

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Севастопольский государственный университет»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения лабораторной работы на тему
«Исследование характера изменения реакции
технических систем на основе
полного факторного эксперимента»
по дисциплине «Теория систем»
для магистров очной и заочной форм обучения
по направлению 09.04.01 —
«Информатика и вычислительная техника»

Севастополь
2016

Методические указания для выполнения лабораторной работы на тему «Исследование характера изменения реакции технических систем на основе полного факторного эксперимента» по дисциплине «Теория систем» для магистров очной и заочной форм обучения по направлению 09.04.01 — «Информатика и вычислительная техника» / Сост.: И.А. Балакирева, А.В. Скاتков — Севастополь: СевГУ, 2016. — 20 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в изучении теории планирования эксперимента в рамках дисциплины «Теория систем» и выполнения выпускной квалификационной работы магистра.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры ИТиКС (протокол № 9 от 19 мая 2016 г.)

Рецензент: доцент кафедры информационных технологий и компьютерных систем, к.т.н. Брюховецкий А.А.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.	4
2. ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	6
2.1. Стандартизация масштаба факторов	7
2.2. Составление матрицы планирования ПФЭ	8
2.3. Порядок постановки ПФЭ	10
2.4. Проверка воспроизводимости опытов	10
2.5. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения	11
2.6. Исследование свойств регрессионной модели	11
2.6.1. Проверка значимости коэффициентов регрессии	11
2.6.2. Проверка адекватности полученной математической модели	12
2.7. Переход к физическим переменным	13
3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ	13
4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ	14
5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ	14
6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	16
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	16
ПРИЛОЖЕНИЕ А	17
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	18
ПРИЛОЖЕНИЕ В	19
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	19

ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент является основным и наиболее совершенным методом познания. Различают активный и пассивный эксперименты. Осуществление пассивного эксперимента не зависит от экспериментатора, и ему приходится довольствоваться лишь ролью наблюдателя. Основной вид эксперимента - активный, проводится в контролируемых и управляемых условиях.

Все факторы, влияющие на исследуемые параметры объекта, предусмотреть, как правило, не удастся. Так, в сложных системах, зависящих от множества факторов, некоторые воздействия не могут контролироваться или управляться. Воздействие этих факторов рассматриваются как белый шум, наложенный на истинные результаты эксперимента. Чтобы отделить факторы, интересующие экспериментатора, от шумового фона, применяются специальные методы, называемые *рандомизацией эксперимента*.

Проведение активного эксперимента зачастую требует больших материальных затрат. Поэтому важной задачей является получение необходимых сведений при минимальном числе опытов. Раздел прикладной математики, теория планирования эксперимента позволяет решить эту проблему. В общем случае теория планирования эксперимента позволяет ответить на следующие вопросы:

- как спланировать эксперимент, обеспечивающий при требуемой точности результатов, минимальные затраты времени и средств;
- как обработать результаты, чтобы извлечь из них максимум информации об исследуемом объекте;
- какие выводы можно сделать по результатам эксперимента и какова достоверность этих выводов.

Активный эксперимент в сочетании с методами планирования позволяет получить требуемые результаты, затратив минимальные средства и время на проведение исследования.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения с требуемой точностью и достоверностью поставленной задачи.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Целью планирования эксперимента, как правило, является получение математической модели (ММ) исследуемого объекта или процесса. Если на объект действует много факторов, механизм которых неизвестен, то обычно используют полиномиальные ММ (алгебраические полиномы), называемые *уравнениями регрессии*. Так, для двух факторов x_1 и x_2 **можно построить следующие уравнения регрессии:**

полином 0-й степени: $y = b_0$;

полином 1-й степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ – линейная модель;

полином 2-й степени:

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2$ – полная квадратичная модель.

При планировании эксперимента исследуемый объект представляется в виде «черного ящика», на вход которого воздействуют факторы X_i , а на выходе под действием этих факторов и влияния случайных воздействий внешней среды v_s формируются выходные параметры (отклик или реакция) y_j объекта исследования.

