

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования**
«Севастопольский государственный университет»

Методические указания
к выполнению
контрольной работы по дисциплине
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»
для студентов заочной формы обучения
по направлению подготовки
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Направленность(профиль)
09.03.01.01 «ЭВМ, системы и сети»

Севастополь
2016

Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» Направленность(профиль) 09.03.01.01 «ЭВМ, системы и сети» / Сост. О.В. Ченгарь, Е.М. Шалимова. Севастополь: ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», 2016.- 54с.

Целью методических указаний является оказание помощи студенту в выполнении контрольной работы. Методические указания содержат общие положения и требования к отчету, основные теоретические сведения, описание вариантов индивидуальных заданий.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Информационные технологии и компьютерные системы». Протокол № 9 от 19.05.2016.

Составители:

Ченгарь О.В. к.т.н., доцент кафедры ИТиКС,

Шалимова Е.М. ст. преподаватель кафедры ИТиКС.

Рецензент

Карлусов В.Ю. к.т.н., доцент кафедры ИС.

Ответственный за выпуск

Брюховецкий А.А. к.т.н., доцент, зав. кафедрой ИТиКС.

Содержание

1. Цель контрольной работы.....	4
2. Общие положения и требования к отчету	4
3. Основные теоретические сведения	5
3.1. Элементы теории множеств	5
3.2. Отношения.....	7
3.3. Задача о покрытии на языке теории множеств.....	9
3.4. Виды и способы задания графов.....	10
3.5. Матричные способы задания графов.....	11
3.6. Маршруты, циклы в неориентированном графе	12
3.7. Пути, контуры в ориентированном графе.....	12
4. Порядок выполнения КР	13
5. Варианты индивидуальных заданий	13
5.1. Задание 1. Операции над множествами	13
5.2. Задание 2. Подмножества	15
5.3. Задание 3. Основные операции над отношениями	15
5.4. Задание 4. Максимальные совместимые подмножества	17
5.5. Задание 5. Поиск минимального покрытия таблицы покрытий.....	19
5.6. Задание 6. Поиск кратчайшего пути в графе	23
5.7. Задание 7. Система независимых циклов в графе.....	33
5.8. Задание 8. Кратчайшая раскраска вершин графа.....	37
5.9. Задание 9. Максимальный поток в сети	37
6. Контрольные вопросы	48
Список использованных источников	49
Приложение А. Пример оформления титульного листа.	50
Приложение Б. Пример решения задачи о минимальном покрытии.....	51
Приложение В. Пример поиска кратчайшего пути в орграфе волновым алгоритмом.....	53

1. Цель контрольной работы

Цель выполнения контрольной работы (КР) – изучение основных понятий теории множеств и отношений, теории графов, приобретение практических навыков в выполнении операций над множествами, отношениями и графами.

2. Общие положения и требования к отчету

КР выполняется в соответствии с рабочей программой дисциплины «Дискретная математика». КР выполняется во внеаудиторное время, т.е. в часы самостоятельной работы. По результатам выполнения задания оформляется и защищается отчет. Отчёты оформляются и защищаются каждым студентом индивидуально. Студенты должны выполнять и защищать КР в соответствии с графиком учебного процесса.

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 и содержать следующие основные элементы:

- титульный лист,
- цель работы,
- постановку задачи с указанием варианта задания,
- описание используемых алгоритмов,
- последовательность выполняемых преобразований,
- результаты,
- выводы.

Постановка задачи должна включать изложение содержания задачи, целей её решения, а также определять исходные данные и формы их представления, метод решения, выходные данные и формы их представления. Описание алгоритмов предполагает математическую формулировку задачи с указанием четкой последовательности шагов, выполняемых в процессе решения задачи. Решение задач, иллюстрирующих реализацию алгоритмов, должны сопровождаться необходимыми комментариями и включать анализ полученных результатов.

Примеры оформления титульного листа, решения задачи о покрытии и поиска кратчайшего пути в графе волновым алгоритмом приведены в Приложениях А, Б и В настоящих методических указаний.

