

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение
высшего образования
«Севастопольский государственный университет»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения лабораторной работы на тему
«Исследование характеристик технических систем на основе
центрального композиционного планирования эксперимента»
по дисциплине «Теория систем»
для магистров очной и заочной форм обучения
по направлению 09.04.01 —
«Информатика и вычислительная техника»

Севастополь
2016

Методические указания для выполнения лабораторной работы на тему «Исследование характеристик технических систем на основе центрального композиционного планирования эксперимента» по дисциплине «Теория систем» для магистров очной и заочной форм обучения по направлению 09.04.01 — «Информатика и вычислительная техника» / Сост.: И.А. Балакирева, А.В. Скатков — Севастополь: СевГУ, 2016. — 36 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в изучении теории планирования эксперимента в рамках дисциплины «Теория систем» и выполнении выпускной квалификационной работы магистра.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных технологий и компьютерных систем (протокол № 9 от 19 мая 2016 г.)

Рецензент: доцент кафедры информационных технологий и компьютерных систем, к.т.н. Кожаев Е.А.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1.КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ.....	5
2. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ.....	7
2.1. Ортогональный центральный композиционный план.....	7
2.2. Составление матрицы планирования ОЦКП.....	9
2.3. Порядок постановки и проверка воспроизводимости опытов.....	10
2.4. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения.....	11
2.5. Исследование свойств квадратичной регрессионной модели.....	12
2.5.1. Анализ значимости коэффициентов регрессии.....	12
2.5.2. Проверка адекватности модели.....	13
2.6. Контрольные вопросы.....	14
2.7. Пример расчета ОЦКП.....	15
3. РОТОТАБЕЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ.....	17
3.1. Рототабельный центральный композиционный план.....	17
3.2. Составление матрицы планирования эксперимента.....	17
3.3. Порядок проведения эксперимента.....	19
3.4. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения.....	19
3.5. Исследование свойств квадратичной регрессионной модели.....	21
3.5.1. Анализ значимости коэффициентов регрессии.....	21
3.5.2. Проверка адекватности модели.....	22
3.6. Контрольные вопросы.....	23
3.7. Пример расчета РЦКП.....	24
4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ.....	26
5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.....	26
Библиографический список.....	26
Приложение А.....	27
Приложение Б.....	28
Приложение В.....	29
Приложение Г.....	30

ВВЕДЕНИЕ

В зависимости от решаемых экспериментальным путем задач используются различные приемы организации эксперимента и различные методы обработки экспериментальных данных. Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

- планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого – выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;
- планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;
- планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);
- планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;
- планирование при изучении динамических процессов и т.д.

Если цель эксперимента состоит в изучении поведения объекта исследования в определенном факторном пространстве, то построение линейной регрессионной модели является начальным этапом изучения объекта исследования. Этот этап может быть и завершающим, если построенная модель адекватна и цель эксперимента достигнута.

Но в практической деятельности может быть установлено, что линейные эффекты, входящие в регрессионную модель являются незначимыми, или регрессионная модель не адекватна. Такая ситуация может возникнуть из-за значительной нелинейности поверхности отклика. В таких случаях переходят к построению полиномиальной регрессионной модели более высокого порядка.

Если же цель эксперимента состоит в определении оптимального значения поверхности отклика (критерия эффективности), то линейная модель в окрестности оптимума отклика также становится не пригодной для изучения характера изменения критерия эффективности. В этом случае также необходимо переходить к построению полиномиальной модели более высокого порядка. В таких случаях для математического описания применяют полиномы второго порядка, реже – третьего порядка.

Планы 2-го порядка позволяют получить математическое описание в виде полной квадратичной модели, содержащей кроме основных эффектов b_i все парные взаимодействия b_{ij} и квадратичные эффекты b_{ii} :

$$y(x_1, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2. \quad (1)$$

Для построения полинома второго порядка необходимо выделить для каждого фактора три уровня, но применение полного факторного эксперимента (ПФЭ) типа 3^k для получения отдельных оценок коэффициентов по-

линома второго порядка не является рациональным, так как планирование на трех уровнях характеризуется резким увеличением объема эксперимента.

Задача минимизации числа опытов в эксперименте, цель которого — построение квадратичного полинома, решается на основе применения композиционных планов.

1. КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Композиционные планы используют обычно на заключительном этапе исследования: при описании экспериментальной области в ситуациях, когда отсутствует априорная информация об объекте, и его полиномиальную модель приходится подбирать последовательно, начиная с простейшего линейного уравнения, которое затем дорабатывается до полной квадратичной модели. В таких случаях применение композиционных планов оказывается наиболее выгодным по числу опытов.

Композиционный план формируется на основе полного 2^k или дробного 2^{k-p} факторного эксперимента путем добавления в матрицу планирования $2k$ «звездных» точек и точек в центре плана. Если матрица планирования содержит точки в центре плана, то такое планирование называется центральным композиционным планированием.

Центрально-композиционные планы (ЦКП) любой модификации состоят из трех частей. Первая часть — основа или ядро плана — это ПФЭ 2^k или дробного факторного эксперимента (ДФЭ) 2^{k-p} , где k — количество неизвестных коэффициентов регрессии, $p = 0, 1, 2$. При этом требуется, чтобы ядро плана обеспечивало отдельную оценку коэффициентов регрессии и всех парных взаимодействий. Данное условие накладывает весьма жесткое ограничение на возможную степень дробности используемого ДФЭ. В частности, при $k \leq 4$, как показывают расчеты, может применяться лишь ПФЭ 2^k ; если $5 \leq k \leq 7$, то кроме ПФЭ 2^k можно использовать и ДФЭ 2^{k-1} , а для $k > 7$ допустим также и ДФЭ 2^{k-2} . Вторая часть ЦКП — так называемые «звездные» точки, расположенные на координатных осях на расстоянии $\pm\alpha$ от центра эксперимента. Третья часть ЦКП — опыты в центре плана; число таких опытов $N_0 \geq 1$. Геометрическая интерпретация ЦКП представлена на рисунке 1, а матрица планирования для ЦКП произвольного вида — в таблице 1.

Конкретные значения α и N_0 выбираются исходя из тех или иных критериев оптимальности регрессионных экспериментов (α — звездное плечо, N_0 — количество экспериментов в центре плана). В связи с этим принято выделять ортогональные (ОЦКП) и рототабельные (РЦКП) центрально-композиционные планы.

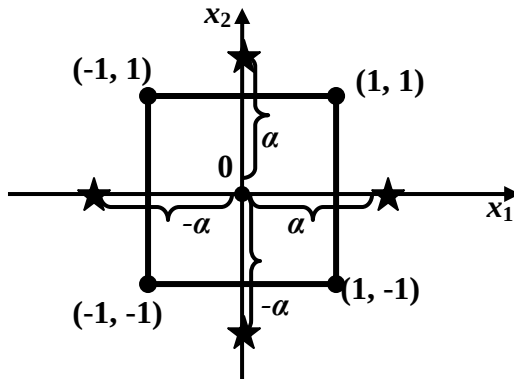


Рисунок 1 — Геометрическая интерпретация центрального композиционного плана произвольного вида для двух факторов..

