

УДК 519.872

А.И. Песчанский, профессор, д-р техн. наук**А.И. Коваленко***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Россия, 299053**e-mail: peschansky_sntu@mail.ru***ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НЕНАДЕЖНОЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И СКРЫТЫМ ОТКАЗОМ¹⁰**

Построена полумарковская модель однолинейной системы обслуживания $GI/G/1/0$ со скрытым отказом. Техническое обслуживание ненадежного прибора системы проводится по наработке обслуживаемого прибора. Определены стационарные надежностные и экономические характеристики системы. Выполнена двухкритериальная оптимизация периодичности проведения технического обслуживания.

Ключевые слова: *однолинейная система обслуживания с ненадежным прибором, скрытый отказ, техническое обслуживание по наработке, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, стационарные характеристики, двухкритериальная оптимизация*

Введение. Одним из разделов теории массового обслуживания является моделирование систем с ненадежными приборами. Повысить надежность функционирования таких систем возможно, в частности, за счет проведения технического обслуживания (ТО) ненадежных приборов. При этом эффективными могут быть различные стратегии ТО. Так, в [1] рассмотрена ненадежная однолинейная система обслуживания с простейшим входящим потоком и бесконечной очередью, в которой ТО проводится после обслуживания определенного количества заявок. В работе [2] найдены стационарные характеристики функционирования и оптимальная периодичность проведения ТО ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями при условии, что ТО прибора начинается в тот момент времени, когда длительность обслуживания требования достигает заранее установленной детерминированной величины.

В данной работе построена модель функционирования системы $GI/G/1/0$ в предположении, что во время обслуживания заявки может произойти скрытый отказ прибора в том смысле, что факт выхода прибора из строя устанавливается, только в момент поступления первой заявки после отказа. После обнаружения начинается восстановление прибора, в результате которого восстанавливаются все его надежностные характеристики. Предлагается для повышения экономической эффективности функционирования системы проводить предупредительное ТО прибора после того, как суммарное время обслуживания заявок достигает заранее заданного уровня.

Для построения модели функционирования описанной системы используется аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [3] и теория регенерирующих процессов, с их помощью находятся стационарные надежностные и экономические показатели системы. По установленным критериям решается задача многокритериальной оптимизации периодичности проведения ТО.

Постановка задачи. В однолинейную систему обслуживания с потерями поступает рекуррентный поток требований, который порождается случайной величиной β с произвольной функцией распределения $G(t) = P\{\beta \leq t\}$. Длительность обслуживания требования — случайная величина α с функцией распределения $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$.

При достижении прибором суммарной наработки, реализуемой как случайная величина γ с функцией распределения $\Phi(t) = P\{\gamma \leq t\}$, происходит отказ прибора. Отказ прибора является скрытым в том смысле, что обнаруживается он в момент поступления в систему следующей после отказа заявки. Сразу же начинается аварийное восстановление (АВ) прибора, длительность которого — случайная величина σ_a с функцией распределения $\Psi_a(t) = P\{\sigma_a \leq t\}$.

Кроме этого, сразу же при достижении прибором суммарной наработки равной детерминированной величине τ , предполагается проведение ТО прибора. Длительность проведения ТО — случайная величина σ_p с функцией распределения $\Psi_p(t) = P\{\sigma_p \leq t\}$.

Требование, обслуживаемое в момент отказа прибора или начала проведения ТО, теряется также, как и все требования, поступающие в систему во время ремонтных или профилактических работ. Отсчет наработки прибора на отказ и на ТО начинается с момента начала обслуживания первого требования

¹⁰ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14–41–01541).

после окончания последнего ТО или АВ. В результате проведения любых восстановительных работ надежные характеристики прибора полностью обновляются.

Предполагается, что случайные величины $\alpha, \beta, \gamma, \sigma_a, \sigma_p$ независимы, имеют соответственно плотности распределения вероятностей $f(t), g(t), \varphi(t), \psi_a(t), \psi_p(t)$, конечные математические ожидания $E\alpha, E\beta, E\gamma, E\sigma_a, E\sigma_p$ и дисперсии.

Целью работы является построение полумарковской модели функционирования описанной выше системы обслуживания, нахождение стационарных надежных и экономических характеристик системы, а также оптимизация периодичности проведения ТО прибора с целью повышения средней удельной прибыли в единицу календарного времени и снижения средних удельных затрат в единицу времени исправного функционирования системы.

Полумарковская модель системы. Рассматриваемая система может находиться в следующих физических состояниях: 0 — прибор в работоспособном состоянии ожидает заявку; 1 — прибор занят обслуживанием; 2 — проводится АВ прибора; 3 — проводится ТО прибора; 4 — произошел скрытый отказ прибора.

Следуя методике, изложенной в работах [3], расширим фазовое пространство физических состояний системы до фазового пространства полумарковских состояний, добавляя к кодам физических состояний непрерывные координаты, обеспечивающие марковское свойство фазовых состояний в моменты их изменений. В итоге фазовое пространство системы будет иметь вид:

$$E = \{1, 1uv, 2, 3x, 4x, 0x, 0xuv; x > 0, u > 0, 0 < v < \tau\}.$$

Расшифруем коды состояний:

1 — начинает обслуживаться первое требование, поступившее после завершения ТО или АВ прибора;

1uv — начало обслуживаться поступившее в систему требование; величина оставшейся наработки прибора до отказа равна u ; суммарная наработка после ТО — v ;

2 — началось АВ прибора;

3x — началось ТО прибора, до поступления следующего требования в систему осталось время x ;

4x — произошел скрытый отказ прибора; до обнаружения отказа осталось время x ;

0x — ТО или АВ прибора закончено; до поступления следующего требования осталось время x ;

0xuv — закончено обслуживание требования, до поступления следующего требования осталось время x ; величина оставшейся наработки прибора до отказа равна u ; суммарная наработка после ТО — v .