3. Основные теоретические сведения

3.1. Элементы теории множеств

Множество – любая совокупность объектов, рассматриваемых совместно. Объекты, из которых составлено множество, называются его **элементами**. Для задания множества необходимо указать, какие элементы ему принадлежат. Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита (**A, B, C...**), а элементы – строчными (**a, b, c...**), которые обычно снабжаются индексами. Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается $\emptyset$. Некоторые множества имеют общепринятые имена: **N** – множество натуральных чисел; **Z** – множество целых чисел; **R** – множество вещественных чисел. Элементы множества заключаются в фигурные скобки и отделяются друг от друга запятыми. Основное соотношение между элементом и содержащим его множеством обозначается $a \in A$ (**a** принадлежит **A**). Если количество элементов в множестве счётно, то множество называется **конечным**, иначе – **бесконечным**. Существует два способа задания множеств: перечислением его элементов или указанием порождающей процедуры.

Например,

$$A = \{a_1, a_2, a_3\};$$

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ или } X = \{x_i \mid x_i \in N \& x_i < 10\}.$$

Обычно, в каждом конкретном случае элементы рассматриваемого множества выбираются из некоторого **универсального** множества **U** (своего для каждого случая).

Над множествами определены следующие операции:

– **объединение:**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\};$$

– **пересечение:**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \& x \in B\};$$

– **разность:**

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \& x \notin B\};$$

– **дополнение:**

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \& x \notin A\}.$$

Операция дополнения подразумевает, что задано некоторое универсальное множество **U**: $\bar{A} = U/A$, в противном случае операция дополнения не определена.

Операции над множествами обладают рядом важных свойств.

Пусть задано универсальное множество U , тогда для любых $A, B, C \in U$ выполняются следующие равенства:

1) **идемпотентность:**

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A;$$

2) **коммутативность:**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

3) **ассоциативность:**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

4) **дистрибутивность:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

5) **поглощение:**

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A;$$

6) **свойства нуля:**

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

7) **свойства единицы:**

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A;$$

8) **инволютивность:**

$$\overline{\overline{A}} = A;$$

9) **законы де Моргана:**

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}, \quad A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

10) **свойства дополнения:**

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset;$$

11) **выражение для разности:**

$$A/B = A \cap \overline{B}.$$

Геометрическое изображение множеств – **диаграмма Эйлера-Венна**. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего **универсальное множество U** , а внутри него окружностей, представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы, соответствующих множеств.

3.2. Отношения

Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество M всех пар (a,b) , таких, что a принадлежит A , а b принадлежит B :

$$M = A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Причем:

$$A \times B \neq B \times A$$

Пример

$$A = \{1,2,3\} \quad B = \{8,9\}$$

$$A \times B = \{(1,8), (1,9), (2,8), (2,9), (3,8), (3,9)\}$$

$$B \times A = \{(8,1), (8,2), (8,3), (9,1), (9,2), (9,3)\}$$

Бинарным (двуместным) отношением между элементами a, b множеств A и B называется любое подмножество R множества $A \times B$.

Если $A=B$, то отношение называется **бинарным отношением на A** .

Вместо (a,b) часто записывают aRb .

Отношение **однозначно** определяется множеством R . Часто отношения задают **матрицей отношений $R = \|r_{ij}\|$** , в которой

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in R \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Бинарное отношение R на множестве A называется **рефлексивным**, если

$$(a, a) \in R \quad \forall a \in A,$$

антирефлексивным, если

$$(a, a) \notin R \quad \forall a \in A.$$

Если хотя бы для одного $a \in A$ пара $(a, a) \notin R$, то отношение называют **нерефлексивным**.

Бинарное отношение R на множестве A называется **симметричным**, если из

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in A,$$

асимметричным, если это условие не выполняется:

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \quad \forall a, b \in A$$

антисимметричным (выполнение отношений aRb и bRa влечёт $a = b$, или, то же самое, выполнение отношений aRb и bRa возможно только для равных a и b), если из

$$(a, b) \in R \ \& \ (b, a) \in R \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Причем антисимметричность отношения не исключает симметричности!

Бинарное отношение R на множестве A называется **транзитивным**, если из

$$(a, b) \in R \ \& (b, c) \in R \quad \Rightarrow \quad (a, c) \in R.$$

Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение R называется **отношением эквивалентности**.

Отношение толерантности – рефлексивное, симметричное, но нетранзитивное бинарное отношение R .

Отношения определены как множества, поэтому над ними выполняются операции **объединения, пересечения и дополнения**. Кроме того, введены две новых операции: **обратное отношение** и **композиция** или **произведение отношений**.