Таблица 1 — матрица планирования центрального композиционного плана произвольного вида

Составные части ЦКП	G	Факторы				Число точек
		x_1	x_2	...	x_k	
Ядро плана (ПФЭ 2^k или ДФЭ 2^{k-p})	1	-1	-1	...	-1	2^{k-p} $p=0;1;2;$
	2	+1	-1	...	-1	
	3	-1	+1	...	-1	
	4	+1	+1	...	-1	
	...	...	...	...	...	
	2^{k-p}	+1	+1	...	-1	
«Звездные» точки	$2^{k-p}+1$	$-\alpha$	0	...	0	$2k$
	$2^{k-p}+2$	$+\alpha$	0	...	0	
	$2^{k-p}+3$	0	$-\alpha$	...	0	
	$2^{k-p}+4$	0	$+\alpha$	...	0	
	...	...	...	...	...	
	$2^{k-p}+2k-1$	0	0	...	$-\alpha$	
Центральные точки	$2^{k-p}+2k$	0	0	...	$+\alpha$	N_0
	$2^{k-p}+2k+1$	0	0	...	0	
	...	...	...	...	...	
	$2^{k-p}+2k+N_0$	0	0	...	0	

2. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1. Ортогональный центральный композиционный план

В ОЦКП, как правило, количество испытаний в центре плана принимают равным $N_0=1$, а план целиком строится с учетом критерия ортогональности (сумма парных произведений значений уровней двух любых факторов (столбцов) равна нулю). Для обеспечения парной ортогональности столбцов, отвечающих свободному члену β_0 и квадратичным коэффициентам β_i^2 , $i=1, 2, \dots, k$, а также столбцов, отвечающих квадратичным членам между собой, необходимо принять специальные меры. С этой целью, прежде всего, несколько видоизменяют систему базисных функций, а именно – ищут регрессионную модель в виде:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \beta'_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} (x_i^2 - x_i'^2), \quad (2)$$

$$x_i'^2 = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N x_{ig}^2 = \frac{2^{k-p} + 2\alpha^2}{N}, \quad (3)$$

где p – число, определяющее дробность эксперимента, N – общее число точек плана:

$$N = 2^{k-p} + 2k + 1. \quad (4)$$

Свободный член в выражении (1) вычисляется по формуле

$$b_0 = \beta'_0 + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i'^2, \quad (5)$$

где β_{ii} – коэффициенты уравнения регрессии. Величину β'_0 вводят для обеспечения ортогональности плана. Как видно, в этой модели при квадратичных коэффициентах используются центрированные переменные. Переход к таким переменным обеспечивает ортогональность плана эксперимента.

Числовое значение α выбирается из условия ортогональности столбцов с квадратичными переменными, т.е.: $\sum_{i=j}^N (x_{ig}^2 - x_i'^2)(x_{jg}^2 - x_j'^2) = 0$. Подставив

(3) в данное выражение, после несложных преобразований получаем уравнение для требуемого значения α :

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{2^{k-p-2}(2^{k-p} + 2k + 1)} - 2^{k-p-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{N \cdot 2^{k-p}} - 2^{k-p}}{2}}. \quad (6)$$

С помощью этой формулы можно определить конкретные числовые значения величины «звездного» плеча α (таблица 2).

Таблица 2 — Параметры ОЦКП при $k=2\div 8$

k	2	3	4		5		
Ядро ЦПК	ПФЭ 2^2	ПФЭ 2^3	ПФЭ 2^4		ПФЭ 2^5	ДФЭ 2^{5-1}	
N	9	15	25		43	27	
α	1,000	1,215	1,414		1,596	1,547	
k	6		7		8		
Ядро ЦПК	ПФЭ 2^6	ДФЭ 2^{6-1}	ПФЭ 2^7	ДФЭ 2^{7-1}	ПФЭ 2^8	ДФЭ 2^{8-1}	ДФЭ 2^{8-2}
N	77	45	143	79	273	145	81
α	1,761	1,724	1,909	1,885	2,045	2,029	2,000

Для удобства обработки результатов опытов проводится преобразование независимых переменных (факторов) X к безразмерным нормированным переменным. Для i -го фактора имеем

$$x_i = \frac{X_i - X_{0i}}{\Delta X_i}, \quad (7)$$

где X_{0i} – базовый или нулевой уровень i -й переменной, ΔX_i – интервал варьирования по i -му фактору. В результате нормировки значение верхнего уровня фактора равно $x_i^B = +1$, а нижнего уровня фактора $x_i^H = -1$. Матрица планирования эксперимента для двух факторов представлена в таблице 3, а геометрическая интерпретация эксперимента на рисунке 2. В качестве ядра плана используется ПФЭ 2^2 .

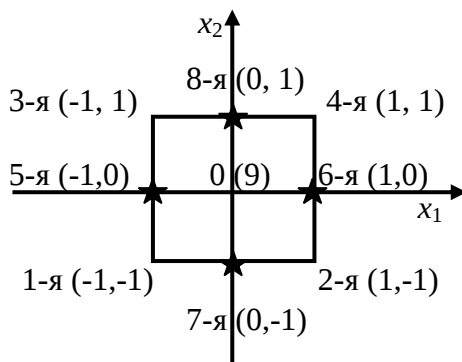


Рисунок 2 — Геометрическая интерпретация ортогонального центрального композиционного плана для двух факторов.

Таблица 3 — Матрица ОЦКП для двух факторов

G	x_0	x_1	x_2	Компоненты плана	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
1	1	-1	-1	ядро 2^2	1	-1	-1	1	1	1	y_1
2	1	1	-1		1	1	-1	-1	1	1	y_2
3	1	-1	1		1	-1	1	-1	1	1	y_3
4	1	1	1		1	1	1	1	1	1	y_4
5	1	$-\alpha$	0	звездные точки	1	-1	0	0	1	0	y_5
6	1	α	0		1	1	0	0	1	0	y_6
7	1	0	$-\alpha$		1	0	-1	0	0	1	y_7
8	1	0	α		1	0	1	0	0	1	y_8
9	1	0	0	точка в центре плана	1	0	0	0	0	0	y_9

2.2. Составление матрицы планирования ОЦКП

Перейдем к квадратичной модели (2) с центрированными квадратичными переменными (таблица 4). В этом случае можно добиться полной ортогонализации столбцов матрицы планирования.

Таблица 4 — Матрица ОЦКП для ядра ПФЭ 2^k

x_0	x_1	x_2	...	x_k	x_1x_2	...	$x_{k-1}x_k$	$x_1^2 - x_1'^2$	$x_2^2 - x_2'^2$	...	$x_k^2 - x_k'^2$
+1	-1	-1	...	-1	+1	...	+1	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	+1	-1	...	-1	-1	...	+1	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	-1	+1	...	-1	-1	...	...	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	+1	+1	...	-1	+1	...	...	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	+1	+1	...	+1	+1	...	+1	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	$-\alpha$	0	...	0	0	...	0	$\alpha^2 - x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
+1	$+\alpha$	0	...	0	0	...	0	$\alpha^2 - x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
+1	0	$-\alpha$	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$\alpha^2 - x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
+1	0	$+\alpha$	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$\alpha^2 - x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	0	0	...	$-\alpha$	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$\alpha^2 - x_k'^2$
+1	0	0	...	$+\alpha$	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$\alpha^2 - x_k'^2$
+1	0	0	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	0	0	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$

Вычислим для ПФЭ 2^2 в соответствии с выражением (3) значение $x_i'^2$

$$\beta = x_1'^2 = x_2'^2 = \frac{2^{k-p} + 2\alpha^2}{N} = \frac{6}{9} \cong 0,667, \text{ тогда матрица ОЦКП для двух}$$

факторов будет выглядеть следующим образом (таблица 5):

Таблица 5 — Матрица ОЦКП для двух центрированных факторов.

x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$x_1^2 - x_1'^2$	$x_2^2 - x_2'^2$	y
1	-1	-1	1	$1-0,667=0,333$	$1-0,667=0,333$	y_1
1	1	-1	-1	$1-0,667=0,333$	$1-0,667=0,333$	y_2
1	-1	1	-1	$1-0,667=0,333$	$1-0,667=0,333$	y_3
1	1	1	1	$1-0,667=0,333$	$1-0,667=0,333$	y_4
1	-1	0	0	$1-0,667=0,333$	$0-0,667=-0,667$	y_5
1	1	0	0	$1-0,667=0,333$	$0-0,667=-0,667$	y_6
1	0	-1	0	$0-0,667=-0,667$	$1-0,667=0,333$	y_7
1	0	1	0	$0-0,667=-0,667$	$1-0,667=0,333$	y_8
1	0	0	0	$0-0,667=-0,667$	$0-0,667=-0,667$	y_9

2.3. Порядок постановки и проверка воспроизводимости опытов.