Временная диаграмма функционирования системы изображена на рис.1. Времена пребывания системы в соответствующих состояниях определяются формулами

$$\theta_1 = \alpha \wedge \gamma \wedge \tau, \quad \theta_{1uv} = \alpha \wedge u \wedge (\tau - v); \quad \theta_2 = \sigma_a; \quad \theta_{3x} = \sigma_p; \quad \theta_{0xuv} = \theta_{0x} = \theta_{4x} = x,$$

где $\wedge$ — знак минимума.

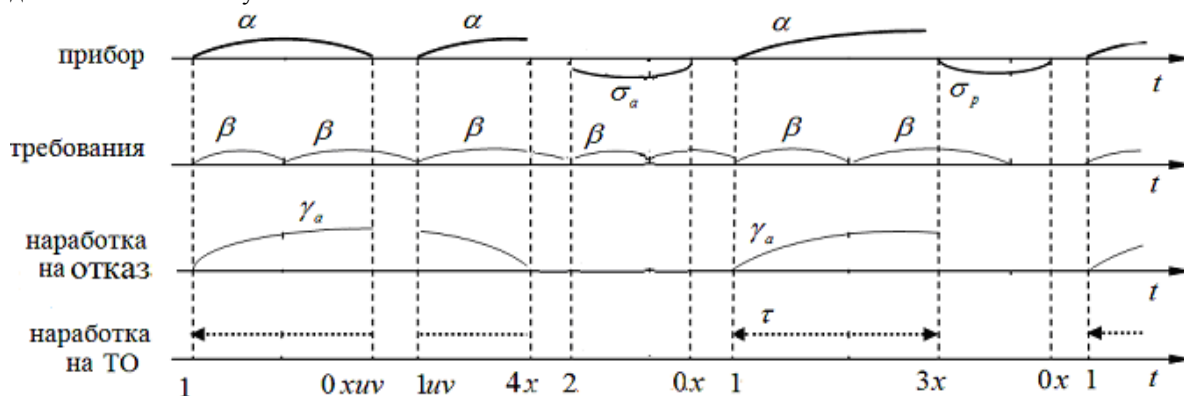


Рисунок 1 — Временная диаграмма функционирования системы

Опишем случайные события и вероятности переходов из состояний системы с учетом содержательного смысла полумарковских состояний. Например, из состояния 1uv события переходов иллюстрируются на рис.2 и определяются выражениями:

$$\{1uv \rightarrow 0, \beta_a, u - \alpha, v + \alpha\} = \{\alpha < u \wedge (\tau - v)\}, \quad \{1uv \rightarrow 4, \beta_u\} = \{u < \alpha \wedge (\tau - v)\}, \quad \{1uv \rightarrow 3, \beta_v\} = \{\tau - v < \alpha \wedge \gamma\}.$$

Здесь β_u — прямое остаточное время для процесса восстановления, порожденного случайной величиной β , с плотностью распределения

$$v_g(u, x) = g(u+x) + \int_0^u h_g(u-s)g(s+x)ds,$$

$h_g(u)$ — плотность функции восстановления $H_g(u) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(u)$ этого процесса. Величина β_u фиксирует время после момента u до ближайшего момента поступления заявки в систему. Величина β_a — время, отсчитываемое от момента, который является реализацией случайной величины α , т.е. $\alpha \in du$, до ближайшего момента поступления заявки в систему.

