

Actual problems of quality management service-oriented systems was considered. A formal description of the audit processes of IT services and assess the need for IT resources service - oriented systems, based on semi-Markov processes with common phase space of states, was conducted. A complex semi-Markov model, describing the process of decision-making on the organization of the audit of IT services according to concepts of the methodology Cobit, was proposed. Next expressions were obtained: for finding of the average service time of user requests to audit classes for service-oriented systems, for finding of the classification probabilities service-oriented systems on individual decision-making levels.

Keywords: service-oriented systems, IT services, IT - processes, IT resources, audit, methodology Cobit, decision-making, semi-Markov model.

УДК 681.515

А.Н. Балабанов, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская 33, г. Севастополь, Россия, 299053

e-mail: alexey.balabanov83@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЬВЕНТЫ И УРАВНЕНИЯ БАССА В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И СЛЕЖЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО НАБЛЮДАЕМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ⁵

Рассматриваются особенности поиска стабилизирующего решения (СР) алгебраического уравнения Риккати (АУР) в задачах линейно-квадратического оптимального (ЛКО) регулирования и слежения с обратной связью по наблюдаемой переменной при применении метода резольвенты и уравнения Басса. Предлагаемые подходы легко алгоритмизируются, экономичны и применимы для организации параллельных вычислений.

Ключевые слова: линейно-квадратическая оптимизация, алгебраическое уравнение Риккати, метод резольвенты, уравнение Басса.

1. Постановка задачи. Рассматриваются линейные динамические объекты управления

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{w}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$, $\mathbf{z}(t) \in R^{k_1}$, $\mathbf{y}(t) \in R^{k_2}$, $\mathbf{w}(t) \in R^{r_1}$, $\mathbf{v}(t) \in R^{r_2}$ соответственно векторы – состояния, управления, управляемых переменных, измеряемых переменных, внешних возмущений и ошибок измерений. Векторы $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ считаются стохастическими процессами, стационарными и некоррелированными типа белого шума с матрицами интенсивности $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ соответственно. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ – заданные матрицы соответствующих размерностей. $\mathbf{x}_0$ – заданный вектор начальных состояний объекта (1).

В задаче линейно-квадратической гауссовой оптимизации [1] объекта (1) отыскивается управление $\mathbf{u}(t)$, минимизирующее функционал качества

$$J(\mathbf{u}) = E \left\{ \int_0^\infty [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{M}\mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \right\} \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $E\{\cdot\}$ – операция математического ожидания, $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}$ – заданные симметрические матрицы, $\mathbf{M} \geq 0$, $\mathbf{R} > 0$. Как известно [1], решение этой задачи является комбинация решений задач оптимального управления и оптимального восстановления (наблюдения). Управление может быть найдено в виде

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}\hat{\mathbf{x}}(t),$$

где $\mathbf{X}$ стабилизирующее решение (СР) алгебраического уравнения Риккати (АУР)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{C}_1^T\mathbf{M}\mathbf{C}_1 - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} = \mathbf{0}_{n_1, n_1},$$

$\hat{\mathbf{x}}(t)$ – выходная переменная оптимального наблюдателя

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_2\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0,$$

⁵ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-48-01598).

где $\mathbf{L} = \mathbf{Y}\mathbf{C}_2^T \mathbf{V}_2^{-1}$, $\mathbf{Y}$ — СРАУР

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{V}_1\mathbf{F}^T - \mathbf{Y}\mathbf{C}_2^T \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{0}_{n_1, n_1}.$$

Выше $\mathbf{0}_{n_1, n_1}$ — нулевая $n_1 \times n_1$ матрица, далее под обозначением вида $\mathbf{0}_{k, m}$ понимается нулевая $k \times m$ матрица.

В практике проектирования часто также встречаются другие частные виды задачи (1), (2). Так если возмущение $\mathbf{w}(t)$ в (1) можно представить в виде стохастического процесса на выходе линейной системы

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{F}_d \tilde{\mathbf{w}}(t), \mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}_0^d, \\ \mathbf{w}(t) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(t) \end{cases} \quad (3)$$

возмущаемой белым шумом $\tilde{\mathbf{w}}(t) \in R^{m_2}$ единичной интенсивности, то объединённую (1), (3) систему уравнений с вектором состояния $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \text{col}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_d(t)]$, $\mathbf{x}_d \in R^{n_2}$ можно записать как

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F}\mathbf{C}_d \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{n_2, m} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1, m_2} \\ \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}(t), \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^d \end{bmatrix}, \\ \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0}_{k_1, n_2} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0}_{k_2, n_2} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t). \end{cases} \quad (4)$$

Эта система имеет вид уравнений (1) и может быть решена по описанной выше схеме.