Для оценки точности эксперимента в каждой i -й точке факторного пространства проводят m параллельных опытов. В результате получают значения $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}$ для $i=1, N$ исследуемого параметра, для которых находят среднее значение

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m y_{iq}, \quad (8)$$

где y_{iq} — исследуемый параметр, q — номер измерения отклика при проведении параллельных опытов.

Чтобы исключить влияние систематических ошибок, вызванных влиянием внешней среды и неконтролируемых факторов, рекомендуется случайная последовательность при постановке опытов, которая называется рандомизацией. Рандомизацию опытов можно провести с помощью генератора случайных чисел.

Опыт считается статистически воспроизводимым. Если дисперсия выходного параметра $S_{\{y\}}^2$ однородна в каждой точке факторного пространства. Такую дисперсию называют также дисперсией воспроизводимости опыта и вычисляют по формуле

$$s_{\{y\}}^2 = s_{\text{воспр}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^m (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(m-1)}, \quad (9)$$

где $\bar{y}_i$ — среднее значение отклика в i -м опыте, y_{iq} — значение отклика.

Гипотезу о воспроизводимости опытов проверяют с помощью критерия Кохрена. Этот критерий используют тогда, когда во всех точках факторного пространства имеется одинаковое число повторных опытов. Для этого формулируют нулевую гипотезу

$H_0: s_{y1}^2 = s_{y2}^2 = \dots = s_{yn}^2$ — дисперсии значений отклика в каждом опыте однородны.

Подсчитывается дисперсия значений отклика для каждого из опытов эксперимента:

$$s_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{q=1}^m (y_{iq} - \bar{y}_i)^2, \quad i=1, N, \quad (10)$$

а затем из всех дисперсий находится наибольшая $s_{\max}^2 = \max\{s_i^2, i=1, N\}$, которая делится на сумму всех дисперсий:

$$G_{\text{расч}} = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^N s_i^2}. \quad (11)$$

Если $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)$, гипотеза об однородности дисперсий принимается. Здесь α — уровень значимости, γ_1 и γ_2 — степени свободы, при этом $\gamma_1 = m-1$, $\gamma_2 = N$. Таблицы распределения Кохрена приводятся в Приложении А. Если $G_{\text{расч}} > G_{\text{табл}}$ гипотеза отвергается, и тогда эксперимент необходимо повторить, изменив условия его проведения (набор факторов, интервалы их варьирования, точность измерительных приборов и др.).

2.4. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Оценки коэффициентов регрессии для соответствующих групп равны ($\bar{y}_i$ — среднее значение отклика в i -м опыте):

— для свободного члена модели (2)

$$\beta'_0 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{0i} \bar{y}_i}{N}; \quad (12)$$

— для линейных слагаемых моделей (1), (2)

$$\beta_u = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ui} \bar{y}_i}{2^{k-p} + 2\alpha^2}, u = 1, 2, \dots, k; \quad (13)$$

— для парных взаимодействий моделей (1), (2)

$$\beta_{uj} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{uij} \bar{y}_i}{2^{k-p}}, j, u = 1, 2, \dots, k; j \neq u; \quad (14)$$

— для центрированных квадратичных переменных моделей (1), (2)

$$\beta_u = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ui}^2 \bar{y}_i}{2\alpha^4}, u = 1, 2, \dots, k. \quad (15)$$

Приведем регрессионную модель (2) к виду (1). Для этого в выражение (5) подставим значение β'_0 , вычисленное в соответствии с (12) и β , определенное на основании (3):

$$b_0 = \beta'_0 - x_i'^2 \sum_{u=1}^k \beta_u = \beta'_0 - \beta \sum_{u=1}^k \beta_u. \quad (16)$$

Итак, получили для искомой регрессионной модели (1) следующие коэффициенты: b_0 , $b_i \equiv \beta_u$, $b_{ij} \equiv \beta_{uj}$, $b_{ii} \equiv \beta_u$, $i, u = 1, 2, \dots, k; j \neq u$.

2.5. Исследование свойств квадратичной регрессионной модели.

2.5. 1. Анализ значимости коэффициентов регрессии. Точность оценки коэффициентов регрессии для разных групп неодинакова, поскольку условие

нормировки в случае ОЦКП не соблюдается, т.к. $\sum_{i=1}^N x_{iu}^2 \neq N$ (u – номер любого столбца, кроме нулевого).

Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии проводится по t -критерию Стьюдента. Гипотеза о равенстве коэффициента уравнения регрессии нулю принимается, если выполняется неравенство $t_{табл} > t_{расч}$. В этом случае считается, что найденный коэффициент b_j является статистически незначительным и его следует исключить из уравнения регрессии. Критическое значение критерия $t_{табл}$ выбирается из таблиц t -распределения Стьюдента при выбранном уровне статистической значимости α и при числе степеней свободы $\gamma = N(m-1)$. Таблица t -распределения Стьюдента приведена в Приложении Б. Кроме этого критическое значение

$t_{табл}$ можно определить, используя функции электронной таблицы Excel: СТЬЮДРАСПОБР(α ; γ).

Расчетное значение t-критерия вычисляется по формуле

$$t_{расч} = \frac{|b_j|}{s\{b_j\}}, \text{ где } s\{b_j\} — \text{оценка среднего квадратичного отклоне-}$$

ния погрешности определения коэффициента, $s\{b_j\} = \sqrt{s^2\{b_j\}}$.

Оценки дисперсий для каждой из четырех однородных групп для m параллельных опытов подсчитываются по следующим формулам:

$$s^2\{b_0\} = \frac{s_{воспр}^2}{m(N + 2\alpha^4)}, \quad (17)$$

$$s^2\{b_i\} = \frac{s_{воспр}^2}{m(2^{k-p} + 2\alpha^2)}, \quad (18)$$

$$s^2\{b_{ij}\} = \frac{s_{воспр}^2}{m \cdot 2^{k-p}}, \quad (19)$$

$$s^2\{b_{ii}\} = \frac{s_{воспр}^2}{m \cdot 2\alpha^4}, \quad (20)$$

где $s_{воспр}^2$ — дисперсия воспроизводимости, вычисленная в соответствии с (9).

Как было отмечено выше, если коэффициенты регрессии оказываются незначимыми, то они исключаются из уравнения регрессии. Так как при использовании ОЦКП все коэффициенты используются независимо, то изменение оценки любого коэффициента (например, исключение его из уравнения) не приводит к изменению других оценок и их дисперсий. Исключение составляет коэффициент b_0 . Необходимо помнить, что незначимость коэффициентов может быть обусловлена и неверным выбором интервала варьирования факторов. Поэтому иногда бывает полезно расширить интервал варьирования и провести новый эксперимент.

2.5.2. Проверка адекватности модели. Проверка адекватности полученного уравнения регрессии экспериментальным данным проводится на основании критерия Фишера, расчетное значение которого представляет собой следующее отношение

$$F_{расч} = \frac{S_{ост}^2}{S_{воспр}^2}, \quad (21)$$

где $s_{ост}^2$ — дисперсия, характеризующая расхождение между экспериментальными данными и теоретическими, полученными на основании выражений (13)-(16) для коэффициентов модели (1) с учетом анализа значимости коэффициентов:

$$s_{ост}^2 = \frac{1}{N - m' - 1} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \quad (22)$$

где $\hat{y}_i$ — значение отклика в i -й точке факторного пространства, вычисленное на основании модели (1), m' — количество значимых коэффициентов в модели (1).