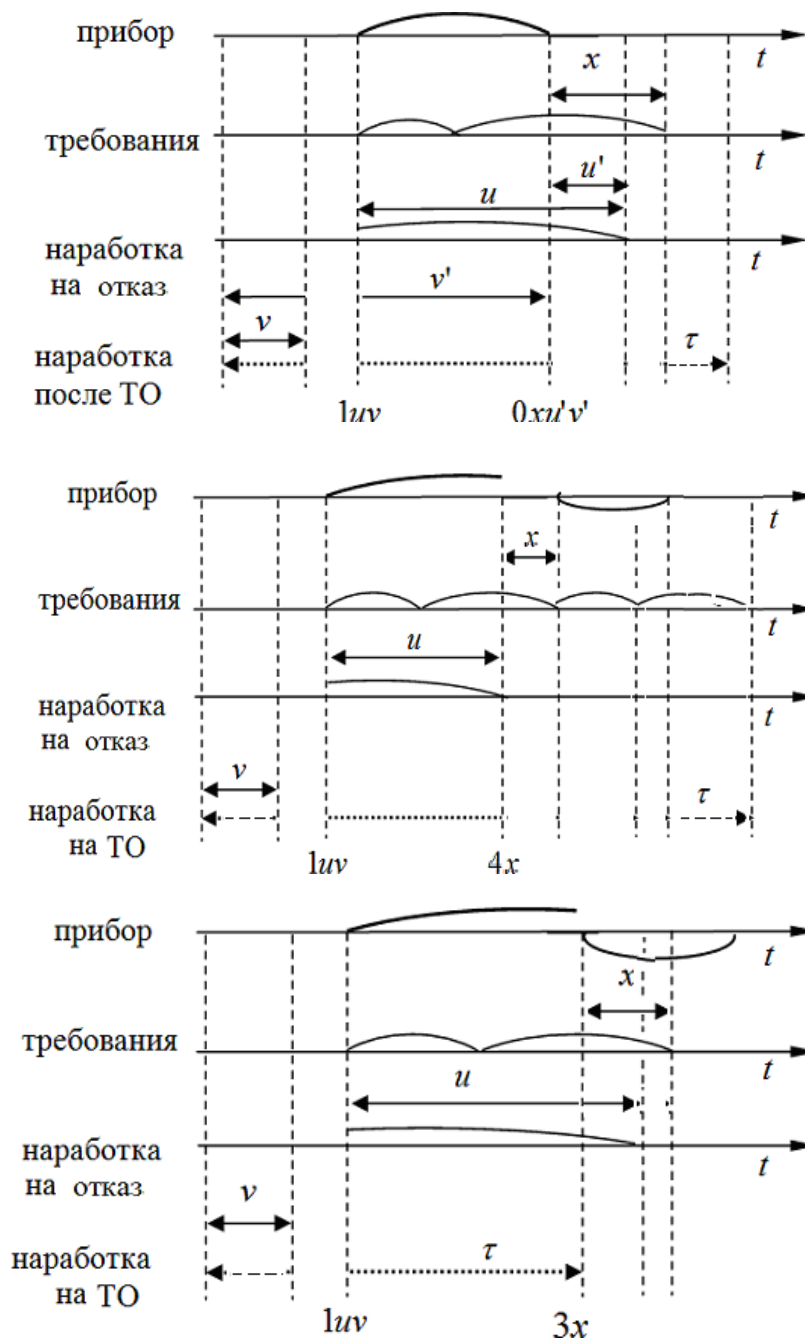


Рисунок 2— События переходов из состояния 1uv

Плотности вероятностей переходов из состояния 1uv определяются формулами

$$p_{1uv}^{0dx, du', v+u-du'} = f(u-u')v_g(u-u', x)dxdu', u' < u, x > 0, u < \tau - v;$$

$$p_{1uv}^{0dx, v+u-dv', dv'} = f(v'-v)v_g(v'-v, x)dx dv', v < v' < \tau, x > 0, u > \tau - v;$$

$$p_{1uv}^{4dx} = \bar{F}(u)v_g(u, x)dx, \quad x > 0, \quad u < \tau - v; \quad p_{1uv}^{3dx} = \bar{F}(\tau - v)v_g(\tau - v, x)dx, \quad x > 0, \quad u > \tau - v.$$

Аналогічно определяются вероятности и плотности вероятностей переходов из других состояний:

$$p_1^{0dxduv} = f(u)\varphi(v+u)v_g(v, x)dudvdx, \quad u > 0, \quad x > 0, \quad 0 < v < \tau; \quad p_1^{3dx} = \bar{F}(\tau)\bar{\Phi}(\tau)v_g(\tau, x), \quad x > 0;$$

$$p_1^{4dx} = \int_0^\tau \varphi(t)\bar{F}(t)v_g(t, x)dt dx, \quad x > 0; \quad P_{0xuv}^{1uv} = P_{0x}^1 = P_{4x}^2 = 1; \quad p_2^{0dx} = \int_0^\infty \psi_a(t)v_g(t, x)dt dx, \quad x > 0;$$

$$p_{3x}^{0dy} = \psi_p(x-y) + \int_x^\infty \psi_p(t)v_g(t-x, y)dt dy, \quad 0 < y < x; \quad p_{3x}^{0dy} = \int_x^\infty \psi_p(t)v_g(t-x, y)dt dy, \quad y > x.$$

Нахождение стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Обозначим через ρ_1, ρ_2 значения стационарного распределения для состояний 1 и 2, а $\rho(1uv), \rho(0xuv), \rho(0x), \rho(3x)$ и $\rho(4x)$ — плотности стационарного распределения вложенной цепи Маркова для состояний $1uv, 0xuv, 0x, 3x$ и $4x$ соответственно.

Система уравнений для стационарного распределения имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(0xuv) &= \int_0^v f(t)v_g(t, x)\rho(1, t+u, v-t)dt + \rho_1 f(v)v_g(v, x)\varphi(v+u), \\ \rho(1uv) &= \int_0^\infty \rho(0xuv)dx, \\ \rho(3x) &= \int_0^\tau v_g(t, x)\bar{F}(t)dt \int_t^\infty \rho(1u, \tau-t)du + \rho_1 \bar{F}(\tau)v_g(\tau, x)\bar{\Phi}(\tau), \\ \rho(4x) &= \int_0^\tau v_g(t, x)\bar{F}(t)dt \int_t^\tau \rho(1t, v-t)dv + \rho_1 \int_0^\tau \bar{F}(t)v_g(t, x)\varphi(t)dt, \\ \rho(0x) &= \int_0^\infty \psi_p(t)\rho(3, t+x)dt + \int_0^\infty \psi_p(t)dt \int_0^t v_g(t-s, x)\rho(3s)ds + \rho_2 \int_0^\infty \psi_a(t)v_g(t, x)dt, \\ \rho_1 &= \int_0^\infty \rho(0x)dx, \quad \rho_2 = \int_0^\infty \rho(4x)dx. \end{aligned}$$