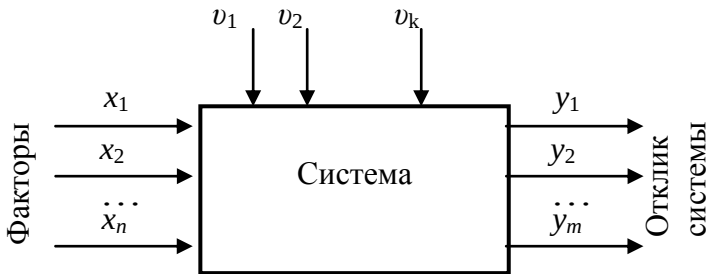


Рисунок 1 — Объект исследования

Каждый фактор x_i может принимать определенное количество значений, называемых **уровнями факторов**. Множество возможных уровней фактора x_i называется **областью его определения**. Эти области могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Должна существовать возможность управления факторами: либо поддерживать их на заданном уровне, либо изменять по установленной программе.

Факторы должны быть совместимыми и независимыми. Совместимость предполагает допустимость любой комбинации факторов, а независимость – отсутствие между факторами корреляционной связи.

Исследуемые параметры должны отвечать ряду требований. Они должны быть:

- эффективными, то есть способствовать скорейшему достижению цели;
- универсальными – быть характерными не только для исследуемого объекта;
- статистически однородными, то есть определенному набору значений факторов x_i , с точностью до погрешности эксперимента должно соответствовать определенное значение отклика объекта Y ;
- выражаться количественно одним числом;
- легко вычисляться и иметь физический смысл;
- существовать при любом состоянии объекта.

Геометрический аналог функции отклика называется *поверхностью отклика*, а пространство, в котором строят эту поверхность, - *факторным пространством*. Размерность факторного пространства равна числу факторов. Так, например, при двух факторах факторное пространство представляет собой факторную плоскость.

Выбор условий проведения опытов при планировании эксперимента позволяет добиться требуемых свойств ММ. Множество точек факторного пространства, в которых проводится эксперимент, представляется с помощью *плана эксперимента*:

$$X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{vmatrix},$$

где n — число факторов; N — число точек факторного пространства. Точка

$x^{(0)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$ называется *центром плана*. Если центр плана совпадает с

началом координат, то план называется *центральный*.

Условия проведения опытов могут свободно выбираться в пределах заданных границ. Выбор соответствующего плана эксперимента позволяет обеспечить ММ разные свойства. Наиболее распространенными являются критерии ортогональности и ротатабельности.

Критерий ортогональности заключается в том, что полученные оценки коэффициентов регрессии некоррелированы (не смешаны). В этом случае замена нулем любого коэффициента в ММ не изменяет значений остальных коэффициентов.

Критерий ротатабельности состоит в том, что дисперсия выходной переменной зависит только от расстояния от центра плана и является равной по всем направлениям.

2. ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) исследуется один выходной параметр объекта и реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

Для каждого фактора выбираются два уровня - верхний и нижний, на которых фактор варьируется. Половина разности между верхним и нижним уровнями называется *интервалом варьирования*. Интервал варьирования должен быть больше погрешности измерения уровня фактора (ограничение снизу), а верхний и нижний уровни фактора не должны выходить за область его определения (ограничение сверху). На практике интервал варьирования составляет обычно 3-10% от области определения.

При двух уровнях для каждого из n факторов общее число опытов составляет 2^n , поэтому ПФЭ называют экспериментом типа 2^n .

ПФЭ позволяет получить математическую модель исследуемого объекта в виде уравнения множественной регрессии:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n b_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{ikl} x_i x_k x_l + \dots \quad (2.1)$$

где b_0 — свободный член; b_i , b_{ik} , b_{ikl} — коэффициенты уравнения регрессии. Так, например, при $n=2$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2;$$

при $n=3$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3.$$

В зависимости от объема априорной информации в ММ включают не все, а лишь некоторые взаимодействия первого порядка, иногда - взаимодействия второго порядка и очень редко — взаимодействия выше третьего порядка. Связано это с тем, что учет всех взаимодействий приводит к громоздким расчетам. Зависимость количества взаимодействий различного порядка от числа факторов приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1 — Количество взаимодействий для числа факторов от 2 до 7

n	$N=2^n$	Число линейных эффектов	Порядок взаимодействия					
			1	2	3	4	5	
2	4	2	1	—	—	—	—	—
3	8	3	3	1	—	—	—	—
4	16	4	6	4	1	—	—	—
5	32	5	10	10	5	1	—	—
6	64	6	15	20	15	6	1	—
7	128	7	21	35	35	21	7	1

Полное число всех возможных эффектов (включая b_0) равно числу опытов ПФЭ.