Если $F_{расч} < F_{табл}(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, то гипотеза об адекватности регрессионной модели принимается. Значение $F_{табл}$ выбирается из таблиц распределения Фишера при уровне значимости α и степенях свободы $\gamma_1 = N - m' - 1$ и $\gamma_2 = N \cdot (m - 1)$. Таблица F -распределения Фишера приведена в Приложении 3. Кроме этого критическое значение $F_{табл}$ можно определить, используя функции электронной таблицы Excel: $FRASPOBR(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)$.

2.6. Контрольные вопросы.

1. В чем сущность ортогонального ЦКП и какие ММ он позволяет построить?
2. В чем сущность и цель стандартизации масштаба факторов?
3. Как составляется и какими свойствами обладает МПортогонального ЦКП?
4. Что такое «звездное плечо» и из каким образом выбирается его значение?
5. Как определяется число опытов ОЦКП?
6. Что является ядром плана в ОЦКП?
7. Что является геометрической интерпретаций ОЦКП для двух факторов и для трех факторов?
8. Каков порядок постановки опытов в ОЦКП?
9. Как проверить воспроизводимость опытов?
10. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
11. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
12. Как проверить адекватность полученной ММ?
13. Как перейти к исходным физическим переменным?

2.7. Пример расчета ОЦКП.

Требуется исследовать влияние технологических факторов (номиналов резисторов R_1 и R_2) в интегральной транзисторно-транзисторной логической схеме на значение средней потребляемой мощности $P=f(R_1, R_2)$. Центр плана эксперимента: $R_1=5,3\text{кОм}$ и $R_2=3,75\text{кОм}$. Функцию $f(R_1, R_2)$ будем искать в виде квадратичного полинома (1).

Составим ОЦКП для пяти серий опытов при интервалах варьирования для R_1 — $1,1\text{кОм}$, R_2 — $0,55\text{кОм}$. Для стандартизации масштабов факторов условия проведения опытов вычислим значения нижнего и верхнего уровня согласно соотношению (7) и сведем результаты в таблицу 6.

Таблица 6 — Условия проведения ОЦКП

Характеристика плана	Стандартный масштаб x_i	Натуральный масштаб	
		$x_1=R_1, \text{кОм}$	$x_2=R_2, \text{кОм}$
Нулевой уровень	0	5,3	3,75
Верхний уровень	+1	6,4	4,3
Нижний уровень	-1	4,2	3,2
Звездные точки	+1	5,3	4,3
	-1	4,2	3,2

Составим матрицу эксперимента с учетом рандомизации опытов. В таблице 7 представлены результаты параллельных опытов и вычислены среднее значение отклика и дисперсия для каждой точки факторного пространства соответственно соотношениям (8) и (10).

Таблица 7. — Результаты эксперимента.

№	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{cp}	s^2_{yi}
1	1	-1	-1	1	0,3	0,3	6,7	3,7	5,9	4,5	4,3	5,0	1,6
2	1	1	-1	-1	0,3	0,3	14,1	13,2	14,7	12,9	14,3	13,8	0,6
3	1	-1	1	-1	0,3	0,3	1,3	1,1	1,5	0,9	0,7	1,1	0,1
4	1	1	1	1	0,3	0,3	18,8	20,2	17,7	19,1	20,1	19,2	1,1
5	1	-1	0	0	0,3	-0,7	3,6	5,5	4,1	3,5	3,8	4,1	0,7
6	1	1	0	0	0,3	-0,7	18,6	17,4	18,3	17,1	17,4	17,8	0,4
7	1	0	-1	0	-0,7	0,3	8,8	9,2	8,3	9,1	8,4	8,8	0,2
8	1	0	1	0	-0,7	0,3	10,7	10,2	10,1	10,2	11,1	10,5	0,2
9	1	0	0	0	-0,7	-0,7	11,9	10,6	11,9	12,2	10,4	11,4	0,7

Проведем анализ воспроизводимости опыта на основе критерия Кохрена в соответствии с (11): $G_{расч}=0,292$, табличное значение критерия определяем при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1=m-1=4$, $\gamma_2=N=9$, получаем $G_{табл}(\alpha;\gamma_1;\gamma_2)=0,502$. Так как $G_{расч} < G_{табл}$, опыт является воспроизводимым, и его результаты можно использовать для оценки коэффициентов регрессионного уравнения.

В соответствии с расчетными формулами (12)—(16) можно определить коэффициенты регрессионной модели. Для анализа значимости коэффициентов необходимо вычислить погрешности определения коэффициентов модели на основании соотношений (17)—(20). Результаты расчетов в таблице 8.

Таблица 8 — Результаты анализа значимости коэффициентов.

	b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
расчетные формулы	12, 16	13	13	14	15	15
коэффициенты регрессионной модели	11,124	6,760	0,524	2,325	-0,050	-1,368
расчетные формулы	17	18	18	19	20	20
погрешности определения коэффициентов	0,011	0,020	0,020	0,030	0,061	0,061
$t_{расч}$	105,88	47,52	3,68	13,34	0,20	5,55
ВЫВОД	ЗН	ЗН	ЗН	ЗН	НЗН	ЗН

Для принятия решения о значимости коэффициентов уравнения регрессии расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ сравнивается с табличным значением. Табличное значений критерия Стьюдента $t_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степени свободы $\gamma=N(m-1)=45$, $t_{табл}=2,014$. Неравенство $t_{расч} < t_{табл}$ выполняется для коэффициента b_{11} , который приравнивается к нулю и исключается из регрессионной модели.

Проверка адекватности построенной модели выполняется в соответствии с критерием Фишера (21). Согласно выражению (9) дисперсия воспроизводимости равна $s^2_{воспр}=0,607$, остаточная дисперсия в соответствии с (22) составляет $s^2_{ост}=0,169$. Расчетное значение критерия Фишера равно $F_{расч}=0,278$. Табличное значений критерия Фишера $F_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1 = N - m' - 1 = 9 - 5 - 1 = 3$ и $\gamma_2 = N \cdot (m - 1) = 9 \cdot (5 - 1) = 36$, $F_{табл}=2,87$. Неравенство $F_{расч} < F_{табл}$ выполняется, поэтому построенная регрессионная модель считается адекватной экспериментальным данным.

Перейдем от кодированных значений факторов к натуральному исчислению в соответствии с выражением (7) и условиями проведения эксперимента в таблице 6:

$$P = -12,15 - 8,27R_1 + 14,5R_2 + 3,84R_1R_2 - 4,52R_2^2. \quad (23)$$

Таким образом, выражение (23) представляет характер изменения средней потребляемой мощности P интегральной транзисторно-транзисторной логической схемы в области изменения номиналов резисторов $4,2 \leq R_1 \leq 6,4 \text{ кОм}$, $3,2 \leq R_2 \leq 4,3 \text{ кОм}$.

3. РОТОТАБЕЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

3.1. Рототабельный центральный композиционный план.

Рототабельный центральный композиционный план (РЦКП) позволяет получить математическое описание отклика объекта исследования в виде уравнения множественной регрессии второго порядка:

$$y(x_1, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2$$

Рототабельные планы, как и ортогональные, являются композиционными. Они позволяют сохранить экспериментальную информацию, полученную с помощью ПФЭ или ДФЭ, которую исследователь затем дополняет опытами в «звездных точках» и в центре плана.

Метод РЦКП позволяет получить более точное математическое описание, что достигается благодаря увеличению числа опытов в центре плана и специальному выбору величины «звездного плеча» α .