Исключение из первых двух уравнений плотности $\rho(0xuv)$ приводит к уравнению восстановления для плотности $\rho(1uv)$ по переменной v :

$$\rho(1uv) = \rho_1 f(v)\varphi(u+v) + \int_0^v f(t)\rho(1, t+u, v-t)dt,$$

решением которого является функция $\rho(1uv) = \rho_1 h_f(v)\varphi(u+v)$, где $h_f(v)$ — плотность функции восстановления $H_f(v)$, порожденной случайным временем α обслуживания заявки. Используя найденную плотность, а также соотношение $\rho_2 = \rho_1 \Phi(\tau)$ можно получить выражения для остальных стационарных плотностей:

$$\rho(0xuv) = \rho_1 \varphi(u+v)\omega_f(v, x), \quad \rho_2 = \rho_1 \Phi(\tau), \quad \rho(3x) = \rho_1 \bar{\Phi}(\tau)\kappa(\tau, x), \quad \rho(4x) = \rho_1 \int_0^\tau \varphi(t)\kappa(t, x)dt,$$

$$\begin{aligned} \rho(0x) &= \rho_1 \Phi(\tau) \int_0^\infty \psi_a(t)v_g(t, x)dt + \rho_1 \bar{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t)\kappa(\tau, t+x)dt + \\ &+ \rho_1 \bar{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t)dt \int_0^t \kappa(\tau, s)v_g(t-s, x)ds. \end{aligned}$$

Здесь

$$\omega_f(v, x) = f(v)v_g(v, x) + \int_0^v h_f(v-s)f(s)v_g(s, x)ds —$$

плотность вероятности того, что в момент окончания обслуживания требования наработка прибора на ТО равна V , а следующее требование поступит в систему через время x . По переменной x функция

$$\kappa(t, x) = \bar{F}(t)v_g(t, x) + \int_0^t h_f(t-s)\bar{F}(s)v_g(s, x)ds —$$

плотность распределения времени между моментом скрытого отказа прибора и моментом его обнаружения при условии, что наработка прибора в момент отказа достигла величины t . Заметим, что по переменной x функция $\kappa(\tau, x)$ — плотность распределения времени между началом ТО прибора и

моментом поступления первой после этого заявки в систему. Значение стационарного распределения ρ_1 определяется из условия нормировки и равно

$$\rho_1 = [3 + 2 \int_0^{\tau} h_f(s) \bar{\Phi}(s) ds + \Phi(\tau)]^{-1}.$$

Финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания в состояниях. Разобьем фазовое пространство состояний E на непересекающиеся подмножества состояний, соответствующие различным физическим состояниям прибора: $E_0 = \{0x, 0xuv\}$ — работоспособный прибор находится в состоянии ожидания требования; $E_1 = \{1, 1uv\}$ — прибором проводится обслуживание требования; $E_2 = \{2\}$ — проводится АВ прибора; $E_3 = \{3x\}$ — проводится ТО прибора; $E_4 = \{4x\}$ — скрытый отказ прибора.

Пределные значения p_i^* переходных вероятностей

$$\Phi(t, x, E_i) = P\{S(t) \in E_i / S(0) = x\}, \quad x \in E, \quad i = \overline{0, 4},$$

полумарковского процесса $S(t)$ и средние времена $T(E_i)$ пребывания системы в подмножествах состояний E_i определим с помощью соотношений [3]

$$p_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x, E_i) = \int_{E_i} m(x) \rho(dx) \left(\int_E m(x) \rho(dx) \right)^{-1}, \quad i = \overline{0, 4} \quad (1)$$

$$T(E_i) = \int_{E_i} m(x) \rho(dx) \left[\int_{E \setminus E_i} \rho(dx) P(x, E_i) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 4}. \quad (2)$$

Преобразуем интегралы в (1) и (2) с учетом найденного стационарного распределения вложенной цепи Маркова и средних времен пребывания в состояниях, которые определяются следующими формулами:

$$E\theta_1 = \int_0^{\tau} \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t) dt, \quad E\theta_{1uv} = \int_0^{u\Lambda(\tau-v)} \bar{F}(t) dt, \quad E\theta_{0x} = E\theta_{0xuv} = E\theta_{4x} = x, \quad E\theta_{3x} = \sigma_p, \quad E\theta_2 = \sigma_a. \quad (3)$$