В другой задаче, задаче оптимального слежения, где управляемая переменная $\mathbf{z}$ должна воспроизводить эталонную переменную $\mathbf{z}_r \in R^{k_1}$, поведение которой можно описать уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{w}_r(t), \mathbf{x}_r(0) = \mathbf{x}_0^r, \\ \mathbf{z}_r(t) = \mathbf{C}_{r1} \mathbf{x}_r(t), \\ \mathbf{y}_r(t) = \mathbf{C}_{r2} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{v}_r(t) \end{cases} \quad (5)$$

и где рассматривается функционал качества слежения

$$J(\mathbf{u}) = E \left\{ \int_0^\infty [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{M} \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \right\} \rightarrow \min, \quad (6)$$

объединённая (1), (5) система уравнений с вектором состояния $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \text{col}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_r(t)]$, $\mathbf{x}_r \in R^{n_2}$ и управляемой переменной $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_r(t)$, ошибкой слежения, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{n_2, m} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0}_{n_1, m_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, R_1} & \mathbf{B}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(t) \\ \mathbf{w}_r(t) \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_r(0) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & -\mathbf{C}_{r1} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0}_{k_2, n_2} \\ \mathbf{0}_{r_d, n_1} & \mathbf{C}_{r2} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{v}_r(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (7)$$

Выше принято для $\mathbf{w}_r \in R^{m_2}$ — белый шум с интенсивностью $\mathbf{V}_{r1}$, $\mathbf{y}_r \in R^{r_d}$ — наблюдаемая переменная для процесса $\mathbf{x}_r$.

Задача слежения (7), (6) также представлена в стандартной форме задачи (1), (2) и может быть решена путём поиска СР соответствующих АУР.

Можно рассмотреть и другие подобные задачи, приняв, например, в (7), что любой из случайных процессов представим в виде случайного процесса на выходе линейной системы (3). Все такие задачи можно представить в виде задачи (1), (2).

Характерной особенностью этих задач является, первое, высокая разреженность известных матриц (то есть матрицы содержат большое количество нулевых элементов). Второе, уравнения (4) и (7) описывают системы, которые не являются полностью управляемыми. Данные особенности можно эффективно использовать, сокращая объем вычислений при поиске СР АУР методом резольвенты [2], [3] и по уравнению Басса [1], [2].

Рассмотрим применение этих подходов в решении задач (4), (2) и (7), (6).

2. Опорные соотношения и обозначения. Рассматривается АУР в общем виде

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{P} - \mathbf{X} \mathbf{Q} \mathbf{X} = \mathbf{0}_{n,n}, \quad (8)$$

где принято $\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in R^{n \times n}$ – заданные матрицы, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$.

Среди методов поиска СР АУР можно выделить методы, характерные тем, что они редуцируют проблему поиска СР АУР (8) к поиску решения линейного уравнения

$$\mathbf{A}_L \mathbf{X} + \mathbf{B}_L = \mathbf{0}_{m,n}, \quad (9)$$

где $\mathbf{A}_L, \mathbf{B}_L \in R^{m \times n}$, $m \geq n$.

Уравнения вида (9), определяющие СР АУР, по [2] являются уравнениями линейной редукции (УЛР). Вводится в рассмотрение блочная матрица Гамильтона, её резольвента и характеристический многочлен соответственно

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{P} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \in R^{2n \times 2n},$$

$$\Theta(s) = (s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{H})^{-1},$$

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{H}),$$

где $\mathbf{I}_{2n}$ – $2n \times 2n$ единичная матрица.

Известно свойство спектра $\sigma(\mathbf{H})$ матрицы $\mathbf{H}$: если $\lambda \in \sigma(\mathbf{H})$, то и $(-\lambda) \in \sigma(\mathbf{H})$. Пусть спектр $\sigma(\mathbf{H})$ не имеет λ с $\text{Re } \lambda = 0$ ($\Theta(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси). Тогда возможна факторизация вида

$$\Delta(s) = (-1)^n q(s)q(-s) \quad (10)$$

с гурвицевым многочленом $q(s) = \sum_{k=0}^n q_k s^k$, $q_n = 1$.

