

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования**  
**«Севастопольский государственный университет»**

**ТЕОРИЯ ГРАФОВ**

Методические указания  
к выполнению  
расчетно-графического задания по дисциплине  
**«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»**  
Часть II  
для студентов дневной формы обучения  
по направлению подготовки  
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Направленность(профиль)  
09.03.01.01 «ЭВМ, системы и сети»

Севастополь  
2016

УДК 519.1(075)

Теория графов. Методические указания к выполнению расчетно-графического задания по дисциплине «Дискретная математика». Часть II для студентов дневной формы обучения по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника». Направленность (профиль) 09.03.01.01 «ЭВМ, системы и сети» / Сост. О.В. Ченгарь, Е.М. Шалимова. Севастополь: ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», 2016.- 51с.

Целью методических указаний является оказание помощи студенту в выполнении расчетно–графического задания. Методические указания содержат общие положения и требования к отчету, основные теоретические сведения, описание вариантов индивидуальных заданий.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Информационные технологии и компьютерные системы». Протокол № 9 от 19.05.2016.

Составители:

Ченгарь О.В. к.т.н., доцент кафедры ИТиКС,

Шалимова Е.М. ст. преподаватель кафедры ИТиКС.

Рецензент

Первухина Е.Л. д.т.н., профессор кафедры ИС.

Ответственный за выпуск

Брюховецкий А.А. к.т.н., доцент, зав. кафедрой ИТиКС.

## Содержание

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Цель расчетно-графического задания .....                                      | 4  |
| 2. Общие положения и требования к отчету .....                                   | 4  |
| 3. Основные теоретические сведения .....                                         | 5  |
| 3.1. Виды и способы задания графов .....                                         | 5  |
| 3.2. Матричные способы задания графов .....                                      | 6  |
| 3.3. Маршруты, циклы в неориентированном графе .....                             | 7  |
| 3.4. Пути, контуры в ориентированном графе .....                                 | 7  |
| 4. Порядок выполнения РГЗ .....                                                  | 8  |
| 5. Варианты индивидуальных заданий .....                                         | 8  |
| 5.1. Варианты индивидуальных заданий №1 .....                                    | 9  |
| 5.2. Варианты индивидуальных заданий № 2, 3, 4 .....                             | 19 |
| 5.3. Варианты индивидуальных заданий № 5 .....                                   | 23 |
| 5.4. Варианты индивидуальных заданий № 6 .....                                   | 26 |
| 6. Контрольные вопросы .....                                                     | 36 |
| Библиографический список .....                                                   | 37 |
| Приложение А. Пример оформления титульного листа. ....                           | 38 |
| Приложение Б. Пример поиска кратчайшего пути в орграфе волновым алгоритмом ..... | 39 |
| Приложение В. Пример поиска гамильтонова контура минимальной длины. ....         | 41 |

## **1. Цель расчетно-графического задания**

Цель выполнения расчетно-графического задания (РГЗ)– изучение основных понятий теории графов, приобретение практических навыков в выполнении операций над графами.

## **2. Общие положения и требования к отчету**

РГЗ выполняется в соответствии с рабочей программой дисциплины «Дискретная математика». РГЗ выполняются во внеаудиторное время, т.е. в часы самостоятельной работы. По результатам выполнения задания оформляется и защищается отчет. Отчёты оформляются и защищаются каждым студентом индивидуально. Студенты должны выполнять и защищать РГЗ в соответствии с графиком учебного процесса.

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 и содержать следующие основные элементы:

- титульный лист,
- цель работы,
- постановку задачи с указанием варианта задания,
- описание используемых алгоритмов,
- последовательность выполняемых преобразований,
- результаты,
- выводы.

Постановка задачи должна включать изложение содержания задачи, целей её решения, а также определять исходные данные и формы их представления, метод решения, выходные данные и формы их представления. Описание алгоритмов предполагает математическую формулировку задачи с указанием четкой последовательности шагов, выполняемых в процессе решения задачи. Решение задач, иллюстрирующих реализацию алгоритмов, должны сопровождаться необходимыми комментариями и включать анализ полученных результатов.

Примеры оформления титульного листа приведен в приложении А.

В приложениях Б и В методических указаний представлены примеры решения задач построения кратчайшего пути в графе и поиска гамильтонова контура минимальной длины.

### 3. Основные теоретические сведения

#### 3.1. Виды и способы задания графов

Графом  $G(V, E)$  называется совокупность двух множеств – непустого множества  $V$  (множества вершин) и множества  $E$  его двухэлементных подмножеств множества  $V$  ( $E$  – множество ребер).

Существуют два основных вида графов (и множество их подвидов): ориентированные и неориентированные.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется **ориентированным**. Ребра ориентированного графа называются **дугами**. Соответствующие вершины ориентированного графа называют **началом** и **концом**.

Если направления ребер не указываются, то граф называется **неориентированным** (или просто графом).

Граф называется **простым**, если каждую пару вершин соединяет не более чем одно ребро.

Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется **смешанным**.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют **кратными**.

Граф, содержащий кратные ребра, называется **мультиграфом**.

Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро может соединять вершину саму с собой. Такое ребро называется **петлей**.

Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что вершины  $x$  и  $y$  **инцидентны** ребру  $a$ , если эти вершины соединены  $a$ .

**Две вершины** называются **смежными**, если они инцидентны одному и тому же ребру.

**Два ребра** называются **смежными**, если они имеют общую вершину.

**Степенью вершины графа** называется число ребер, инцидентных этой вершине.

Вершина, имеющая степень 0, называется **изолированной**, а степень 1 – **висячей**.

Необходимость учитывать ориентацию ребер в орграфе приводит к расщеплению понятия «степень вершины» на две части: **полустепенью захода** вершины  $v_i$  ( $d^-(v_i)$ ) называется число ребер, заходящих в  $v_i$ , **полустепенью исхода**  $v_i$  ( $d^+(v_i)$ ) – число ребер, выходящих из нее.

Степень вершины обозначают через  $\deg v_i$ .

Для орграфа  $\deg v_i = d^+(v_i) + d^-(v_i)$ .

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины  $x$ , обозначают  $G(x)$ , то есть

$$G(x) = \{y: (x, y) \in G\}.$$

Множество  $G(x)$  называют **образом вершины  $x$** . Соответственно  $G^{-1}(y)$  – множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину  $y$ ,

$$G^{-1}(y) = \{x: (x, y) \in G\}.$$

Множество  $G^{-1}(y)$  называют **прообразом вершины  $y$** .

Граф  $(G_1, X)$  называется **частичным** для  $(G, X)$ , если  $G_1 \subset G$ , т.е. частичный граф получается из графа  $(G, X)$  удалением некоторых дуг.

**Подграфом**  $(G_1, X_1)$  графа  $(G, X)$  называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа  $G$ , т.е.  $X_1 \subset X$  и  $G_1$  получается из  $G$  удалением дуг, инцидентных удаленным вершинам.

Граф  $G = (X, A)$  – **полный**, если для любой пары вершин  $x_i$  и  $x_j$  существует ребро  $(x_i, x_j)$ .

Граф  $G = (X, A)$  – **симметрический**, если для любой дуги  $(x_i, x_j)$  существует противоположно ориентированная дуга  $(x_j, x_i)$ .

Граф  $G = (X, A)$  – **планарный**, если он может быть изображен на плоскости так, что не будет пересекающихся дуг.

### 3.2. Матричные способы задания графов

Для алгебраического задания графов используются матрицы смежности и инцидентности.

**Матрица смежности**  $A = (a_{ij})$  определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графов. Это квадратная матрица порядка  $n$ , где  $n$  – число вершин, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (x_i, x_j) \in A, \\ 0, \text{если } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$$

**Матрицей инцидентности**  $B = (b_{ij})$  ориентированного графа называется прямоугольная матрица  $(n \times m)$ , где  $n$  – число вершин,  $m$  – число ребер, у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершина } x_i \text{ является началом дуги } a_j; \\ -1, \text{вершина } x_i \text{ является концом дуги } a_j; \\ 0, \text{вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j; \end{cases}$$

Для неориентированного графа матрица инцидентности  $B$  задается следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_j; \\ 0, \text{вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } a_j \end{cases}$$

### 3.3. Маршруты, циклы в неориентированном графе

**Маршрутом** или **цепью** в  $G$  называется такая последовательность (конечная или бесконечная) ребер  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , что каждые соседние два ребра  $a_i$  и  $a_{i+1}$  имеют общую инцидентную вершину.

Вершина  $x_1$ , инцидентная ребру  $a_1$ , но не инцидентная ребру  $a_2$ , называется **началом маршрута**, а вершина  $x_n$ , инцидентная ребру  $a_n$ , но не инцидентная ребру  $a_{n-1}$ , называется **концом маршрута**.

**Длиной (или мощностью)** маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Замкнутый маршрут называется **циклом**.

Маршрут (цикл), в котором все ребра различны, называется **простой цепью (циклом)**. Маршрут (цикл), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется **элементарной цепью (циклом)**.

Граф, в котором найдется маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине, и проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется **Эйлеровым графом**.

### 3.4. Пути, контуры в ориентированном графе

**Путем ориентированного графа** называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.

Число дуг пути называется **длиной пути**.

Путь называется **контуром**, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.

Путь (контур), в котором все дуги различны, называется **простым**.

Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется **элементарным**.

Понятиям ребра, маршрута, цепи, цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути, ориентированной цепи, контура в ориентированном графе (табл.3.1).

Таблица 3.1.

| Неориентированный граф | Ориентированный граф |
|------------------------|----------------------|
| ребро                  | дуга                 |
| маршрут                | путь                 |
| цикл                   | контур               |

#### **4. Порядок выполнения РГЗ**

1. Изучить разделы 1-3 настоящих методических указаний.
2. По согласованию с преподавателем определить вариант индивидуальных заданий.
3. Выполнить задания в соответствии с индивидуальным номером варианта и разделом 5 настоящих методических указаний.
4. Оформить отчет.

#### **5. Варианты индивидуальных заданий**

##### **Задание 1.**

Построить в графе (варианты заданий – п.5.1):

- кратчайший путь волновым алгоритмом (варианты 1-10);
- кратчайший путь алгоритмом Дейкстры (варианты 11-20);
- длиннейший путь (варианты 21-30).

В решении должны присутствовать все промежуточные результаты (см. Приложение Б).

##### **Задание 2.**

Для графа (варианты заданий – п.5.2) построить минимальный остов (с обязательной нумерацией каждого шага) и записать систему независимых циклов (запись каждого цикла начинать с ребра, не принадлежащего остову).

##### **Задание 3.**

Для графа (варианты заданий – п.5.2) произвести кратчайшую раскраску вершин графа. В решении должны присутствовать и быть описаны все промежуточные результаты.

##### **Задание 4.**

Построить плоское изображение графа (варианты заданий – п.5.2). Решение должно быть пошаговым с обязательной нумерацией каждого шага.

##### **Задание 5.**

Для орграфа (варианты заданий – п.5.3) найти гамильтонов контур минимальной стоимости (см. Приложение В). В решении должны присутствовать все промежуточные результаты.

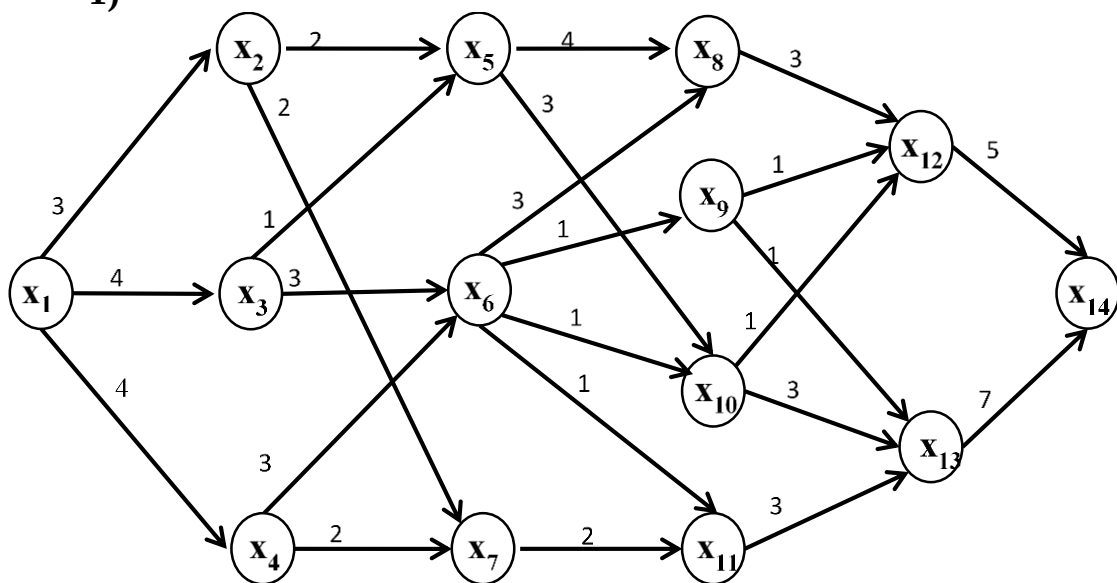
##### **Задание 6.**

Построить максимальный поток в сети (варианты заданий – п.5.4). В решении должны присутствовать все промежуточные результаты.

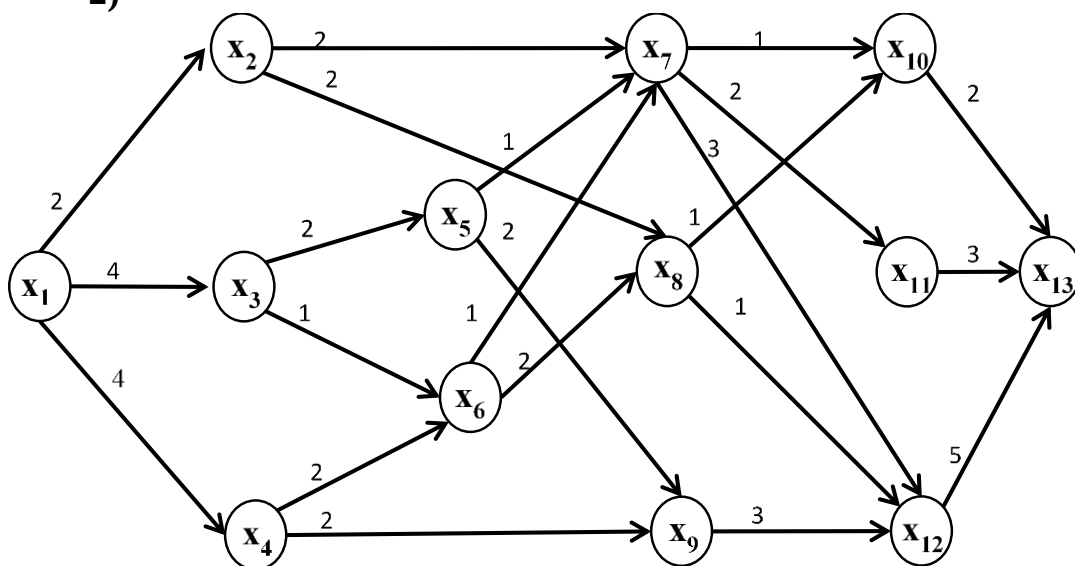


## 5.1. Варианты индивидуальных заданий №1

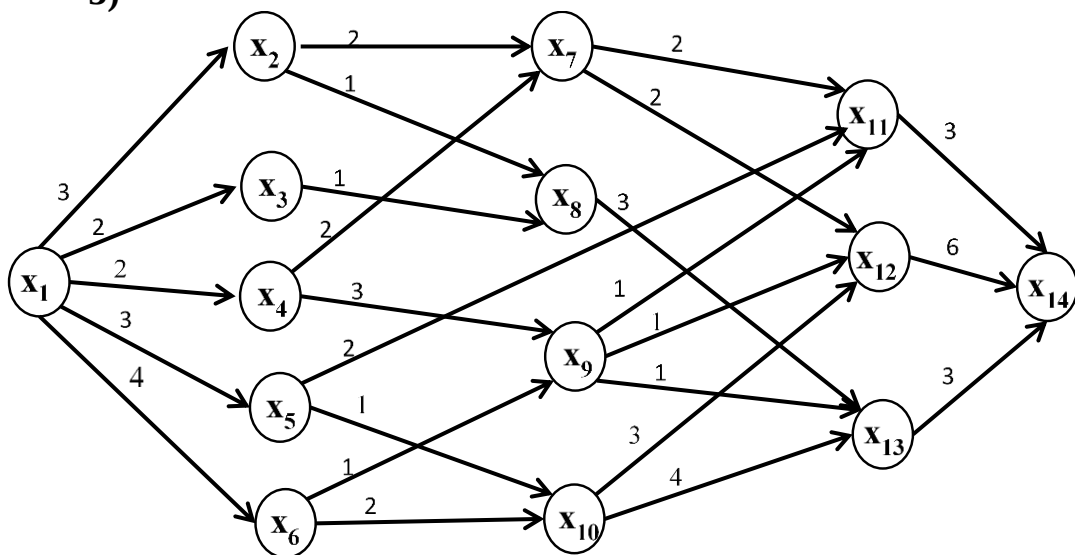
1)



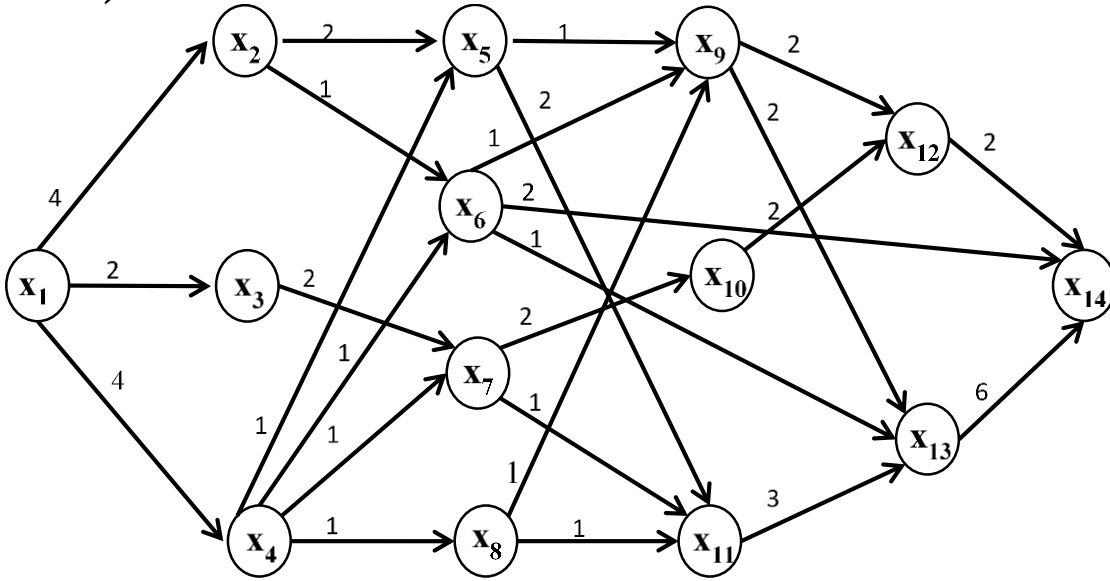
2)



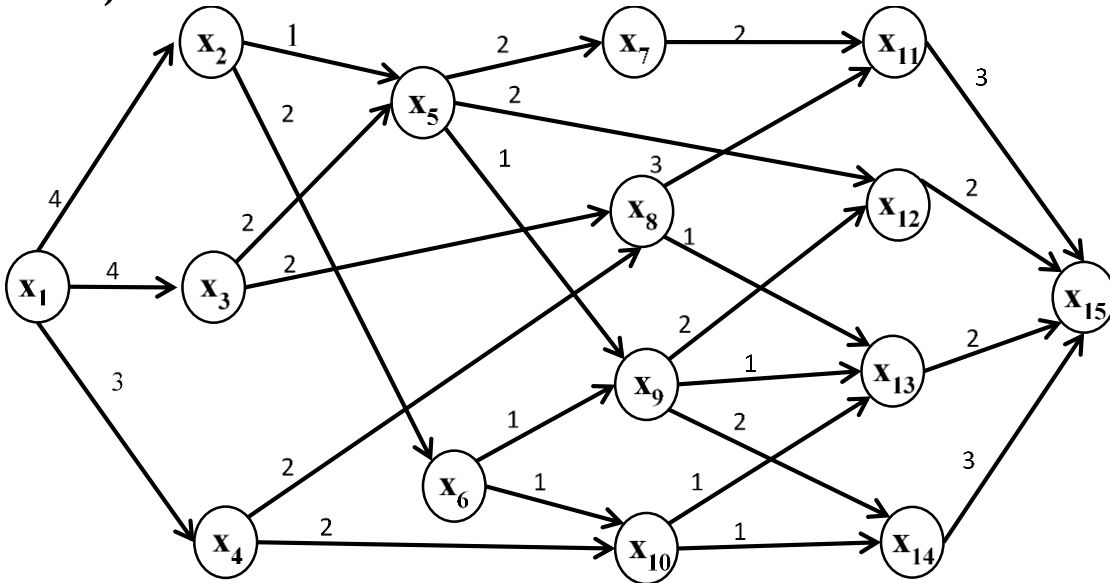
3)



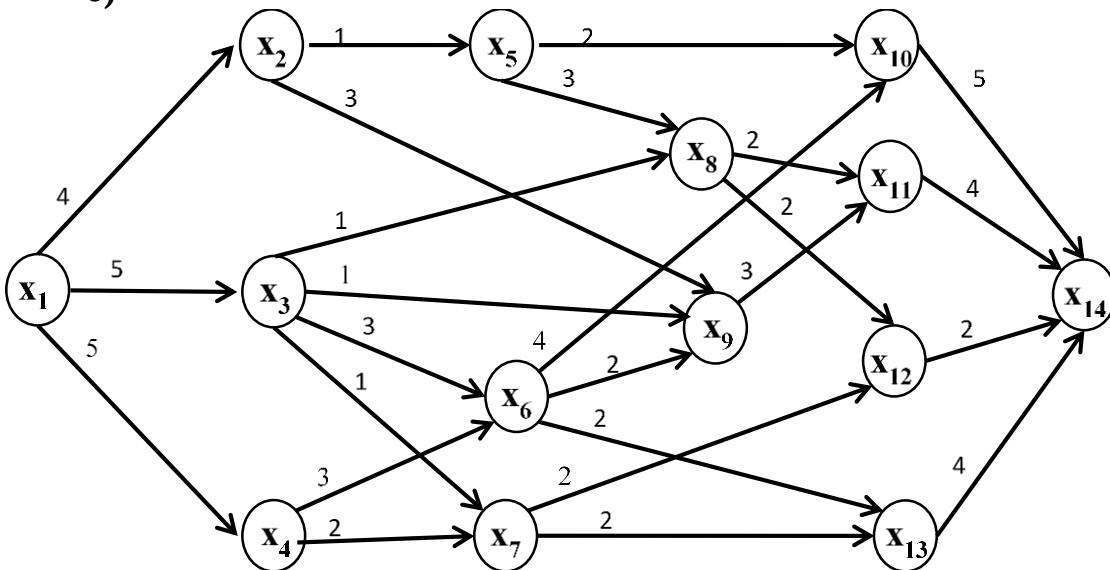
4)