При этом учтем, что математическое ожидание остаточного времени процесса восстановления β_i , порожденного случайной величиной β , определяется как $E\beta_i = E\beta \hat{H}_g(t) - t$, где $\hat{H}_g(t) = 1 + H_g(t)$. В результате преобразований получаем

$$\begin{aligned} \int_{E_1} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 \int_0^{\tau} \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t) dt + \int_0^{\tau} h_f(v) dv \int_0^{\infty} \varphi(u+v) \int_0^{u\Lambda(\tau-v)} \bar{F}(t) dt = \\ &= \rho_1 \int_0^{\tau} \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t) dt + \rho_1 \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(s) ds \int_0^s h_f(t) \bar{F}(s-t) dt = \rho_1 \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt = \rho_1 E(\gamma \wedge \tau); \\ \int_{E_2} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 E\sigma_a \Phi(\tau) = \rho_1 E\sigma_a P(\gamma < \tau); \\ \int_{E_3} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 E\sigma_p \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\infty} \kappa(\tau, x) dx = \rho_1 E\sigma_p \bar{\Phi}(\tau) = \rho_1 E\sigma_p P(\gamma > \tau); \\ \int_{E_4} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 \int_0^{\tau} \varphi(s) ds \int_0^{\infty} x \kappa(s, x) dx = \rho_1 E\beta \int_0^{\tau} \varphi(s) \bar{F}(s) \hat{H}_g(s) ds + \\ &+ \rho_1 E\beta \int_0^{\tau} \varphi(s) ds \int_0^s h_f(s-t) \bar{F}(t) \hat{H}_g(t) dt - \rho_1 \int_0^{\tau} s \varphi(s) \bar{F}(s) ds - \rho_1 \int_0^{\tau} \varphi(s) ds \int_0^s t h_f(s-t) \bar{F}(t) dt; \\ \int_{E_0} m(x) \rho(dx) &= \int_0^{\tau} dv \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} x \rho(0xuv) dx + \int_0^{\infty} x \rho(0x) dx = \\ &= \rho_1 E\beta \int_0^{\tau} f(s) \bar{\Phi}(s) \hat{H}_g(s) ds + \rho_1 E\beta \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(s) ds \int_0^s h_f(s-t) f(t) \hat{H}_g(t) dt + \\ &+ \rho_1 E\beta \Phi(\tau) \int_0^{\infty} \psi_a(s) \hat{H}_g(s) ds + \rho_1 E\beta \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\infty} \psi_p(s) H_g(s) ds + \\ &+ \rho_1 E\beta \bar{\Phi}(\tau) \bar{F}(\tau) \hat{H}_g(\tau) + \rho_1 E\beta \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\tau} h_f(\tau-t) \bar{F}(t) \hat{H}_g(t) dt - \\ &- \rho_1 \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\tau} t h_f(\tau-t) \bar{F}(t) dt - \rho_1 \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(s) ds \int_0^s t h_f(s-t) f(t) dt - \end{aligned}$$

$$- \rho_1 \tau \bar{\Phi}(\tau) \bar{F}(\tau) - \rho_1 \int_0^{\tau} s f(s) \bar{\Phi}(s) ds - \rho_1 E \sigma_p \bar{\Phi}(\tau) - \rho_1 E \sigma_a \Phi(\tau)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_E m(x) \rho(dx) = & \rho_1 E \beta \int_0^{\tau} f(s) \bar{\Phi}(s) \hat{H}_g(s) ds + \rho_1 E \beta \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(s) ds \int_0^s h_f(s-t) f(t) \hat{H}_g(t) dt + \\ & + \rho_1 E \beta \Phi(\tau) \int_0^{\infty} \psi_a(s) \hat{H}_g(s) ds + \rho_1 E \beta \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\infty} \psi_p(s) H_g^{\kappa}(s) ds + \\ & + \rho_1 E \beta \bar{\Phi}(\tau) \bar{F}(\tau) \hat{H}_g(\tau) + \rho_1 E \beta \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\tau} h_f(\tau-t) \bar{F}(t) \hat{H}_g(t) dt + \\ & + \rho_1 E \beta \int_0^{\tau} \varphi(s) \bar{F}(s) \hat{H}_g(s) ds + \rho_1 E \beta \int_0^{\tau} \varphi(s) ds \int_0^s h_f(s-t) \bar{F}(t) \hat{H}_g(t) dt \end{aligned}$$

Учитывая вероятности переходов вложенной цепи Маркова из состояний, а также вид стационарного распределения, интегралы в знаменателях дробей формул (2) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \int_{E \setminus E_1} \rho(dx) P(x, E_1) = & \int_0^{\infty} \rho(0x) dx + \int_0^{\tau} dv \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} \rho(0xuv) dx = \rho_1 + \rho_1 \int_0^{\tau} h_f(x) \bar{\Phi}(x) dx \\ \int_{E \setminus E_2} \rho(dx) P(x, E_2) = & \rho_1 \int_0^{\infty} \rho(4x) dx = \rho_1 \Phi(\tau); \quad \int_{E \setminus E_3} \rho(dx) P(x, E_3) = \rho_1 \bar{\Phi}(\tau); \\ \int_{E \setminus E_4} \rho(dx) P(x, E_4) = & \rho_1 \Phi(\tau); \quad \int_{E \setminus E_0} \rho(dx) P(x, E_0) = \rho_1 + \rho_1 \int_0^{\tau} h_f(x) \bar{\Phi}(x) dx. \end{aligned}$$

Стационарные характеристики системы в терминах регенерирующего процесса.

Полумарковский процесс, описывающий функционирование рассматриваемой системы, является регенерирующим. Моментами регенерации являются моменты поступления требований в свободную систему после завершения ТО или АВ прибора. В предложенной кодировке состояний системы — это моменты попадания системы в состояние 1. Покажем, как найденные стационарные характеристики системы можно выразить в терминах теории регенерирующих процессов.