Рототабельные планы — это планы, у которых точки плана располагаются на окружностях (сферах, гипербсферах). В таком случае точность оценивания функции отклика по любому направлению факторного пространства (для всех точек плана) одинаковая.

Число опытов РЦКП определяется по формуле $N = 2^{k-p} + 2k + N_0$, где 2^{k-p} — число опытов в ядре плана ПФЭ или ДФЭ, $2k$ — число опытов в «звездных» точках, имеющих координаты, N_0 — число опытов в центре плана.

Чтобы композиционный план был рототабельным величина «звездного» плеча α выбирается из условий

$$\alpha = 2^{n/4} \quad \text{при } n < 5$$

$$\alpha = 2^{(n-1)/4} \quad \text{при } n \geq 5.$$

Параметры РЦКП для различного количества факторов приведены в таблице 9.

3.2. Составление матрицы планирования эксперимента

Матрица планирования строится так же, как и при ортогональном плане.

Отличие состоит только в том, что число опытов в центре плана выбирается из условия, чтобы информация о значениях выходной переменной оставалась неизменной (или почти неизменной) для точек сферы единичного радиуса, т.е. чтобы информационный профиль мало отличался внутри этой сферы. Планы, удовлетворяющие этому условию, называются ротатабельными униформ-планами.

Таблица 9 — Характеристики ротатабельного планирования

Число факторов	2	3	4	5(ПФЭ)	5(ДФЭ)
Число опытов ПФЭ	4	8	16	32	16
Число опытов в звездных точках	4	6	8	10	10
Число опытов в центре плана	5	6	7	10	6
Общее число опытов	13	20	31	52	32
Величина звездного плеча α	1,414	1,680	2,000	2,378	2,000

Для получения ротатабельного униформ-плана необходимо обеспечить равенство дисперсии в центре плана ($\rho = 0$) и на поверхности гипербферы радиуса $\rho = 1$. Этого добиваются подбором числа наблюдений N_0 в центре плана.

Матрица РЦКП для двух факторов приведена в таблице 10, а геометрическая интерпретация плана эксперимента представлена на рисунке 3.

Таблица 10 — Матрица РЦКП для двух факторов

Системы опытов	№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
ПФЭ	1	1	1	1	1	1	1	y_1
	2	1	-1	1	-1	1	1	y_2
	3	1	1	-1	-1	1	1	y_3
	4	1	-1	-1	1	1	1	y_4
Опыты в «звездных» точках	5	1	1,41	0	0	2	0	y_5
	6	1	-1,41	0	0	2	0	y_6
	7	1	0	1,41	0	0	2	y_7
	8	1	0	-1,41	0	0	2	y_8
Опыты в центре плана	9	1	0	0	0	0	0	y_9
	10	1	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	1	0	0	0	0	0	y_{11}
	12	1	0	0	0	0	0	y_{12}
	13	1	0	0	0	0	0	y_{13}

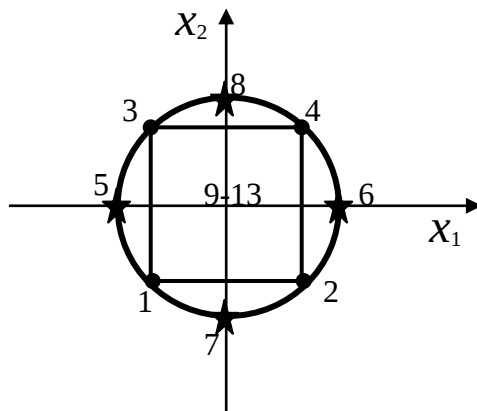


Рисунок 3 — Геометрическая интерпретация ротatableльного центрального композиционного плана для двух факторов.

При анализе значимости коэффициентов регрессионного уравнения, построенного на основе РЦКП, необходимо иметь в виду, что матрица, приведенная в таблице 10, не обладает свойством ортогональности.

3.3. Порядок проведения эксперимента.

При РЦКП стандартизация масштабов факторов, порядок постановки опытов, проверка воспроизводимости опытов проводятся так же, как и при ОЦКП. Несколько отличаются соотношения для расчета оценок коэффициентов регрессионного уравнения и их дисперсий. При реализации ротatableльных планов можно отказаться от **постановки** параллельных **опытов** для оценки воспроизводимости эксперимента, что уменьшает число опытов по сравнению с ОЦКП. Дисперсия воспроизводимости может быть оценена в этом случае по экспериментам в центре плана.

3.4. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения.

Формулы для расчета коэффициентов полинома и их дисперсий при РЦКП значительно сложнее, чем при ОЦКП. При ротatableльном планировании для вычисления оценок коэффициентов регрессии и соответствующих оценок дисперсии находят следующие вспомогательные величины:

$$A = \frac{1}{2B[(k+2)B - k]}, \quad (23)$$

$$B = \frac{kN}{(k+2)(N - N_0)}, \quad (24)$$

$$C = \frac{N}{N - N_0}, \quad (25)$$

где k — число факторов, N — общее число опытов рототабельного планирования, N_0 — число опытов в центре плана.

Далее на основании результатов эксперимента вычисляют следующие суммы:

— для свободного члена

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i, \quad (26)$$

— для линейных слагаемых

$$S_u = \sum_{i=1}^N x_{ui} \bar{y}_i, \quad u = 1, 2, \dots, k, \quad (27)$$

— для парных взаимодействий

$$S_{ju} = \sum_{i=1}^N x_{jui} \bar{y}_i, \quad j, u = 1, 2, \dots, k, \quad j \neq u, \quad (28)$$

— для квадратичных переменных

$$S_k = \sum_{i=1}^N x_{ki}^2 \bar{y}_i, \quad u = 1, 2, \dots, k. \quad (29)$$

Формулы для расчета коэффициентов регрессионной модели с учетом (23) — (29) будут иметь следующий вид:

— для свободного члена

$$b_0 = \frac{2AB}{N} \left[S_0 B(k+2) - C \sum_{j=1}^k S_k \right]; \quad (30)$$

— для линейных слагаемых

$$b_j = \frac{CS_j}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad (31)$$

— для парных взаимодействий

$$b_{ju} = \frac{C^2 S_{ju}}{BN}, \quad j, u = 1, 2, \dots, k, \quad j \neq u; \quad (32)$$

— для квадратичных переменных

$$b_k = \frac{AC}{N} \left\{ S_k C[B(k+2) - k] + C(1-B) \sum_{i=1}^k S_k - 2BS_0 \right\}. \quad (33)$$

Оценку дисперсии воспроизводимости можно вычислить на основании

результатов опытов, проведенных в центре плана. Среднее значение отклика равно

$$\bar{y} = \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} y_j ,$$

тогда

$$s_{\text{воспр}}^2 = \frac{1}{N_0 - 1} \sum_{j=1}^{N_0} (y_j - \bar{y})^2 . \quad (34)$$

Дисперсия вычислена для числа степеней свободы $\gamma = N_0 - 1$.

3.5. Исследование свойств квадратичной регрессионной модели

3.5.1. Анализ значимости коэффициентов регрессии. Как и для ОЦКП, точность оценки коэффициентов регрессии при использовании РЦКП для разных групп неодинакова, поскольку условие нормировки и в этом случае не соблюдается, т.к. $\sum_{i=1}^N x_{iu}^2 \neq N$ (u – номер любого столбца, кроме нулевого).

Проверка значимости коэффициентов проводится точно также, как и для коэффициентов, построенных на основании ОЦКП (пункт 2.5), однако, формулы для вычисления оценки дисперсий коэффициентов иные. Расчетные соотношения приведены ниже:

$$s^2 \{b_0\} = \frac{2AB(k+2)s_{\text{воспр}}^2}{N} , \quad (35)$$

$$s^2 \{b_i\} = \frac{s_{\text{воспр}}^2}{N - N_0} , \quad (36)$$

$$s^2 \{b_{ij}\} = \frac{C^2 s_{\text{воспр}}^2}{N} , \quad (37)$$

$$s^2 \{\beta_i^2\} = \frac{AC^2 s_{\text{воспр}}^2}{N} [B(k+1) - (k-1)] , \quad (38)$$

где $s_{\text{воспр}}^2$ — дисперсия воспроизводимости, вычисленная в соответствии с (34).