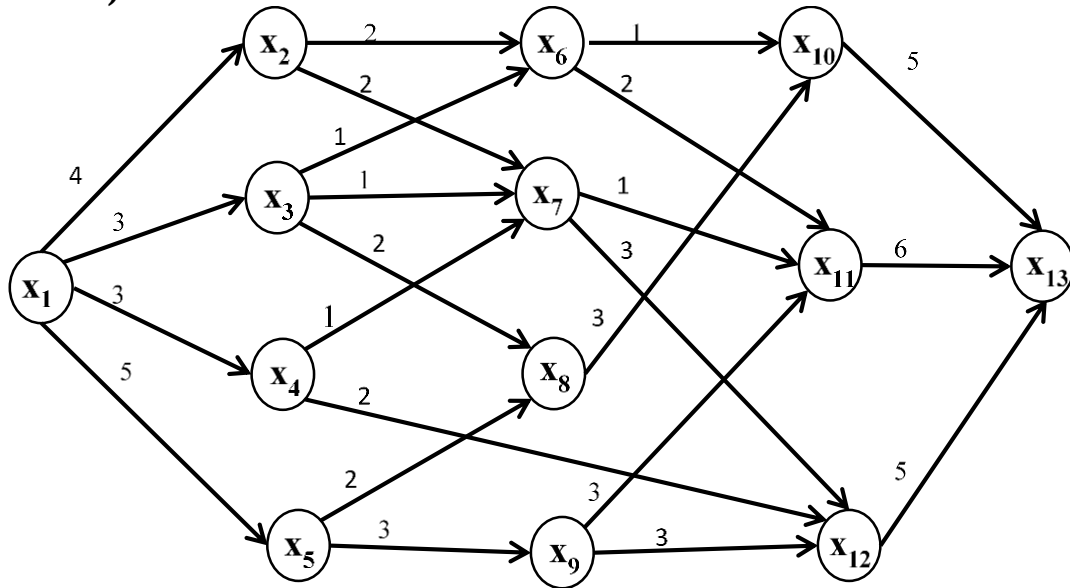
5)



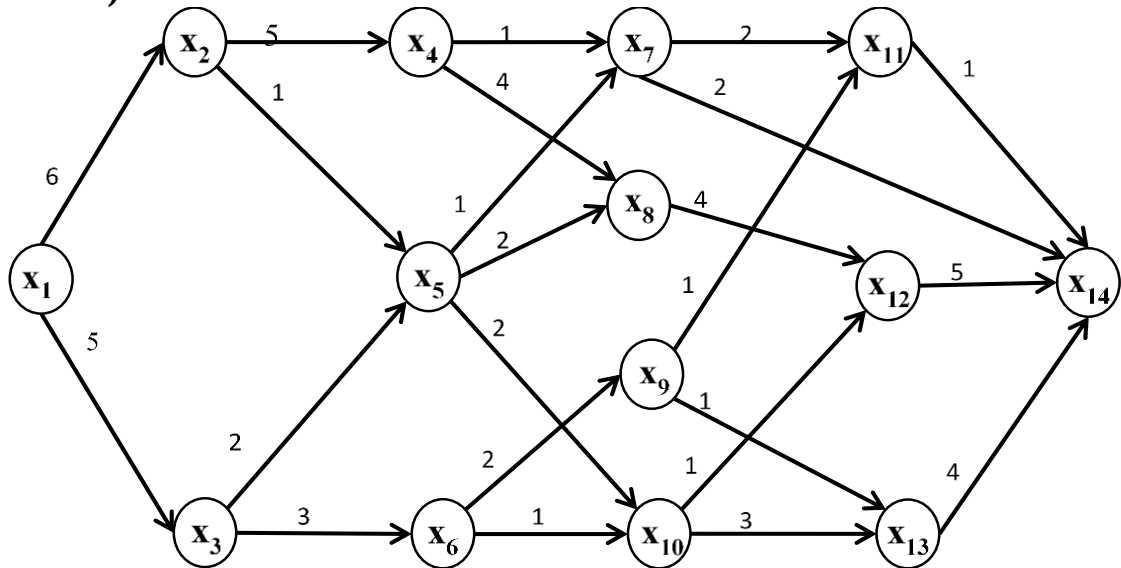
6)



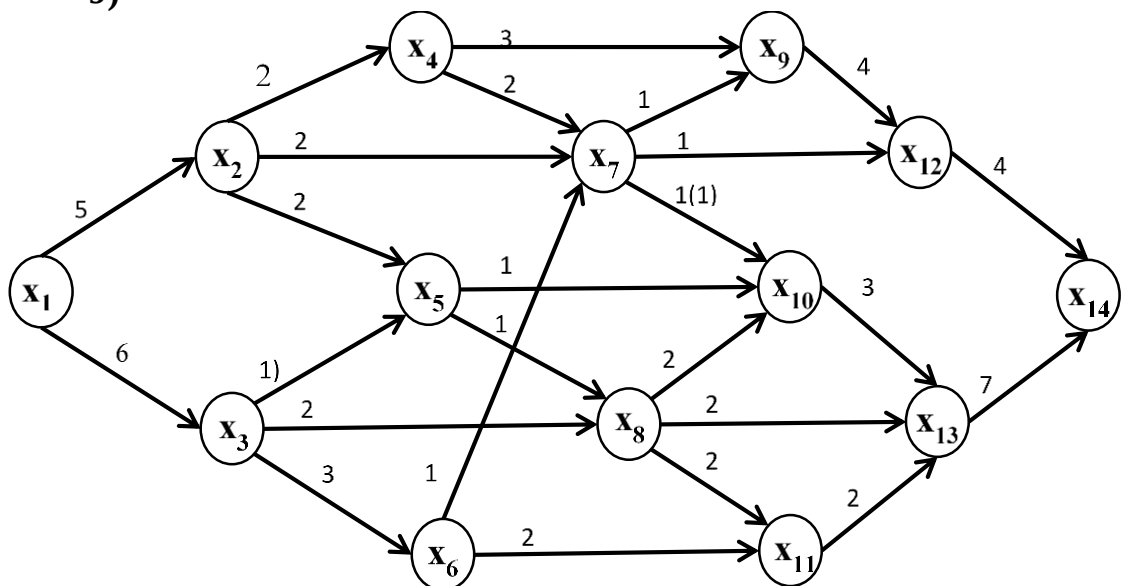
7)



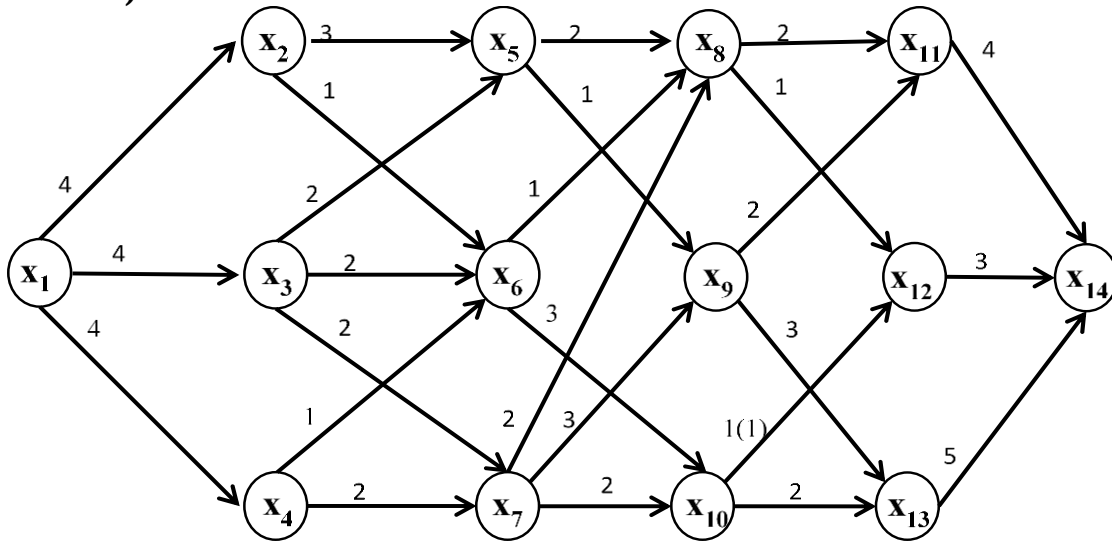
8)



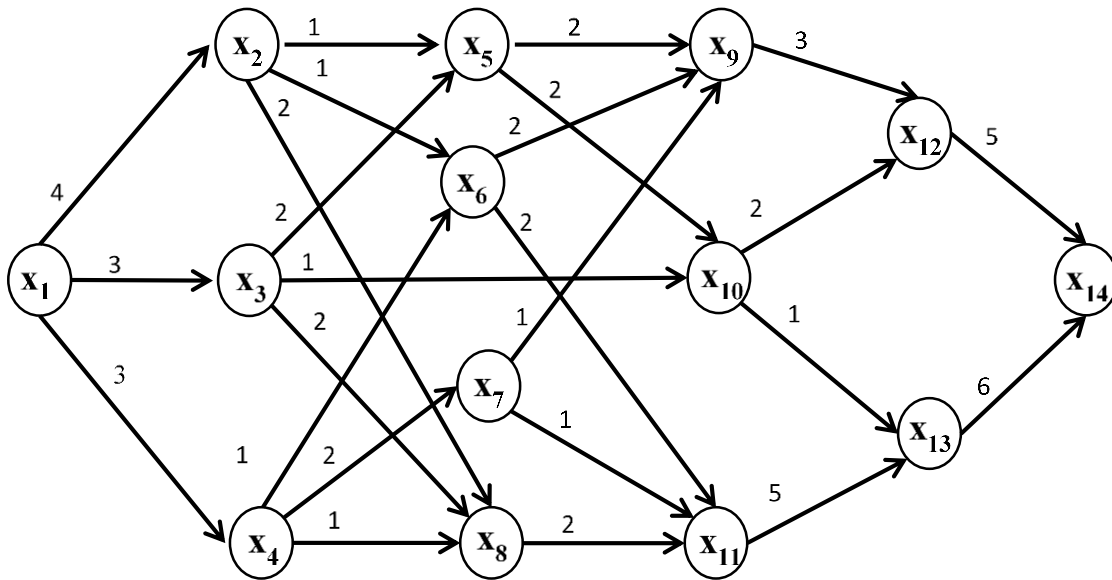
9)



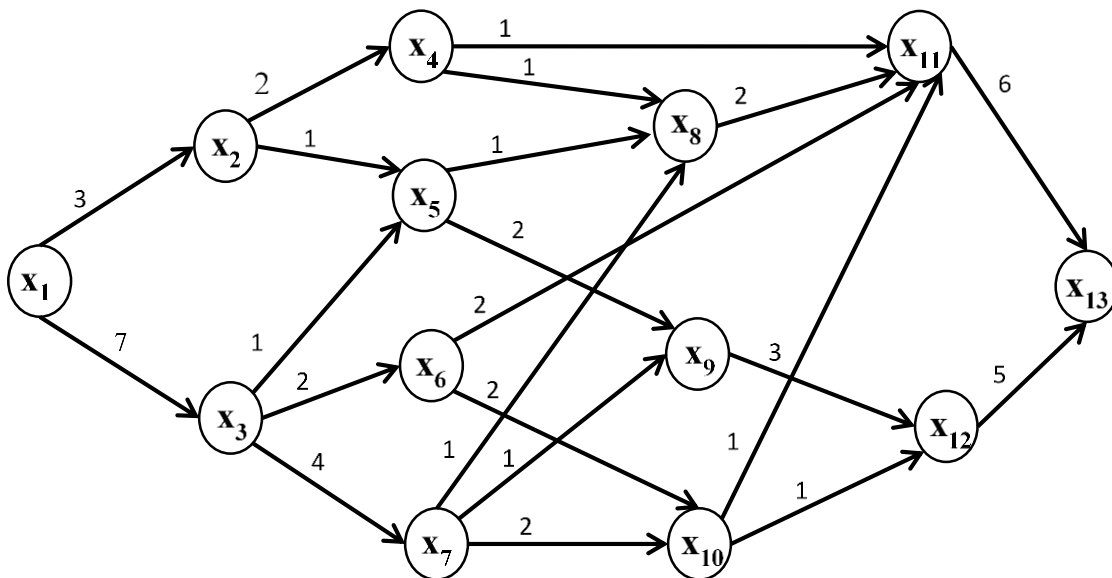
10)



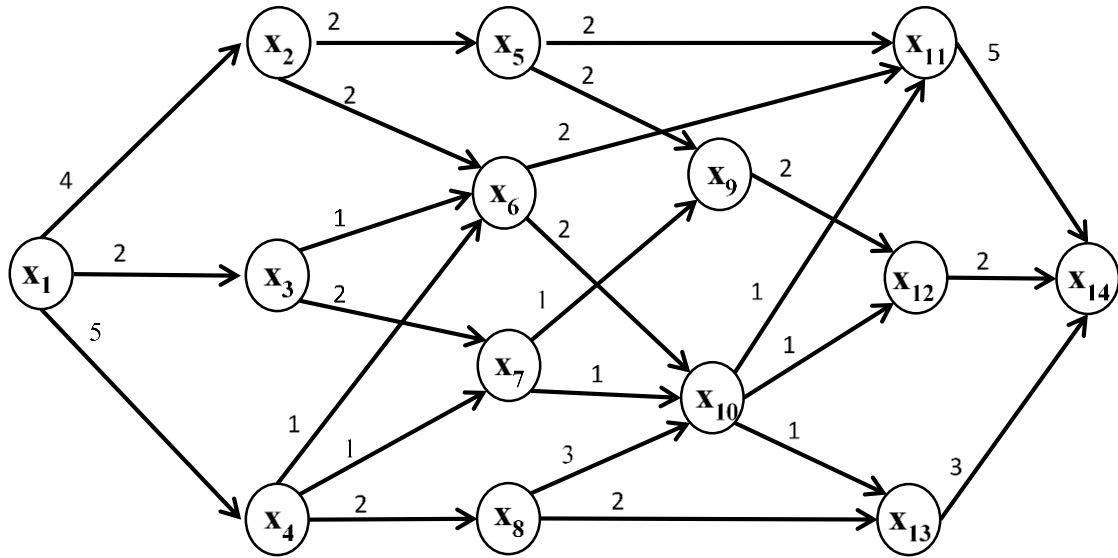
11)



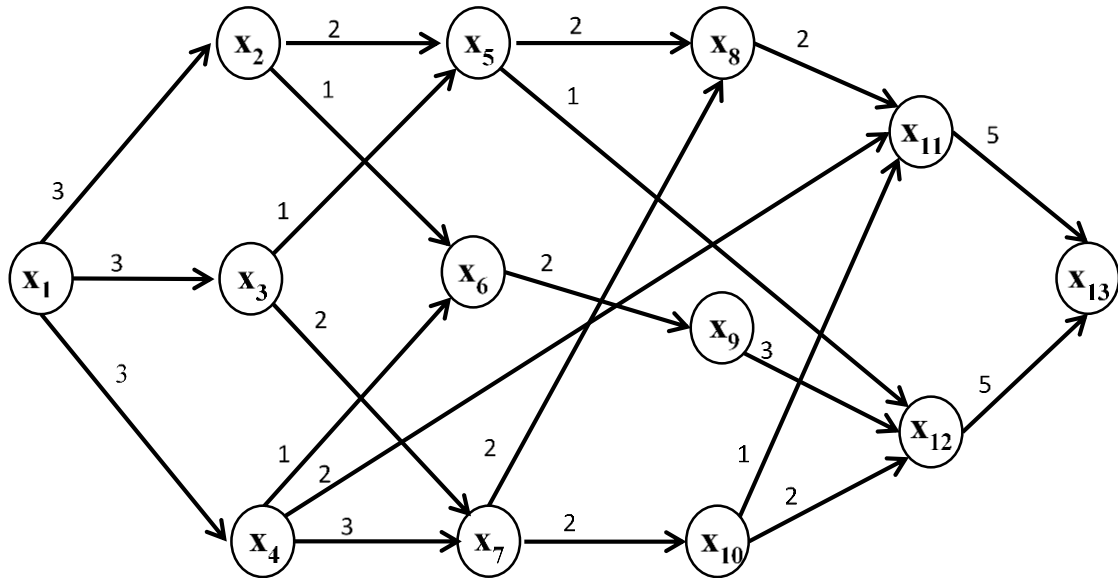
12)



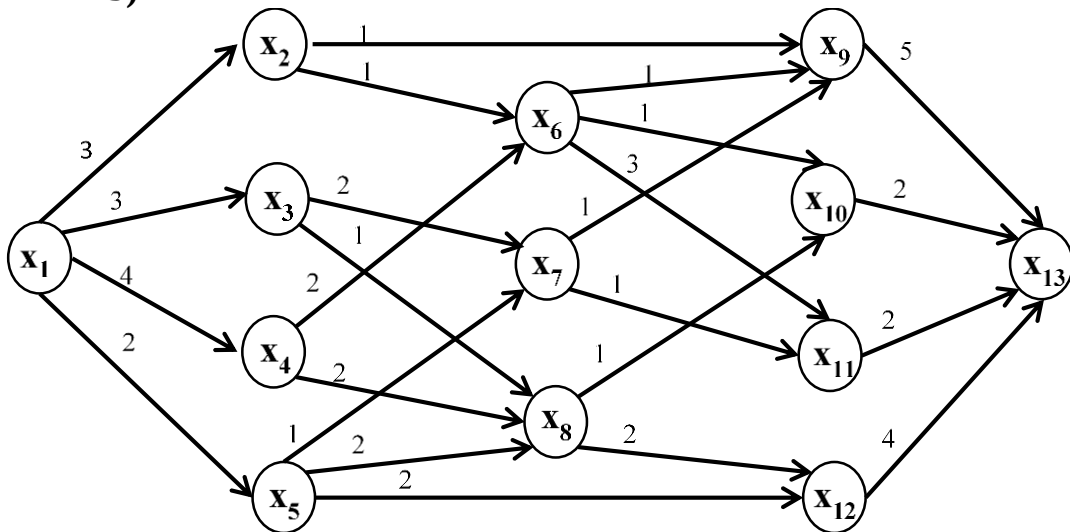
13)



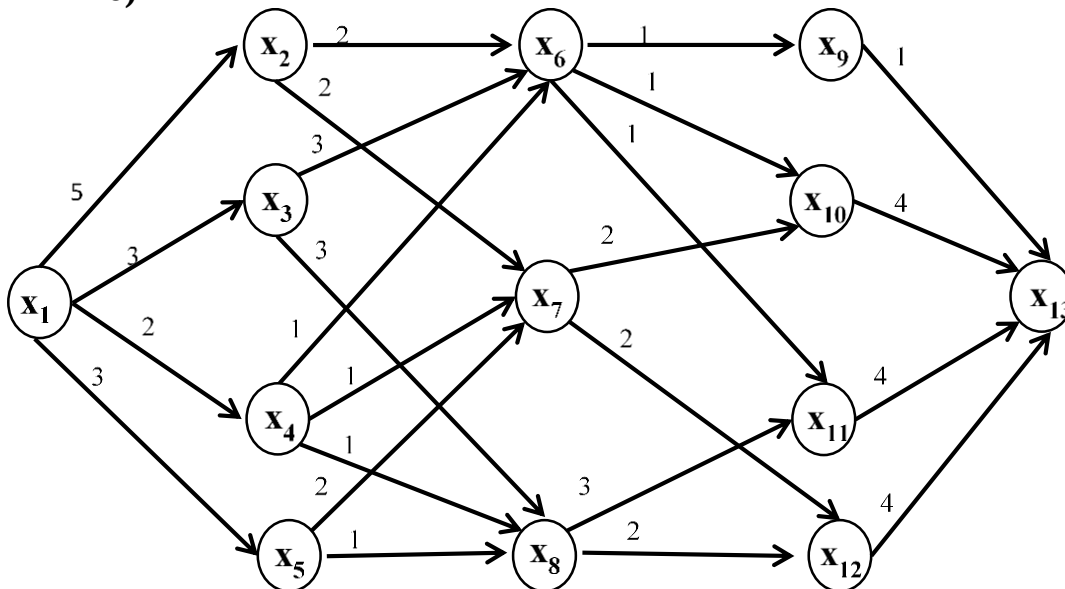
14)



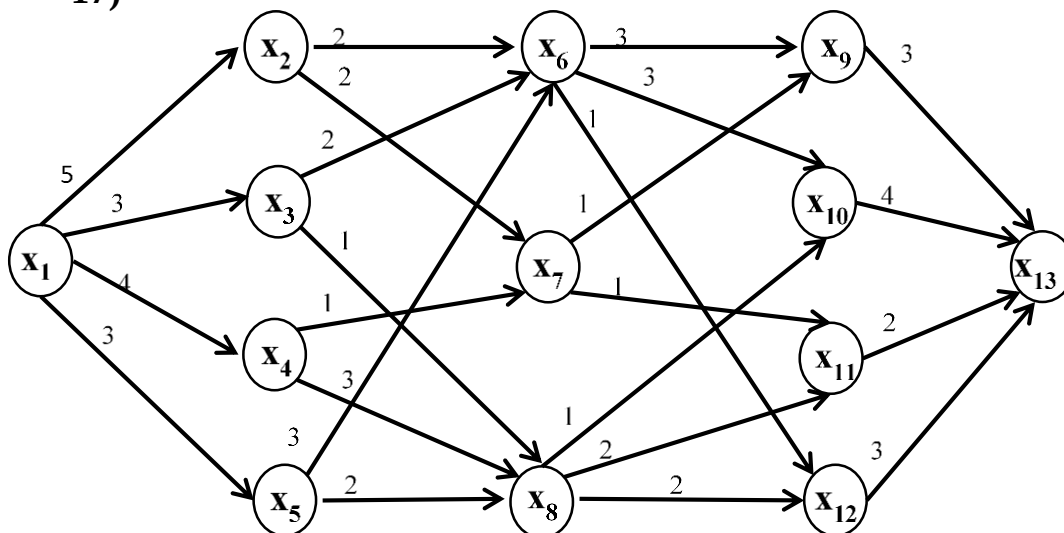
15)



