

УДК 378: 519.816.001

Ю.Н. Щепин, доцент, канд. техн. наук,

Е.В. Козлова, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ФОРМИРОВАНИЕ У СТУДЕНТОВ НАВЫКОВ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ»

На примере выполнения расчетно-графического задания иллюстрируются приемы, формирующие у студентов системный подход к решению многокритериальных задач.

Одной из наиболее актуальных проблем современной научной и познавательной деятельности является проблема формирования у специалиста системного подхода к решению поставленных перед ним задач. Это особенно важно для специалистов в области современных информационных технологий, поскольку качественное выполнение этапа системного анализа при проектировании сложных систем существенно сокращает как временные, так и стоимостные затраты на разработку и последующую реализацию проекта.

Системное миропонимание, стремление к целостному постижению исследуемого объекта, как позволяет убедиться обращение к истории исследований в этом направлении, было одной из принципиальных позиций ученых как дореволюционного, так и советского периодов (В.И. Вернадского, Н.Ф. Федорова, А.А. Богданова, П.А. Флоренского, Л.С. Выготского). Несколько снизившийся в первой половине 90-х годов XX века интерес к системному подходу в настоящее время переживает возрождение, несмотря на значительное количество иных, вновь появившихся исследовательских программ и подходов, отраженных в работах В.И. Байденко, О.В. Заславской, И.О. Котляровой, Г.Н. Серикова, А.М. Суббето и др.

Большой интерес вызывают современные исследования Ф.П. Тарасенко, А.Г. Кузнецовой, В.А. Карташова [1–3], посвященные рассмотрению вопросов системного анализа при изучении дисциплин, связанных с новыми информационными технологиями.

В настоящее время всё чаще возникает необходимость адекватного применения методов теории, принятия решений и теории полезности во многих областях научной и практической деятельности, особенно при автоматизированном выполнении этапов системного и вариантного анализов для проектируемых систем. Поэтому целью данных исследований является разработка методических принципов формирования навыков системного анализа у будущих специалистов при выполнении различных этапов проектирования сложных систем.

Студенты специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» в девятом семестре выполняют расчетно-графическое задание, целью которого является ознакомление и приобретение навыков решения многокритериальных оптимизационных задач, принятия решений методом анализа иерархий (МАИ). Надо отметить, что при выполнении курсовых и дипломных проектов студенты данной специальности неизбежно сталкиваются с необходимостью выбора из нескольких конкурирующих вариантов одного приемлемого варианта решения. Одним из обязательных требований к содержанию пояснительной записки к дипломному проекту является наличие раздела «Вариантный анализ». В качестве примеров можно привести следующие задачи:

- выбор элементной базы для реализации комбинационной схемы;
- выбор конфигурации вычислительной системы;
- выбор системы проектирования или языка программирования;
- выбор структуры базы данных и так далее.

Учитывая вышеизложенное, представляется целесообразным изучение студентами достаточно простого, но универсального, в плане областей приложения, метода анализа иерархий.

Как известно [4], МАИ является систематической процедурой для иерархического представления элементов, определяющих суть любой проблемы. Возможность разбиения проблемы на иерархические уровни, четкое разделение этапов МАИ гарантируют овладение студентами методологическими основами теории принятия решений.

В разделе «Постановка задачи» ставится задача выбора оптимальной альтернативы из хорошо понятной студентам предметной области. Приводится описание не менее трех альтернатив по нескольким критериям, причем, с противоречивыми оценками (ни одна альтернатива не является самой предпочтительной по всем критериям одновременно).

Студентам предлагается решить задачу тремя способами:

– принять решение о выборе альтернативы на интуитивном уровне с обоснованием предпочтений по ранжированным ими критериям, используя качественные оценки «нравится — не нравится», причем этот выбор совершается и фиксируется непосредственно на практическом занятии в день выдачи задания и в дальнейшем не меняется;

– сделать выбор альтернативы индивидуально с использованием МАИ;

– сделать коллективный выбор в составе академической группы с использованием МАИ.

Для наглядности в качестве примера задачи выбора приведем следующую: из множества известных методов решения нелинейных уравнений выбрать метод решения, обеспечивающий наилучшие оценки в соответствии с МАИ. Следует отметить, что необходимую информацию о содержании и особенностях методов решения нелинейных уравнений студенты данной специальности получили при изучении дисциплины «Численные методы».

В результате реализации первого этапа МАИ любая, сколь угодно сложная, проблема может быть представлена в виде трехуровневой иерархии (цель – критерии – альтернативы), каждый из элементов иерархии при необходимости может быть представлен, в свою очередь, в виде трехуровневой иерархии и т.д.