Факторизация (10) позволяет найти СР АУР как решение линейного уравнения Басса [1], [2]

$$q(\mathbf{H}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2n,n}, \quad (11)$$

где $\mathbf{I}_n$ – $n \times n$ единичная матрица;

$$q(\mathbf{H}) = \mathbf{H}^n + q_{n-1} \mathbf{H}^{n-1} + \dots + q_1 \mathbf{H} + q_0 \mathbf{I}_{2n}. \quad (12)$$

Эффективным подходом вычислений выражений вида (12) является так называемая схема Горнера. На основе представления

$$q(\mathbf{H}) = ((\mathbf{H} + q_{n-1} \mathbf{I}_{2n}) \mathbf{H} + q_{n-2} \mathbf{I}_{2n}) \mathbf{H} + \dots + q_0 \mathbf{I}_{2n}$$

по рекуррентной процедуре

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{H} + q_{n-k} \mathbf{I}_{2n}, \quad k=1,2,\dots,n, \quad \mathbf{S}_0 = \mathbf{I}_{2n} \quad (13)$$

матрица (12) представима как $q(\mathbf{H}) = \mathbf{S}_n$.

Обозначив $\mathbf{V} = q(\mathbf{H}) \in R^{2n \times 2n}$ при блочном представлении $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$ с $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in R^{2n \times n}$, УЛР (11) принимает вид (9) с $\mathbf{A}_L = \mathbf{V}_2$, $\mathbf{B}_L = \mathbf{V}_1$.

В методе резольвенты СР АУР предлагается искать из УЛР [2]

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2n,n}. \quad (14)$$

Вещественная $2n \times 2n$ матрица $\mathbf{U}$ определена интегралом в комплексной области

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2\pi j} \int_C \Theta(s) ds, \quad (15)$$

где C – замкнутый контур в виде полуокружности с диаметром на мнимой оси, охватывающий при положительном обходе все полюсы резольвенты, расположенные в правой полуплоскости.

При подобном $\mathbf{V}$ блочном представлении $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2]$ УЛР (14) и также принимает вид (9) с $\mathbf{A}_L = \mathbf{U}_2$, $\mathbf{B}_L = \mathbf{U}_1$.

Отметим, что в утверждении теоремы и следствиях, данных в [2] УЛР (11), (14) совместны и определяют СР АУР, если, что необходимо и достаточно, $\text{rank } \mathbf{A}_L = \text{rank} [\mathbf{A}_L \ \mathbf{B}_L] = n$. Матрицы $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, также в соответствии с терминами работы [2], будем называть матрицами линейной редукции (МЛР).

В [3] МЛР (15) предлагается искать по представлению

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{2n} + \mathbf{H} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n-k-1} \Psi_k, \quad (16)$$

где γ_r , $r = 0, 1, \dots, n-1$ – значения интегрально-квадратических функционалов простой структуры, способы их вычисления указаны также в [3];

Ψ_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ – матрицы, определяемые модифицированным алгоритмом Фаддеева-Левеерье [3]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{H}^2, & \Psi_0 &= \mathbf{I}_{2n}, \\ \mathbf{G}_1 &= \mathbf{G}, & \delta_1 &= -\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{G}_1, & \Psi_1 &= \mathbf{G}_1 + \delta_1 \mathbf{I}_{2n}, \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{G} \Psi_1, & \delta_2 &= -\frac{1}{4} \text{tr } \mathbf{G}_2, & \Psi_2 &= \mathbf{G}_2 + \delta_2 \mathbf{I}_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}_k &= \mathbf{G} \Psi_{k-1}, & \delta_k &= -\frac{1}{2k} \text{tr } \mathbf{G}_k, & \Psi_k &= \mathbf{G}_k + \delta_k \mathbf{I}_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}_{n-1} &= \mathbf{G} \Psi_{n-2}, & \delta_{n-1} &= -\frac{1}{2(n-1)} \text{tr } \mathbf{G}_{n-1}, & \Psi_{n-1} &= \mathbf{G}_{n-1} + \delta_{n-1} \mathbf{I}_{2n}, \\ \mathbf{G}_n &= \mathbf{G} \Psi_{n-1} & \delta_n &= -\frac{1}{2n} \text{tr } \mathbf{G}_n, & \Psi_n &= \mathbf{G}_n + \delta_n \mathbf{I}_{2n} = \mathbf{0}_{2n,2n} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Данными для рассматриваемых методов при решении задач ЛКО (4), (2) и (7), (6) рассмотренных в предыдущем пункте при поиске соответствующих СР АУР будут матрицы следующего вида:

а) в задаче оптимального регулирования (4), (2) при поиске оптимального управления

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & -\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{0}_{n_2, n_2} \\ -\mathbf{P}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & -\mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{0}_{n_2, n_2} & -\mathbf{A}_{12}^T & -\mathbf{A}_{22}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{0}_{n_2, n_2} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{34} & \mathbf{G}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ -\mathbf{G}_{34}^T & \mathbf{0}_{n_2, n_2} & \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{G}_{22}^T \end{bmatrix}; \quad (18)$$