2.1. Стандартизация масштаба факторов

Для удобства расчетов масштаб факторов выбирают так, чтобы значение верхнего уровня было равно +1, а нижнего -1. С этой целью делают преобразование начала координат факторов и переходят к нормированному (стандартному) масштабу

$$X_i = \frac{x_i - x_{0i}}{\Delta x_i}, \quad (2.2)$$

где x_{0i} – базовый или начальный уровень i -й переменной, Δx_i – интервал варьирования по i -й переменной.

2.2. Составление матрицы планирования ПФЭ

План ПФЭ изображают в виде таблицы, столбцы которой отражают уровни факторов, а строки — номера опытов. Эти таблицы называют **матрицами планирования** (МП) **эксперимента**. Поскольку значения уровней факторов по модулю всегда равны единице, то обычно в МП записывают только знак уровня (т. е. «+» вместо «1» и «-» вместо «-1»). В таблицах 2.2 и 2.3 в качестве примера приведены МП для ПФЭ типа 2^2 и 2^3 соответственно.

Таблица 2.2 — МП ПФЭ типа 2^2

N	x_1	x_2	y
1	-	-	y_1
2	+	-	y_2
3	-	+	y_3
4	+	+	y_4

Таблица 2.3 — МП ПФЭ типа 2^3

N	x_1	x_2	x_3	y
1	-	-	-	y_1
2	+	-	-	y_2
3	-	+	-	y_3
4	+	+	-	y_4
5	-	-	+	y_5
6	+	-	+	y_6
7	-	+	+	y_7
8	+	+	+	y_8

Геометрической интерпретацией ПФЭ 2^2 является квадрат в факторной плоскости (рисунок 2.1), а ПФЭ 2^3 — куб.

Здесь нормированные координаты x_1 и x_2 проходят через точку пересечения основных уровней факторов, и масштабы их осей выбраны так, чтобы интервал варьирования равнялся 1. Тогда условия проведения опытов в МП эксперимента будут соответствовать вершинами квадрата, центром которого является основной уровень. Если $n > 3$, то фигуру, задающую в многомерном пространстве область эксперимента, называют *гиперкубом*.

Влияние факторов на выходной параметр может зависеть от уровня, на котором находится другой фактор, или от сочетания уровней нескольких факторов. Если априорно не известно, что такой зависимости между факторами нет, то строят развернутую МП, учитывающую не только факторы, но и их взаимодействия.

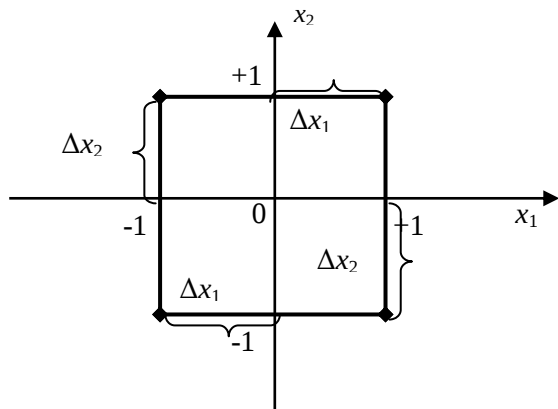


Рисунок 2.1 — Геометрическая интерпретация ПФЭ типа 2^2 .

Пример развернутой МП типа для ПФЭ 2^3 представлен в табл. 2.4. Фиктивный фактор x_0 вводят для удобства компьютерного расчета свободного члена b_0 (для идентичности формул).

Таблица 2.4 — Развернутая МП ПФЭ типа 2^3 .