Кроме того, если параллельные опыты проводились только в центре плана, то число степеней свободы для значения критерия Стьюдента вычисляется в соответствии с выражением $\gamma = N - K - 1 + N_0(m-1)$, где K — количество коэффициентов регрессионной модели.

Необходимо помнить, что при РЦКП оценки коэффициентов регрессии при линейных членах и парных взаимодействиях не коррелированы с оценками других коэффициентов, а при квадратичных членах — коррелированы между собой и оценкой свободного члена. Исключение любого из квадратичных членов приводит к изменению оценок остальных, а также оценки свободного члена b_0 .

3.5.2. Проверка адекватности модели. Проверка адекватности полученной регрессионной модели проводится по критерию Фишера, в соответствии с расчетным соотношением (21).

Оценим остаточную дисперсию построенной регрессионной модели. Будем предполагать, что параллельные опыты проводятся только в центральных точках плана. Тогда остаточная сумма квадратов отклонений экспериментальных данных y_i и теоретических значений отклика $\hat{y}_i$ может быть записана:

$$S_R = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N-N_0} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

т.е. первое слагаемое представляет собой остаточную сумму квадратов отклонений в точках ПФЭ (или ДФЭ) и в «звездных» точках, а второе — сумму квадратов отклонений в центре плана. Эти слагаемые определяют общее рассеяние результатов наблюдений отклика относительно оценки регрессионной модели.

Перепишем последнее выражение в виде:

$$\begin{aligned} S_R &= \sum_{i=1}^{N-N_0} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0 + \bar{y}_0 - \hat{y}_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N-N_0} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (\bar{y}_0 - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0)^2, \end{aligned}$$

здесь $\bar{y}_0$ — среднее значение отклика в центре плана.

Общее рассеяние связано со случайными погрешностями наблюдений, возникающими в результате влияния неконтролируемых факторов и систематическими погрешностями в случае неадекватности регрессионной модели и функции отклика. Третье слагаемое остаточной суммы связано с дисперсией, характеризующейся только случайной погрешностью опыта. Следовательно, с остаточной дисперсией (дисперсией адекватности) связана сумма:

$$S_{ocm} = S_R - \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 - \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0)^2.$$

Оценку остаточной дисперсии рассчитывают по формуле

$$s_{ocm}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 - s_{воспр}^2 (N_0 - 1)}{N - 0,5(k + 2)(k + 1) - (N_0 - 1)}, \quad (39)$$

где y_i и $\hat{y}_i$ — значения отклика экспериментальное и теоретическое, вычисленное в i -й точке факторного пространства, на основании модели (1). Степень свободы, связанная с числителем равна

$$\gamma_1 = N - 0,5(k + 2)(k + 1) - (N_0 - 1). \quad (40)$$

Если в каждой точке рототабельного центрального композиционного плана проводилось m параллельных опытов, то, проделав аналогичные выкладки, можно получить выражение для остаточной суммы, связанной с дисперсией адекватности. В этом случае значение отклика y_i в выше приведенных выражениях заменяется средним значением отклика $\bar{y}_i$, вычисленным по результатам экспериментов в каждой i -й точке факторного пространства.

Дисперсия воспроизводимости $S_{воспр}^2$ вычисляется по формуле (9), если проводились параллельные опыты в каждой точке факторного пространства, при этом степень свободы будет равна

$$\gamma_2 = N \cdot (m - 1). \quad (41)$$

Если параллельные опыты проводились только в центре плана, то дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле (34), а связанная с ней степень свободы равна $\gamma_2 = N_0 - 1$.

Расчетное значение критерия Фишера сравнивается с табличным значением, определенным при заданном уровне значимости α и степенях свободы γ_1 и γ_2 . Если $F_{расч} < F_{табл}$, то построенная модель является адекватной экспериментальным данным при уровне значимости α .

3.6. Контрольные вопросы.

1. В чем сущность рототабельного ЦКП и какие ММ он позволяет построить?
2. В чем сущность и цель стандартизации масштаба факторов?
3. Как составляется и какими свойствами обладает МП рототабельного ЦКП?
4. Как определяется число опытов РЦКП?
5. Что такое «звездное плечо» и из каких соображений выбирается его значение?
6. Как проверить воспроизводимость опытов?
7. Как определяется оценка дисперсии воспроизводимости?
8. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
9. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов

регрессии?

10. Как проверить адекватность полученной ММ?
11. Как перейти к исходным физическим переменным?
12. В чем различия планов РЦКП и ОЦКП?

3.7. Пример расчета РЦКП

Расчет РЦКП проведен для примера, представленного в пункте 2.7. Условия проведения эксперимента приведены в таблице 6. Воспроизводимость опыта исследуем на основе проведения пяти параллельных опытов в центре плана. Матриц планирования и результаты проведения экспериментов представлены в таблице 11.

Замечание 1. Для наборов факторов ядра и «звездных точек» параллельные опыты не проводились, поэтому в колонке 14 таблицы 11 приведены значения отклика y_i для $i=1, N-N_0$.

Замечание 2. Для наборов факторов в центре плана ставились параллельные опыты, $m=5$ и по значениям откликов вычислялись средние значения и дисперсия отклика в каждой точке факторного пространства. Результаты вычислений приведены соответственно в колонках 14 и 15 таблицы 11.

Воспроизводимость опыта определяется по результатам эксперимента в центральных точках плана в соответствии с (34). Проведем анализ воспроизводимости опыта на основе критерия Кохрена в соответствии с (11): $G_{расч}=0,385$, табличное значение критерия определяем при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1=m-1=4$, $\gamma_2=N_0=5$, получаем $G_{табл}(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)=0,589$. Так как $G_{расч} < G_{табл}$, опыт является воспроизводимым, и его результаты можно использовать для оценки коэффициентов регрессионного уравнения.

При расчете коэффициентов регрессионного уравнения используются значения отклика y_i для $i=1, N-N_0$ и значения $y_{срi}$ для $i= N-N_0+1, N$.

В соответствии с расчетными формулами (23)-(33) можно определить коэффициенты регрессионной модели. Для анализа значимости коэффициентов необходимо вычислить погрешности определения коэффициентов модели на основании соотношений (35)-(38). Результаты расчетов в таблице 12.

Для принятия решения о значимости коэффициентов уравнения регрессии расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ сравнивается с табличным значением. Табличное значений критерия Стьюдента $t_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степени свободы $\gamma=N-K-1+N_0(m-1)=21$, $t_{табл}=2,08$. Неравенство $t_{расч} < t_{табл}$ выполняется для коэффициента b_{11} , который приравняется к нулю и исключается из регрессионной модели.