при поиске оптимального наблюдателя

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & \mathbf{0}_{n_1, n_1} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & -\mathbf{Q}_{22} \\ -\mathbf{P}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & -\mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{0}_{n_2, n_2} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & -\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & \mathbf{0}_{n_1, n_1} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{24} \\ \mathbf{G}_{34} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & \mathbf{G}_{11}^T & \mathbf{G}_{21}^T \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{0}_{n_2, n_2} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{22}^T \end{bmatrix}; \quad (19)$$

б) в задаче оптимального слежения (7), (6) при поиске оптимального управления

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & -\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{0}_{n_2, n_2} \\ -\mathbf{P}_{11} & -\mathbf{P}_{12} & -\mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ -\mathbf{P}_{12}^T & -\mathbf{P}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & -\mathbf{A}_{22}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{0}_{n_2, n_2} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & \mathbf{G}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ -\mathbf{G}_{32}^T & \mathbf{G}_{42} & \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{G}_{22}^T \end{bmatrix}; \quad (20)$$

при поиске оптимального наблюдателя

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & -\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{A}_{22}^T & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & -\mathbf{Q}_{22} \\ -\mathbf{P}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & -\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & -\mathbf{P}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & -\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & \mathbf{G}_{13} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{24} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{0}_{n_1, n_2} & \mathbf{G}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1, n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{42} & \mathbf{0}_{n_2, n_1} & \mathbf{G}_{22}^T \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В (18)–(21) для матриц блоков приняты следующие размерности $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{Q}_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{22}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{Q}_{22} \in R^{n_2 \times n_2}$, остальные матрицы имеют размерности, соответствующие блочному представлению.

3. Основной результат. Свойство разреженности матриц (18)–(21) можно эффективно использовать в рекуррентных процедурах (17), (13) оперируя в них блочным представлением матриц. Однако большое количество нулевых элементов обусловлено не только присутствием чисто нулевых блоков, но также, как правило, для прикладных задач, высокой разреженностью известных матриц – матриц функционалов качества, матриц моделей объекта управления, возмущений и эталонного процесса. Кроме того, как было сказано выше, возможно конструирование и других задач, подобных задачам (2), (4) или (7), (6). Таким образом, предпочтительней рассмотреть подход, который ориентирован на разреженные матрицы в целом.

Отметим также, что с вычислительной точки зрения, более существенной проблемой, является поиск матриц $\mathbf{A}_L, \mathbf{B}_L$ УЛР (9), нежели поиск его решения. В УЛР (11), (14) записанных в форме системы (9) $m = 2n$ имеется n избыточных уравнений. Подход, рассматриваемый в работе, позволяет провести поиск СРАУР по неполному УЛР, что также ведёт к экономии вычислительных ресурсов.

Итак, согласно рекуррентной процедуре (17), для матриц Ψ_r , $r = 0, 1, \dots, n-1$ справедливы выражения

$$\Psi_r = \sum_{i=0}^r \delta_{r-i} \mathbf{G}^i, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad \mathbf{G} = \mathbf{H}^2. \quad (22)$$

Введём обозначение для части выражения (16)

$$\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n-k-1} \Psi_k.$$

Согласно (22), перегруппировав члены сумм относительно степеней матриц $\mathbf{G}^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, можно записать

$$\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\gamma}_{n-1-k} \mathbf{G}^k, \quad (23)$$

где

$$\hat{\gamma}_m = \gamma_0 \delta_m + \gamma_1 \delta_{m-1} + \dots + \gamma_m \delta_0, \quad \delta_0 = 1. \quad (24)$$

Таким образом, с учётом (23) и что матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{S}$ перестановочные, для МЛР (16) возможно представление

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{2n} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \hat{\gamma}_{n-1-k} \mathbf{G}^k \right) \mathbf{H}. \quad (25)$$

Выражения для МЛР (12), (25) имеют похожую структуру – они выражены линейным образом через матрицы $\mathbf{I}_{2n}, \mathbf{H}, \mathbf{H}^2, \dots$. Будем далее считать, что коэффициенты q_r , $r = 1, 2, \dots, n$ многочлена факторизации (10) и числа (24) нам уже известны.