Каждый студент строит полную простую иерархию самостоятельно, фактически это сводится к выбору списка критериев (уровень 2), так как уровень 1 (цель) и уровень 3 (список альтернатив) определены постановкой задачи.

На практическом занятии каждый из студентов академической группы представляет свой набор критериев, из которых путем обсуждения формируется список критериев (не более 7 ± 2) для коллективного варианта. Результатом обсуждения может быть объединение нескольких «родственных» критериев в один укрупненный критерий.

Для построения полной простой иерархии, представленной на рисунке 1, были определены цель, критерии и альтернативы.

Целью задачи принятия решения (уровень 1) в данном примере является выбор наиболее эффективного метода решения нелинейных уравнений. Альтернативами выбора (уровень 3) являются следующие методы:

M_1 . Метод половинного деления.

M_2 . Метод простой итерации.

M_3 . Метод Ньютона-Рафсона (классический).

M_4 . Метод секущих.

В результате обсуждения для дальнейшего рассмотрения (уровень 2) был отобран следующий список из пяти критериев (обозначим их буквой «А» с соответствующим индексом):

A_1 . Скорость сходимости метода.

A_2 . Вычислительная сложность алгоритма решения.

A_3 . Шаговость метода.

A_4 . Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения.

A_5 . Гарантия сходимости.

Цель второго этапа МАИ — установить приоритеты критериев и оценить каждую из альтернатив по критериям, выявив самую важную из них.

В МАИ элементы одного уровня иерархии сравниваются попарно по отношению к их воздействию («весу» или «интенсивности») на общую для них характеристику. Например, строится матрица для сравнения относительной важности критериев на втором уровне по отношению к общей цели на первом уровне. Подобные матрицы должны быть построены для попарных сравнений каждой альтернативы на третьем уровне по отношению к критериям второго уровня. Каждый из студентов в рамках своего индивидуального варианта самостоятельно заполняет матрицы попарных сравнений второго и третьего уровней иерархии.

Пусть даны элементы $A_1, A_2, \dots, A_n$. Матрица попарных сравнений размером $n \times n$ строится по следующим правилам [5]:

1) если элементы A_i и A_k одинаково важны, заносим в позиции (A_i, A_k) и (A_k, A_i) матрицы число 1;

2) если элемент A_i незначительно важнее элемента A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 3, а в позицию (A_k, A_i) — обратное ему число $1/3$;

3) если элемент A_i значительно важнее элемента A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 5, а в позицию (A_k, A_i) — обратное ему число $1/5$;

4) если элемент A_i явно важнее элемента A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 7, а в позицию (A_k, A_i) — обратное ему число $1/7$;

5) если элемент A_i по своей значимости абсолютно превосходит элемент A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 9, а в позицию (A_k, A_i) — обратное ему число $1/9$.