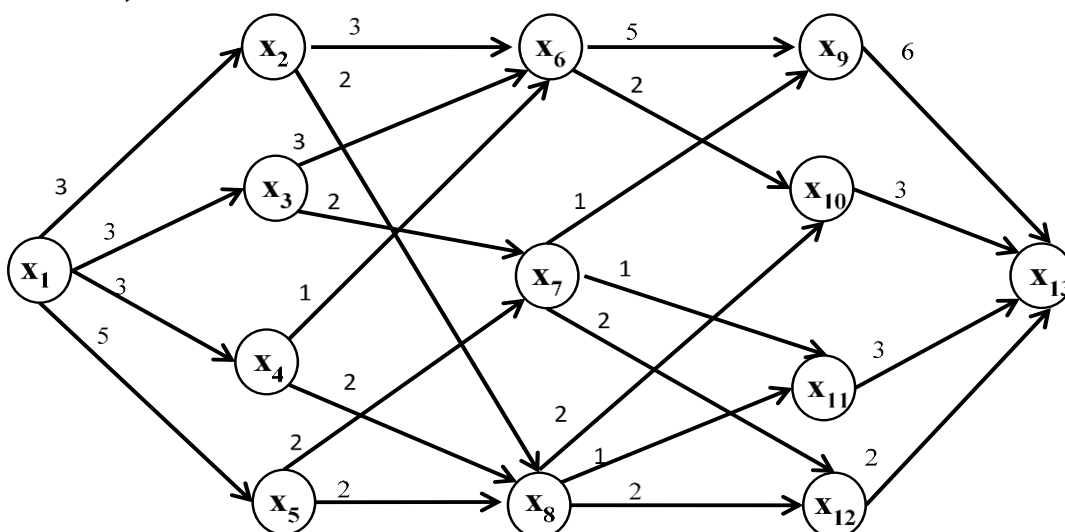
16)



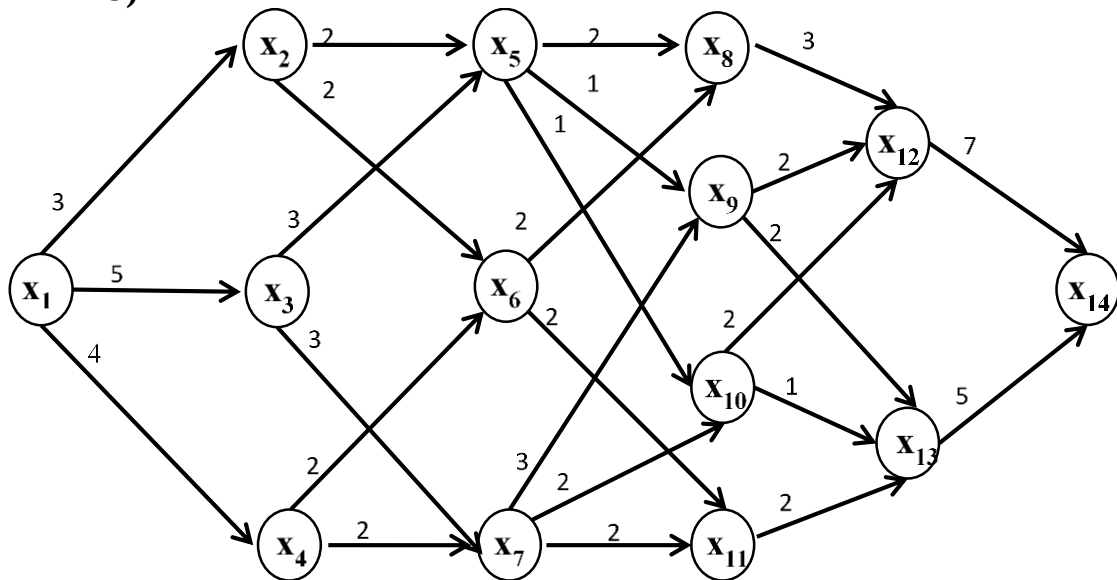
17)



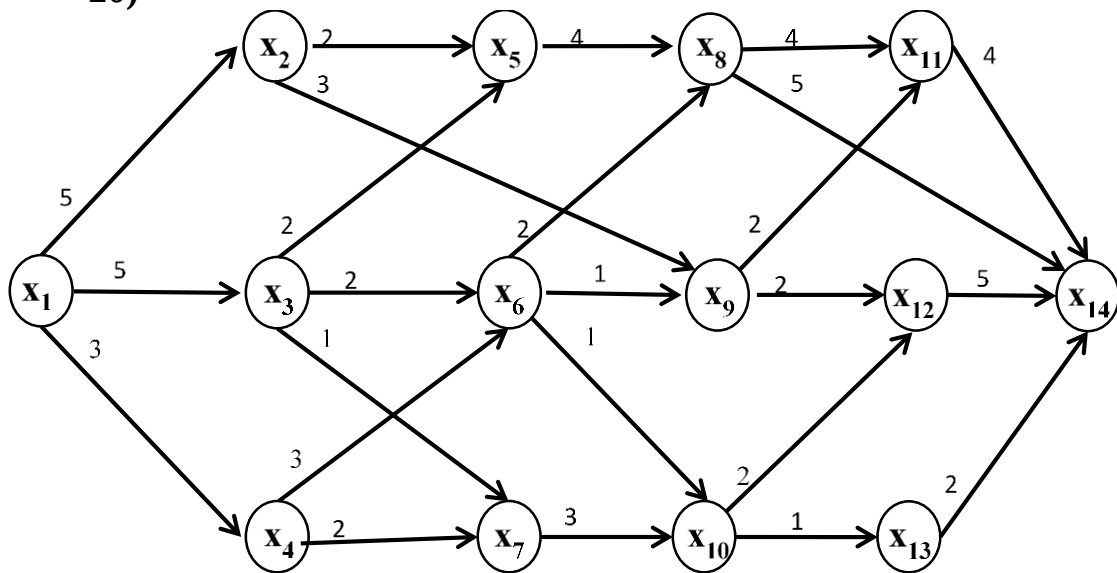
18)



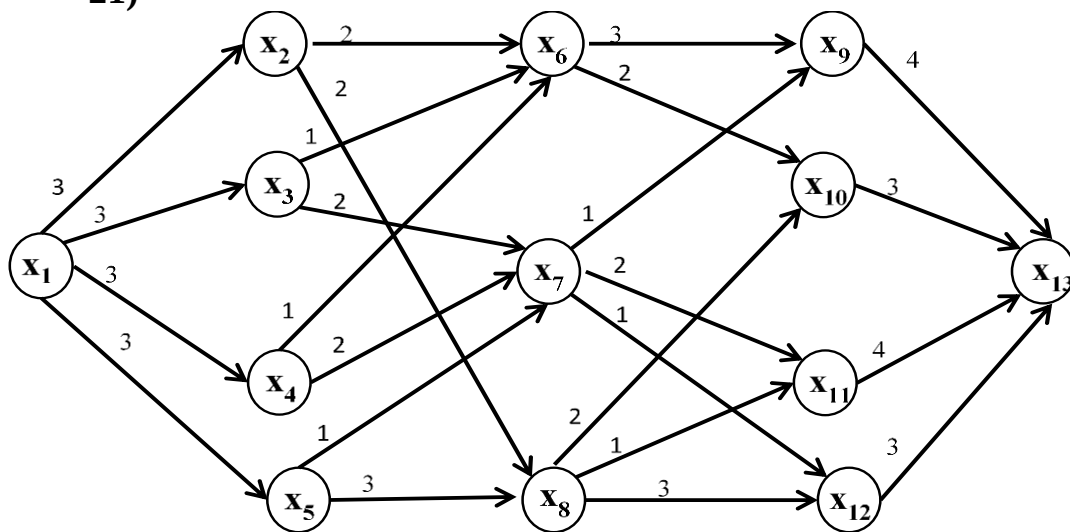
19)



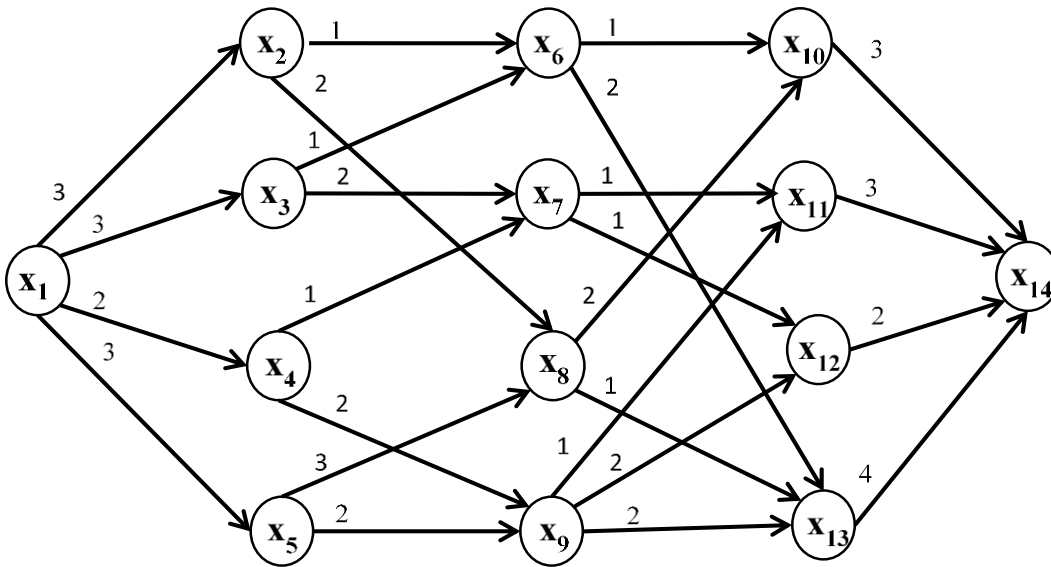
20)



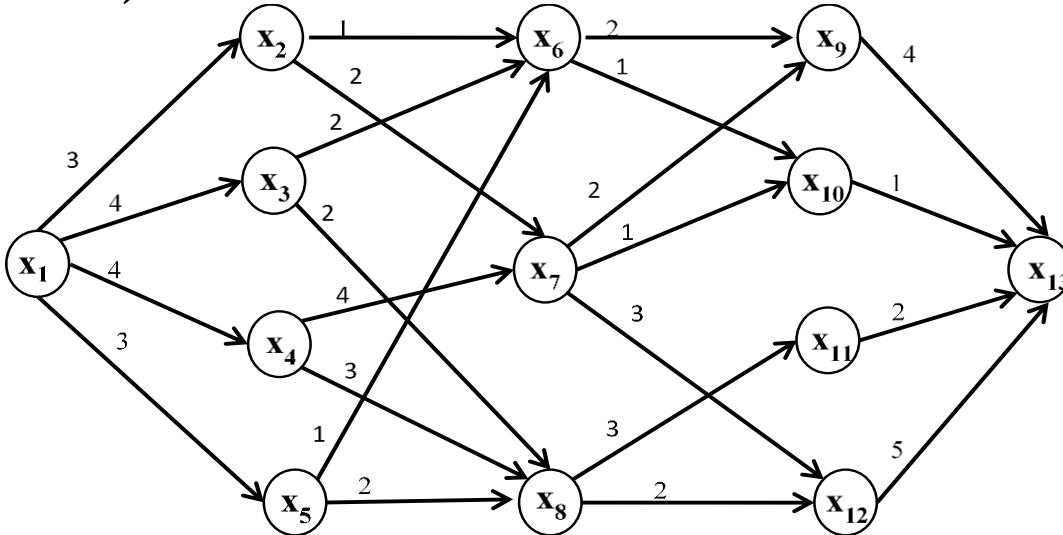
21)



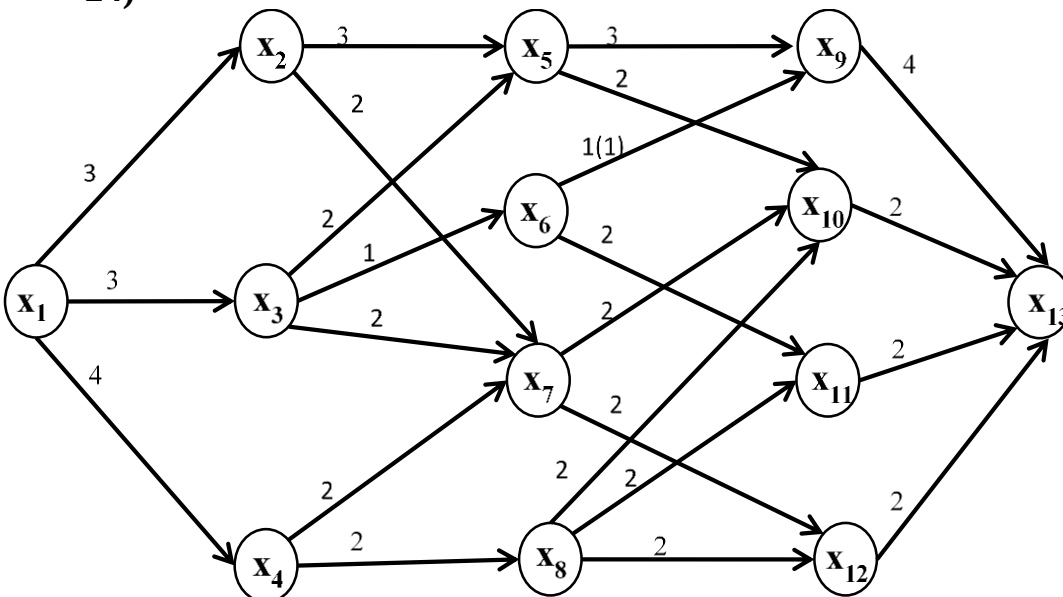
22)



23)

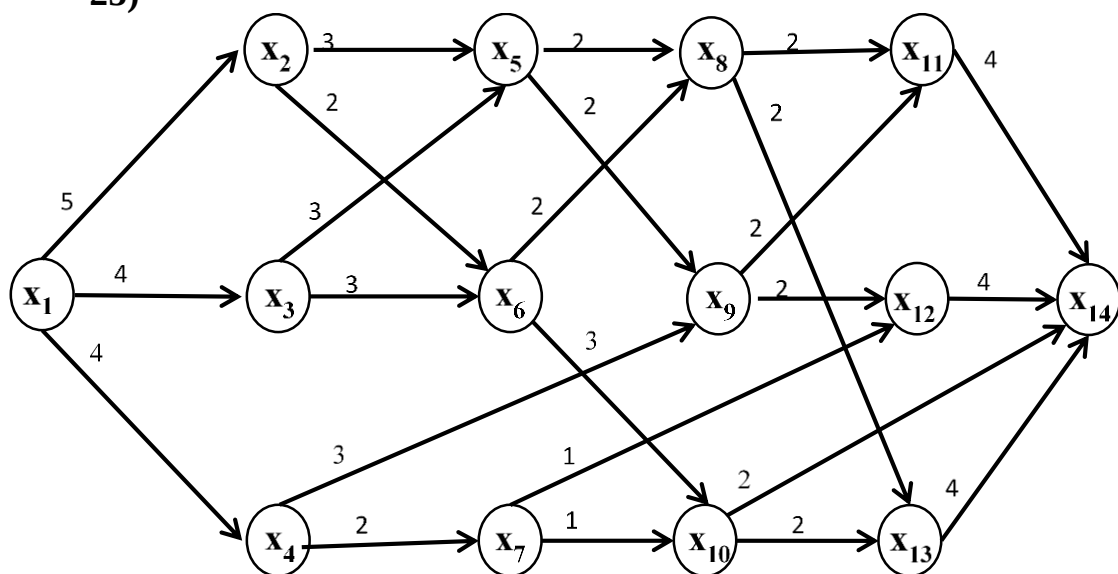


24)

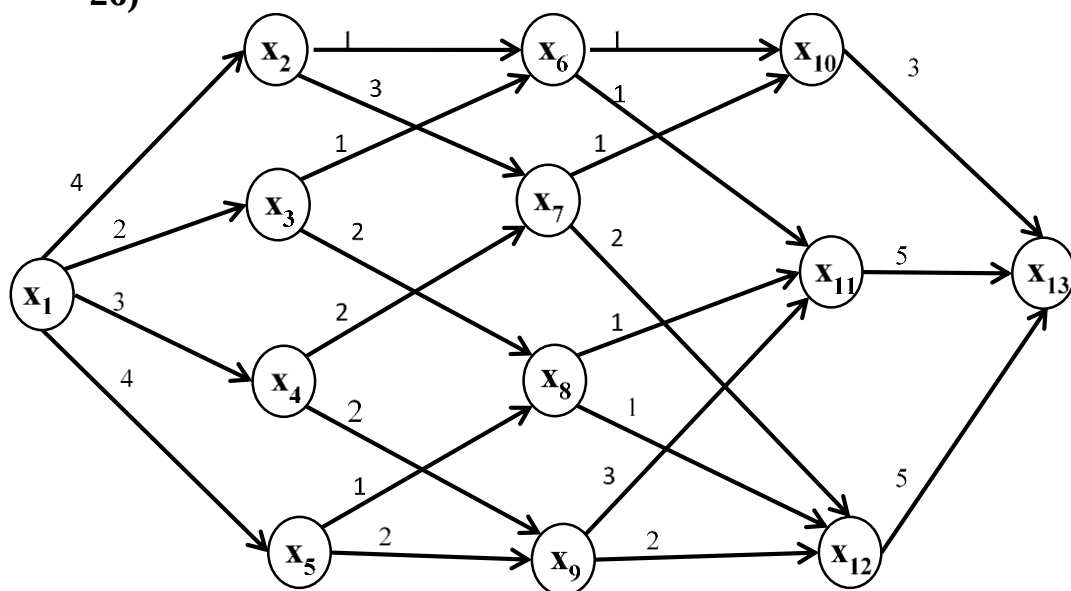




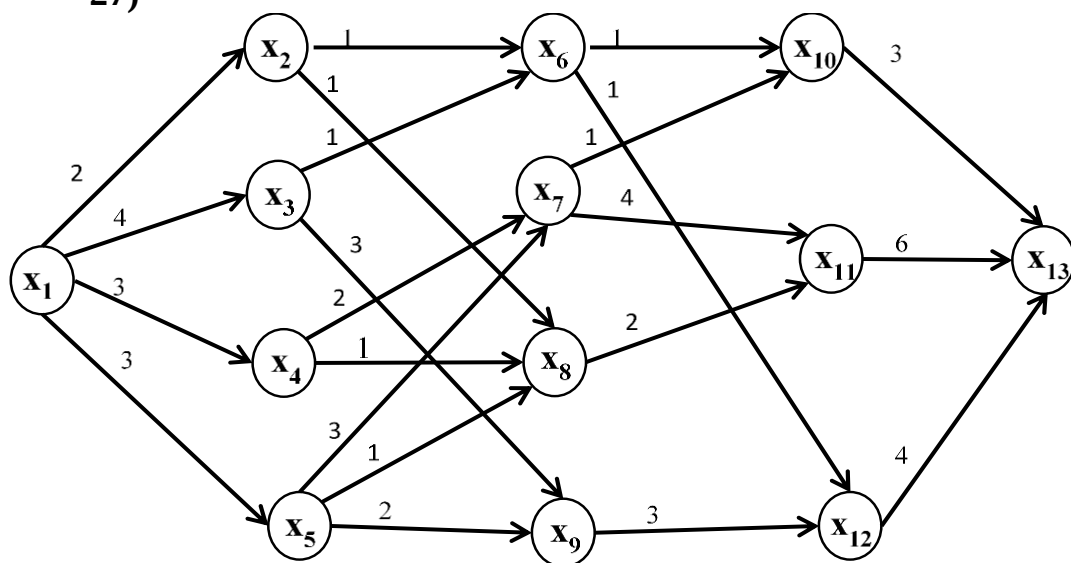
25)



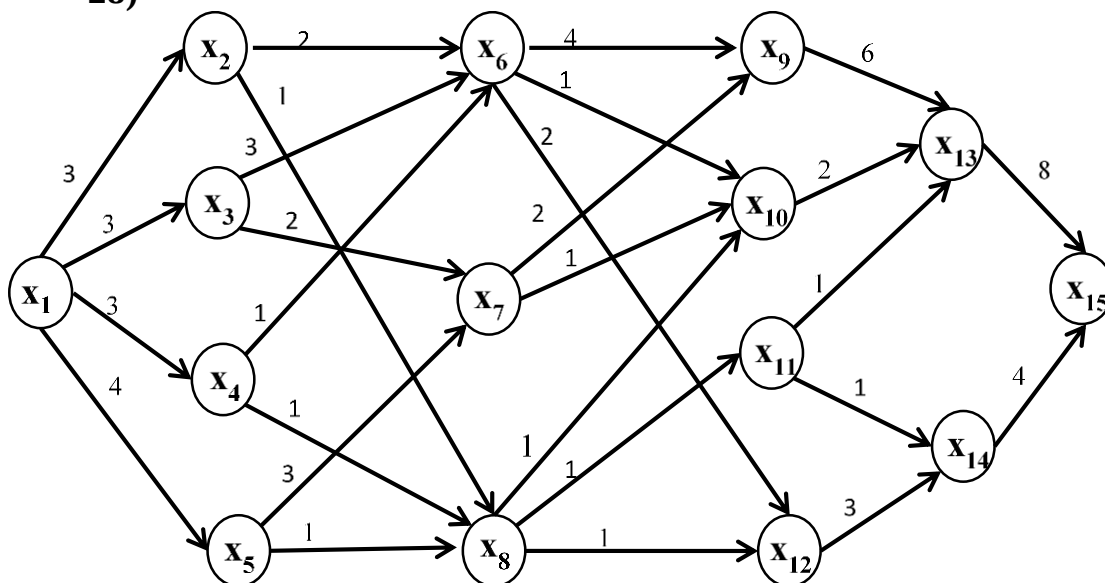
26)