Далее, пусть $\mathbf{g}_j^k$ – j -ая строка матрицы $\mathbf{G}^k$, $k = 0, 1, \dots$ (матрицы $\mathbf{G}$ в k -ой степени). Справедливо равенство $\mathbf{g}_j^k = \mathbf{e}_j \mathbf{G}^k$, где $\mathbf{e}_j \in R^{1 \times 2n}$ – единичный вектор-строка с неравным нулю j -им элементом. Для векторов $\mathbf{g}_j^0, \mathbf{g}_j^1, \dots, \mathbf{g}_j^k$ справедливы рекуррентные соотношения $\mathbf{g}_j^k = \mathbf{g}_j^{k-1} \mathbf{G}$, $\mathbf{g}_j^0 = \mathbf{e}_j$. Как нетрудно видеть из выражения (23) $\mathbf{s}_j$ (j -ая строка матрицы $\mathbf{S}$) является линейной комбинацией векторов $\mathbf{g}_j^0, \mathbf{g}_j^1, \dots, \mathbf{g}_j^{n-1}$,

$$\mathbf{s}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\gamma}_{n-1-k} \mathbf{g}_j^k,$$

а j -ая строка матрицы $\mathbf{U}$ в представлении (25) определена как

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{2} \mathbf{e}_j + \mathbf{s}_j \mathbf{H}. \quad (26)$$

Нижне предлагается фрагмент программы на языке пакета Matlab реализующий построчный поиск элементов матрицы $\mathbf{U}$.

```
for j=1:2*n %1
    ej= zeros(1,2*n); ej(j)=1; %2
    gkj= ej; %3
    sj= zeros(1,2*n); sj(j)= js(n); %4
    for k=1:n-1 %5
        gkj=gkj*G; %6
        sj= sj + js(n-k)*gkj; %7
    end; %8
    U(j,:)= 0.5*ej + sj*H; %9
end
```

В строке 7 фрагмента программы переменная $js(n-k)$ содержит величину $\hat{\gamma}_{n-1-k}$.

Подобные построения можно провести и при поиске элементов матрицы $\mathbf{V}$ УЛР (11), фрагмент программы также приводится ниже.

```
for j=1:2*n %1
    ej= zeros(1,2*n); ej(j)=1; %2
    qH(j,j)= qs(n+1); %3
    for i=1:n %4
        ej=ej*H; %5
        qH(j,:)= qH(j,:) + qs(n-i+1)*ej; %6
    end;
end
```

В приведённом фрагменте программы переменная $qs(n-i+1)$ содержит коэффициент q_i .

Данный подход позволяет получить МЛР построчно и в связи с этим имеет некоторые привлекательные черты. Во-первых, можно рассчитывать на то, что для поиска СР АУР нам не обязательно осуществлять поиск всех строк МЛР, достаточно получить только те, которые формируют систему (9) полного ранга, в благоприятном исходе достаточно получить только n строк МЛР вместо $2n$. Во-вторых, так как процедуры получения строк МЛР не зависят друг от друга, легко организовать их параллельное вычисление. Также данный подход может быть эффективно применён для разреженных матриц. Действительно, самой дорогой операцией является операция векторно-матричного умножения в строках 6, 5 представленных соответственно фрагментов программ. Данная операция требует арифметических действий над $4n^2$ элементами матриц $\mathbf{H}$ или $\mathbf{G}$. Данная величина $(4n^2)$ пропорционально влияет на оценку вычислительной сложности алгоритма. Для разреженных матриц с количеством ненулевых элементов k ($0 < k < 4n^2$) оценка вычислительной сложности алгоритма может быть снижена в $4n^2/k$ раз (а). На пример, при поиске СР АУР в задаче ЛКО с критерием оптимальности

$$J(u) = \int_0^\infty x_1^2(t) + \rho u^2(t) dt \rightarrow \min \quad (27)$$

и объектом управления

$$\dot{x}_i(t) = x_{i-1}(t), \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad \dot{x}_n(t) = u(t), \quad (28)$$

$$y_i(t) = x_i(t), \quad i=1,2,\dots,n,$$

соответствующие этой задаче матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ будут иметь всего $4n$ ненулевых элементов. Выше $x_i(t), y_i(t), i=1,2,\dots,n$ – соответственно переменные состояния и управляемые переменные объекта, $u(t)$ – входная переменная – управление, $\rho > 0$ – весовой множитель.

Не строго утверждая, но опираясь на инженерный смысл постановок задач подобных задаче (27), (28), величину $4n$ можно считать предельной наименьшей и для практических приложений для k можно принять оценку $4n \leq k < 4n^2$.

Приняв $n = n_1 + n_2$ для данных (18)–(21) можно указать, таблица 1, наименьшее количество нулевых элементов обусловленных только нулевыми блоками.