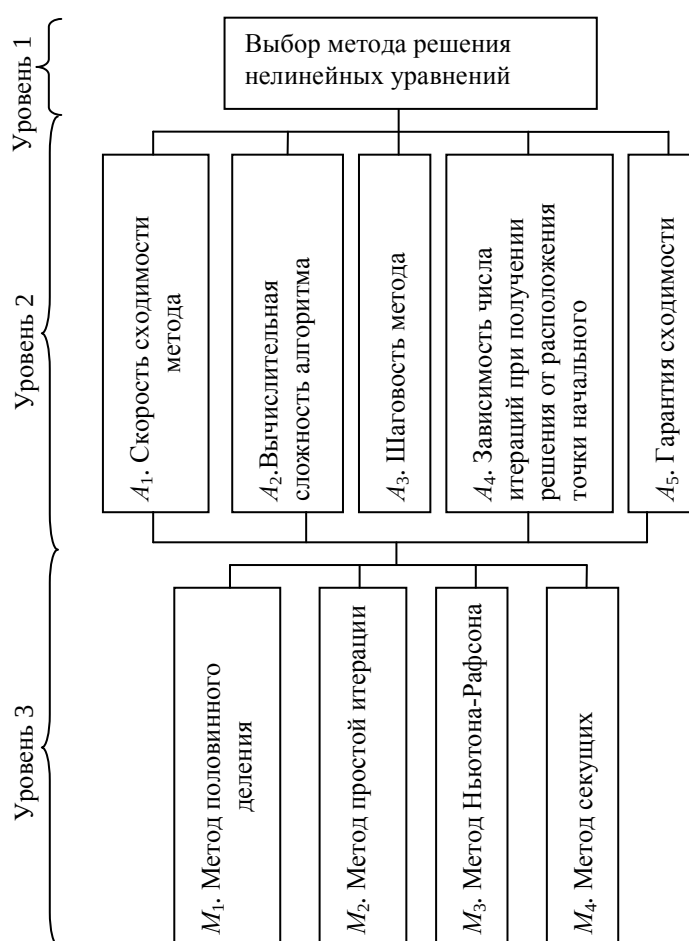


Рисунок 1 – Полная простая иерархия

Числа 2, 4, 6 и 8 используются для облегчения компромиссов между оценками, слегка отличающимися от основных чисел.

Таким образом, мы получаем таблицу сравнений, которой соответствует обратносимметричная матрица размером $n \times n$.

Следующим этапом анализа является построение матрицы попарных сравнений второго уровня.

В нашем примере второй уровень иерархии содержит пять критериев (матрица размером 5×5 представлена таблицей 1). Каким образом элементы матрицы получили свои значения? Группе студентов был задан вопрос: «При выборе метода решения нелинейных уравнений какой критерий является более значимым — Скорость сходимости метода (A_1) или Вычислительная сложность алгоритма решения (A_2)?». Был получен ответ «Скорость сходимости метода». Затем был задан вопрос: «Насколько важнее критерий A_1 относительно критерия A_2 ?». Был получен ответ: «Незначительно важнее». В результате элементу матрицы (A_1, A_2) присвоено значение 3, а элементу матрицы (A_2, A_1) — обратное значение $1/3$. Аналогично были проведены остальные попарные сравнения.

Таблица 1 – Матрица попарных сравнений второго уровня

Критерий		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	Скорость сходимости метода	1	3	1	2	$1/3$
A_2	Вычислительная сложность алгоритма решения	$1/3$	1	1	$1/2$	$1/2$
A_3	Шаговость метода	1	1	1	1	$1/3$
A_4	Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения	$1/2$	2	1	1	$1/3$
A_5	Гарантия сходимости	3	2	3	3	1

Если в группе нет единого мнения относительно того или иного предпочтения, необходимые оценки получают вычислением геометрического (или, что менее точно, — арифметического) среднего

оценок каждого из высказывающих свое предпочтение. При этом студенты получают очень ценный опыт принятия коллективного решения.

Далее рассматривается вычисление вектора приоритетов для матрицы попарных сравнений второго уровня

Из группы матриц попарных сравнений формируется набор локальных приоритетов, которые выражают относительное влияние множества элементов на элемент примыкающего сверху уровня. Находят относительную силу (величину, ценность, желательность или вероятность каждого отдельного объекта) через «решение» матриц, каждая из которых обладает обратносимметричными свойствами. Для этого нужно вычислить множество собственных векторов для каждой матрицы, а затем нормализовать результат к единице, получая тем самым вектор приоритетов.

Вычисление оценки компонент собственного вектора можно произвести различными способами, например, сначала вычислить геометрическое среднее в каждой строке матрицы A по формуле

$$b_i = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik}}. \quad (1)$$

Полученный по формуле (1) столбец чисел нормализуется делением каждого числа b_i на сумму B всех чисел столбца, в результате получаем значения компонент вектора локальных приоритетов (3).

$$x_i = \frac{b_i}{B}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $B = \sum_{i=1}^n b_i$.

Так как числа b_i нормализуются делением каждого числа на сумму всех чисел, очевидно

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (3)$$

Вычисления по формулам (1), (2) с точностью до четвертого знака дали следующие результаты, представленные в таблице 2.

Таблица 2 – Значения компонент вектора локальных приоритетов

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Значение	0,2057	0,1090	0,1438	0,1438	0,3977

Проведем проверку по формуле (3):

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 0,2057 + 0,1090 + 0,1438 + 0,1438 + 0,3977 = 1,0.$$

Очевидно, погрешность вычислений компонент вектора локальных приоритетов для матрицы попарных сравнений второго уровня равна нулю. Если же условие (3) не выполняется, необходимо оценить погрешность вычислений по следующей формуле:

$$\delta_x = \frac{\left| 1 - \sum_{i=1}^n x_i \right|}{1} \times 100\%. \quad (4)$$

Анализ результатов этапа вычисления вектора приоритетов для матрицы попарных сравнений второго уровня. Полученные значения компонент x_i вектора локальных приоритетов критериев дают возможность ранжировать критерии в соответствии с предпочтениями ЛПР (в качестве лица, принимающего решение, в данном случае выступает академическая группа) по убыванию полученных весов. Для рассматриваемого примера в таблице 3 критерии распределены в соответствии с «занятыми местами». Для ЛПР самым весомым является критерий «Гарантия сходимости», который «выигрывает» у ближайшего «преследователя» – критерия «Скорость сходимости метода» $(0,3977 - 0,2057) \times 100\% = 19,20\%$.