N	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y
1	+	-	-	-	+	+	+	-	y_1
2	+	+	-	-	-	-	+	+	y_2
3	+	-	+	-	-	+	-	+	y_3
4	+	+	+	-	+	-	-	-	y_4
5	+	-	-	+	+	-	-	+	y_5
6	+	+	-	+	-	+	-	-	y_6
7	+	-	+	+	-	-	+	-	y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Для МП эксперимента должны выполняться следующие условия:

- а) симметричности относительно центра эксперимента $\sum_{j=1}^N x_{ij} = 0$, где i — номер фактора, j — номер опыта, N — число опытов;
- б) нормировки $\sum_{j=1}^N |x_{ij}| = N$;
- в) ортогональности $\sum_{j=1}^N x_{ij} x_{fi} = 0$, если $f \neq i$.

г) рототабельности — условия равноточного предсказания исследуемого параметра на равных расстояниях от центра эксперимента вне зависимости от направления.

Условие ортогональности позволяет упростить вычисления и получить независимые оценки коэффициентов регрессии. Это означает, в частности, что замена нулем любого коэффициента в уравнении ММ не изменит оценок остальных коэффициентов. Это свойство может быть полезным, когда точный вид модели не известен и требуется по экспериментальным данным отобрать факторы, существенно влияющие на исследуемый параметр. Если условие ортогональности не выполняется, после исключения каждого незначимого коэффициента необходимо пересчитывать оценки оставшихся коэффициентов и их дисперсии. При этом могут измениться как доверительные интервалы, так и выводы относительно коэффициентов значимости;

Матрица, удовлетворяющая условиям симметричности, нормировки и ортогональности, называется *оптимальной*.

МП ПФЭ является оптимальной для линейных ММ. Если же ММ содержит взаимодействия, то условие рототабельности не выполняется.

2.3. Порядок постановки ПФЭ

Для оценки точности эксперимента для каждой i - точки факторного пространства (для каждого сочетания уровней факторов МП) проводят n опытов. В результате получают значения $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ исследуемого параметра, для которых находят среднее значение

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n y_{iq}. \quad (2.3)$$

При этом опыты в одной точке проводят не подряд, а обходят все точки в первой серии опытов, затем во второй, и так далее до n -й. Для уменьшения влияния внешней среды и неконтролируемых факторов внутри каждой серии точки факторного пространства обходят случайным образом – рандомизируют последовательность опытов. Рандомизацию опытов можно провести с помощью генератора случайных чисел.

2.4. Проверка воспроизводимости опытов (однородности дисперсий)

Опыт считается воспроизводимым, если дисперсия выходного параметра y , однородна в каждой точке факторного пространства. Оценка s^2 дисперсии определяется для каждой точки факторного пространства по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2. \quad (2.4)$$

Если сравниваемое количество дисперсий больше двух, можно воспользоваться критерием Кохрена (Приложение В). Этот критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов.

Для этого формулируют нулевую гипотезу $H_0: s^2 y_1 = s^2 y_2 = \dots = s^2 y_n$ – дисперсии значений отклика в каждом опыте однородны.

Для этого подсчитывается дисперсия значений отклика для каждого из опытов эксперимента, а затем из всех дисперсий находится наибольшая $s_{\max}^2 = \max \{s_i^2, i = 1, n\}$, которая делится на сумму всех дисперсий:

$$G_{\text{расч}} = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2}, \quad (2.5)$$

Если полученное значение дисперсионного отношения $G_{\text{расч}} > G_{\text{табл}}(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)$ больше приведенного в таблице, это означает, что дисперсии значимо отличаются друг от друга, т. е. что они неоднородны. Здесь α — уровень значимости, γ_1 и γ_2 — степени свободы, при этом $\gamma_1 = m - 1$, $\gamma_2 = N$.

2.5. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Расчет оценок коэффициентов уравнения регрессии производится по методу наименьших квадратов, при этом минимизируется сумма квадратов отклонений между экспериментальными значениями исследуемого параметра и значениями, вычисленными для тех же точек факторного пространства по уравнению регрессии:

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i, \quad j = 0, k. \quad (2.6)$$

Благодаря предварительной стандартизации масштаба факторов и ортогональности МП, расчет оценок коэффициентов регрессии в ПФЭ превращается в простую арифметическую процедуру.