Таблица 1 – наименьшее количество нулевых элементов в исходных данных методов

При поиске СР АУР с данными	по методу резольвенты	по уравнению Басса
(18)	$4n_1n_2 + 2n_2^2$	$6n_1n_2 + 2n_2^2$
(19)	$n_1^2 + 6n_1n_2 + n_2^2$	$n_1^2 + 6n_1n_2 + n_2^2$
(20)	$4n_1n_2 + n_2^2$	$6n_1n_2 + 2n_2^2$
(21)	$8n_1n_2$	$8n_1n_2$

4. Поиск СР АУР по неполному УЛР. Рассмотрим УЛР (14). Ещё раз отметим, что подход, рассмотренный в предыдущем пункте, позволяет построчно найти элементы МЛР (26) и соответственно элементы УЛР. Линейные уравнения хорошо изучены и существует большое количество подходов к поиску их решения, однако при применении рассматриваемого подхода можно существенно сократить вычисления, применяя следующую стратегию, учитывающую симметрические свойства [2]

$$\mathbf{U}_{12}^T = \mathbf{U}_{12}, \quad \mathbf{U}_{21}^T = \mathbf{U}_{21}, \quad \mathbf{U}_{22} = \mathbf{I}_n - \mathbf{U}_{11}^T$$

блоков $\mathbf{U}_{11}, \mathbf{U}_{12}, \mathbf{U}_{21}, \mathbf{U}_{22} \in R^{n \times n}$ МЛР $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix}$.

Обозначим $\tilde{\mathbf{u}}_j, \bar{\mathbf{u}}_j \in R^{1 \times n}$ – вектор-строки соответствующие представлению $\mathbf{u}_j = [\tilde{\mathbf{u}}_j \quad \bar{\mathbf{u}}_j]$, $j=1,2,\dots,2n$.

Пусть вычислены первые n строк $\mathbf{u}_j$, $j=1,2,\dots,n$ матрицы $\mathbf{U}$, то есть матрицы $\mathbf{U}_{11}$, $\mathbf{U}_{12}$. В этом случае УЛР (9) с $\mathbf{A}_L = \mathbf{U}_{12}$, $\mathbf{B}_L = \mathbf{U}_{11}$ имеет симметричную матрицу коэффициентов и для его решения можно использовать более эффективные алгоритмы решения линейных уравнений.

В случае $\text{rank } \mathbf{U}_{12} = n$ УЛР определяет СР АУР, дальнейшее построение МЛР не проводится. В случае же, если матрица $\mathbf{A}_L = \mathbf{U}_{12}$ вырождена (пусть $\text{rank } \mathbf{A}_L = p < n$), то рассматриваемое УЛР следует дополнить $(n - p)$ совместными уравнениями, отыскав $(n - p)$ таких различных строк

$$\mathbf{u}_{m_i}, \quad m_i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}, \quad i=1,2,\dots,n-p \quad (29)$$

матрицы $\mathbf{U}$, что матрица

$$\hat{\mathbf{A}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L \\ \bar{\mathbf{u}}_{m_1} \\ \bar{\mathbf{u}}_{m_2} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_{m_{n-p}} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

была бы полного ранга, $\text{rang } \hat{\mathbf{A}}_L = n$.

Тогда неполное УЛР

$$\hat{\mathbf{A}}_L \mathbf{X} + \hat{\mathbf{B}}_L = \mathbf{0}_{2n-p,n}, \quad (31)$$

где

$$\hat{\mathbf{B}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L \\ \tilde{\mathbf{u}}_{m_1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{m_2} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{m_{n-p}} \end{bmatrix}$$

определяет СР АУР.

Выбор необходимых строк (29) можно осуществить предварительно проанализировав строки $\bar{\mathbf{u}}_j$, $j = n+1, n+2, \dots, 2n$, то есть строки уже найденной к этому моменту матрицы $\mathbf{U}_{22} = \mathbf{I}_n - \mathbf{U}_{11}^T$. Такой анализ можно осуществить, на пример, на основе обновления QR-разложения [4], в среде Matlab возможно применение специальной функции `qrinsert`.

Выбор необходимых строк можно осуществить последовательно по одной. Удачный выбор некоторой строки $\bar{\mathbf{u}}_j$, $j \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ для блочной матрицы $\hat{\mathbf{A}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L \\ \bar{\mathbf{u}}_j \end{bmatrix}$ соответствует выполнению условия

$$\text{rank } \hat{\mathbf{A}}_L > \text{rank } \mathbf{A}_L \quad (32)$$

Пусть для матрицы $\mathbf{A}_L = \mathbf{U}_{12}$ выполнено QR-разложение $\mathbf{A}_L = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ с ортогональной матрицей $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и матрицей

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0}_{n-p,p} & \mathbf{0}_{n-p,n-p} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{R}_{11}$ – невырожденная $p \times p$ верхне-треугольная матрица.

Размерность матрицы $\mathbf{R}_{11}$ определяет ранг матрицы $\mathbf{A}_L$, $\text{rank } \mathbf{A}_L = p < n$.

Известно [4], что можно провести поиск матриц $\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{R}}$ QR-разложения матрицы $\hat{\mathbf{A}}_L = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$ на основе матриц $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$. Такую процедуру называют обновлением QR-разложения, которую в вычислительном плане можно выполнить меньшим количеством арифметических операций, чем проводить QR-разложения матрицы $\hat{\mathbf{A}}_L = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$ с самого начала [4].