Таблица 11 — Результаты эксперимента

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Системы опытов	№	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_i	s^2_{yi}	
	1	1	-1	-1	1	1	1	Замечание 1 → Замечание 2 ↑						5,01	
	2	1	1	-1	-1	1	1							13,82	
	3	1	-1	1	-1	1	1							1,08	
4	1	1	1	1	1	1	19,18								
Опыты в «звездных» точках	5	1	-1,41	0	0	2	0							4,12	
	6	1	1,41	0	0	2	0							17,76	
	7	1	0	-1,41	0	0	2							8,77	
	8	1	0	1,41	0	0	2							10,48	
Опыты в центре плана	9	1	0	0	0	0	0	11,17	10,75	10,72	10,52	10,89	10,81	0,05901	
	10	1	0	0	0	0	0	10,81	10,69	11,85	11,00	10,97	11,06	0,28780	
	11	1	0	0	0	0	0	10,75	10,60	10,90	11,57	10,97	10,96	0,16753	
	12	1	0	0	0	0	0	10,53	11,04	10,81	10,26	10,78	10,68	0,10978	
	13	1	0	0	0	0	0	10,59	10,25	10,65	10,52	10,62	10,53	0,12442	
								y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$y_{срi}$	s^2_{yi}	

Таблица 12 — Результаты анализа значимости коэффициентов для РЦКП.

	b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
расчетные формулы	26, 30	27, 31	27, 31	28, 32	29, 33	29, 33
коэффициенты регрессионной модели	10,81	5,78	0,48	2,32	-0,06	-0,72
расчетные формулы	35	36	36	37	38	38
погрешности определения коэффициентов	0,184	0,094	0,094	0,152	0,108	0,108
$t_{расч}$	25,177	18,883	1,573	5,962	0,185	2,194
ВЫВОД	ЗН	ЗН	ЗН	ЗН	НЗН	ЗН

Проверка адекватности построенной модели выполняется в соответствии с критерием Фишера (21). Согласно выражениям (34) дисперсия воспроизводимости равна $s^2_{воспр}=0,749$, остаточная дисперсия в соответствии с (39) составляет $s^2_{ост}=1,71$. Расчетное значение критерия Фишера равно $F_{расч}=2,29$. Табличное значение критерия Фишера $F_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы (40) и (41), $F_{табл}=2,78$. Неравенство $F_{расч} < F_{табл}$ выполняется, поэтому построенная регрессионная модель считается адекватной экспериментальным данным.

Перейдем от кодированных значений факторов к натуральному исчислению в соответствии с выражением (7) и условиями проведения эксперимента в таблице 6:

$$P=22,66-9,165R_1-1,637R_2+3,843R_1R_2-2,38R_2^2.$$

Таким образом, полученное выражение может представлять, как и модель (23), характер функциональной зависимости средней потребляемой мощности P интегральной транзисторно-транзисторной логической схемы в области изменения номиналов резисторов $4,2 \leq R_1 \leq 6,4 \text{ кОм}$, $3,2 \leq R_2 \leq 4,3 \text{ кОм}$.

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Задания выполняются в соответствии с индивидуальными вариантами, приведенными в Приложении Г. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Вариант задания представляет собой результаты ЦКП и содержит: ядро в виде ПФЭ типа 2^2 , четыре «звездные» точки и пять точек в центре плана. В ходе эксперимента в каждой точке факторного пространства проводились три параллельных опыта. Порядок проведения опытов соответствует матрице эксперимента, представленной в таблице 1. При использовании ОЦКП можно выбрать любую строчку из центральных точек плана.

В ходе выполнения индивидуального задания требуется по предложенным экспериментальным данным построить регрессионные квадратичные модели на основе применения ОЦКП и РЦКП и провести регрессионный анализ моделей. Для этого необходимо:

- построить матрицу планирования экспериментов;
- проверить воспроизводимость опытов;
- рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения для двух центральных композиционных планов;
- проверить адекватность полученных моделей;
- провести анализ результатов и сделать выводы.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Цель работы.
2. Постановку задачи.
3. Матрицу планирования экспериментов.
4. Результаты проверки воспроизводимости опытов.
5. Результаты расчетов коэффициентов регрессионных моделей и проверки из статистической значимости.
6. Результаты проверки адекватности полученных моделей исходным экспериментальным данным.
7. Выводы и предложения о ходе дальнейших исследований, составленные на основании анализа регрессионных моделей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

2. Космин В.В. Основы научных исследований: Учебное пособие для магистров / В.В. Космин. — М.: РИОР: ИНФРА-М, 2013. — 213 с.
3. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных. / Н.И. Сидняев — М.: Юрайт-Издат, ООО, 2012. — 399с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

G-распределение Кохрена

(значение $G*100$ в зависимости от числа степени свободы γ_1, γ_2) и $\alpha = 0.05$

$\gamma_2 \backslash \gamma_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	999	975	939	906	877	853	833	816	801	788	734	660	581	500
3	967	871	798	746	707	677	653	633	617	603	547	475	403	333
4	907	768	684	630	589	560	536	518	502	488	437	372	309	250
5	841	684	598	544	506	478	456	439	424	412	365	307	251	200
6	781	616	532	480	445	418	398	382	368	357	314	261	212	167
7	727	561	480	431	397	373	354	339	326	315	276	228	183	143
8	680	516	438	391	360	336	319	304	293	283	246	202	162	125
9	639	478	403	358	329	307	290	277	266	257	223	182	145	111
10	602	445	373	331	303	282	267	254	244	235	203	166	131	100
12	541	392	326	288	262	244	230	219	210	202	174	140	100	083
15	471	335	276	242	216	203	191	182	174	167	143	114	089	067
20	389	271	221	192	174	160	150	142	136	130	111	089	068	050
24	343	235	191	166	149	137	129	122	116	111	094	074	057	042
30	293	198	159	138	124	114	106	100	096	092	077	060	046	033
40	237	158	126	108	097	089	083	078	075	071	060	046	035	025
60	174	113	090	077	068	062	058	055	052	050	041	032	023	017
120	900	063	050	042	037	034	031	029	028	027	022	017	012	008

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Распределение Стьюдента.

Значения t-критерия Стьюдента при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	Значения t-критерия
1	12.71
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
8	2.306
9	2.262
10	2.228
11	2.201
12	2.179
13	2.160
14	2.145
15	2.131
16	2.120
17	2.110
18	2.101
19	2.093
20	2.086
21	2.080
22	2.074
23	2.069
24	2.064
25	2.060
26	2.056
27	2.052
28	2.048
29	2.045
30	2.042
∞	1.960

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Распределение Фишера.

Значения F–критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

$\begin{matrix} v1 \\ \backslash \\ v2 \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.9	249.0	254.3
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

1

25,40	26,63	24,66
59,76	59,54	57,72
47,40	47,23	46,17
82,07	78,17	81,11
33,49	35,05	36,70
67,32	67,22	68,83
41,47	41,13	43,81
59,59	59,77	60,86
49,84	49,01	48,80
45,64	52,89	48,00
48,15	45,02	52,92
49,15	45,87	51,74
53,34	48,89	45,61

2

28,21	29,58	27,39
66,37	66,13	64,11
52,64	52,45	51,28
91,15	86,82	90,09
37,20	38,93	40,77
74,77	74,66	76,45
46,05	45,68	48,66
66,18	66,39	67,60
55,35	54,44	54,20
50,69	58,74	53,31
53,48	50,00	58,78
54,58	50,94	57,47
59,24	54,30	50,65

3

5,04	5,28	4,89
11,85	11,81	11,45
9,40	9,37	9,16
16,28	15,50	16,09
6,64	6,95	7,28
13,35	13,33	13,65
8,22	8,16	8,69
11,82	11,85	12,07
9,88	9,72	9,68
9,05	10,49	9,52
9,55	8,93	10,50
9,75	9,10	10,26
10,58	9,70	9,05

4

2,52	2,64	2,45
5,93	5,90	5,72
4,70	4,68	4,58
8,14	7,75	8,04
3,32	3,48	3,64
6,68	6,67	6,83
4,11	4,08	4,34
5,91	5,93	6,04
4,94	4,86	4,84
4,53	5,24	4,76
4,78	4,46	5,25
4,87	4,55	5,13
5,29	4,85	4,52