2.6. Исследование свойств регрессионной модели

2.6.1. Проверка значимости коэффициентов регрессии проводится независимо друг от друга на основании t – критерия Стьюдента (Приложение Б):

$$t_{\text{расч}} = \frac{|b_j|}{s_{b_j}}, \quad (2.7)$$

где s_{b_j} — оценка среднего квадратичного отклонения погрешности определения коэффициента.

Оценка дисперсии коэффициентов, найденных по экспериментальным данным вычисляется в соответствии с выражением

$$s_{b_j}^2 = \frac{s_{\text{воспр}}^2}{N \cdot m}, \quad s_{b_j} = \sqrt{s_{b_j}^2}. \quad (2.8)$$

Оценкой генеральной дисперсии воспроизводимости $s_{воспр}^2$, характеризующая точность одного измерения, является средняя из всех построчных дисперсий

$$s_{воспр}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_{yi}^2. \quad (2.9)$$

При выбранном уровне статистической значимости α и при числе степеней свободы $\gamma = N(m-1)$ находят табличное значение коэффициента $t_{табл.}$. Найденное табличное значение сравнивается с расчетным значением коэффициента. Если выполняется неравенство $t_{табл.} > t_{расч.}$, то принимается нуль-гипотеза, т.е. считается, что найденный коэффициент b_j является статистически незначительным и его следует исключить из уравнения регрессии.

Оценка среднего квадратичного отклонения погрешности определения коэффициента s_{bj} при достаточном числе степеней свободы может быть определена и через остаточную дисперсию:

$$s_{bj} = \sqrt{s_{осм}^2 \cdot C_{jj}}, \quad j=0, n; \quad C_{jj} \text{ является диагональным коэффициентом}$$

корреляционной матрицы факторов и равен $C_{jj} = \frac{1}{m}$, а

$$s_{осм}^2 = \frac{1}{N - m - 1} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad \hat{y}_i \text{ — значение отклика, вычисленное по}$$

построенному уравнению регрессии и называется теоретическим значением отклика при заданном наборе факторов.

2.6.2. Проверка адекватности регрессионной модели. Математическая модель должна достаточно верно качественно и количественно описывать свойства объекта исследования. Для проверки адекватности оценивают отклонение предсказанного уравнением регрессии значения выходного параметра $\hat{y}_i$ от результатов эксперимента y_i . Для этого вычисляют дисперсию адекватности или остаточную дисперсию:

$$s_{осм}^2 = \frac{1}{N - m' - 1} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (2.10)$$

где m' — число значимых коэффициентов модели, $m' \leq m$, причем коэффициент b_0 в расчет не берется.

Если $s_{осм}^2$ не превышает дисперсии опыта s_y^2 , то полученная ММ адекватно представляет результаты эксперимента, иначе — описание считается неадекватным объекту. Проверка гипотезы об адекватности проводится с помощью F -критерия Фишера (Приложение А).

$$F_{расч} = s_{осм}^2 / s_y^2. \quad (2.11)$$

По уровню значимости α и степеням свободы $\gamma_1 = N - m'$ и $\gamma_2 = N(m-1)$ определяется критическое значение $F(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$. Если $F \leq F(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, то уравнение регрессии считается адекватным.

В случае если $s_{осм}^2 \leq s_y^2$, то $F_{расч} \leq 1$ и неравенство $F \leq F(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ будет выполняться всегда.

Как правило, вначале проверяют адекватность линейной ММ. Если предположение об адекватности подтверждается, то в качестве окончательной ММ выбирают линейную; если отклоняется — добавляют эффект взаимодействия с наибольшим коэффициентом и вновь проверяют гипотезу, и так до тех пор, пока существуют степени свободы.

Если в результате модель все же оказалась неадекватной, это говорит о том, что тип математической модели выбран неудачно и при данном шумовом уровне и классе точности измерительных приборов ММ должна быть уточнена. Для этого следует использовать более сложные модели, например, квадратичные (ортогональное и рототабельное композиционное планирование).