Таблица 3 – Численные оценки предпочтений критериев ЛПР

Критерий		Место	Вес
A_5	Гарантия сходимости	1	0,3977
A_1	Скорость сходимости метода	2	0,2057
A_3	Шаговость метода	3	0,1438
A_4	Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения	3	0,1438
A_2	Вычислительная сложность алгоритма решения	5	0,1090

Значение критерия, получившего самую низкую оценку («Вычислительная сложность алгоритма решения»), по мнению ЛПР, не является пренебрежимо малым, так как его вес составляет 10,9% от суммарного веса всех критериев. В противном случае критерии с пренебрежимо малыми весами следует исключить из рассмотрения и повторить этапы 3.2 и 3.3. Критерии «Шаговость метода» и «Зависимость числа итераций...» получили по формуле (2) одинаковые значения весов и «разделили» третье место.

Напомним, что каждый из студентов академической группы выполняет параллельно два варианта вычислений (индивидуальный и коллективный), поэтому на каждом этапе он проводит сравнительный анализ результатов. На данном этапе студент может сравнить на основании полученных количественных оценок свои предпочтения между критериями с коллективными предпочтениями.

Суждения ЛПР при проведении попарных сравнений должны быть, по возможности, идеально согласованными. Это означает выполнение следующих условий:

для любых i, k и l справедлива транзитивная (порядковая) согласованность

$$A_i > A_k, A_k > A_l \Rightarrow A_i > A_l, \quad (5)$$

где знак « $>$ » означает отношение предпочтения; $i, k, l=1,2,\dots,n$, при этом $i \neq k \neq l$.

Для любых i, k и l справедлива численная (кардинальная) согласованность:

$$a_{ik} \times a_{kl} = a_{il}. \quad (6)$$

Справедливо следующее утверждение [2]:

ТЕОРЕМА. Положительная обратно-симметричная матрица является согласованной тогда и только тогда, когда порядок матрицы и ее наибольшее собственное значение совпадают:

$$\lambda_{\max} = n.$$

Если элементы положительной обратносимметричной согласованной матрицы A изменить незначительно («пошевелить»), то максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ также изменится незначительно. Если $\lambda_{\max} \neq n$, всегда $\lambda_{\max} > n$. В качестве степени отклонения положительной обратно - симметричной матрицы A от согласованной матрицы принимается следующее отношение:

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad (7)$$

которое называется индексом согласованности (ИС) матрицы A и является показателем близости этой матрицы к согласованной. Теперь необходимо сравнить значение индекса согласованности со значением случайной согласованности (величина, которая получилась бы при случайном выборе количественных суждений из шкалы 1/9; 1/8; 1/7, ... , 1/2, 1, 2, ..., 9 при образовании обратносимметричной матрицы). В таблице 4 представлены значения случайных согласованностей для матриц различных размерностей.

Таблица 4 – Случайная согласованность (СС)

Размер матрицы n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Если разделить $ИС$ на число, соответствующее случайной согласованности матрицы того же порядка, получается отношение согласованности (ОС):

$$ОС = \frac{ИС}{СС} \times 100\%. \quad (8)$$

Величина отношения согласованности должна быть порядка 10 % или менее, чтобы быть приемлемой. Если значение OC выходит из этих пределов, то экспертам нужно исследовать задачу и пересмотреть суждения.

В целях экономии объема данной статьи опустим вопрос о приближенном вычислении наибольшего собственного значения обратно-симметричной матрицы.

Вернемся к нашему примеру и оценим отношение согласованности для матрицы попарных сравнений второго уровня (Таблица 1) по формуле (8), отношение согласованности получило значение $OC=5,81\%$.