В рамках рассматриваемого подхода такую процедуру можно осуществить следующим образом. Пусть i – количество найденных строк $\bar{\mathbf{u}}_j$ в (30) к определённому этапу вычислений. На первом шаге $i=0$.

В представлении

$$\hat{\mathbf{A}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L \\ \bar{\mathbf{u}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+i,1} & \mathbf{Q} \\ 1 & \mathbf{0}_{1,n+i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_j \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

матрицу

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_j \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{j1} & \bar{u}_{j2} & \dots \\ r_{11} & r_{12} & \dots \\ 0 & r_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

нужно лишь преобразовать к её верхней треугольной форме. Известно [4], что найдётся плоское вращение $\mathbf{Q}_1^T$, действующее на строки 1 и 2 такое, что $\mathbf{Q}_1^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_j \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}$ имеет 0 на месте r_{11} . Следующий шаг

состоит в применении вращения $\mathbf{Q}_2^T$, действующего на строки 2 и 3, которое обнуляет r_{22} и так далее. Сделав описанным способом $p+i$ шагов можно получить матрицы

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}_{p+i}^T \dots \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_j \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \in R^{(n+i+1) \times n}$$

и

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+i,1} & \mathbf{Q} \\ 1 & \mathbf{0}_{1,n+i} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_{p+i} \in R^{(n+i+1) \times (n+i+1)}.$$

Теперь, при представлении

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{11} & \tilde{\mathbf{R}}_{12} \\ \mathbf{0}_{n-p,p+i+1} & \mathbf{0}_{n-p,n-p-i-1} \end{bmatrix},$$

если справедливо условие

$$\text{rank } \tilde{\mathbf{R}}_{11} > \text{rank } \mathbf{R}_{11}, \quad (33)$$

то справедливо и (32).

Условие (33) легко проверяется. Для его выполнения $\tilde{\mathbf{R}}_{11}$ должна быть невырожденной верхне-треугольной $(p+i+1) \times (p+i+1)$ матрицей.

Если условие (33) не выполняется, то обновление QR-разложения не проводится и описанная процедура проводится уже для следующей строки $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1}$. Если условие (33) выполняется, то, находясь элементы строки $\tilde{\mathbf{u}}_j$, далее переопределяются матрицы $\mathbf{A}_L \leftarrow \hat{\mathbf{A}}_L$, $\mathbf{Q} \leftarrow \tilde{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R} \leftarrow \tilde{\mathbf{R}}$ и величина $i \leftarrow i+1$. Далее операция обновления QR-разложения выполняет повторно до момента, когда матрица $\tilde{\mathbf{R}}_{11}$ не станет невырожденной $n \times n$ квадратной, верхне-треугольной, то есть когда $i = n-p$. В этом случае выполняется условие $\text{rank } \tilde{\mathbf{R}}_{11} = \text{rank } \hat{\mathbf{A}}_L = n$ и возможно осуществить поиск СР АУР по УЛР

$$\tilde{\mathbf{R}}_{11} \mathbf{X} = \mathbf{Y}_{11},$$

где $\mathbf{Y}_{11}$ соответствует блочному представлению $\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{B}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} \\ \mathbf{0}_{n-p,n} \end{bmatrix}$.

Затраты на обновление QR-разложения довольно низкие [4], затрачивается порядка $O(n^2)$ арифметических операций. В то время как поиск новой строки по выражению (26) требует порядка $O(n^3)$ арифметических операций. Таким образом такой подход к поиску СР АУР по УЛР (9) даёт возможность существенно сократить вычислительны затраты вычисляя не полный набор строк матрицы $\mathbf{U}$.

Подобный подход может быть осуществлён и при поиске СР АУР по уравнению Басса. В этом случае следует рассмотреть представления матрицы (12) в виде

$$q(\mathbf{H}) = \sum_{j=0}^e q_{2j} \mathbf{G}^j + \mathbf{H} \sum_{k=0}^l q_{2k+1} \mathbf{G}^k = \sum_{j=0}^e q_{2j} \mathbf{G}^j + \left(\sum_{k=0}^l q_{2k+1} \mathbf{G}^k \right) \mathbf{H},$$

которые получаются простой группировкой слагаемых по чётным и нечётным степеням матриц $\mathbf{H}^k$, $k = 1, 2, \dots$.