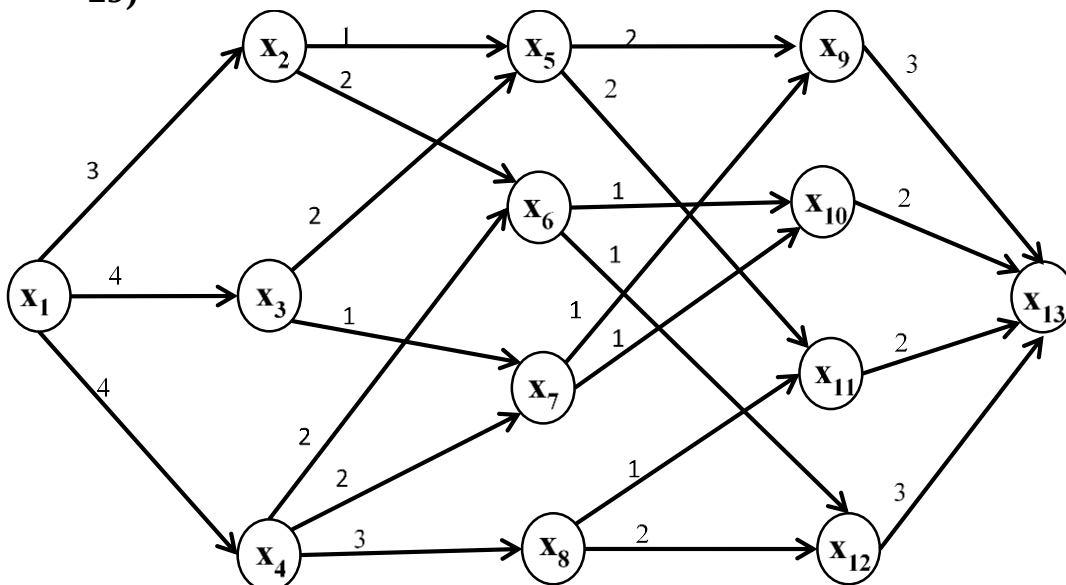
27)



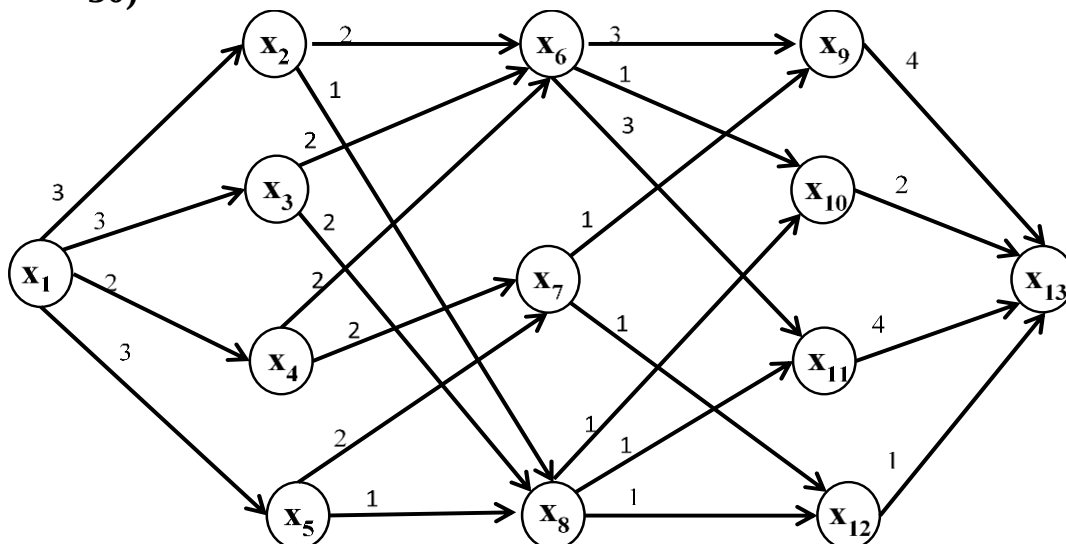
28)



29)



30)











### 5.3.Варианты индивидуальных заданий № 5

1)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 2     | 17    | 13    | -     |
| $x_2$ | 3     | -     | 14    | 5     | 14    |
| $x_3$ | -     | 2     | -     | 10    | 5     |
| $x_4$ | 8     | 4     | 15    | -     | 10    |
| $x_5$ | 10    | 3     | -     | 12    | -     |

2)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 19    | 4     | 10    | 1     |
| $x_2$ | 5     | -     | 4     | 4     | 19    |
| $x_3$ | 10    | 11    | -     | 13    | 2     |
| $x_4$ | 4     | 16    | 9     | -     | 17    |
| $x_5$ | 11    | 17    | -     | 1     | -     |

3)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 10    | 3     | 4     | 8     |
| $x_2$ | 17    | -     | 0     | 18    | 6     |
| $x_3$ | 11    | 12    | -     | 3     | 7     |
| $x_4$ | 5     | 11    | 2     | -     | 8     |
| $x_5$ | 1     | 3     | 23    | 15    | -     |

4)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 3     | 12    | 20    | 4     |
| $x_2$ | 31    | -     | 7     | 4     | -     |
| $x_3$ | 10    | 25    | -     | 13    | 20    |
| $x_4$ | 8     | -     | 20    | -     | 6     |
| $x_5$ | 16    | 5     | 23    | 8     | -     |

5)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 12    | 17    | 10    | 13    |
| $x_2$ | 31    | -     | 29    | 3     | 1     |
| $x_3$ | 12    | 9     | -     | 4     | 32    |
| $x_4$ | 7     | 2     | 6     | -     | 6     |
| $x_5$ | 1     | 24    | 0     | 17    | -     |

6)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 11    | 11    | 0     | 2     |
| $x_2$ | 3     | -     | 24    | 27    | 11    |
| $x_3$ | 14    | 4     | -     | 7     | 23    |
| $x_4$ | 14    | 20    | -     | -     | 23    |
| $x_5$ | 22    | 1     | 3     | 26    | -     |

7)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 26    | -     | 7     | 14    |
| $x_2$ | 15    | -     | 3     | 21    | 6     |
| $x_3$ | 4     | 14    | -     | 8     | 29    |
| $x_4$ | 28    | 8     | 2     | -     | -     |
| $x_5$ | 0     | 4     | 27    | 1     | -     |

8)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 4     | 10    | 9     | 18    |
| $x_2$ | 2     | -     | 23    | 10    | 15    |
| $x_3$ | 5     | 16    | -     | -     | 17    |
| $x_4$ | 28    | 14    | 11    | -     | 19    |
| $x_5$ | 2     | 29    | 5     | 18    | -     |

9)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 3     | 25    | 4     | 14    |
| $x_2$ | 2     | -     | 5     | 15    | 12    |
| $x_3$ | 4     | 8     | -     | 7     | 19    |
| $x_4$ | 15    | 4     | 3     | -     | 9     |
| $x_5$ | 3     | 14    | 7     | 23    | -     |

10)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 10    | 2     | 13    | 3     |
| $x_2$ | 5     | -     | 19    | 3     | 17    |
| $x_3$ | 16    | 8     | -     | 19    | 5     |
| $x_4$ | 4     | 13    | 20    | -     | 7     |
| $x_5$ | 12    | 18    | 6     | 1     | -     |

11)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 5     | 1     | 30    | 10    |
| $x_2$ | 4     | -     | 32    | 12    | 27    |
| $x_3$ | 25    | -     | -     | 4     | 2     |
| $x_4$ | 10    | 38    | 3     | -     | 6     |
| $x_5$ | 14    | 17    | 16    | 1     | -     |

12)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 3     | 10    | 29    | 2     |
| $x_2$ | 1     | -     | 24    | -     | 19    |
| $x_3$ | 20    | 8     | -     | 5     | 16    |
| $x_4$ | 10    | 1     | 15    | -     | 7     |
| $x_5$ | 2     | 14    | 28    | 15    | -     |

13)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 24    | 4     | 8     | 12    |
| $x_2$ | 19    | -     | 14    | 5     | 9     |
| $x_3$ | 8     | 7     | -     | 4     | 5     |
| $x_4$ | 15    | 8     | 15    | -     | 2     |
| $x_5$ | 9     | 5     | 0     | 16    | -     |

14)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 16    | 9     | -     | 2     |
| $x_2$ | 11    | -     | 14    | 9     | 6     |
| $x_3$ | 21    | 4     | -     | 4     | 18    |
| $x_4$ | 7     | -     | 1     | -     | 22    |
| $x_5$ | 8     | 9     | 11    | 15    | -     |

15)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | -     | 2     | 4     | 18    |
| $x_2$ | 17    | -     | 7     | 12    | 2     |
| $x_3$ | 3     | 16    | -     | 21    | 1     |
| $x_4$ | 22    | 1     | 12    | -     | 15    |
| $x_5$ | -     | 1     | 23    | 16    | -     |

16)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 18    | 25    | 13    | 10    |
| $x_2$ | 21    | -     | 3     | 6     | 14    |
| $x_3$ | 7     | -     | -     | 4     | 31    |
| $x_4$ | 20    | 4     | -     | -     | 8     |
| $x_5$ | 11    | 2     | 3     | 20    | -     |

17)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 1     | 16    | 20    | 3     |
| $x_2$ | 23    | -     | 1     | 15    | -     |
| $x_3$ | 6     | 1     | -     | 10    | 16    |
| $x_4$ | 12    | 15    | 1     | -     | 22    |
| $x_5$ | 2     | 18    | -     | 3     | -     |

18)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 5     | 2     | 10    | -     |
| $x_2$ | -     | -     | 3     | 12    | 10    |
| $x_3$ | 14    | 14    | -     | 5     | 3     |
| $x_4$ | 15    | 10    | 4     | -     | 8     |
| $x_5$ | 17    | -     | 2     | 13    | -     |

19)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 7     | 12    | 3     | 11    |
| $x_2$ | 23    | -     | 3     | 15    | 1     |
| $x_3$ | 0     | 6     | -     | 18    | 17    |
| $x_4$ | 2     | 8     | 11    | -     | 5     |
| $x_5$ | 3     | 8     | 10    | 4     | -     |

20)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 2     | 11    | 13    | 10    |
| $x_2$ | -     | -     | 17    | 1     | 11    |
| $x_3$ | 4     | 19    | -     | 4     | 5     |
| $x_4$ | 9     | 17    | 16    | -     | 4     |
| $x_5$ | 4     | 1     | 19    | 10    | -     |



21)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 32    | 9     | 4     | 12    |
| $x_2$ | 0     | -     | 24    | 17    | 1     |
| $x_3$ | 29    | 1     | -     | 3     | 31    |
| $x_4$ | 6     | 6     | 2     | -     | 7     |
| $x_5$ | 17    | 13    | 12    | 10    | -     |

22)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 23    | 4     | 7     | 14    |
| $x_2$ | 3     | -     | 1     | 26    | 22    |
| $x_3$ | 24    | 11    | -     | 27    | 3     |
| $x_4$ | -     | 23    | 20    | -     | 14    |
| $x_5$ | 11    | 2     | 11    | 0     | -     |

23)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 29    | 14    | 8     | 4     |
| $x_2$ | 27    | -     | 4     | 1     | 0     |
| $x_3$ | 3     | 6     | -     | 21    | 15    |
| $x_4$ | 2     | -     | 8     | -     | 28    |
| $x_5$ | -     | 14    | 26    | 7     | -     |

24)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 17    | 16    | -     | 5     |
| $x_2$ | 5     | -     | 29    | 18    | 2     |
| $x_3$ | 23    | 15    | -     | 10    | 2     |
| $x_4$ | 11    | 19    | 14    | -     | 28    |
| $x_5$ | 10    | 8     | 4     | 9     | -     |

25)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 19    | 8     | 7     | 4     |
| $x_2$ | 7     | -     | 14    | 23    | 3     |
| $x_3$ | 5     | 12    | -     | 15    | 2     |
| $x_4$ | 3     | 9     | 4     | -     | 15    |
| $x_5$ | 25    | 14    | 3     | 4     | -     |

26)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 5     | 8     | 19    | 16    |
| $x_2$ | 6     | -     | 18    | 1     | 12    |
| $x_3$ | 19    | 17    | -     | 3     | -     |
| $x_4$ | 20    | 7     | 13    | -     | 4     |
| $x_5$ | 2     | 6     | 10    | 13    | -     |

27)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 2     | -     | 4     | 25    |
| $x_2$ | 16    | -     | 17    | 1     | 14    |
| $x_3$ | 32    | 27    | -     | 12    | 4     |
| $x_4$ | 3     | 6     | 36    | -     | 10    |
| $x_5$ | 1     | 10    | 5     | 30    | -     |

28)

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 16    | 2     | 5     | 20    |
| $x_2$ | 28    | -     | 14    | 15    | 2     |
| $x_3$ | 24    | 19    | -     | -     | 1     |
| $x_4$ | 15    | 7     | 1     | -     | 10    |
| $x_5$ | 10    | 2     | 3     | 29    | -     |

29)

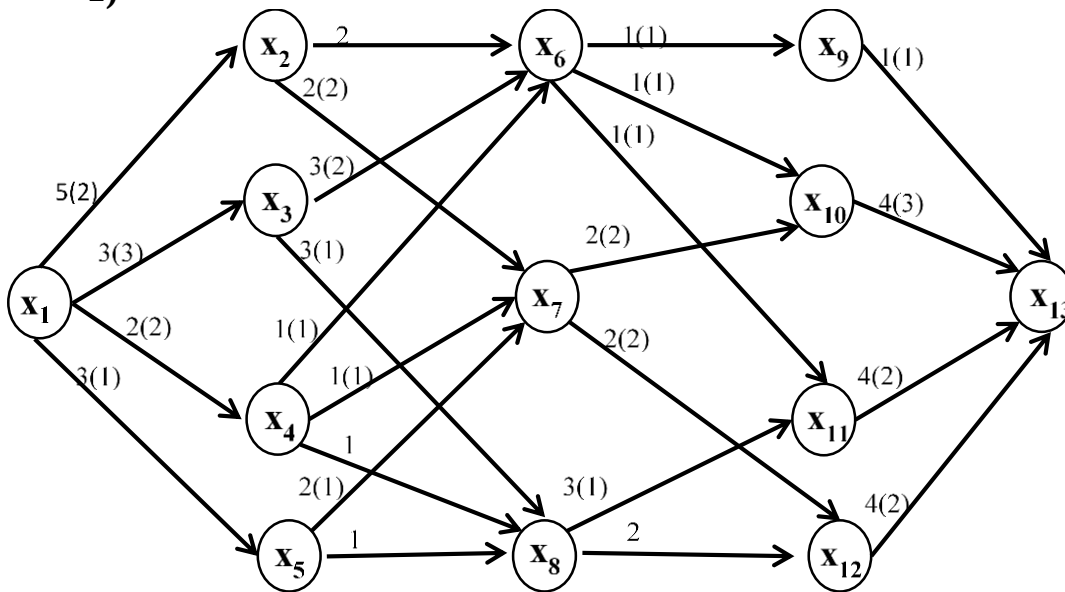
|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 5     | 7     | 4     | 8     |
| $x_2$ | 0     | -     | 5     | 16    | 9     |
| $x_3$ | 14    | 9     | -     | 5     | 19    |
| $x_4$ | 15    | 2     | 8     | -     | 15    |
| $x_5$ | 4     | 12    | 24    | 8     | -     |

30)

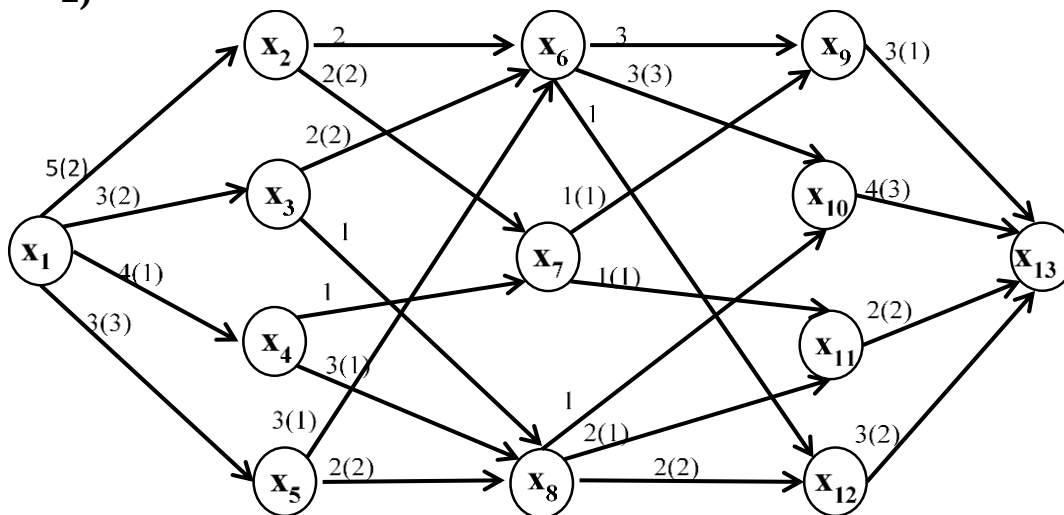
|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | -     | 18    | 4     | 4     | 21    |
| $x_2$ | 11    | -     | 9     | 15    | 8     |
| $x_3$ | 14    | 6     | -     | 9     | 11    |
| $x_4$ | 1     | 22    | -     | -     | 7     |
| $x_5$ | 9     | 2     | 16    | -     | -     |

## 5.4. Варианты индивидуальных заданий № 6

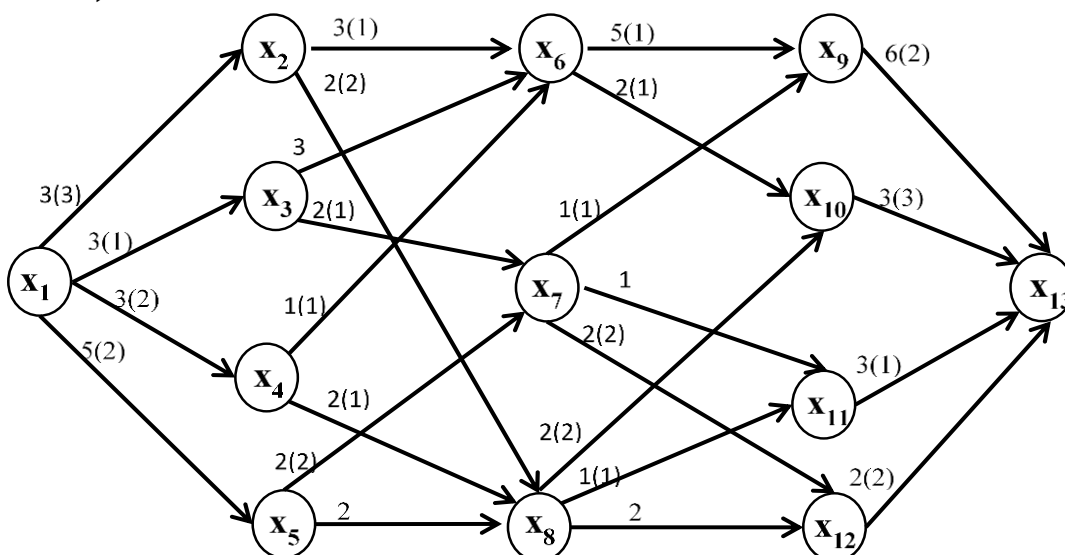
1)



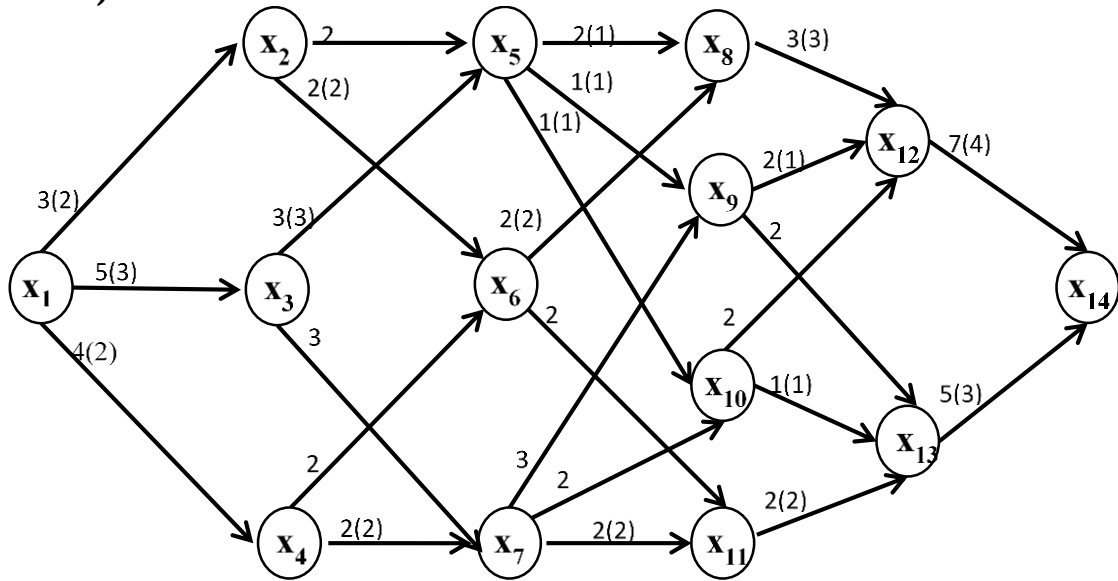
2)



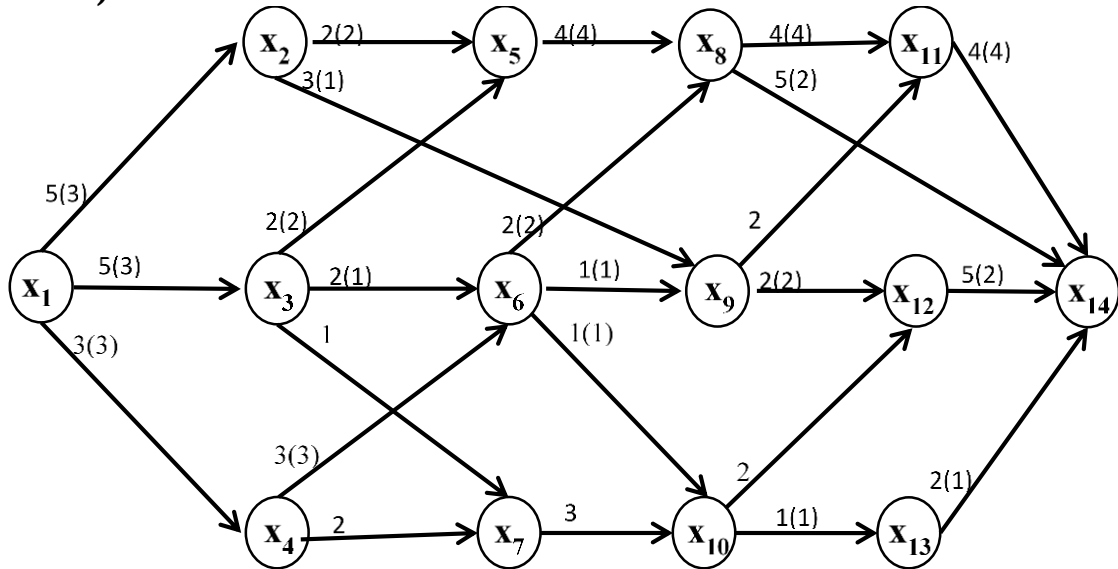
3)