Анализ результатов этапа исследования матрицы на согласованность. Необходимо выявить возможные нарушения транзитивной или кардинальной согласованности и предложить способ, в результате применения которого значение отношения согласованности будет улучшено. Для примера исследуем бинарные отношения предпочтения между критериями A_5 , A_1 и A_2 (Таблица 1). В соответствии с (5)

$$A_5 \succ A_1, \quad A_1 \succ A_2 \Rightarrow A_5 \succ A_2,$$

следовательно, для этих трех критериев нарушение транзитивной согласованности отсутствует. В противном случае надо предложить лицу, принимающему решение, пересмотреть отношения предпочтения между этими критериями. Проверим кардинальную (численную) согласованность между этими критериями. В соответствии с (6) для этих трех критериев должно выполняться равенство:

$$a_{51} \times a_{12} = a_{52}.$$

Согласно таблице 1 значения элементов $a_{51}=2$, $a_{12}=3$, $a_{52}=2$, то есть $2 \times 3 \neq 2$.

Можно порекомендовать ЛПР – уменьшить значение элемента a_{51} до единицы, а элемента a_{12} – до двух, что не нарушит транзитивную согласованность:

$$A_5 \sim A_1, \quad A_1 \succ A_2 \Rightarrow A_5 \succ A_2,$$

где символ « $\sim$ » означает отношение равноценности. Только эти изменения приведут к уменьшению значения отношения согласованности до 4,17 % вместо 5,81 %. Аналогичные исследования надо провести по отношению к остальным тройкам критериев, что может привести к абсолютно согласованной матрице попарных сравнений.

Анализ матриц попарных сравнений имеет большое значение, так как его проведение требует от студентов более глубокого осмысления количественных оценок предпочтений.

Следующим этапом является построение матриц попарных сравнений третьего уровня.

Для каждого критерия проводятся попарные сравнения альтернатив и в соответствии с формулами (1) ... (8) реализуются этап синтеза локальных приоритетов z_j (j — номер альтернативы, $j=1, m$, в нашем примере $m=4$) и исследование матрицы на согласованность аналогично тому, как это представлено в подразделах 3.2 — 3.4.

В таблице 5 проведены попарные сравнения альтернатив по критерию A_1 «Скорость сходимости метода».

Таблица 5 – Матрица попарных сравнений третьего уровня по критерию « A_1 . Скорость сходимости метода»

Альтернатива	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	1	1/2	1/3	1/3
M_2	2	1	1	2
M_3	1	1	1	1
M_4	3	1	1/2	1

По формулам (1), (2) вычислим сравнительную желательность альтернатив по первому критерию (Таблица 6).

Таблица 6 – Значения компонент вектора локальных приоритетов

z_j	z_1	z_2	z_3	z_4
Значение	0,1090	0,2245	0,4179	0,2485

Проведем проверку по формуле (3):

$$\sum_{j=1}^4 z_j = 0,1090 + 0,2245 + 0,4179 + 0,2485 = 0,9999.$$

Условие (3) не выполняется, поэтому по формуле (4) оценим погрешность вычислений значений компонент вектора локальных приоритетов для первой матрицы попарных сравнений третьего уровня, представленной таблицей 5:

$$\delta_z = \frac{|1 - 0,9999|}{1} \times 100\% = 0,01\%.$$

Получено удовлетворительное значение погрешности вычислений вектора локальных приоритетов.

Вычисленное согласно (7) значение индекса согласованности составляет $ИС=0,0144$, отношение согласованности согласно (8) – $ОС=1,6\%$.

Анализ результатов этапа вычисления векторов приоритетов для матриц попарных сравнений третьего уровня. Будем считать, что значения компонент z_j означают, что по критерию «Скорость сходимости метода» альтернатива M_3 заняла первое место ($z_3=0,4179$), альтернатива M_4 – второе место ($z_4=0,2485$), альтернатива M_2 – третье место ($z_2=0,2245$), альтернатива M_1 – четвертое место ($z_1=0,1090$).

Для остальных четырех матриц попарных сравнений третьего уровня приведем результаты расчетов в таблице 7.

Таблица 7 – Матрицы попарных сравнений третьего уровня

A_2 . Вычислительная сложность алгоритма	M_1	M_2	M_3	M_4	Вектор приоритетов
M_1	1	1	3	3	0,3898
M_2	1	1	2	2	0,3183
M_3	1/3	1/2	1	2	0,1710
M_4	1/3	1/2	1/2	1	0,1209
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 4,0732$
					$ИС=0,0244$
					$ОС=2,71\%$
A_3 . Шаговость метода	M_1	M_2	M_3	M_4	Вектор приоритетов
M_1	1	1	1	2	0,2857
M_2	1	1	1	2	0,2857
M_3	1	1	1	2	0,2857
M_4	1/2	1/2	1/2	1	0,1429
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 4,0000$
					$ИС=0,0000$
					$ОС=0,00\%$
A_4 . Зависимость числа итераций...	M_1	M_2	M_3	M_4	Вектор приоритетов
M_1	1	1/2	1/3	1/3	0,1061
M_2	2	1	1/2	1/2	0,1838
M_3	3	2	1	3	0,4502
M_4	3	2	1/3	1	0,2599
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 4,1975$
					$ИС=0,0658$
					$ОС=7,31\%$
A_5 . Гарантия сходимости	M_1	M_2	M_3	M_4	Вектор приоритетов
M_1	1	2	2	2	0,4000
M_2	1/2	1	1	1	0,2000
M_3	1/2	1	1	1	0,2000
M_4	1/2	1	1	1	0,2000
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 0,0000$
					$ИС=0,0000$
					$ОС=0,00\%$