Число требований N , поступающих в систему за период регенерации, складывается из случайных величин

$$N = N_{ser} + N_{1,loss} + \Phi(\tau) N_{2,loss} + \bar{\Phi}(\tau) N_{3,loss},$$

где N_{ser} — число полностью обслуженных требований, $N_{1,loss}$, $N_{2,loss}$, $N_{3,loss}$ — числа не обслуженных требований по причине занятости прибора обслуживанием, проведением АВ и ТО за период регенерации соответственно.

Среднее число $\bar{N}_{ser}$ обслуженных требований за период регенерации и средние числа $\bar{N}_{2,loss}$, $\bar{N}_{3,loss}$ потерянных требований за период регенерации по причине проведения АВ и ТО определяется таким образом:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{ser} = & \int_0^{\tau} H_f(x) \varphi(x) dx + H_f(\tau) \varphi(\tau) = \int_0^{\tau} h_f(x) \bar{\Phi}(x) dx, \\ \bar{N}_{2,loss} = & \int_0^{\infty} \hat{H}_g(t) \psi_a(t) dt, \quad \bar{N}_{3,loss} = \int_0^{\infty} \psi_p(t) H_g^{\kappa}(t) dt. \end{aligned}$$

Что касается числа требований $N_{1,loss}$, потерянных за период регенерации по причине занятости прибора обслуживанием, то оно определяется как сумма следующих случайных величин:

$$\bar{N}_{1,loss} = \bar{N}_{1,loss}^{(1)} + \Phi(\tau) \bar{N}_{1,loss}^{(2)} + \bar{\Phi}(\tau) \bar{N}_{1,loss}^{(3)}$$

Здесь

$$\bar{N}_{1,loss}^{(1)} = \int_0^{\tau} f(t) \bar{\Phi}(t) H_g(t) dt + \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(s) ds \int_0^s f(t) h_f(s-t) H_g(t) dt$$

— среднее число заявок, потерянных за время обслуживания полностью обслуженных заявок;

$$\bar{N}_{1,loss}^{(2)} = \frac{1}{\Phi(\tau)} \left[\int_0^{\tau} \varphi(t) \bar{F}(t) \hat{H}_g(t) dt + \int_0^{\tau} \bar{F}(s) \hat{H}_g(s) ds \int_0^{\tau-s} \varphi(t+s) h_f(t) dt \right]$$

— среднее число заявок, потерянных за время обслуживания заявки, при обслуживании которой происходит отказ прибора;

$$\bar{N}_{1,loss}^{(3)} = \bar{F}(\tau) \hat{H}_g(\tau) + \int_0^{\tau} h_f(t) \bar{F}(\tau-t) \hat{H}_g(\tau-t) dt$$

— среднее число заявок, потерянных за время обслуживания заявки, при обслуживании которой начинается ТО прибора. После несложных преобразований получаем

$$\bar{N}_{1,loss} = 1 + \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) \bar{F}(t) h_g(t) dt + \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt \int_0^t h_f(t-s) \bar{F}(s) h_g(s) ds.$$

В терминах средних чисел заявок за период регенерации финальные вероятности пребывания прибора в состояниях и соответствующие средние стационарные времена пребывания в них определяются следующими формулами:

$$p_0^* = 1 - \frac{E(\gamma \wedge \tau) + E\sigma_a P(\gamma < \tau) + E\sigma_p P(\gamma > \tau) + \Phi(\tau) E\beta \bar{N}_{1,loss}^{(2)} - \Phi(\tau) E\chi}{E\beta \bar{N}}, \quad p_1^* = \frac{E(\gamma \wedge \tau)}{E\beta \bar{N}},$$

$$p_2^* = \frac{E\sigma_a P(\gamma < \tau)}{E\beta \bar{N}}, \quad p_3^* = \frac{E\sigma_p P(\gamma > \tau)}{E\beta \bar{N}}, \quad p_4^* = \frac{\Phi(\tau) E\beta \bar{N}_{1,loss}^{(2)} - \Phi(\tau) E\chi}{E\beta \bar{N}}.$$

$$T(E_0) = \frac{E\beta \bar{N} - E(\gamma \wedge \tau) + E\sigma_a P(\gamma < \tau) + E\sigma_p P(\gamma > \tau)}{1 + \int_0^{\tau} h_f(x) \bar{\Phi}(x) dx}, \quad T(E_1) = \frac{E(\gamma \wedge \tau)}{1 + \int_0^{\tau} h_f(x) \bar{\Phi}(x) dx}, \quad T(E_2) = E\sigma_a,$$

$$T(E_3) = E\sigma_p, \quad T(E_4) = E\beta \bar{N}_{1,loss}^{(2)} - E\chi.$$

Здесь $E\chi$ — среднее значение времени обслуживания заявки, которая не обслуживается до конца по причине аварийного отказа прибора. Плотность $z(s)$ распределения этой случайной величины определяется выражением

$$z(s) = \frac{1}{\Phi(\tau)} \left[\varphi(s) \bar{F}(s) + \bar{F}(s) \int_0^{\tau-s} \varphi(t+s) h_f(t) dt \right]$$