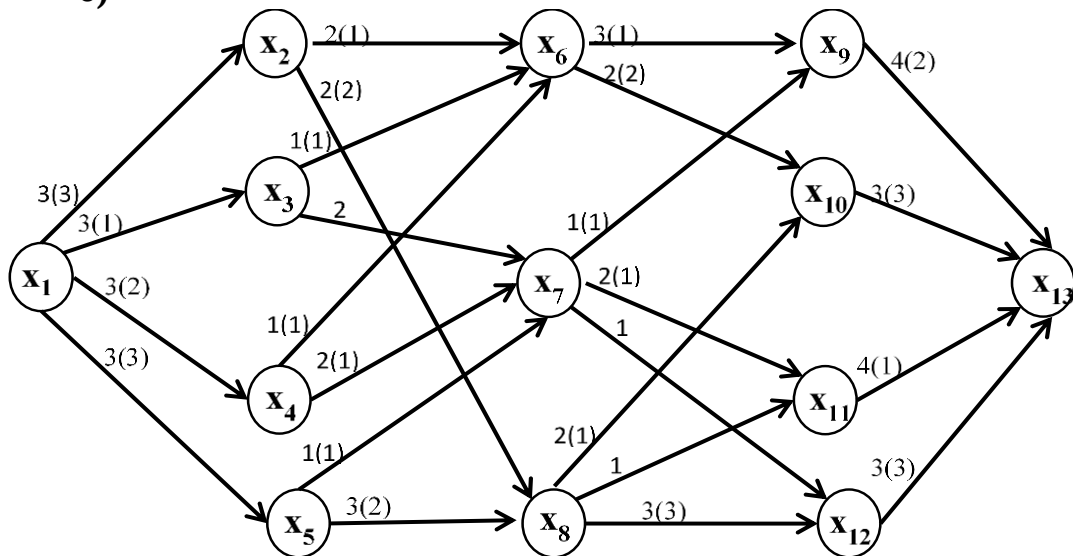
4)



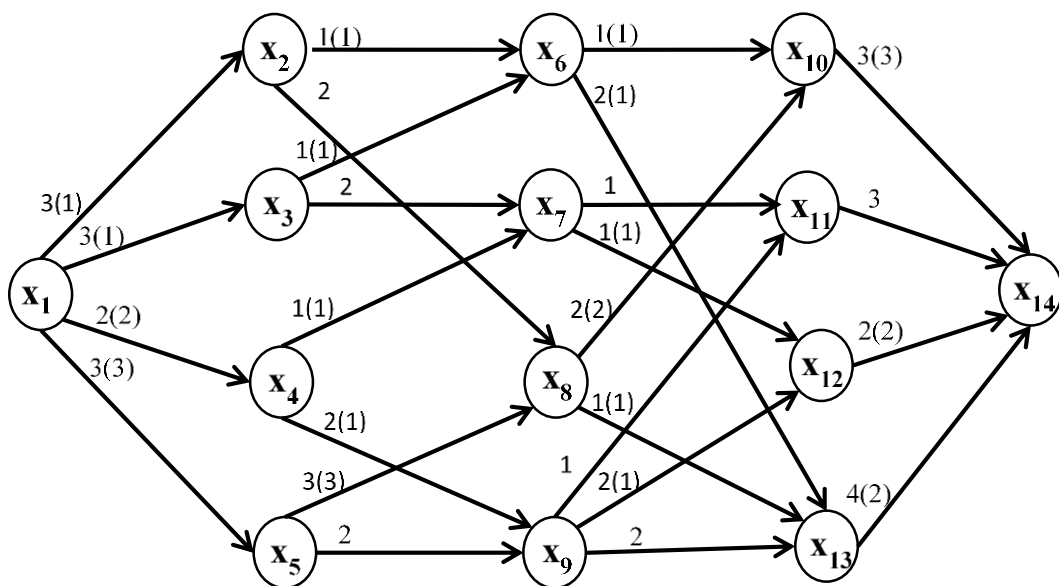
5)



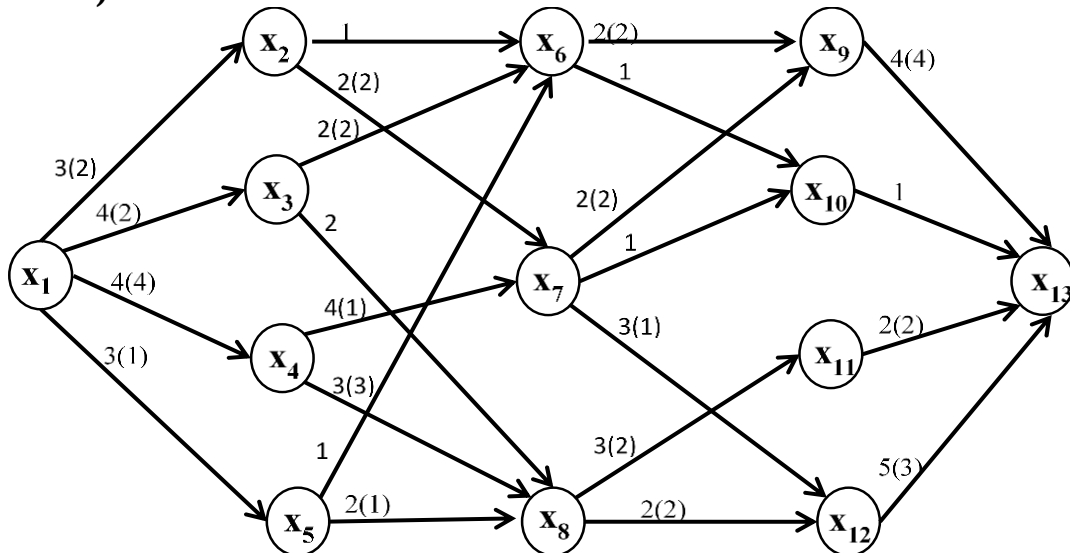
6)



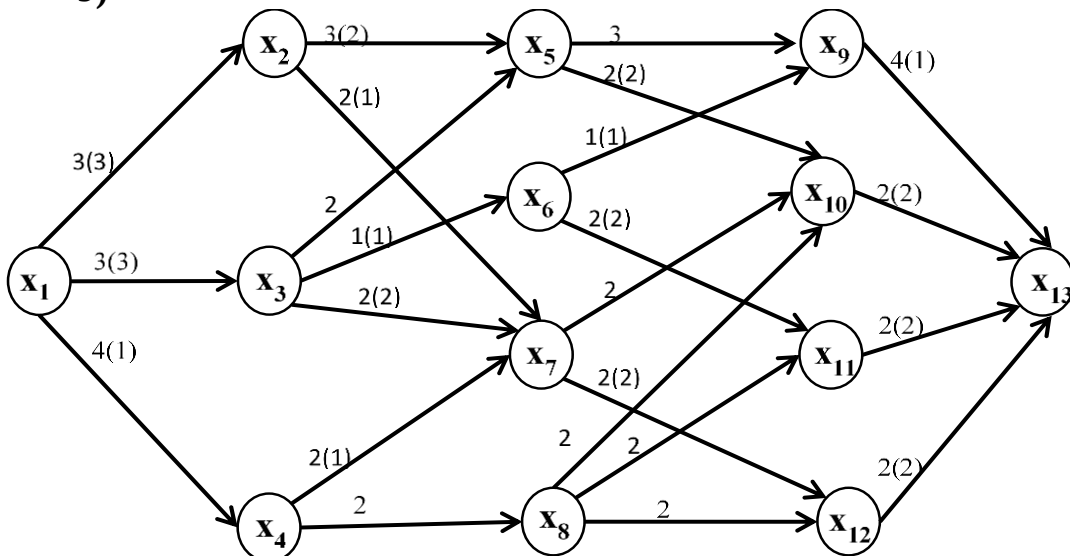
7)



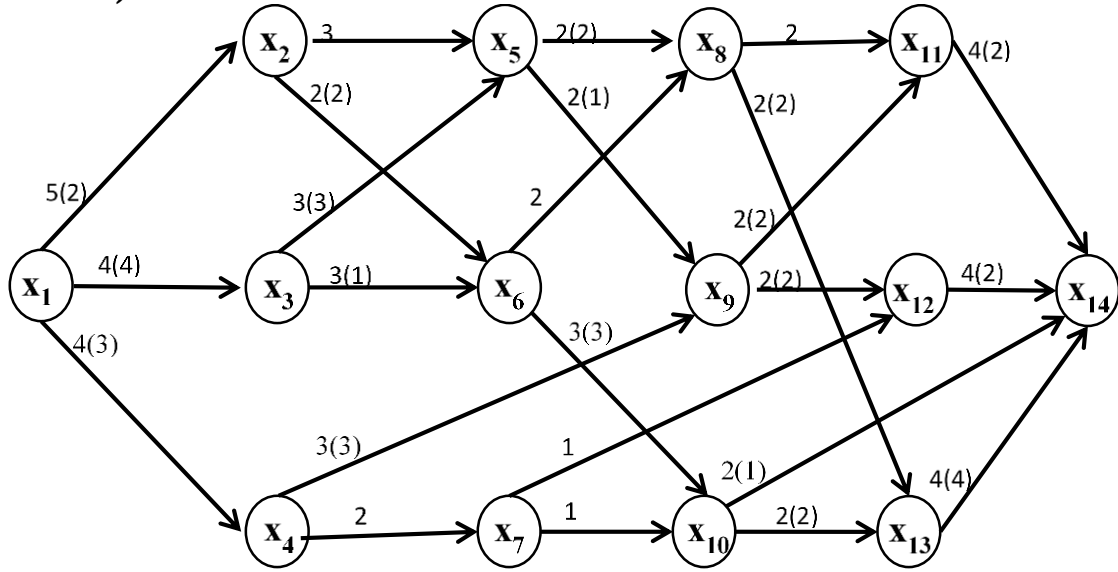
8)



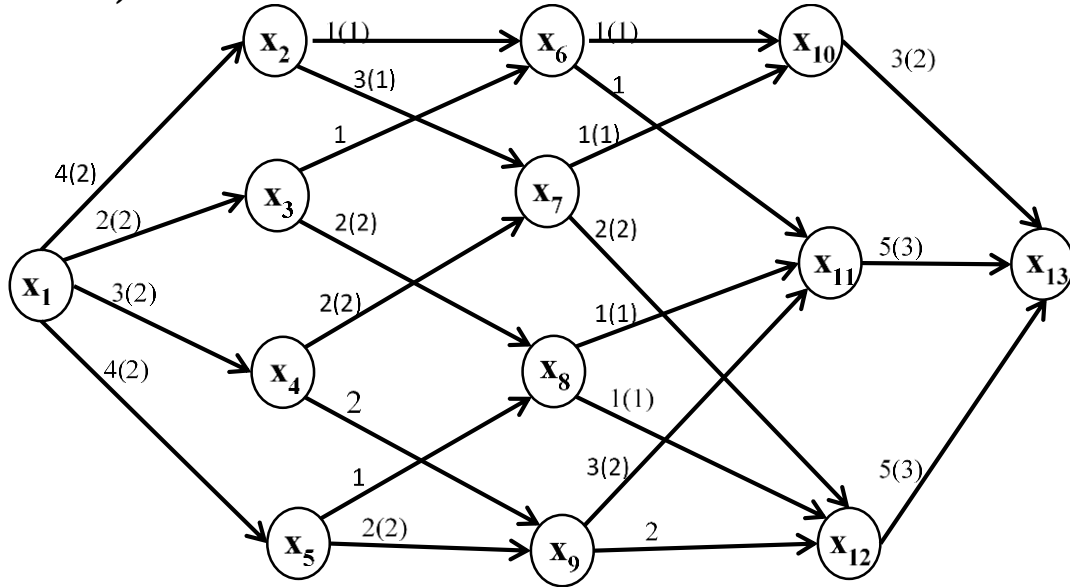
9)



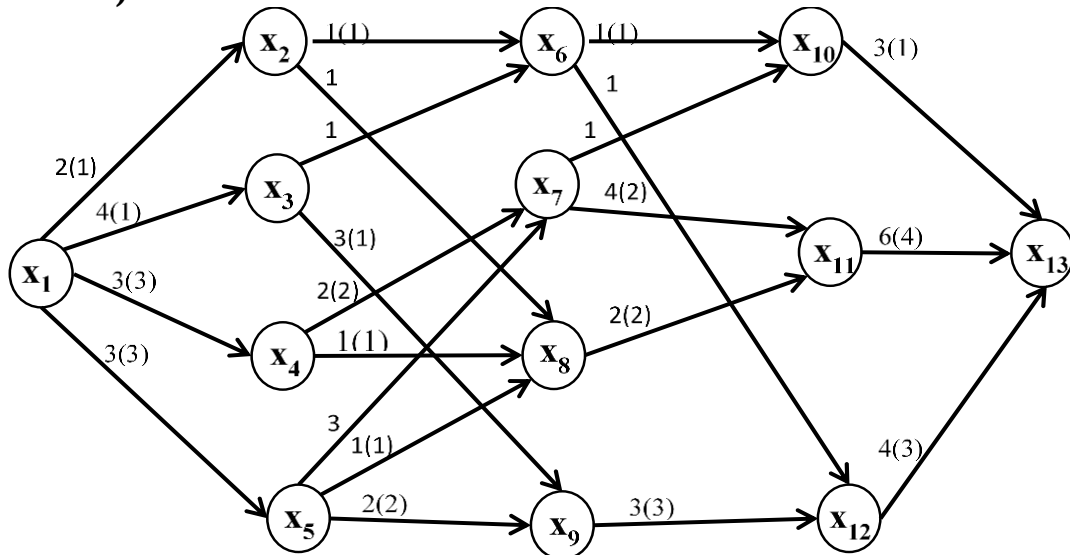
10)



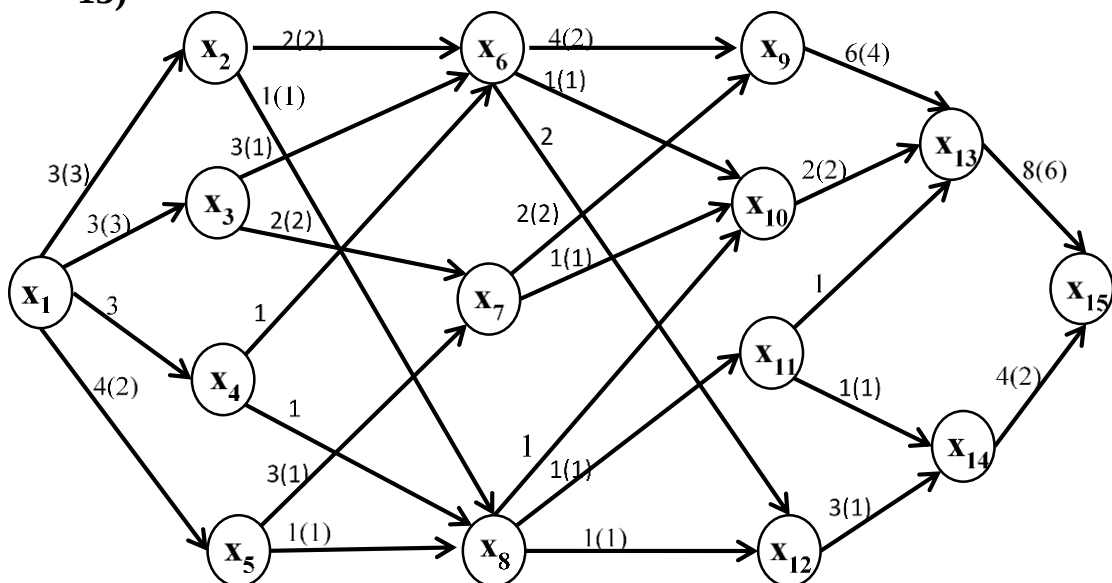
11)



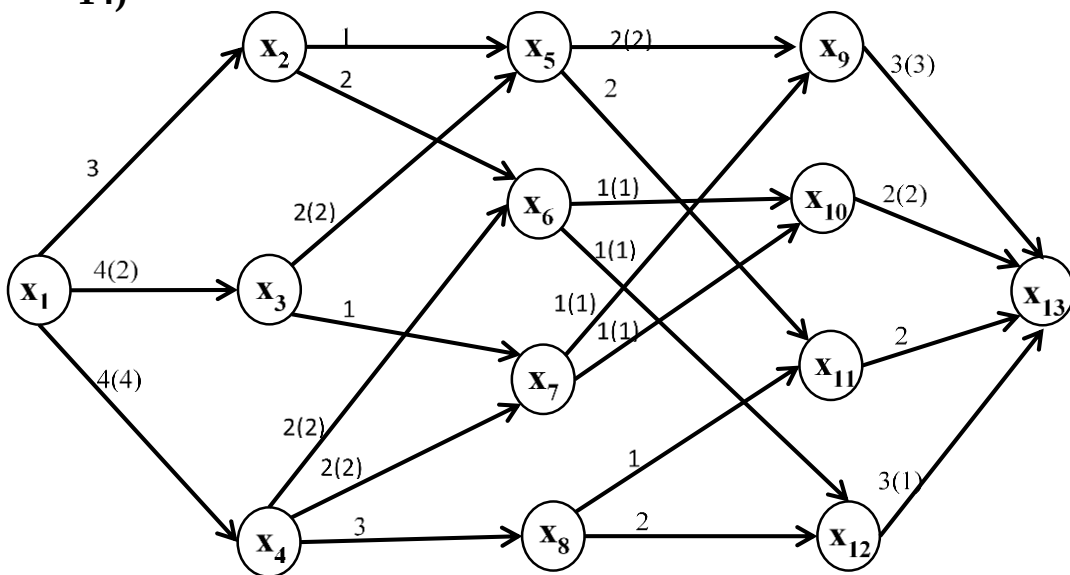
12)



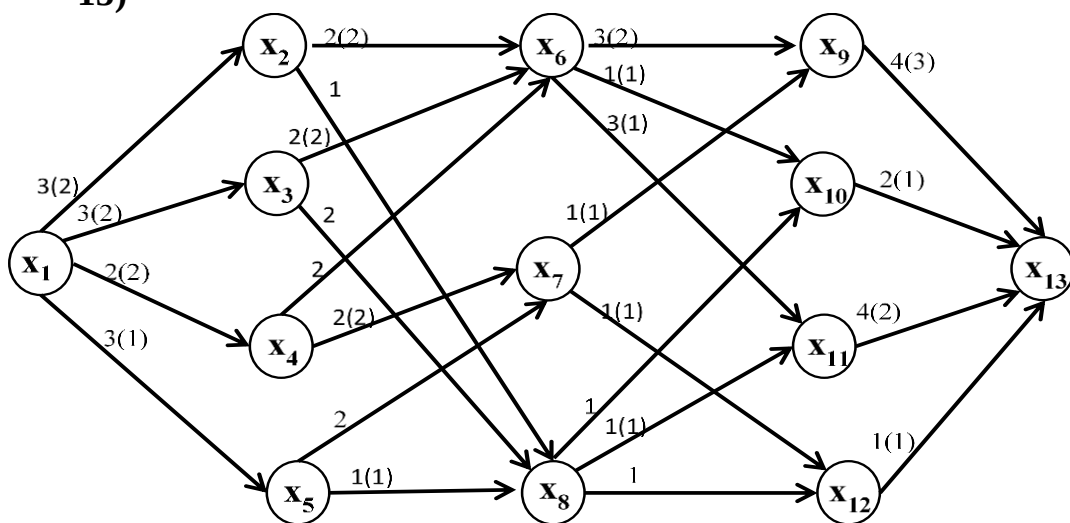
13)



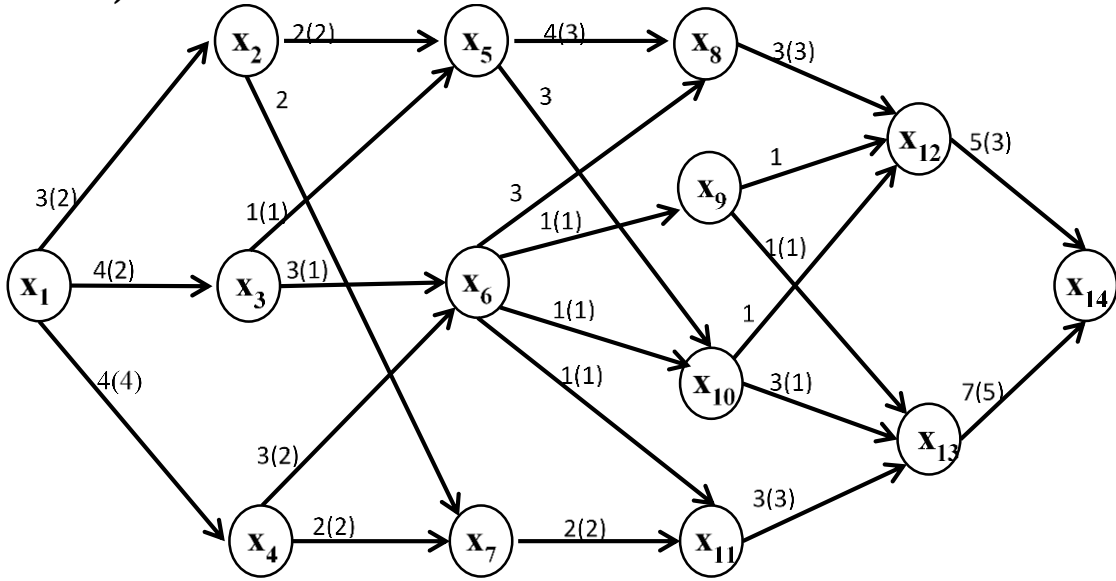
14)



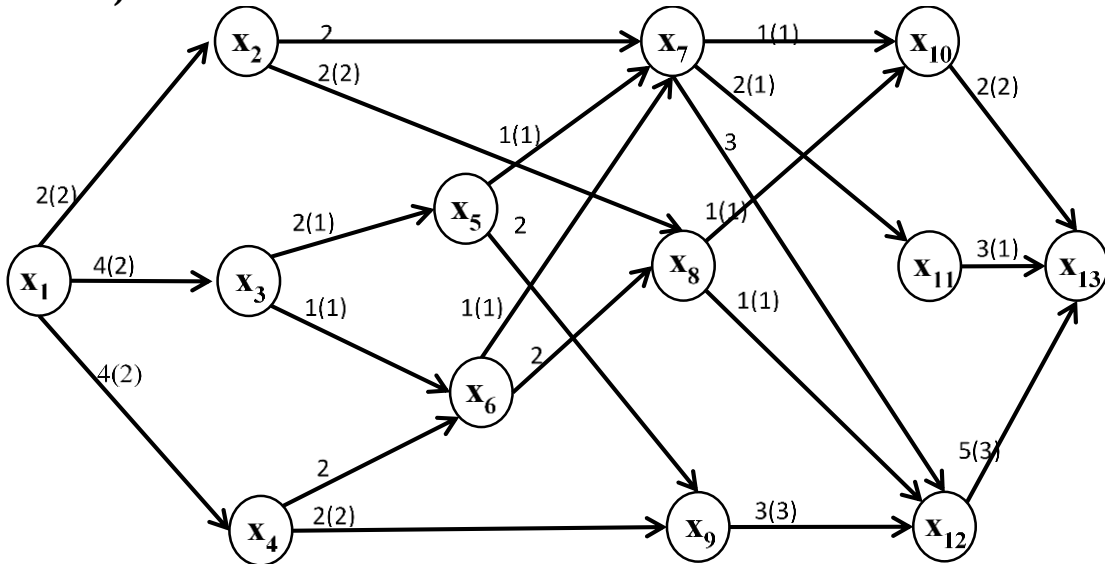
15)