С учетом полученных результатов для матриц попарных сравнений третьего уровня представим в таблице 8 суммарное количество первых, вторых и так далее мест, занятых каждой альтернативой при вычислении значений компонент векторов локальных приоритетов.

Таблица 8 – Суммарное количество мест, занятых каждой из альтернатив

Альтернатива \ Место	1	2	3	4
M_1 . Метод половинного деления	3	-	-	2
M_2 . Метод простой итерации	1	2	2	-
M_3 . Метод Ньютона-Рафсона	3	1	1	-
M_4 . Метод секущих	-	3	-	2

Анализ количества мест, занятых каждой из альтернатив, свидетельствует о некотором превосходстве метода Ньютона-Рафсона (три первых места и по одному второму и третьему мест) над методом половинного деления (три первых места), далее следуют метод секущих и метод простой итерации. Однако окончательный вывод о превосходстве той или иной альтернативы сделать пока нельзя.

Анализ результатов по таблице 8 развивает у студентов навыки прогнозирования в условиях неполного объема информации.

Чтобы оценить согласованность всей иерархии, надо воспользоваться следующей формулой:

$$OC_{\text{Иерархии}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times IC_i}{CC(m)} \times 100\%, \quad (9)$$

где x_i — значение i -ой компоненты вектора локальных приоритетов второго уровня, вычисленное в соответствии с (2); IC_i — значение i -го индекса согласованности матриц попарных сравнений третьего уровня; $CC(m)$ — значение случайной согласованности для $m = 4$.

Согласно (9),

$$OC_{\text{иерархии}} = \frac{0,2057 \times 0,0144 + 0,1090 \times 0,0244 + 0,1438 \times 0,0000 + 0,1438 \times 0,0658 + 0,3977 \times 0,0000}{0,9} \times 100\% =$$

$$= \frac{0,0030 + 0,0027 + 0 + 0,0095 + 0}{0,9} \times 100\% = \frac{0,0151}{0,9} \times 100\% = 1,68\%.$$

Значение отношения согласованности всей иерархии, меньшее 10%, является удовлетворительным. В противном случае необходимо найти причины несогласованности и предложить ЛПР меры по устранению несогласованности. Анализ промежуточных результатов в числителе дроби (9) при вычислении значения $OC_{\text{иерархии}}$ показывает, что самый большой вклад в несогласованность всей иерархии вносит четвертая матрица попарных сравнений (критерий A_4 «Зависимость числа итераций...»), затем — первая и вторая матрицы с соответствующими весами $0,0095 > 0,0030 > 0,0027$, третья и пятая матрицы являются идеально согласованными (в числителе дроби промежуточных результатов соответствующие вклады имеют нулевое значение).

Аналогичный анализ согласованности всей иерархии студенты проводят и для индивидуального варианта.

Следующим этапом выполнения расчётного задания является синтез составных (глобальных) приоритетов методов решения нелинейных уравнений

В таблице 9 для наглядности представлены исходные данные для расчета значений компонент вектора глобальных приоритетов, полученные на предыдущих этапах МАИ.

Таблица 9 – Исходные данные для расчета глобальных приоритетов

	x_1 (0,2057)	x_2 (0,1090)	x_3 (0,1438)	x_4 (0,1438)	x_5 (0,3977)
$z_i^{M_1}$	0,1090	0,3898	0,2857	0,1061	0,4000
$z_i^{M_2}$	0,2245	0,3183	0,2857	0,1838	0,2000
$z_i^{M_3}$	0,4179	0,1710	0,2857	0,4502	0,2000
$z_i^{M_4}$	0,2485	0,1209	0,1429	0,2599	0,2000