Пусть бинарные отношения R, R_1, R_2 – подмножества $A \times B$ (может быть $A=B$).

Символы: $\&$ - «и», $\vee$ - «или», $\exists$ - «существует».

1. **Объединение:**

$$R_1 \cup R_2 = \{(a, b) | (a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2\}.$$

2. **Пересечение:**

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, b) | (a, b) \in R_1 \& (a, b) \in R_2\}.$$

3. **Разность:**

$$R_1 \setminus R_2 = \{(a, b) | (a, b) \in R_1 \& (a, b) \notin R_2\}.$$

4. **Дополнение:**

$$\bar{R} = (A \times B) \setminus R.$$

5. **Обратное отношение для R :**

$$R^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in R\}.$$

6. **Произведение отношений (композиция):**

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) | \exists b \in B: (a, b) \in R_1 \& (b, c) \in R_2\},$$

$$R_1 \subseteq A \times B \ \& R_2 \subseteq B \times C.$$

Свойства операций

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
3. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$
4. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$

3.3. Задача о покрытии на языке теории множеств.

Пусть $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ – опорное множество. Имеется множество $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ подмножеств множества B ($A_i \subseteq B$), $\bigcup_{i=1}^m A_i = B$. Каждому подмножеству A_i сопоставлена цена a_i . Множество $P = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_l}\}$, ($l \leq m$) называется решением задачи о покрытии или просто **покрытием**, если выполнено условие:

$$\bigcup_{j=1}^l A_{i_j} = B$$

Объяснением термина «покрытие» служит то, что совокупность множеств $A_{i_1}, \dots, A_{i_l}$ содержит все элементы множества B , т.е. покрывает множество B .

Теорема. Если P – покрытие, то $P' \supseteq P$ – тоже покрытие, т.е. множество всех возможных покрытий вогнуто.

Определения:

Покрытие P называется **безызыбыточным**, если при удалении из него хотя бы одного элемента оно перестает быть покрытием. Иначе – покрытие **избыточно**.

Покрытие P называется **минимальным**, если его цена $S = \sum_{j=1}^l a_{i_j}$ – наименьшая среди всех покрытий данной задачи.

Покрытие P называется **кратчайшим**, если количество l наборов – наименьшее среди всех покрытий задачи.

Теорема. Минимальные и кратчайшие покрытия – безызыбыточны.

Таблица покрытий T весьма удобна для представления исходных данных в задаче о покрытиях. Эта таблица – матрица T отношения принадлежности элементов множеств $A_i \in A$ опорному множеству B . Столбцы матрицы T сопоставлены элементам множества B , строки – элементам множества A :

$$T_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_j \in B \text{ и } b_j \in A_i \\ \emptyset, & \text{если } b_j \in B \text{ и } b_j \notin A_i \end{cases}$$

На языке таблицы покрытий задача о покрытии формулируется как задача построения таких подмножеств P_i строк таблицы покрытий, чтобы в совокупности строк, входящих в P_i , во всех столбцах были единицы. Такое подмножество строк называется **покрытием**.

3.4. Виды и способы задания графов

Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества вершин) и множества E его двухэлементных подмножеств множества V (E – множество ребер).

Существуют два основных вида графов (и множество их подвидов): ориентированные и неориентированные.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется **ориентированным**. Ребра ориентированного графа называются **дугами**. Соответствующие вершины ориентированного графа называют **началом** и **концом**.

Если направления ребер не указываются, то граф называется **неориентированным** (или просто графом).

Граф называется **простым**, если каждую пару вершин соединяет не более чем одно ребро.

Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется **смешанным**.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют **кратными**.

Граф, содержащий кратные ребра, называется **мультиграфом**.

Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро может соединять вершину саму с собой. Такое ребро называется **петлей**.

Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что вершины x и y **инцидентны** ребру a , если эти вершины соединены a .

Две вершины называются **смежными**, если они инцидентны одному и тому же ребру.

Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину.

Степенью вершины графа называется число ребер, инцидентных этой вершине.

Вершина, имеющая степень 0, называется **изолированной**, а степень 1 – **висячей**.

Необходимость учитывать ориентацию ребер в орграфе приводит к расщеплению понятия «степень вершины» на две части: **полустепенью захода** вершины v_i ($d^-(v_i)$) называется число ребер, заходящих в v_i , **полустепенью исхода** v_i ($d^+(v_i)$) – число ребер, выходящих из нее.