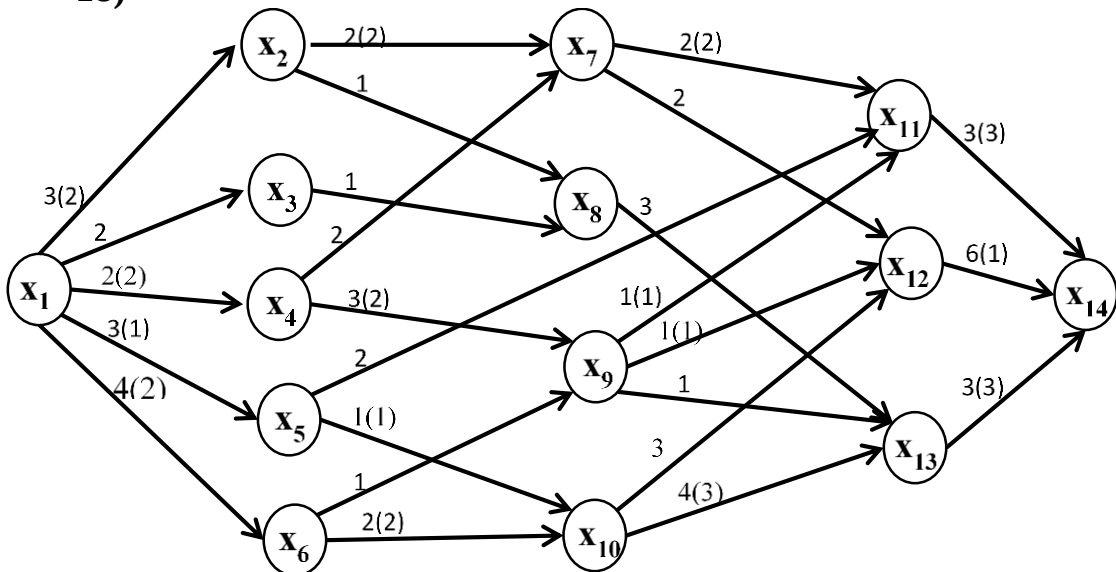
16)



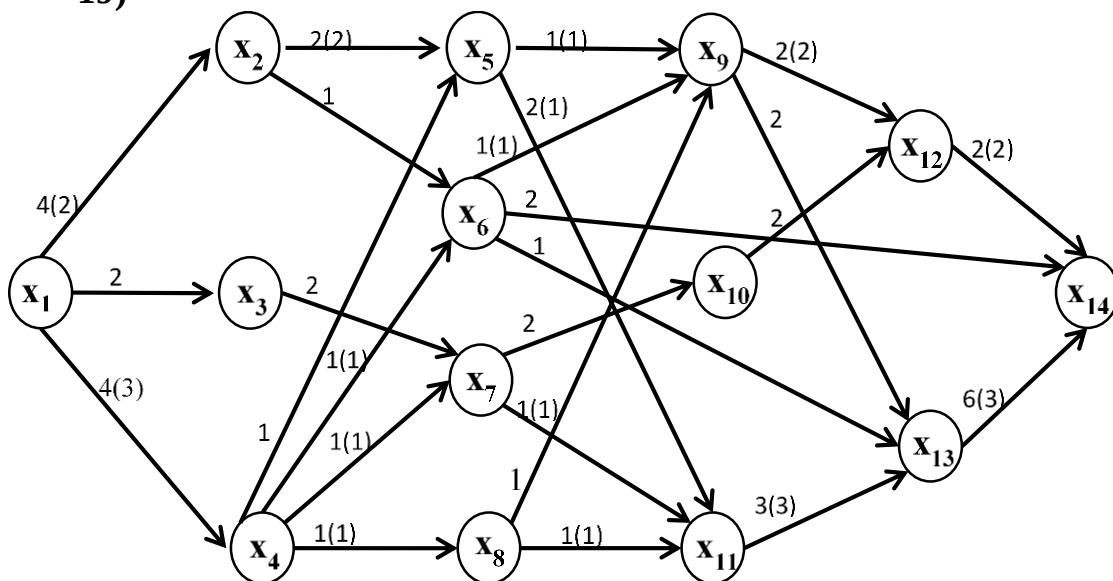
17)



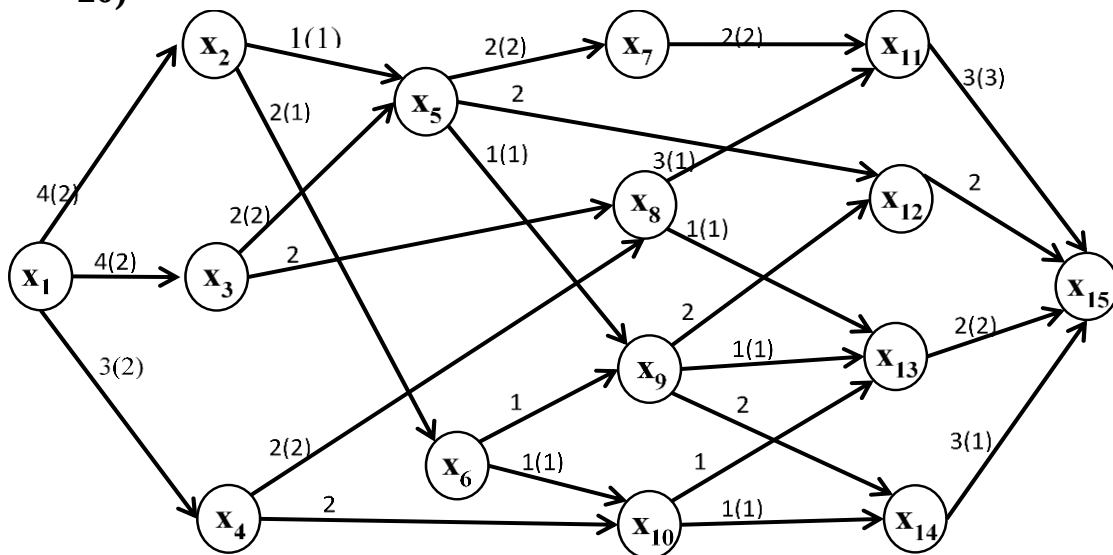
18)



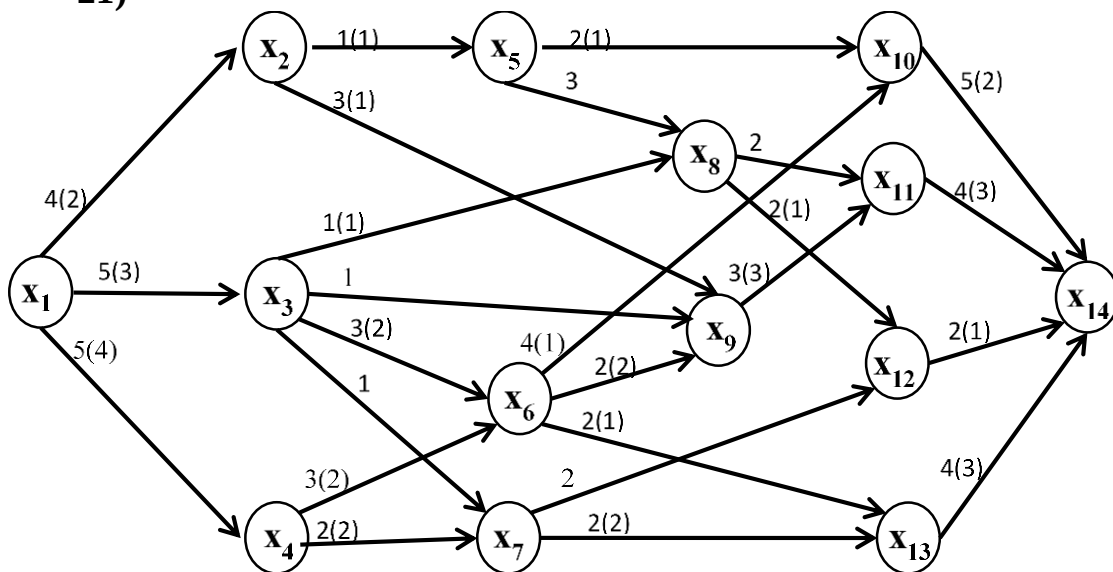
19)



20)

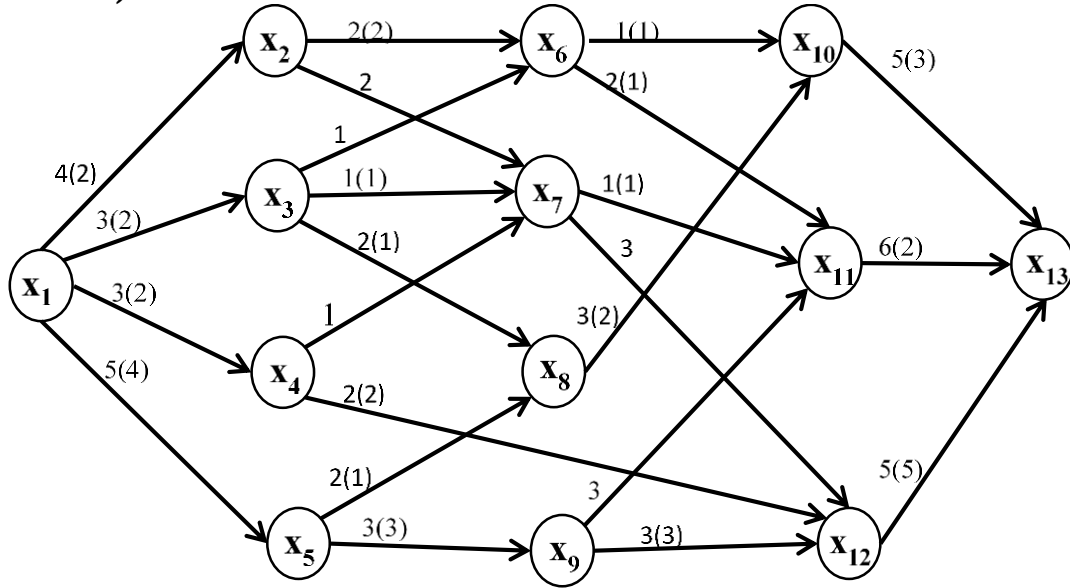


21)

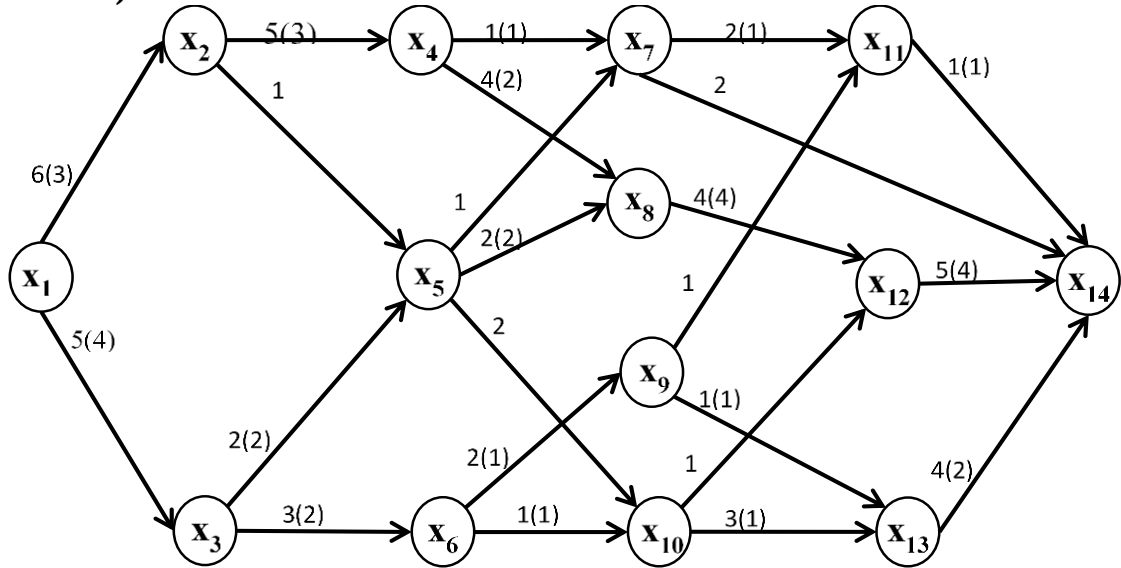




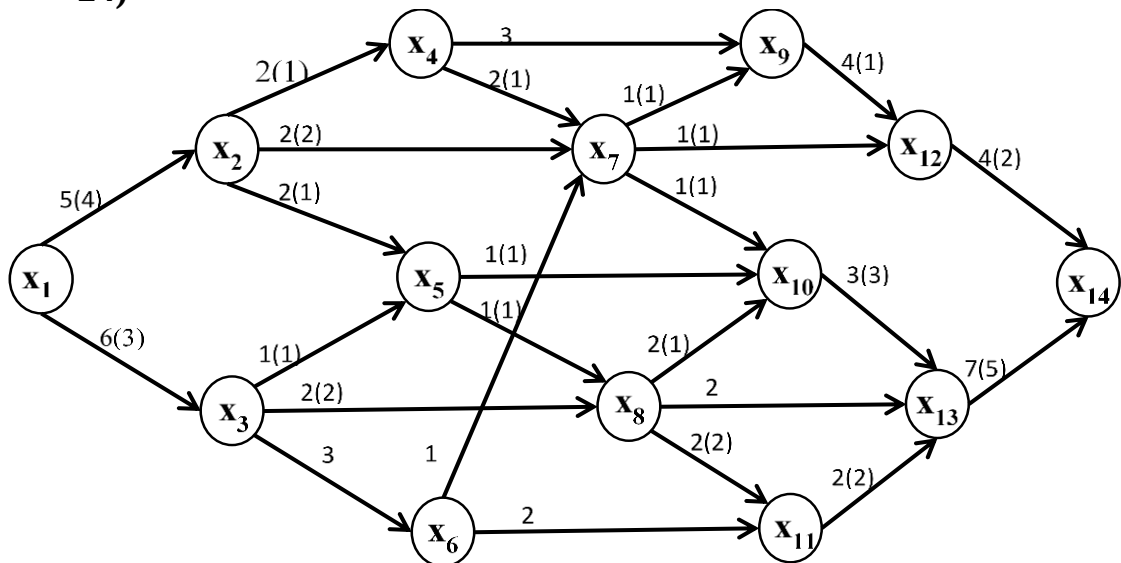
22)



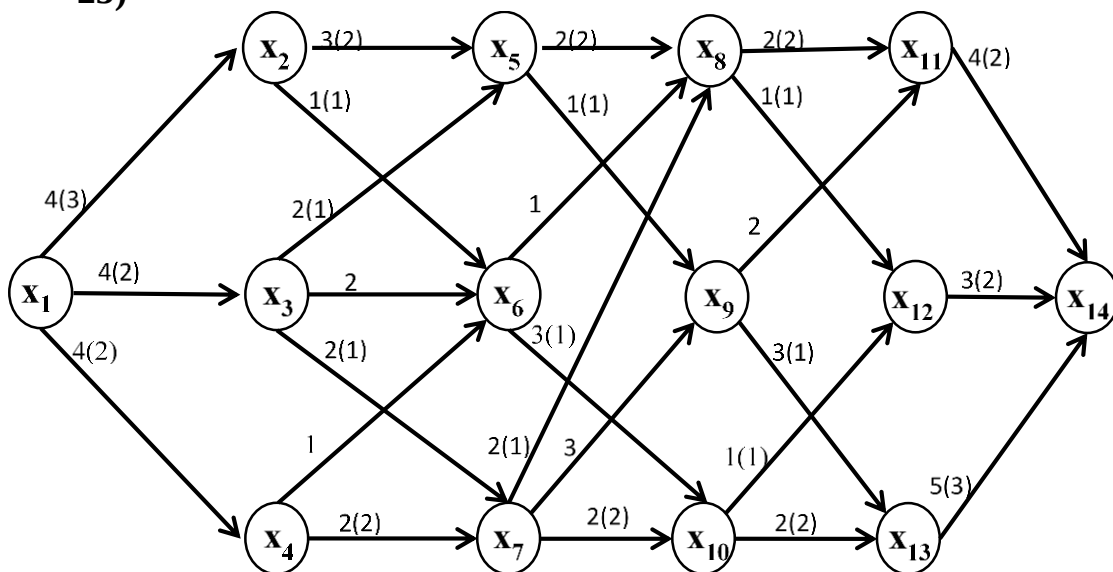
23)



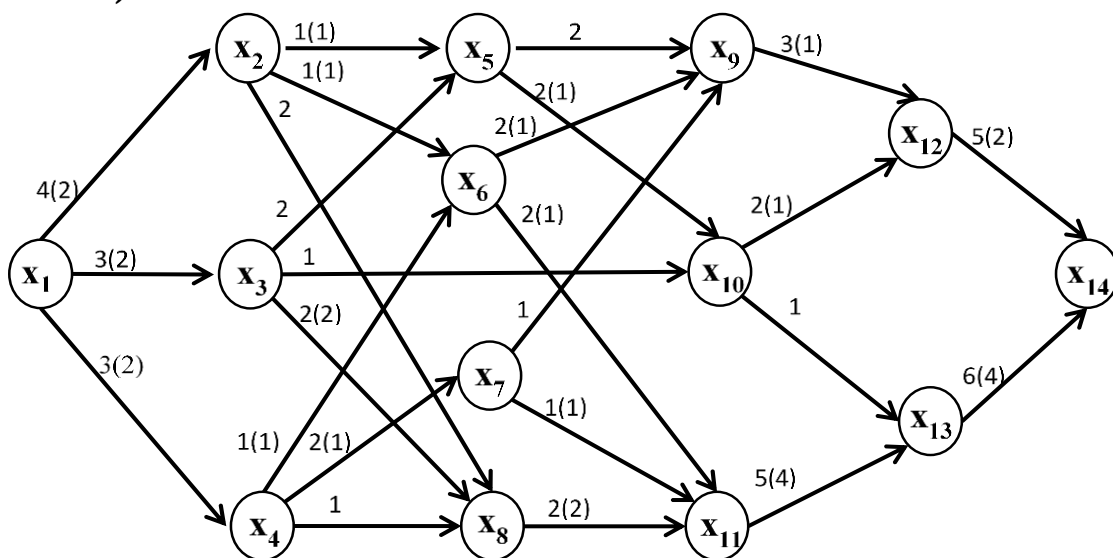
24)



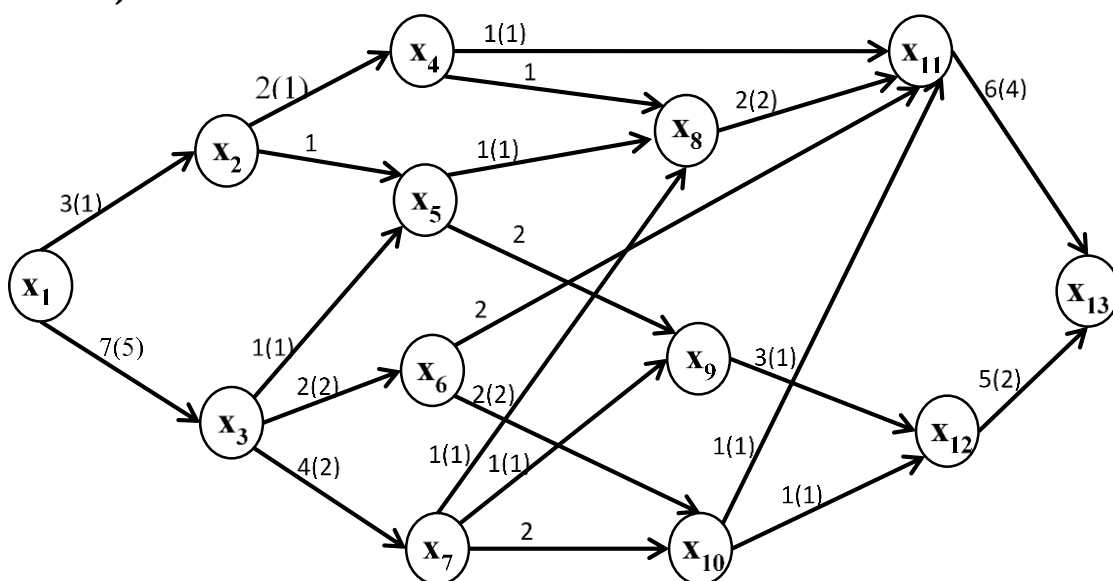
25)



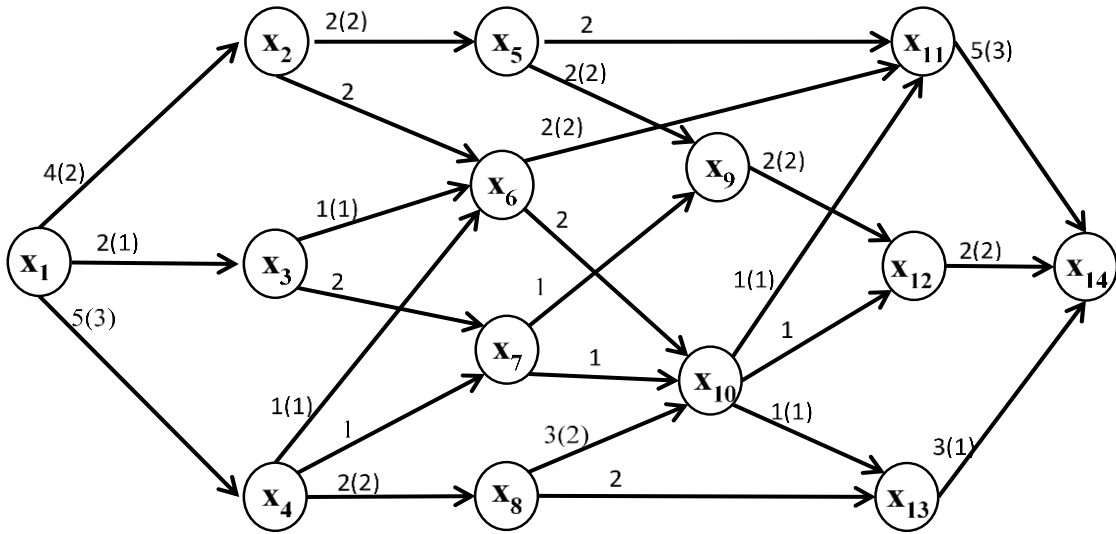
26)