Для выявления составных, или глобальных, приоритетов методов решения нелинейных уравнений в таблице 9 локальные приоритеты альтернатив располагаются по отношению к каждому критерию; каждый столбец векторов альтернатив умножается на приоритет соответствующего критерия и результаты складываются вдоль каждой строки:

$$V^{M_j} = \sum_{i=1}^n x_i \times z_i^{M_j}. \quad (10)$$

С целью получения данных для дальнейшего проведения анализа рекомендуется, в обязательном порядке, при вычислениях по формуле (10) представлять промежуточные результаты вычислений.

$$\left. \begin{aligned} V^{M_1} &= 0,2057 \times 0,1090 + 0,1090 \times 0,3898 + 0,1438 \times 0,2857 + 0,1438 \times 0,1061 + 0,3977 \times 0,40000 = \\ &= 0,0224 + 0,0425 + 0,0411 + 0,0153 + 0,1591 = 0,2804; \\ V^{M_2} &= 0,2057 \times 0,2245 + 0,1090 \times 0,3183 + 0,1438 \times 0,2857 + 0,1438 \times 0,1838 + 0,3977 \times 0,2000 = \\ &= 0,0462 + 0,0347 + 0,0411 + 0,0264 + 0,0795 = 0,2279; \\ V^{M_3} &= 0,2057 \times 0,4179 + 0,1090 \times 0,1710 + 0,1438 \times 0,2857 + 0,1438 \times 0,4502 + 0,3977 \times 0,20000 = \\ &= 0,0860 + 0,0186 + 0,0411 + 0,0647 + 0,0795 = 0,2899; \\ V^{M_4} &= 0,2057 \times 0,2485 + 0,1090 \times 0,1209 + 0,1438 \times 0,1429 + 0,1438 \times 0,2599 + 0,3977 \times 0,20000 = \\ &= 0,0511 + 0,0132 + 0,0205 + 0,0374 + 0,0795 = 0,2017. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Значения компонент векторов локальных приоритетов матриц попарных сравнений второго и третьего уровней можно рассматривать как простые распределения вероятностей выбора соответственно критериев и альтернатив, так как они представлены неотрицательными вещественными числами и подчиняются условию (3). В таком случае вычисления по формуле (10) можно рассматривать как прямое линейное преобразование простых распределений случайных величин x и z , в результате которого получается простое распределение вероятностей V^{M_j} , $j = \overline{1,4}$, следовательно, должно выполняться свойство:

$$\sum_{i=1}^n V^{M_j} = 1. \quad (12)$$

Проверим свойство (12):

$$\sum_{i=1}^4 V^{M_j} = 0,2804 + 0,2279 + 0,2899 + 0,2017 = 0,9999.$$

Ранее в подразделе 3.5 для такого значения была вычислена погрешность, значение которой 0,01% является удовлетворительным.

Анализ результатов этапа синтеза глобальных приоритетов методов решения нелинейных уравнений. Результаты вычислений по формуле (10) можно трактовать как значения функции полезности для каждой из альтернатив. Теперь можно ранжировать альтернативы по убыванию значений функции полезности: на первом месте стоит альтернатива M_3 (Метод Ньютона-Рафсона), которая незначительно «выигрывает» у альтернативы M_1 (Метод половинного деления)

$$(0,2899 - 0,2804) \times 100\% = 0,95\%.$$

Альтернатива M_1 «выигрывает» у альтернативы M_2 (Метод простой итерации)

$$(0,2804 - 0,2279) \times 100\% = 5,25\%.$$

Наконец, альтернатива M_2 «выигрывает» у альтернативы M_4 (Метод секущих)

$$(0,2279 - 0,2017) \times 100\% = 2,62\%.$$

Таким образом, подтвердились сделанные на основе таблицы 8 (подраздел 3.5) предположения о «выигрышах» альтернатив M_3 и M_1 , но не подтвердились прогнозы по поводу альтернатив M_4 и M_2 .

Однако, «выигрыш» занявшей первое место альтернативы M_3 по сравнению с занявшей последнее место альтернативой M_4 составляет всего

$$(0,2899 - 0,2017) \times 100\% = 8,82\%,$$

что для данного метода анализа иерархий соизмеримо с допустимой ошибкой, поэтому нельзя сделать вывод о существенных преимуществах или недостатках одного из рассматриваемых методов решения нелинейных уравнений. Тем не менее, представляет интерес проанализировать, с использованием количественных оценок, за счет каких критериев каждый из методов получил примерно одинаковые значения функции полезности.