2.7. Переход к физическим переменным

Для записи ММ в реальных физических величинах производят обратный переход от стандартизированного масштаба к натуральному. Это можно сделать с помощью соотношения (2.2). После чего записывают окончательный вид модели.

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Задания выполняются в соответствии с индивидуальными вариантами, приведенными в Приложении Г. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Вариант задания представляет собой результаты ПФЭ типа 2^2 . В ходе эксперимента в каждой точке факторного пространства проводились три параллельных опыта. Порядок проведения опытов соответствует матрице эксперимента, представленной в таблице 2.2.

В ходе выполнения индивидуального задания требуется по предложенным экспериментальным данным построить регрессионные линейные модели и провести регрессионный анализ построенных моделей. Для этого необходимо:

- построить матрицу планирования экспериментов;
- проверить воспроизводимость опытов;
- рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения;
- проверить адекватность полученной модели;

- провести анализ результатов и сделать выводы.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Цель работы.
2. Постановку задачи.
3. Матрицу планирования эксперимента.
4. Результаты проверки воспроизводимости опытов.
5. Результаты расчетов коэффициентов регрессионных моделей и проверки из статистической значимости.
6. Результаты проверки адекватности полученной модели исходным экспериментальным данным.
7. Выводы и предложения о ходе дальнейших исследований, составленные на основании анализа регрессионных моделей.

5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Требуется исследовать влияние технологических факторов (номиналов резисторов R_1 и R_2) в интегральной транзисторно-транзисторной логической схеме на значение средней потребляемой мощности $P=f(R_1, R_2)$. Номинальные значения факторов: $R_1=7\text{кОм}$, $R_2=3\text{кОм}$, область изменения факторов соответственно $[5;9]$ и $[2;4]$ кОм. Функцию $f(R_1, R_2)$ будем искать в виде линейной модели (2.1).

Составим ПФЭ для четырех серий опытов при интервалах варьирования для R_1 — 0,4кОм, R_2 — 0,2кОм. Для стандартизации масштабов факторов вычислим значения нижнего и верхнего уровня согласно соотношению (2.2) и сведем результаты в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 — Условия проведения ПФЭ.

Характеристика плана	Стандартный масштаб x_i	Натуральный масштаб	
		$x_1=R_1$, кОм	$x_2=R_2$, кОм
Нулевой уровень	0	7	3
Верхний уровень	+1	7,2	3,1
Нижний уровень	-1	6,8	2,9

Составим матрицу эксперимента с учетом рандомизации опытов. В таблице 5.2 представлены результаты параллельных опытов и вычислены среднее значение отклика и дисперсия для каждой точки факторного пространства соответственно соотношениям (2.3) и (2.4).

Проведем анализ воспроизводимости опыта на основе критерия Кохрена в соответствии с (2.5): $G_{расч}=0,485$, табличное значение критерия определяем при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1=m-1=4$, $\gamma_2=N=4$, получаем $G_{табл}(\alpha;\gamma_1;\gamma_2)=0,630$. Так как $G_{расч}<G_{табл}$, опыт является вос-

производимым, и его результаты можно использовать для оценки коэффициентов регрессионного уравнения.

Таблица 5.2 — Результаты эксперимента.

№	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{cp}	s^2_{yi}
1	1	-1	-1	6,54	6,29	6,51	6,42	6,56	6,46	0,02
2	1	1	-1	6,57	6,37	6,33	6,21	6,10	6,32	0,04
3	1	-1	1	6,28	6,37	6,37	6,15	6,46	6,33	0,02
4	1	1	1	6,21	6,00	6,01	6,07	6,13	6,08	0,01

В соответствии с расчетным соотношением (2.6) можно определить коэффициенты регрессионной модели.

Для анализа значимости коэффициентов необходимо вычислить погрешности определения коэффициентов модели и расчетное значение t – критерия Стьюдента на основании соотношений (2.7) — (2.9). Результаты расчетов в таблице 5.3.

