухом поплавковим пристроєм.

Balabanov A.N. Linear-quadratic optimal control of the float device on the basis of the Bass equations

The features of the linear-square-optimal control synthesis of float device on searching for algebraic Riccati equation stabilizing solutions based on the Bass equation is considered. The proposed approach is obtained in an analytical form, easily implemented in a simple and fast algorithm, and suitable for on-board implementation.

Keywords: linear-quadratic optimization, algebraic Riccati equation, the Bass equation, control synthesis of float device.