Стационарные экономические характеристики системы. Пусть C_{ser} — доход, получаемый за полностью обслуженную заявку; c_a — затраты в единицу времени АВ; c_p — затраты в единицу времени на проведение ТО прибора. Тогда средняя удельная прибыль $S(\tau)$ в единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau)$ в единицу времени исправного функционирования системы определяются соотношениями:

$$S(\tau) = \frac{C_{ser} \bar{N}_{ser} - c_p E\sigma_p P(\gamma > \tau) - c_a E\sigma_a P(\gamma < \tau)}{E\beta \bar{N}}, \quad C(\tau) = \frac{c_p E\sigma_p P(\gamma > \tau) + c_a E\sigma_a P(\gamma < \tau)}{E\beta \bar{N} - E\sigma_a P(\gamma < \tau) - E\sigma_p P(\gamma > \tau)}.$$

В случае **частного вида входящего потока требований** стационарные характеристики системы упрощаются. Так, например, для системы $M/G/1/0$, когда входящий поток требований имеет интенсивность λ , средние числа требований, поступающих в систему за период регенерации, определяются выражениями

$$\bar{N}_{ser} = \int_0^{\tau} h_f(x) \bar{\Phi}(x) dx, \quad \bar{N}_{1,loss} = 1 + \lambda \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt, \quad \bar{N}_{2,loss} = 1 + \lambda E\sigma_a, \quad \bar{N}_{3,loss} = \lambda E\sigma_p.$$

С учётом этого стационарные экономические характеристики принимают вид:

$$S(\tau) = \lambda \frac{C_{ser} \int_0^{\tau} h_f(t) \bar{\Phi}(t) dt - c_p E\sigma_p \bar{\Phi}(\tau) - c_a E\sigma_a \Phi(\tau)}{1 + \int_0^{\tau} h_f(t) \bar{\Phi}(t) dt + \lambda \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt + \Phi(\tau)(1 + \lambda E\sigma_a) + \lambda E\sigma_p \bar{\Phi}(\tau)},$$

$$C(\tau) = \lambda \frac{c_p E\sigma_p \bar{\Phi}(\tau) + c_a E\sigma_a \Phi(\tau)}{1 + \int_0^{\tau} h_f(t) \bar{\Phi}(t) dt + \lambda \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt + \Phi(\tau)(1 + \lambda E\sigma_a) + \lambda E\sigma_p \bar{\Phi}(\tau)}.$$

Определение оптимальной периодичности проведения ТО прибора. Двухкритериальная задача оптимизации состоит в нахождении периодичности проведения ТО прибора по наработке, обеспечивающей глобальный максимум позитивного критерия — средней удельной прибыли в единицу календарного времени $S(\tau)$, глобальный минимум негативного критерия — средних удельных затрат в единицу времени исправного функционирования системы $C(\tau)$:

$$\begin{cases} S(\tau) \rightarrow \max, \\ \tau \in (0, \infty) \\ C(\tau) \rightarrow \min. \\ \tau \in (0, \infty) \end{cases}$$

Множество Парето-оптимальных решений определяется как «юго-восточная» граница графика параметрически заданной функции [5]

$$\begin{cases} S = S(\tau), \\ C = C(\tau). \end{cases}$$

Для сужения множества Парето-оптимальных решений сформулированной двухкритериальной задачи в качестве целевой функции используется линейная свёртка частных критериев: $N(\tau) = a_s S(\tau) - a_c C(\tau)$ [5]. Здесь a_s и a_c весовые коэффициенты, определяющие «показатели относительной важности» критериев $S(\tau)$ и $C(\tau)$ соответственно. Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению точки τ_{opt}^N абсолютного максимума функции $N(\tau)$.

Рассмотрим **пример** оптимизации периодичности проведения ТО для системы $M/E_3/1/0$. Пусть среднее время между моментами поступлений требований простейшего потока равно 15 мин; время обслуживания требований имеет распределение Эрланга третьего порядка со средним значением 45 мин, а суммарная наработка на отказ прибора — распределение Эрланга четвертого порядка со средним значением 30 час; $C_{ser} = 1000$ ден. ед., $c_a = 800$ ден. ед./час, $c_p = 300$ ден. ед./час. Среднее время проведения АВ — 7 час, среднее время проведения ТО — 3 час. При отсутствии ТО экономические показатели системы находятся по формулам работы [4] и они равны: $S(\infty) = 780,25$ ден. ед./час, $C(\infty) = 104,67$ ден. ед./час.

Линейная свертка частных критериев при весовых коэффициентах $a_s = a_c = 0,5$ достигает наибольшего значения в точке $\tau_{opt}^N = 23,16$ час; при этом $S(\tau_{opt}^N) = 812,41$ ден. ед./час, $C(\tau_{opt}^N) = 63,39$ ден. ед./час. Графики зависимостей частных критериев и их линейной свертки от периодичности проведения ТО прибора представлены на рис.3. Проведение ТО прибора увеличивает средний удельный доход в единицу времени функционирования системы на 4% и уменьшает средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования системы на 39%.