Обозначив

$$\sum_{j=0}^e q_{2j} \mathbf{G}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, j = 0, l, \dots, e, \quad e = \begin{cases} n/2, & n - \text{чётное}, \\ (n-1)/2, & n - \text{нечёт.}, \end{cases} \quad (34)$$

$$\sum_{k=0}^l q_{2k+1} \mathbf{G}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix}, k = 0, 1, \dots, l, \quad l = \begin{cases} n/2-1, & n - \text{чётное}, \\ (n-1)/2, & n - \text{нечёт.} \end{cases} \quad (35)$$

$$q(\mathbf{H}) = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{11}, \mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{21}, \mathbf{V}_{22} \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

а также учитывая симметрические свойства матриц

$$\mathbf{W}_{22} = \mathbf{W}_{11}^T, \mathbf{W}_{12} = -\mathbf{W}_{12}^T, \mathbf{W}_{21} = -\mathbf{W}_{21}^T, \mathbf{Z}_{22} = \mathbf{Z}_{11}^T, \mathbf{Z}_{12} = -\mathbf{Z}_{12}^T, \mathbf{Z}_{21} = -\mathbf{Z}_{21}^T$$

можно записать

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{11} &= \mathbf{W}_{11} + \mathbf{Z}_{11}\mathbf{A} - \mathbf{Z}_{12}\mathbf{P}, \\ \mathbf{V}_{12} &= \mathbf{W}_{12} + \mathbf{A}\mathbf{Z}_{12} - \mathbf{Q}\mathbf{Z}_{11}^T, \\ \mathbf{V}_{22} &= \mathbf{W}_{11}^T - \mathbf{P}\mathbf{Z}_{12} - \mathbf{A}^T\mathbf{Z}_{11}^T.\end{aligned}$$

Матрицы $\mathbf{V}_{11}$, $\mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{22}$ выражены через матрицы $\mathbf{W}_{11}$, $\mathbf{W}_{12}$, $\mathbf{Z}_{11}$, $\mathbf{Z}_{12}$. Последние можно отыскать по (34), (35), вычислив ряд векторов $\mathbf{g}_j^k = \mathbf{g}_j^{k-1}\mathbf{G}$, $\mathbf{g}_j^0 = \mathbf{e}_j$, $k = 0, 1, \dots, \max(e, l)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то есть, вычислив n первых строк матриц $\mathbf{G}^k$, $k = 0, 1, \dots, \max(e, l)$.

Далее решение УЛР Басса не сложно осуществить описанным выше подходом по аналогии как для метода резольвенты.

Заключение. В работе рассмотрены особенности применения метода резольвенты и уравнения Басса при поиске СР АУР в задачах ЛКО регулирования и слежения с обратной связью по наблюдаемой переменной. Выявлены такие особенности задач как высокая разреженность известных матриц и неполная управляемость систем, описываемых уравнениями (4) и (7). Предложенный подход расширяет возможности подходов, применённых в оригинальных работах [2], [3]. Первое, указанным подходом можно осуществить построение неполного УЛР (31), что существенно снижает количество вычислительных операций. Второе, на основе представления (26) возможно легко реализовать алгоритм параллельного вычисления МЛР.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Квакернаак Х.: Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван — М.: Мир, 1977. — 650 с.
2. Барабанов А.Т.: Стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати. Метод резольвенты / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. №3. — С. 20–31
3. Барабанов А.Т.: Алгоритмы построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати на основе его линейной редукции в задачах аналитического конструирования регуляторов / А.Т. Барабанов // Изд. РАН. Теория и системы управления. 2008. №6. — С.53–68.
4. Уоткинс Д. С. Основы матричных вычислений / Д. Уоткинс; Пер. с англ. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006. — 664 с.

Балабанов О.М. Застосування методу резольвенти і рівняння Басса в задачах лінійно-квадратичного оптимального регулювання і спостереження зі зворотним зв'язком по спостережуваній змінній

Розглядаються особливості пошуку стабілізуючого рішення алгебраїчного рівняння Риккати в задачах лінійно-квадратичного оптимального регулювання і спостереження зі зворотним зв'язком по спостережуваній змінній при застосуванні методу резольвенти і рівняння Басса. Пропоновані підходи легко алгоритмізуються, економічні і застосовні для організації паралельних обчислень.

Ключові слова: лінійно-квадратична оптимізація, алгебраїчне рівняння Риккати, метод резольвенти, рівняння Басса.

Balabanov A.N. Application of resolvent method and Bass equation for linear-square optimal regulation and tracking problems with feedback on observed variable

The features of search stabilizing solution of the algebraic Riccati equation in the problems of linear-square optimal regulation and tracking with feedback on observed variable with applying the resolvent method and Bass equations are discussed. Suggested approaches are easy to programing, economical and suitable for parallel computing.

Keywords: linearly-quadratic optimization, algebraic Riccati equation, resolvent method, Bass equation