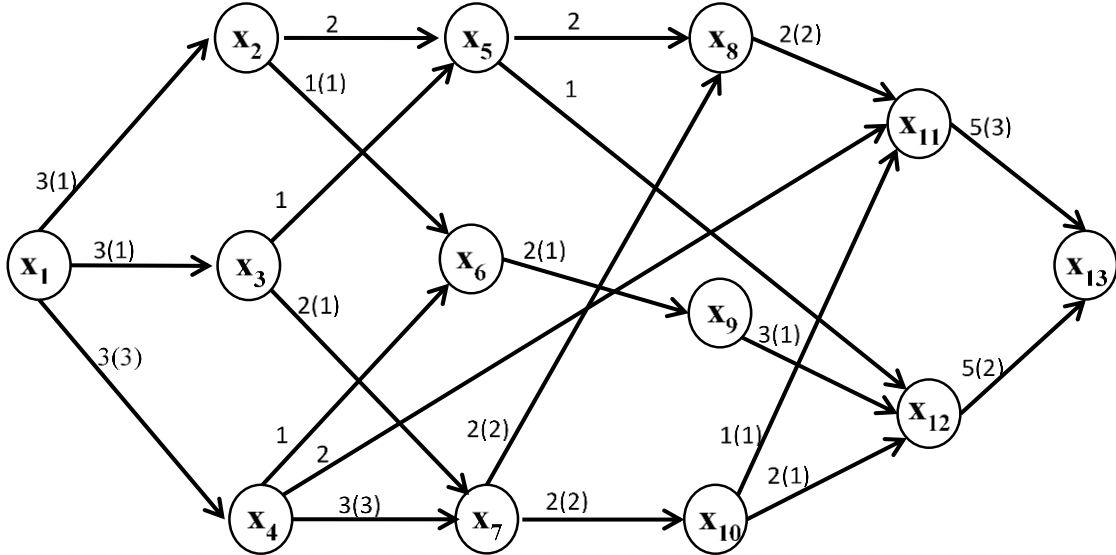
27)



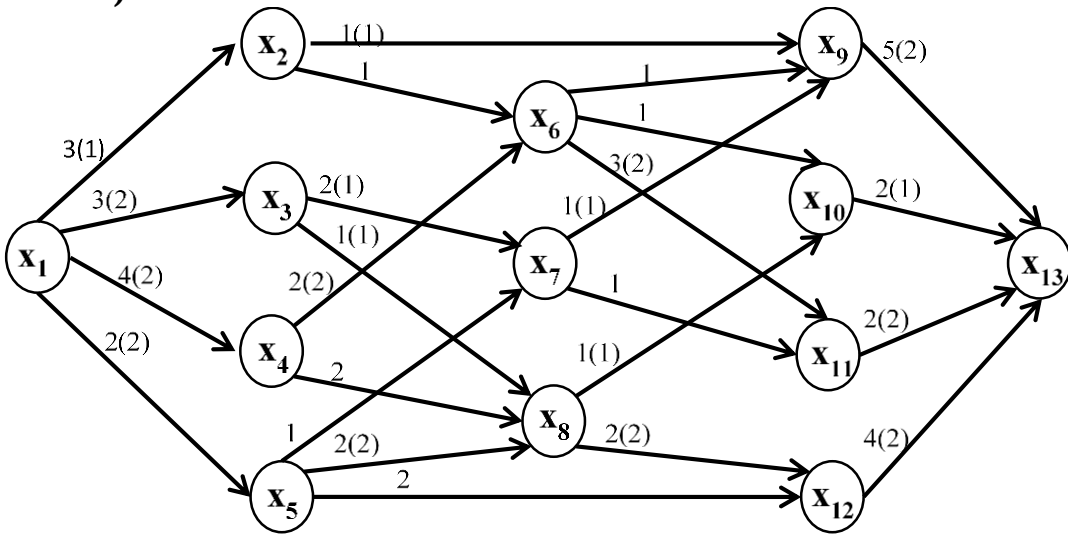
28)



29)



30)



## **6. Контрольные вопросы**

1. Понятие ориентированного графа.
2. Понятие неориентированного графа
3. Понятие пути в графе. Кратчайший путь.
4. Волновой алгоритм построения кратчайшего пути в невзвешенном графе.
5. Волновой алгоритм построения кратчайшего пути для взвешенного графа.
6. Понятие пути в графе. Длиннейший путь.
7. Понятие компонент связности. Компоненты связности в неориентированном графе.
8. Понятие компонент связности. Компоненты связности в ориентированном графе.
9. Понятие цикла в графе. Система независимых циклов.
10. Остов графа. Построение произвольного остова.
11. Остов графа. Построение минимального остова.
12. Задача раскраски графа. Цикломатическое число.
13. Задача кратчайшей раскраски графа.
14. Понятие внутренне устойчивого множества. Алгоритм построения внутренне устойчивого множества.
15. Понятие внешне устойчивого множества. Алгоритм построения внешне устойчивого множества.
16. Гамильтонов контур. Основная идея построения гамильтонова контура.
17. Потоки в сетях. Алгоритм построения полного потока.
18. Потоки в сетях. Задача о максимальном потоке.
19. Потоки в сетях. Задача о минимальном потоке.
20. Планарные графы. Основные свойства планарных графов.
21. Планарные графы. Задача о четырёх красках.
22. Планарные графы. Алгоритм выявления непланарности.
23. Планарные графы. Примеры построения плоских изображений графов.

## Библиографический список

1. Новоселов В.Г. Прикладная математика для системотехников. Дискретная математика в задачах и примерах. /Учебное пособие/ В.Г. Новоселов, А.В. Скатков– Киев: УМК ВО, 1992. – 200с.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов/ Ф.А. Новиков. – СПб.:Питер, 2009. – 384 с.
3. Оре О. Теория графов / О. Оре.– СПб.:Леброкком, 2009. – 354 с.
4. Оре О. Графы и их применение/ О. Оре.– М.: Ленанд, 2015. – 208 с.
5. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари – М.: Ленанд, 2015 – 304 с.
6. Ловас Л. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике и химии. /Л. Ловас, М. Пламмер – М.: Мир, 1998, 343 с.
7. Дистель Р. Теория графов Пер. с англ. - Новосибирск: Издательство института математики, 2002. - 336 с. ISBN 5-86134-101-X.
8. Diestel R. Graph Theory, Electronic Edition. — NY: Springer-Verlag, 2005. — С. 422.
9. Кормен Т.Х. Часть VI. Алгоритмы для работы с графами // Алгоритмы: построение и анализ = IntroductiontoAlgorithms. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2006. — С. 1296. — ISBN 0-07-013151-1.

**Приложение А. Пример оформления титульного листа.**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Севастопольский государственный университет»**

Кафедра информационных технологий  
и компьютерных систем

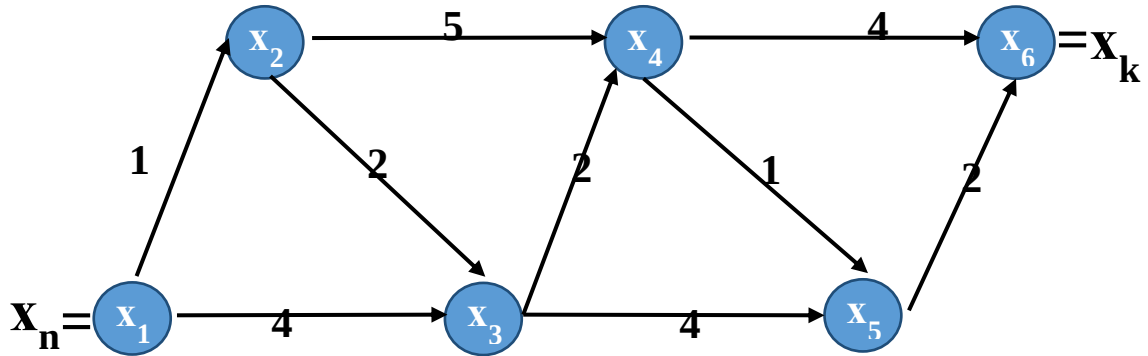
**Отчет**  
о выполнении расчетно-графического задания № 2  
**«Теория графов»**  
по дисциплине  
**«Дискретная математика»**

Выполнил:  
ст. гр. М11д Иванов И.И.

Проверил:  
доц. каф. ИТиКС Ченгарь О.В.

Севастополь  
2016

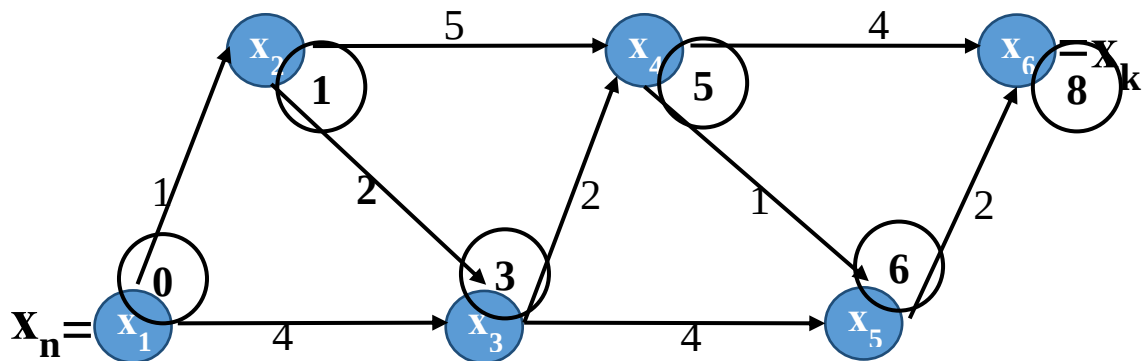
**Приложение Б. Пример поиска кратчайшего пути в орграфе  
волновым алгоритмом.**



Прямой ход решения оформляется в виде следующей таблицы:

| $x_1$ | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    | M            |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------|
| 0     | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | <u>1</u>     |
| 0     | 1        | 4        | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | <u>2</u> , 3 |
| 0     | 1        | 3        | 6        | $\infty$ | $\infty$ | <u>3</u> , 4 |
| 0     | 1        | 3        | 5        | 7        | $\infty$ | <u>4</u> , 5 |
| 0     | 1        | 3        | 5        | 6        | 9        | <u>5</u> , 6 |
| 0     | 1        | 3        | 5        | 6        | 8        | <u>6</u>     |
| 0     | 1        | 3        | 5        | 6        | 8        | $\emptyset$  |

Исходный граф с уже полученными весами вершин, полученными в результате прямого хода алгоритма:



Обратный ход решения:

- $x_6$ :  $G^{-1}(x_6) = \{x_4, x_5\}$ ;  
дуга  $(x_4, x_6)$ :  $(l_{4,6} = 4) \neq (V_6 - V_4 = 3)$ – не выделяется;  
дуга  $(x_5, x_6)$ :  $(l_{5,6} = 2) = (V_6 - V_5 = 2)$ – выделяется;  
вершина  $x_5$  выделяется.
- $x_5$ :  $G^{-1}(x_5) = \{x_3, x_4\}$ ;  
дуга  $(x_3, x_5)$ :  $(l_{3,5} = 4) \neq (V_5 - V_3 = 3)$ – не выделяется;  
дуга  $(x_4, x_5)$ :  $(l_{4,5} = 1) = (V_5 - V_4 = 1)$ – выделяется;  
вершина  $x_4$  выделяется.
- $x_4$ :  $G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3\}$ ;  
дуга  $(x_2, x_4)$ :  $(l_{2,4} = 5) \neq (V_4 - V_2 = 4)$ – не выделяется;  
дуга  $(x_3, x_4)$ :  $(l_{3,4} = 2) = (V_4 - V_3 = 2)$ – выделяется;  
вершина  $x_3$  выделяется.
- $x_3$ :  $G^{-1}(x_3) = \{x_1, x_2\}$ ;  
дуга  $(x_1, x_3)$ :  $(l_{1,3} = 4) \neq (V_3 - V_1 = 3)$ – не выделяется;  
дуга  $(x_2, x_3)$ :  $(l_{2,3} = 2) = (V_3 - V_2 = 2)$ – выделяется;  
вершина  $x_2$  выделяется.
- $x_2$ :  $G^{-1}(x_2) = \{x_1\}$ ;  
дуга  $(x_1, x_2)$ :  $(l_{1,2} = 1) = (V_2 - V_1 = 1)$ – выделяется;  
вершина  $x_1 = x_k$

Построен кратчайший путь  $(x_n, x_k)$  длиной 8:

$(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6)$



## Приложение В. Пример поиска гамильтонова контура минимальной длины.

Для заданного графа построить гамильтонов контур минимальной длины:

|       | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $\infty$ | 20       | 28       | 12       | 39       | 32       |
| $x_2$ | 21       | $\infty$ | 15       | 9        | 17       | 27       |
| $x_3$ | 30       | 25       | $\infty$ | 45       | 29       | 47       |
| $x_4$ | 7        | 52       | 40       | $\infty$ | 15       | 1        |
| $x_5$ | 60       | 46       | 11       | 5        | $\infty$ | 34       |
| $x_6$ | 11       | 45       | 14       | 21       | 30       | $\infty$ |

Выполним приведение матрицы по строкам:

|       | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    | $l(x_i)$ |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $\infty$ | 20       | 28       | 12       | 39       | 32       | 12       |
| $x_2$ | 21       | $\infty$ | 15       | 9        | 17       | 27       | 9        |
| $x_3$ | 30       | 25       | $\infty$ | 45       | 29       | 47       | 25       |
| $x_4$ | 7        | 52       | 40       | $\infty$ | 15       | 1        | 1        |
| $x_5$ | 60       | 46       | 11       | 5        | $\infty$ | 34       | 5        |
| $x_6$ | 11       | 45       | 14       | 21       | 30       | $\infty$ | 11       |
|       |          |          |          |          |          |          | /63      |

В результате получена матрица:

|       | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $\infty$ | 8        | 16       | 0        | 27       | 20       |
| $x_2$ | 12       | $\infty$ | 6        | 0        | 8        | 18       |
| $x_3$ | 5        | 0        | $\infty$ | 20       | 4        | 22       |
| $x_4$ | 6        | 51       | 39       | $\infty$ | 14       | 0        |
| $x_5$ | 55       | 41       | 6        | 0        | $\infty$ | 29       |
| $x_6$ | 0        | 34       | 3        | 10       | 19       | $\infty$ |

Выполним приведение матрицы по столбцам:

|          | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    |    |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----|
| $x_1$    | $\infty$ | 8        | 16       | 0        | 27       | 20       |    |
| $x_2$    | 12       | $\infty$ | 6        | 0        | 8        | 18       |    |
| $x_3$    | 5        | 0        | $\infty$ | 20       | 4        | 22       |    |
| $x_4$    | 6        | 51       | 39       | $\infty$ | 14       | 0        |    |
| $x_5$    | 55       | 41       | 6        | 0        | $\infty$ | 29       |    |
| $x_6$    | 0        | 34       | 3        | 10       | 19       | $\infty$ |    |
| $l(x_j)$ | 0        | 0        | 3        | 0        | 4        | 0        | /7 |

В результате получена полностью приведенная матрица:

|       | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $\infty$ | 8        | 13       | 0        | 23       | 20       |
| $x_2$ | 12       | $\infty$ | 3        | 0        | 4        | 18       |
| $x_3$ | 5        | 0        | $\infty$ | 20       | 0        | 22       |
| $x_4$ | 6        | 51       | 36       | $\infty$ | 10       | 0        |
| $x_5$ | 55       | 41       | 3        | 0        | $\infty$ | 29       |
| $x_6$ | 0        | 34       | 0        | 10       | 15       | $\infty$ |

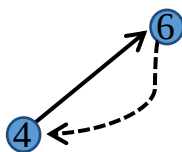
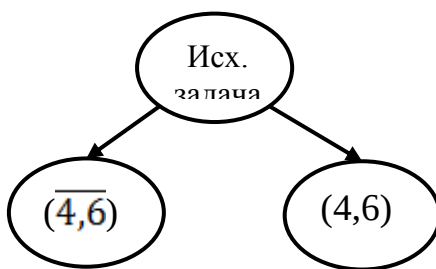
$$\xi = \xi_{\text{вых}} + \xi_{\text{вх}} = 63 + 7 = 70,$$

Выполняем оценку для нулевых элементов полностью приведенной матрицы:

|       | $x_1$          | $x_2$          | $x_3$          | $x_4$          | $x_5$          | $x_6$           |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| $x_1$ | $\infty$       | 8              | 13             | 0 <sub>8</sub> | 23             | 20              |
| $x_2$ | 12             | $\infty$       | 3              | 0 <sub>3</sub> | 4              | 18              |
| $x_3$ | 5              | 0 <sub>8</sub> | $\infty$       | 20             | 0 <sub>4</sub> | 22              |
| $x_4$ | 6              | 51             | 36             | $\infty$       | 10             | 0 <sub>24</sub> |
| $x_5$ | 55             | 41             | 3              | 0 <sub>3</sub> | $\infty$       | 29              |
| $x_6$ | 0 <sub>5</sub> | 34             | 0 <sub>3</sub> | 10             | 15             | $\infty$        |

$$\begin{aligned}\theta(x_1, x_4) &= l(x_1, x_2) + l(x_2, x_4) = 8 + 0 = 8, \\ \theta(x_2, x_4) &= l(x_2, x_3) + l(x_3, x_4) = 3 + 0 = 3, \\ \theta(x_3, x_2) &= l(x_3, x_5) + l(x_5, x_2) = 0 + 8 = 8, \\ \theta(x_3, x_5) &= l(x_3, x_2) + l(x_2, x_5) = 0 + 4 = 4, \\ \theta(x_4, x_6) &= l(x_4, x_1) + l(x_1, x_6) = 6 + 18 = 24, \\ \theta(x_5, x_4) &= l(x_5, x_3) + l(x_3, x_4) = 3 + 0 = 3, \\ \theta(x_6, x_1) &= l(x_6, x_3) + l(x_3, x_1) = 0 + 5 = 5, \\ \theta(x_6, x_3) &= l(x_6, x_1) + l(x_1, x_3) = 0 + 3 = 3,\end{aligned}$$

Наибольшую оценку получил элемент, находящийся на пересечении 4 строки и 6 столбца. Поэтому ветвление можно вести по дуге  $(x_4, x_6)$ , все множество гамильтоновых контуров разбивается на подмножества  $\{(4,6)\}$  и  $\{(\overline{4},6)\}$ .



Рассмотрим подмножество  $\{(4,6)\}$ . Включая дугу  $(4,6)$  в контур, следует запретить входение дуги  $(6,4)$ .

Вычеркиваем 4 строку, 6 столбец и запрещаем переход  $(6,4)$ . В результате получится матрица:

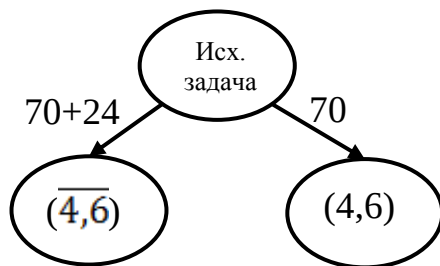
| (4,6) | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $\infty$ | 8        | 13       | 0        | 23       |
| $x_2$ | 12       | $\infty$ | 3        | 0        | 4        |
| $x_3$ | 5        | 0        | $\infty$ | 20       | 0        |
| $x_5$ | 55       | 41       | 3        | 0        | $\infty$ |
| $x_6$ | 0        | 34       | 0        | $\infty$ | 15       |

Так как в каждой строке и каждом столбце вновь полученной матрицы есть нулевой элемент, то  $\xi = 0$

Невключение дуги (4,6) во множество гамильтоновых контуров приводит к матрице:

| $\overline{(4,6)}$ | $x_1$          | $x_2$          | $x_3$          | $x_4$          | $x_5$          | $x_6$    |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| $x_1$              | $\infty$       | 8              | 13             | 0 <sub>8</sub> | 23             | 20       |
| $x_2$              | 12             | $\infty$       | 3              | 0 <sub>3</sub> | 4              | 18       |
| $x_3$              | 5              | 0 <sub>8</sub> | $\infty$       | 20             | 0 <sub>4</sub> | 22       |
| $x_4$              | 6              | 51             | 36             | $\infty$       | 10             | $\infty$ |
| $x_5$              | 55             | 41             | 3              | 0 <sub>3</sub> | $\infty$       | 29       |
| $x_6$              | 0 <sub>5</sub> | 34             | 0 <sub>3</sub> | 10             | 15             | $\infty$ |

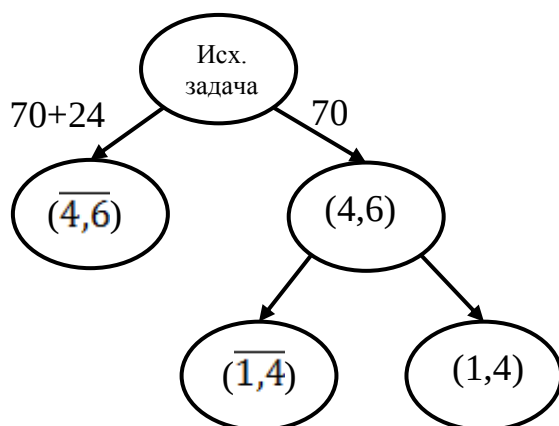
Полученную таким образом матрицу можно привести по 4 строке и 6 столбцу, в результате чего оценка увеличится на  $\xi = 6 + 18 = 24$  и станет равной 94. На рис. приведено дерево решений с оценками вершин на данном этапе:



Так как  $70 < 94$ , то рассматриваем множество контуров, включающих дугу (4,6). Выполняем оценку нулевых элементов матрицы:

| (4,6) | $x_1$          | $x_2$          | $x_3$          | $x_4$          | $x_5$          |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_1$ | $\infty$       | 8              | 13             | 0 <sub>8</sub> | 23             |
| $x_2$ | 12             | $\infty$       | 3              | 0 <sub>3</sub> | 4              |
| $x_3$ | 5              | 0 <sub>8</sub> | $\infty$       | 20             | 0 <sub>4</sub> |
| $x_5$ | 55             | 41             | 3              | 0 <sub>3</sub> | $\infty$       |
| $x_6$ | 0 <sub>5</sub> | 34             | 0 <sub>3</sub> | $\infty$       | 15             |