Таблица 5.3 — Результаты анализа значимости коэффициентов.

	b_0	b_1	b_2
коэффициенты регрессионной модели	6,296	-0,097	-0,093
погрешности определения коэффициентов	0,011	0,020	0,020
$t_{расч}$	188,93	2,92	2,78
ВЫВОД	ЗН	ЗН	ЗН

Для принятия решения о значимости коэффициентов уравнения регрессии расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ сравнивается с табличным значением. Табличное значений критерия Стьюдента $t_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степени свободы $\gamma=N(m-1)=16$, $t_{табл}=2,12$. Неравенство $t_{расч} > t_{табл}$ выполняется для всех коэффициентов ММ, поэтому они все считаются значимыми и включаются в модель.

Проверка адекватности построенной модели выполняется в соответствии с критерием Фишера (2.11). Согласно выражению (2.9) дисперсия воспроизводимости равна $s^2_{воспр}=0,022$, остаточная дисперсия в соответствии с (2.10) составляет $s^2_{ост}=0,036$, Расчетное значение критерия Фишера (2.11) равно $F_{расч}=1,63$. Табличное значений критерия Фишера $F_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы

$\gamma_1 = N - m' - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$ и $\gamma_2 = N \cdot (m - 1) = 4 \cdot (5 - 1) = 16$, $F_{табл} = 4,49$. Неравенство $F_{расч} < F_{табл}$ выполняется, поэтому построенная регрессионная модель считается адекватной экспериментальным данным.

Перейдем от кодированных значений факторов к натуральному исчислению в соответствии с выражением (2.2) и условиями проведения эксперимента в таблице 2.6:

$$P = 12,484 - 0,487R_1 - 0,925R_2. \quad (2.12)$$

Таким образом, выражение (2.12) представляет характер изменения средней потребляемой мощности P интегральной транзисторно-транзисторной логической схемы в области изменения номиналов резисторов $6,8 \leq R_1 \leq 7,2$ кОм, $2,9 \leq R_2 \leq 3,1$ кОм.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем сущность планирования эксперимента? Поясните разницу между активным и пассивным экспериментом.
2. Какие задачи решает теория планирования эксперимента?
3. Что такое факторы и какие требования к ним предъявляются? Как выбрать уровни варьирования факторов?
4. Какие требования предъявляются к факторам?
5. В чем сущность ПФЭ и какие ММ он позволяет исследовать?
6. Какую область описывает уравнение регрессии, полученное с помощью ПФЭ и в каких границах его можно использовать?
7. В чем сущность и цели стандартизации масштаба факторов?
8. Как составляется и какими свойствами обладает МП ПФЭ?
9. Каков порядок постановки опытов при ПФЭ?
10. Как проверить воспроизводимость опытов?
11. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
12. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
13. Как проверить адекватность полученной ММ?
14. Как перейти к исходным физическим переменным?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Космин В.В. Основы научных исследований: Учебное пособие для магистров / В.В. Космин. — М.: РИОР: ИНФРА-М, 2013. — 213 с.
2. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных. / Н.И. Сидняев — М.: Юрайт-Издат, ООО, 2012. — 399с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Распределение Фишера.

Значения F -критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.9	249.0	254.3
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Распределение Стьюдента.

Значения t -критерия Стьюдента при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	Значения t -критерия
1	12.71
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
8	2.306
9	2.262
10	2.228
11	2.201
12	2.179
13	2.160
14	2.145
15	2.131
16	2.120
17	2.110
18	2.101
19	2.093
20	2.086
21	2.080
22	2.074
23	2.069
24	2.064
25	2.060
26	2.056
27	2.052
28	2.048
29	2.045
30	2.042
∞	1.960

ПРИЛОЖЕНИЕ В

G-распределение Кохрена

(значение $G \cdot 100$ в зависимости от числа степени свободы γ_1 , γ_2) и $\alpha = 0.05$