5

2,29	2,40	2,23
5,39	5,37	5,21
4,28	4,26	4,17
7,41	7,05	7,32
3,02	3,16	3,31
6,08	6,07	6,21
3,74	3,71	3,95
5,38	5,39	5,49
4,50	4,42	4,40
4,12	4,77	4,33
4,35	4,06	4,78
4,43	4,14	4,67
4,81	4,41	4,12

6

29,16	31,62	33,66
72,89	71,16	75,80
59,22	59,73	57,64
95,08	99,11	101,75
43,84	46,29	45,24
85,31	83,32	83,95
54,15	50,54	48,13
75,02	69,40	74,06
59,83	60,40	57,93
58,64	62,57	57,97
66,69	63,47	61,58
61,56	57,30	63,35
59,90	59,99	60,06

7

19,41	21,05	22,41
48,53	47,37	50,47
39,42	39,76	38,37
63,30	65,98	67,74
29,18	30,82	30,11
56,79	55,47	55,89
36,05	33,64	32,04
49,94	46,20	49,30
39,83	40,21	38,57
39,04	41,65	38,59
44,40	42,25	40,99
40,98	38,15	42,17
39,88	39,94	39,98

8

9,71	10,52	11,20
24,26	23,69	25,23
19,71	19,88	19,19
31,65	32,99	33,87
14,59	15,41	15,06
28,40	27,74	27,95
18,02	16,82	16,02
24,97	23,10	24,65
19,91	20,10	19,28
19,52	20,83	19,30
22,20	21,13	20,50
20,49	19,07	21,09
19,94	19,97	19,99

9

4,85	5,26	5,60
12,13	11,84	12,62
9,86	9,94	9,59
15,83	16,49	16,93
7,30	7,70	7,53
14,20	13,87	13,97
9,01	8,41	8,01
12,49	11,55	12,33
9,96	10,05	9,64
9,76	10,41	9,65
11,10	10,56	10,25
10,25	9,54	10,54
9,97	9,98	10,00

10

4,42	4,79	5,10
11,04	10,78	11,48
8,97	9,05	8,73
14,40	15,01	15,41
6,64	7,01	6,85
12,92	12,62	12,72
8,20	7,65	7,29
11,36	10,51	11,22
9,06	9,15	8,77
8,88	9,48	8,78
10,10	9,61	9,33
9,32	8,68	9,59
9,07	9,09	9,10

11

5,33	5,70	6,01
11,95	11,69	12,39
9,88	9,96	9,64
15,31	15,92	16,32
7,55	7,92	7,76
13,83	13,53	13,63
9,11	8,56	8,20
12,27	11,42	12,13
9,97	10,06	9,68
9,79	10,39	9,69
11,01	10,52	10,24
10,23	9,59	10,50
9,98	10,00	10,01

12

3,46	3,70	3,91
7,77	7,60	8,05
6,42	6,47	6,27
9,95	10,35	10,61
4,91	5,15	5,04
8,99	8,79	8,86
5,92	5,57	5,33
7,98	7,42	7,88
6,48	6,54	6,29
6,36	6,75	6,30
7,16	6,84	6,65
6,65	6,23	6,83
6,49	6,50	6,50

13

14,99	15,86	14,51
34,98	34,13	33,61
26,02	26,13	26,11
46,21	46,42	48,43
20,30	23,57	20,27
41,23	40,62	38,31
24,69	25,61	23,08
35,92	35,49	36,55
30,51	30,80	30,76
28,14	29,97	28,45
31,71	32,13	28,62
29,76	30,90	27,10
28,25	28,68	24,05

14

8,82	9,33	8,54
20,58	20,08	19,77
15,31	15,37	15,36
27,18	27,31	28,49
11,94	13,87	11,92
24,25	23,89	22,54
14,52	15,07	13,58
21,13	20,88	21,50
17,95	18,12	18,10
16,55	17,63	16,73
18,65	18,90	16,84
17,51	18,18	15,94
16,62	16,87	14,15

15

8,2	8,7	7,9
19,9	19,4	19,1
14,7	14,7	14,7
26,5	26,7	27,8
11,3	13,2	11,3
23,6	23,2	21,9
13,9	14,4	12,9
20,5	20,2	20,8
17,3	17,5	17,4
15,9	17,0	16,1
18,0	18,3	16,2
16,9	17,5	15,3
16,0	16,2	13,5

16

7,4	7,9	7,2
18,1	17,7	17,4
13,3	13,4	13,4
24,1	24,3	25,3
10,3	12,0	10,3
21,5	21,2	19,9
12,6	13,1	11,8
18,6	18,4	19,0
15,7	15,9	15,9
14,5	15,5	14,6
16,4	16,6	14,7
15,3	16,0	13,9
14,5	14,8	12,3

17

4,83	5,13	4,66
11,79	11,49	11,31
8,67	8,71	8,70
15,69	15,77	16,47
6,68	7,82	6,67
13,96	13,75	12,95
8,21	8,53	7,65
12,11	11,96	12,33
10,23	10,33	10,32
9,41	10,04	9,51
10,65	10,80	9,57
9,97	10,37	9,05
9,44	9,59	7,98

18

2,85	3,01	2,75
6,64	6,48	6,38
4,94	4,96	4,95
8,77	8,81	9,19
3,85	4,47	3,85
7,82	7,71	7,27
4,68	4,86	4,38
6,82	6,73	6,94
5,79	5,84	5,84
5,34	5,69	5,40
6,02	6,10	5,43
5,65	5,86	5,14
5,36	5,44	4,56

19

7,05	7,64	8,14
17,62	17,20	18,33
14,32	14,44	13,94
22,99	23,96	24,60
10,60	11,19	10,94
20,63	20,15	20,30
13,09	12,22	11,64
18,14	16,78	17,91
14,46	14,60	14,01
14,18	15,13	14,01
16,12	15,34	14,89
14,88	13,85	15,32
14,48	14,50	14,52

20

27,94	29,58	30,94
57,06	55,90	58,99
47,95	48,29	46,90
71,83	74,51	76,27
37,71	39,34	38,64
65,32	64,00	64,42
44,58	42,17	40,57
58,47	54,73	57,83
48,36	48,74	47,09
47,57	50,18	47,12
52,93	50,78	49,52
49,51	46,67	50,70
48,40	48,46	48,51

21

11,51	13,15	14,51
40,63	39,47	42,57
31,52	31,86	30,48
55,40	58,08	59,84
21,28	22,92	22,21
48,89	47,57	47,99
28,15	25,74	24,14
42,04	38,30	41,40
31,93	32,31	30,67
31,14	33,75	30,69
36,50	34,35	33,09
33,08	30,25	34,27
31,98	32,04	32,08

22

16,50	17,30	16,02
38,82	38,69	37,50
30,80	30,69	30,00
53,32	50,79	52,70
21,76	22,78	23,85
43,74	43,68	44,72
26,94	26,72	28,46
38,72	38,84	39,55
32,38	31,85	31,70
29,66	34,36	31,18
31,29	29,25	34,38
31,93	29,80	33,62
34,66	31,77	29,63

23

21,61	23,15	20,69
64,54	64,27	62,00
49,10	48,88	47,57
92,42	87,54	91,22
31,72	33,67	35,74
73,99	73,87	75,88
41,68	41,27	44,61
64,33	64,56	65,92
52,14	51,12	50,84
46,90	55,96	49,84
50,04	46,12	56,00
51,28	47,18	54,53
56,52	50,97	46,86

24

2,19	2,30	2,13
5,15	5,14	4,98
4,09	4,07	3,98
7,08	6,74	7,00
2,89	3,02	3,17
5,81	5,80	5,94
3,58	3,55	3,78
5,14	5,16	5,25
4,30	4,23	4,21
3,94	4,56	4,14
4,15	3,88	4,56
4,24	3,96	4,46
4,60	4,22	3,93

Заказ № _____ от « _____ » _____ 2016. Тираж _____ экз.
СевГУ