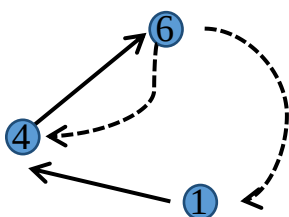
Наибольшую оценку, равную 8, имеют два элемента, поэтому выбираем любой из них, например, (1,4). На рис. приведено дерево решений на данном этапе:



Невключение дуги (1,4) приведет к увеличению оценки на  $\xi = 8$

| $(\overline{1,4})$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |   |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| $x_1$              | $\infty$ | 8        | 13       | $\infty$ | 23       | 8 |
| $x_2$              | 12       | $\infty$ | 3        | 0        | 4        |   |
| $x_3$              | 5        | 0        | $\infty$ | 20       | 0        |   |
| $x_5$              | 55       | 41       | 3        | 0        | $\infty$ |   |
| $x_6$              | 0        | 34       | 0        | $\infty$ | 15       |   |

| $(\overline{1,4})$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$              | $\infty$ | 0        | 5        | $\infty$ | 15       |
| $x_2$              | 12       | $\infty$ | 3        | 0        | 4        |
| $x_3$              | 5        | 0        | $\infty$ | 20       | 0        |
| $x_5$              | 55       | 41       | 3        | 0        | $\infty$ |
| $x_6$              | 0        | 34       | 0        | $\infty$ | 15       |



Включение дуги (1,4) потребует запретить переход по дуге (6,1). Соответствующая матрица после вычеркивания 1 строки, 4 столбца и замены элемента (6,1) на  $\infty$ .

| $(1,4)$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_5$    |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$   | 12       | $\infty$ | 3        | 4        |
| $x_3$   | 5        | 0        | $\infty$ | 0        |
| $x_5$   | 55       | 41       | 3        | $\infty$ |
| $x_6$   | $\infty$ | 34       | 0        | 15       |

Эту матрицу следует привести по строкам и столбцам:

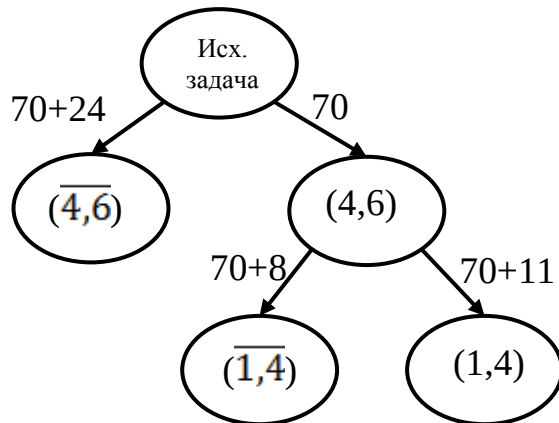
| $(1,4)$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_5$    |    |
|---------|----------|----------|----------|----------|----|
| $x_2$   | 12       | $\infty$ | 3        | 4        | 3  |
| $x_3$   | 5        | 0        | $\infty$ | 0        | 0  |
| $x_5$   | 55       | 41       | 3        | $\infty$ | 3  |
| $x_6$   | $\infty$ | 34       | 0        | 15       | 0  |
|         |          |          |          |          | /6 |

| $(1,4)$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_5$    |    |
|---------|----------|----------|----------|----------|----|
| $x_2$   | 9        | $\infty$ | 0        | 1        |    |
| $x_3$   | 5        | 0        | $\infty$ | 0        |    |
| $x_5$   | 52       | 38       | 0        | $\infty$ |    |
| $x_6$   | $\infty$ | 34       | 0        | 15       |    |
|         | 5        | 0        | 0        | 0        | /5 |

|       |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| (1,4) | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_5$    |
| $x_2$ | 4        | $\infty$ | 0        | 1        |
| $x_3$ | 0        | 0        | $\infty$ | 0        |
| $x_5$ | 47       | 38       | 0        | $\infty$ |
| $x_6$ | $\infty$ | 34       | 0        | 15       |

$$\xi = 6 + 5 = 11.$$

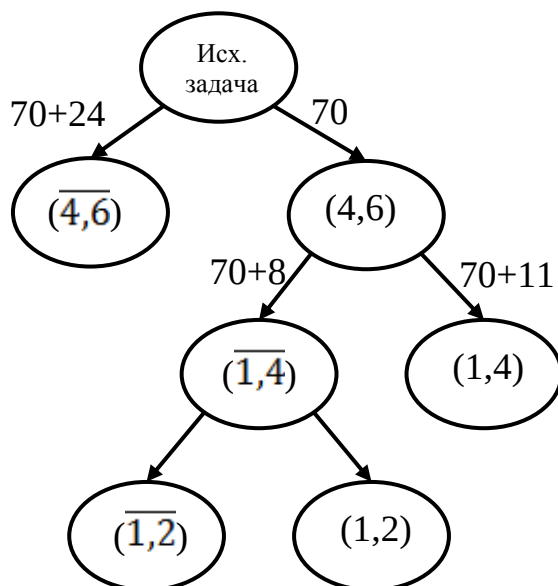
В результате получаем дерево решений:



Так как  $78 < 81$ , следует использовать вариант не включения дуги (1,4). Это означает возврат к матрице, для которой выполняем оценку нулевых элементов:

|       |                |                |                |                |                |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| (1,4) | $x_1$          | $x_2$          | $x_3$          | $x_4$          | $x_5$          |
| $x_1$ | $\infty$       | 0 <sub>5</sub> | 5              | $\infty$       | 15             |
| $x_2$ | 12             | $\infty$       | 3              | 0 <sub>3</sub> | 4              |
| $x_3$ | 5              | 0 <sub>0</sub> | $\infty$       | 20             | 0 <sub>4</sub> |
| $x_5$ | 55             | 41             | 3              | 0 <sub>3</sub> | $\infty$       |
| $x_6$ | 0 <sub>5</sub> | 34             | 0 <sub>3</sub> | $\infty$       | 15             |

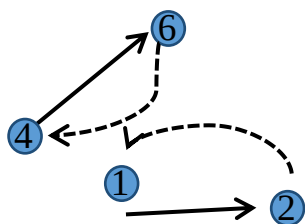
Наибольшую оценку получил элемент, расположенный в 1 строке и 2 столбце. Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид:



Невключение дуги (1,2) приведет к увеличению оценки на  $\xi = 5$ :

| $(\overline{1,2})$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |   |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| $x_1$              | $\infty$ | $\infty$ | 5        | $\infty$ | 15       | 5 |
| $x_2$              | 12       | $\infty$ | 3        | $0_3$    | 4        |   |
| $x_3$              | 5        | $0_0$    | $\infty$ | 20       | $0_4$    |   |
| $x_5$              | 55       | 41       | 3        | $0_3$    | $\infty$ |   |
| $x_6$              | $0_5$    | 34       | $0_3$    | $\infty$ | 15       |   |

| $(\overline{1,2})$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$              | $\infty$ | $\infty$ | 0        | $\infty$ | 10       |
| $x_2$              | 12       | $\infty$ | 3        | $0_3$    | 4        |
| $x_3$              | 5        | $0_0$    | $\infty$ | 20       | $0_4$    |
| $x_5$              | 55       | 41       | 3        | $0_3$    | $\infty$ |
| $x_6$              | $0_5$    | 34       | $0_3$    | $\infty$ | 15       |

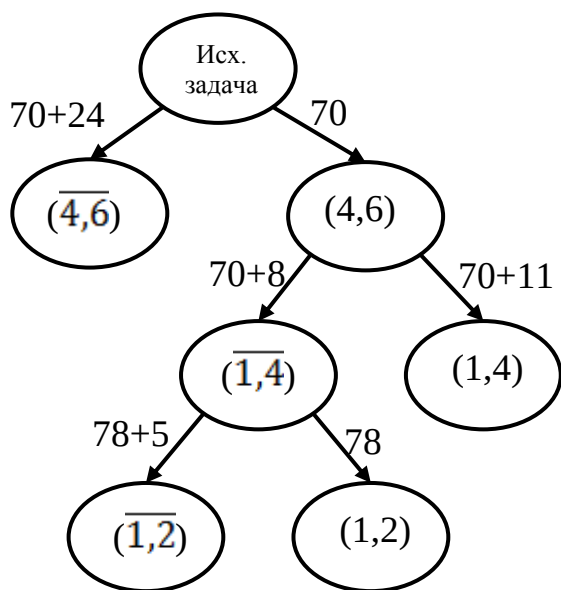


Включение дуги  $(1,2)$  потребует запретить переход по дуге  $(2,1)$ :

Соответствующая матрица после вычеркивания 1 строки, 2 столбца и замены элемента  $(2,1)$  на  $\infty$ :

| $(\overline{1,2})$ | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$              | $\infty$ | 3        | 0        | 4        |
| $x_3$              | 5        | $\infty$ | 20       | 0        |
| $x_5$              | 55       | 3        | 0        | $\infty$ |
| $x_6$              | 0        | 0        | $\infty$ | 15       |

Эта матрица приведена по строкам и столбцам. В результате получаем дерево решений:

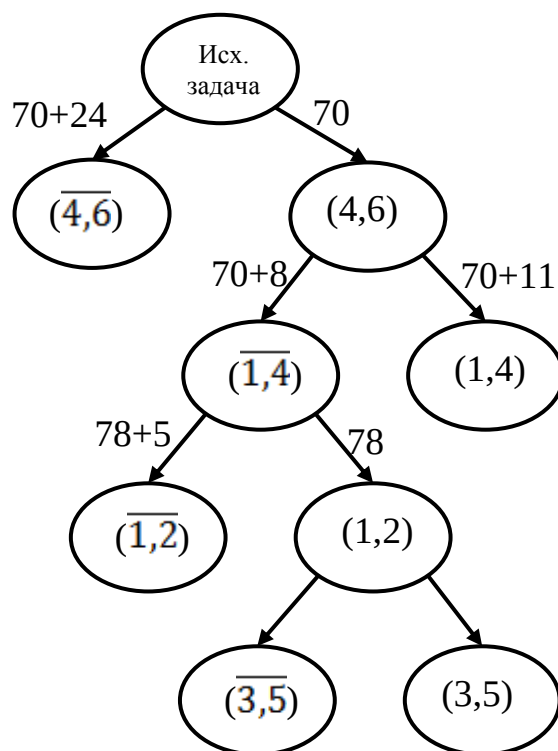


Таккак  $78 < 83$ , продолжаем решение задачи по ветке, включающей дугу  $(1,2)$ :

Выполняем оценку нулевых элементов матрицы:

| $(\overline{1,2})$ | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$              | $\infty$ | 3        | $0_3$    | 4        |
| $x_3$              | 5        | $\infty$ | 20       | $0_9$    |
| $x_5$              | 55       | 3        | $0_3$    | $\infty$ |
| $x_6$              | $0_5$    | $0_3$    | $\infty$ | 15       |

Наибольшую оценку получил элемент, расположенный в 3 строке и 5 столбце. Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид:



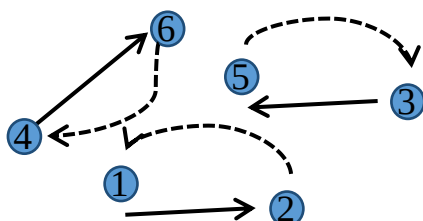
Невключение дуги (3,5) приведет к увеличению оценки  $\xi = 9$ :

| $(\overline{3,5})$ | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----|
| $x_2$              | $\infty$ | 3        | 0        | 4        | 0  |
| $x_3$              | 5        | $\infty$ | 20       | $\infty$ | 5  |
| $x_5$              | 55       | 3        | 0        | $\infty$ | 0  |
| $x_6$              | 0        | 0        | $\infty$ | 15       | 0  |
|                    |          |          |          |          | /5 |

| $(\overline{3,5})$ | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----|
| $x_2$              | $\infty$ | 3        | 0        | 4        |    |
| $x_3$              | 0        | $\infty$ | 15       | $\infty$ |    |
| $x_5$              | 55       | 3        | 0        | $\infty$ |    |
| $x_6$              | 0        | 0        | $\infty$ | 15       |    |
|                    | 0        | 0        | 0        | 4        | /4 |

| $(\overline{3,5})$ | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$              | $\infty$ | 3        | 0        | 0        |
| $x_3$              | 0        | $\infty$ | 15       | $\infty$ |
| $x_5$              | 55       | 3        | 0        | $\infty$ |
| $x_6$              | 0        | 0        | $\infty$ | 11       |

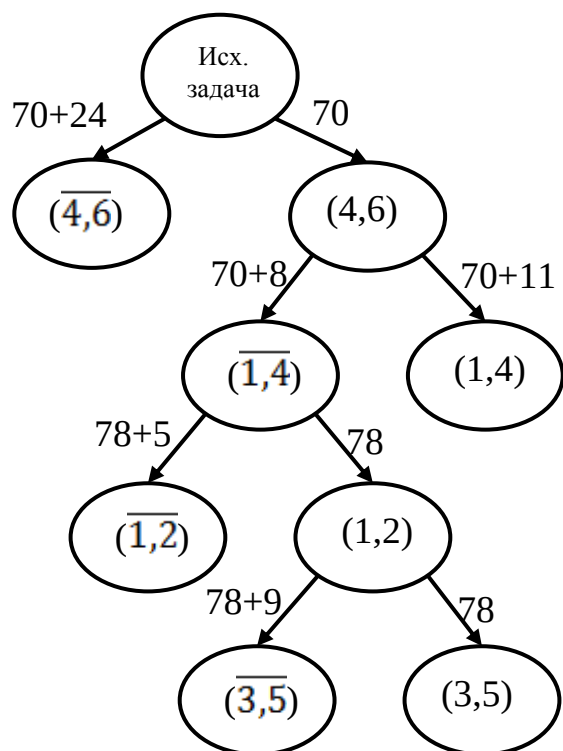
Включение дуги (3,5) потребует запретить переход по дуге (5,3):



Соответствующая матрица после вычеркивания 3 строки, 5 столбца и замены элемента (5,3) на  $\infty$ :

|       |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|
| (3,5) | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    |
| $x_2$ | $\infty$ | 3        | 0        |
| $x_5$ | 55       | $\infty$ | 0        |
| $x_6$ | 0        | 0        | $\infty$ |

Эта матрица приведена по строкам и столбцам. В результате получаем дерево решений:



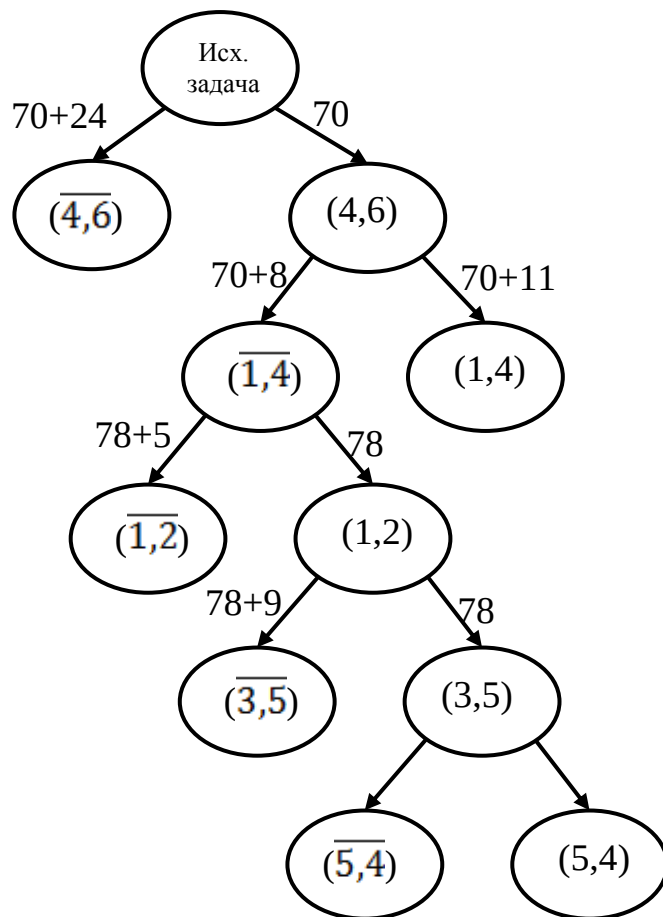
Таккак  $78 < 87$ , продолжаем решение задачи по ветке, включающей дугу (3,5).

Выполняем оценку нулевых элементов матрицы:

|       |                 |                |                 |
|-------|-----------------|----------------|-----------------|
| (3,5) | $x_1$           | $x_3$          | $x_4$           |
| $x_2$ | $\infty$        | 3              | 0 <sub>3</sub>  |
| $x_5$ | 55              | $\infty$       | 0 <sub>55</sub> |
| $x_6$ | 0 <sub>55</sub> | 0 <sub>3</sub> | $\infty$        |

Наибольшую оценку получили два элемента (5 строка, 4 столбец и 6 строка, 1 столбец). Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид:



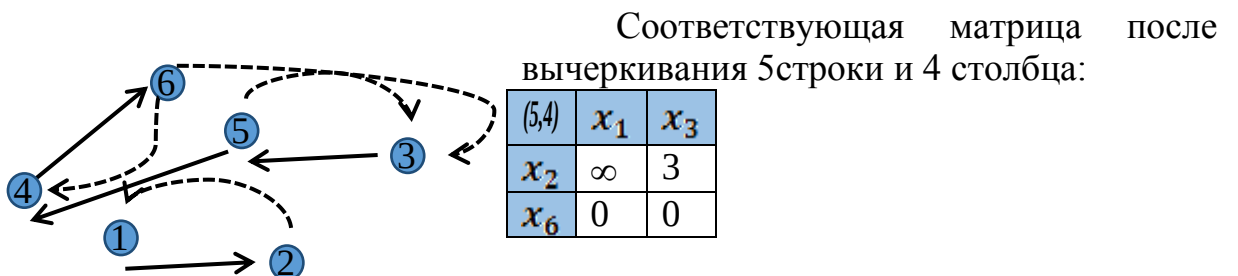


Невключение дуги (5,4) приведет к увеличению оценки  $\xi = 55$ :

| (5,4) | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    |
|-------|----------|----------|----------|
| $x_2$ | $\infty$ | 3        | 0        |
| $x_5$ | 55       | $\infty$ | $\infty$ |
| $x_6$ | 0        | 0        | $\infty$ |

| (5,4) | $x_1$    | $x_3$    | $x_4$    |
|-------|----------|----------|----------|
| $x_2$ | $\infty$ | 3        | 0        |
| $x_5$ | 0        | $\infty$ | $\infty$ |
| $x_6$ | 0        | 0        | $\infty$ |

Включение дуги (5,4) потребует запретить переход по дуге (6,5):



Соответствующая матрица после вычеркивания 5 строки и 4 столбца:

| (5,4) | $x_1$    | $x_3$ |
|-------|----------|-------|
| $x_2$ | $\infty$ | 3     |
| $x_6$ | 0        | 0     |

Так как 5 столбца в матрице уже нет, то и переход по дуге (6, 5) уже невозможен. Зато следует запретить переход по дуге (6,3):

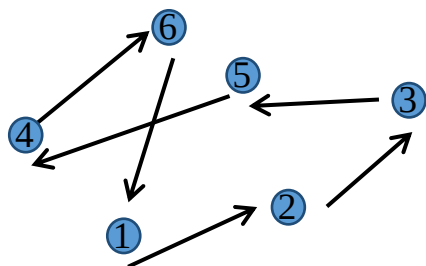
| (5,4) | $x_1$    | $x_3$    |
|-------|----------|----------|
| $x_2$ | $\infty$ | 3        |
| $x_6$ | 0        | $\infty$ |

Приводя полученную квадратную матрицу порядка 2 путем вычитания 3 из первой строки, получаем увеличение оценки на 3:

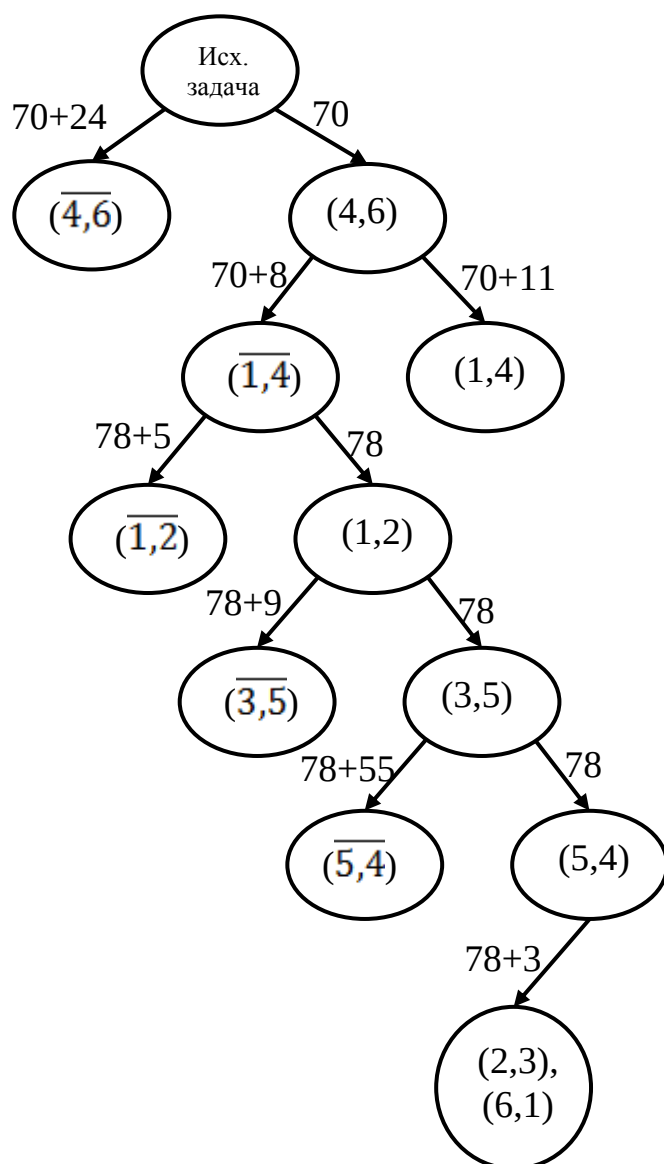
| (5,4) | $x_1$    | $x_3$    |
|-------|----------|----------|
| $x_2$ | $\infty$ | 0        |
| $x_6$ | 0        | $\infty$ |

В последней матрице выбор двух оставшихся дуг производится однозначно – это дуги (6, 1) и (2, 3).

Приведен полученный контур, длина которого равна 81:



Дерево решений:



Анализируя полученное решение, приходим к выводу о том, что оно оптимально, так как оценки всех остальных «оборванных» ветвей дерева не меньше полученного значения.

Заказ № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 \_\_\_\_\_ Тираж \_\_\_\_\_ экз.  
Изд-во СевГУ