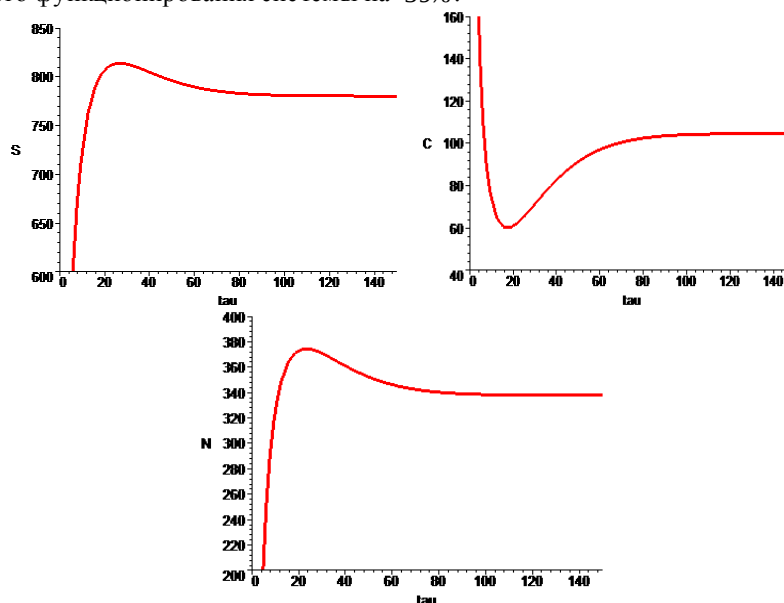


Рисунок 3— Графики зависимостей средней удельной прибыли $S(\tau)$, средних удельных затрат $C(\tau)$ и их свертки $N(\tau)$ от периодичности ТО τ .

Заключение. Построение полумарковской модели ненадежной системы обслуживания позволило в явном виде определить стационарные надёжностные и экономические характеристики системы. Полученные результаты двухкритериальной оптимизации периодичности проведения технического обслуживания в предположении общего вида случайных величин, описывающих систему могут быть использованы для повышения эффективности функционирования систем обслуживания широкого класса.

Библиографический список использованной литературы

1. Lie-Fern Hsu, Charles S. Tapiero Maintenance of an Unreliable M/G/1 Queue-like Job Shop // Queueing Systems. — №2, 1987. — P. 333 – 350.

2. Песчанский А.И. Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и учетом технического обслуживания ненадежного канала / А.И. Песчанский, А.И. Коваленко // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2014. — № 15. — С. 63 – 70.
3. Корольок В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Корольок, А.Ф. Турбин. — Киев: Наук. Думка, 1982. — 236 с.
4. Песчанский А.И. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным прибором / А.И. Песчанский, А.И. Коваленко // Таврический вестник информатики и математики. — ТНУ, 2013. — №1(22). — С. 69 – 79.
5. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике / В.В. Розен. — М: «Высш. шк.», 2002. — 287 с.

Peschansky A.I., Kovalenko A.I. Semi-Markov Model of Unreliable One-server Queue Loss System with Latent Failures

Semi-Markov model of one-server $GI/G/1/0$ queue with latent failures is built. Maintenance of system unreliable server is carried out in accordance with time-to-failure. Stationary reliability and economical characteristics of the system are obtained. Two-criterial optimization of maintenance periodicity is made.

Keywords: one-server queue system with unreliable server, latent failure, server maintenance, embedded Markov chain stationary distribution, stationary characteristics, two-criterial optimization.

Песчанський О.І., Коваленко А.І. Напівмарковська модель технічного обслуговування ненадійної однолінійної системи обслуговування з втратами та прихованою відмовою

Побудована напівмарковська модель однолінійної системи обслуговування $GI/G/1/0$ з прихованими відмовами. Технічне обслуговування ненадійного приладу проводиться в залежності від напрацювання на відмову. Визначені стаціонарні надійнісні та економічні характеристики системи. Виконана дво критерійна оптимізація періодичності проведення технічного обслуговування.

Ключові слова: однолінійна система обслуговування з ненадійним приладом, технічне обслуговування приладу, стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова, стаціонарні характеристики, дво критерійна оптимізація.

УДК 004.942

Д.Ю. Воронин, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская 33, г. Севастополь, Россия, 299053

E-mail: dima@voronins.com

ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ КРИТИЧЕСКИХ ИНФРАСТРУКТУР В ПРОБЛЕМАХ СЕТЕВОГО АНАЛИЗА ПРОЕКТОВ¹¹

Рассмотрена задача принятия управленческих решений при критическом инфраструктурном взаимодействии. Предложены информационно-аналитические технологии распределения вычислительных ресурсов критических инфраструктур. Описан реализованный комплекс оптимизационных программных моделей, сформулированных в терминах сетевого анализа проектов. В качестве примера, иллюстрирующего элементы предлагаемой концепции, рассмотрена модель прямого и обратного распределения неоднородных ресурсов, реализованная при учете возможности использования наборов альтернативных компонент составного ресурса. Предложен сценарий принятия управленческих решений при критическом инфраструктурном взаимодействии.

Ключевые слова: критическое инфраструктурное взаимодействие, поддержка принятия решения, сетевой анализ проектов, информационно-аналитические технологии, эффективное управление.

Рассматривается задача принятия управленческих решений при критическом инфраструктурном взаимодействии. Все попытки рассмотреть инфраструктуру как обычную систему, состоящую из других систем, ввиду слабой конструктивности приводят к весьма ограниченным результатам. В первую очередь это происходит из-за того, что в классической теории систем элементы формируются в единую структуру в соответствии с некоторым целевым признаком, внешними и внутренними системообразующими факторами. Они могут носить экономический характер, обуславливаясь информационной и функциональной безопасностью системы и т.п. В развитых инфраструктурах появляются свои особенности:

¹¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-41-01522).