Анализ вкладов критериев в окончательные результаты. Для вычисления $q_i^{M_j}$ («вклада» i -го критерия в значение функции полезности V^{M_j}) воспользуемся значениями промежуточных результатов в формуле (11) и подставим их в формулу

$$q_i^{M_j} = \frac{x_i \times z_i^{M_j}}{V^{M_j}} \times 100\%, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,4}. \quad (13)$$

У альтернативы M_3 , «Метод Ньютона-Рафсона», значение функции полезности $V^{M_3} = 0,2899$ образовалось с учетом (13) из следующих «вкладов» критериев:

A_1 . Скорость сходимости метода —

$$q_1^{M_3} = \frac{0,0860}{0,2899} \times 100\% = 29,67\%.$$

A_2 . Вычислительная сложность алгоритма решения —

$$q_2^{M_3} = \frac{0,0186}{0,2899} \times 100\% = 6,42\%.$$

A_3 . Шаговость метода — $q_3^{M_3} = \frac{0,0411}{0,2899} \times 100\% = 14,18\%.$

A_4 . Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения — $q_4^{M_3} = \frac{0,0647}{0,2899} \times 100\% = 22,32\%.$

A_5 . Гарантия сходимости — $q_5^{M_3} = \frac{0,0795}{0,2899} \times 100\% = 27,42\%.$

Таким образом, в оценку метода Ньютона-Рафсона внесли примерно одинаковый вклад три критерия — «Скорость сходимости метода», «Гарантия сходимости» и «Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения». В таблице 10 представлены «вклады» критериев в значения функции полезности V^{M_j} , $j = \overline{1,4}$.

Таблица 10 – «Вклады» критериев в значение функции полезности

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$q_i^{M_1}$	7,99%	15,16%	14,66%	5,46%	56,74%
$q_i^{M_2}$	20,27%	15,23%	18,03%	11,58%	34,88%
$q_i^{M_3}$	29,67%	6,42%	14,18%	22,32%	27,42%
$q_i^{M_4}$	25,33%	6,54%	10,16%	18,54%	39,41%

Из таблицы 10 следует:

– метод половинного деления (M_1) основной «вклад» (56,74%) получил за счет критерия « A_5 . Гарантия сходимости»;

– метод простой итерации (M_2) наибольший «вклад» (34,88%) также получил за счет критерия « A_5 . Гарантия сходимости», остальные критерии, за исключением критерия « A_4 . Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения», внесли примерно одинаковые «вклады»;

– метод Ньютона-Рафсона (M_3) проанализирован выше;

– метод секущих (M_4) наибольший «вклад» (39,41%) также получил за счет критерия « A_5 . Гарантия сходимости», далее следуют «вклады» критериев « A_1 . Скорость сходимости метода» (25,33%) и « A_4 . Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения» (18,54%).

Итоговый сравнительный анализ результатов индивидуального варианта и решения на интуитивном уровне. Следует заметить, что, к удивлению студентов, не всегда интуитивный выбор альтернативы совпадает с результатами индивидуального решения с использованием МАИ. В случае несовпадения выбора оптимальных альтернатив необходимо объяснить возникшие противоречия на основе анализа количественных оценок вкладов критериев при использовании МАИ и качественных предпочтений на интуитивном уровне. Если же в качестве оптимальных выбраны одни и те же

альтернативы, необходимо выяснить, соответствуют ли количественные оценки качественным предпочтениям.

Итоговый сравнительный анализ результатов индивидуального и коллективного вариантов.

Проводится сравнительный анализ результатов на основе количественных оценок на всех этапах МАИ, что в значительной мере способствует развитию навыков системного анализа.

Предлагаемая методика в дальнейшем используется при выполнении раздела «Вариантный анализ» в дипломных и магистерских работах по специальности 7.091501. Продолжение исследований в данной области предполагается посвятить оценке эффективности применения данной методики специалистами в других областях знаний.

Библиографический список

1. Тарасенко Ф.П. Прикладной системный анализ / Ф.П. Тарасенко. — Томск: Изд-во ТГУ, 2006. — 517 с.
2. Карташев В.А. Система систем: Очерки общей теории и методологии. — М.: Прогресс-Академия, 1995. — 416 с.
3. Кузнецова А.Г. Развитие методологии системного подхода в отечественной педагогике / А.Г. Кузнецова. — Хабаровск: Изд-во ХК ИППК ПК, 2001. — 152 с.
4. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем: пер. с англ / Т. Саати, К. Кернс. — М.: Радио и связь, 1991. — 380 с.
5. Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении: учеб. пособие / Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. — М.: Дело, 2000. — 440 с.

Поступила в редакцию 29.12.2008 г.