$\gamma_2 \backslash \gamma_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	999	975	939	906	877	853	833	816	801	788	734	660	581	500
3	967	871	798	746	707	677	653	633	617	603	547	475	403	333
4	907	768	684	630	589	560	536	518	502	488	437	372	309	250
5	841	684	598	544	506	478	456	439	424	412	365	307	251	200
6	781	616	532	480	445	418	398	382	368	357	314	261	212	167
7	727	561	480	431	397	373	354	339	326	315	276	228	183	143
8	680	516	438	391	360	336	319	304	293	283	246	202	162	125
9	639	478	403	358	329	307	290	277	266	257	223	182	145	111
10	602	445	373	331	303	282	267	254	244	235	203	166	131	100
12	541	392	326	288	262	244	230	219	210	202	174	140	100	083
15	471	335	276	242	216	203	191	182	174	167	143	114	089	067
20	389	271	221	192	174	160	150	142	136	130	111	089	068	050
24	343	235	191	166	149	137	129	122	116	111	094	074	057	042
30	293	198	159	138	124	114	106	100	096	092	077	060	046	033
40	237	158	126	108	097	089	083	078	075	071	060	046	035	025
60	174	113	090	077	068	062	058	055	052	050	041	032	023	017
120	900	063	050	042	037	034	031	029	028	027	022	017	012	008

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

1

25,40	26,63	24,66
59,76	59,54	57,72
47,40	47,23	46,17
82,07	78,17	81,11

2

28,21	29,58	27,39
66,37	66,13	64,11
52,64	52,45	51,28
91,15	86,82	90,09

3

5,04	5,28	4,89
11,85	11,81	11,45
9,40	9,37	9,16
16,28	15,50	16,09

4

2,52	2,64	2,45
5,93	5,90	5,72
4,70	4,68	4,58
8,14	7,75	8,04

5

2,29	2,40	2,23
5,39	5,37	5,21
4,28	4,26	4,17
7,41	7,05	7,32

6

29,16	31,62	33,66
72,89	71,16	75,80
59,22	59,73	57,64
95,08	99,11	101,75

7

19,41	21,05	22,41
48,53	47,37	50,47
39,42	39,76	38,37
63,30	65,98	67,74

8

9,71	10,52	11,20
24,26	23,69	25,23
19,71	19,88	19,19
31,65	32,99	33,87

9

4,85	5,26	5,60
12,13	11,84	12,62
9,86	9,94	9,59
15,83	16,49	16,93

10

4,42	4,79	5,10
11,04	10,78	11,48
8,97	9,05	8,73
14,40	15,01	15,41

11

5,33	5,70	6,01
11,95	11,69	12,39
9,88	9,96	9,64
15,31	15,92	16,32

12

3,46	3,70	3,91
7,77	7,60	8,05
6,42	6,47	6,27
9,95	10,35	10,61

13

14,99	15,86	14,51
34,98	34,13	33,61
26,02	26,13	26,11
46,21	46,42	48,43

14

8,82	9,33	8,54
20,58	20,08	19,77
15,31	15,37	15,36
27,18	27,31	28,49

15

8,2	8,7	7,9
19,9	19,4	19,1
14,7	14,7	14,7
26,5	26,7	27,8

16

7,4	7,9	7,2
18,1	17,7	17,4
13,3	13,4	13,4
24,1	24,3	25,3

17

4,83	5,13	4,66
11,79	11,49	11,31
8,67	8,71	8,70
15,69	15,77	16,47

18

2,85	3,01	2,75
6,64	6,48	6,38
4,94	4,96	4,95
8,77	8,81	9,19

19

7,05	7,64	8,14
17,62	17,20	18,33
14,32	14,44	13,94
22,99	23,96	24,60

20

27,94	29,58	30,94
57,06	55,90	58,99
47,95	48,29	46,90
71,83	74,51	76,27

21

11,51	13,15	14,51
40,63	39,47	42,57
31,52	31,86	30,48
55,40	58,08	59,84

22

16,50	17,30	16,02
38,82	38,69	37,50
30,80	30,69	30,00
53,32	50,79	52,70

23

21,61	23,15	20,69
64,54	64,27	62,00
49,10	48,88	47,57
92,42	87,54	91,22

24

2,19	2,30	2,13
5,15	5,14	4,98
4,09	4,07	3,98
7,08	6,74	7,00