Степень вершины обозначают через $\deg v_i$.

Для орграфа $\deg v_i = d^+(v_i) + d^-(v_i)$.

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины x , обозначают $G(x)$, то есть

$$G(x) = \{y: (x, y) \in G\}.$$

Множество $G(x)$ называют **образом вершины x** . Соответственно $G^{-1}(y)$ – множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину y ,

$$G^{-1}(y) = \{x: (x, y) \in G\}.$$

Множество $G^{-1}(y)$ называют **прообразом вершины y** .

Граф (G_1, X) называется **частичным** для (G, X) , если $G_1 \subset G$, т.е. частичный граф получается из графа (G, X) удалением некоторых дуг.

Подграфом (G_1, X_1) графа (G, X) называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G , т.е. $X_1 \subset X$ и G_1 получается из G удалением дуг, инцидентных удаленным вершинам.

Граф $G = (X, A)$ – **полный**, если для любой пары вершин x_i и x_j существует ребро (x_i, x_j) .

Граф $G = (X, A)$ – **симметрический**, если для любой дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i) .

Граф $G = (X, A)$ – **планарный**, если он может быть изображен на плоскости так, что не будет пересекающихся дуг.

3.5. Матричные способы задания графов

Для алгебраического задания графов используются матрицы смежности и инцидентности.

Матрица смежности $A = (a_{ij})$ определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графов. Это квадратная матрица порядка n , где n – число вершин, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (x_i, x_j) \in A, \\ 0, \text{если } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$$

Матрицей инцидентности $B = (b_{ij})$ ориентированного графа называется прямоугольная матрица $(n \times m)$, где n – число вершин, m – число ребер, у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершина } x_i \text{ является началом дуги } a_j; \\ -1, \text{вершина } x_i \text{ является концом дуги } a_j; \\ 0, \text{вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j; \end{cases}$$

Для неориентированного графа матрица инцидентности B задается следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_j; \\ 0, \text{вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } a_j \end{cases}$$

3.6. Маршруты, циклы в неориентированном графе

Маршрутом или **цепью** в G называется такая последовательность (конечная или бесконечная) ребер $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, что каждые соседние два ребра a_i и a_{i+1} имеют общую инцидентную вершину.

Вершина x_1 , инцидентная ребру a_1 , но не инцидентная ребру a_2 , называется **началом маршрута**, а вершина x_n , инцидентная ребру a_n , но не инцидентная ребру a_{n-1} , называется **концом маршрута**.

Длиной (или мощностью) маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Замкнутый маршрут называется **циклом**.

Маршрут (цикл), в котором все ребра различны, называется **простой цепью (циклом)**. Маршрут (цикл), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется **элементарной цепью (циклом)**.

Граф, в котором найдется маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине, и проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется **Эйлеровым графом**.

3.7. Пути, контуры в ориентированном графе

Путем ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.

Число дуг пути называется **длиной пути**.

Путь называется **контуром**, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.

Путь (контур), в котором все дуги различны, называется **простым**.

Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется **элементарным**.

Понятиям ребра, маршрута, цепи, цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути, ориентированной цепи, контура в ориентированном графе (табл.3.1).

Таблица 3.1.

Неориентированный граф	Ориентированный граф
ребро	дуга
маршрут	путь
цикл	контур

4. Порядок выполнения КР

1. Изучить разделы 1-3 настоящих методических указаний.
2. По согласованию с преподавателем определить вариант индивидуальных заданий.
3. Выполнить задания в соответствии с индивидуальным номером варианта и разделом 5 настоящих методических указаний.
4. Оформить отчет.

5. Варианты индивидуальных заданий

5.1. Задание 1. Операции над множествами

Заданы множества A, B, C .

При $U = \{u_i \mid u_i \in N \text{ и } u_i \leq 20\}$, Построить:

- $X = A \cup B$,
- $Y = A \cap B$,
- $Z = A \setminus B$,
- $\bar{C}$,
- $Y \times Z$ (для полученных Y и Z).

1.

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 16\}$
 $B = \{5, 6, 20, 15, 11, 1, 16\}$
 $C = \{11, 3, 5, 14, 7, 8, 6, 17\}$

3.

$A = \{12, 3, 14, 9, 6, 18\}$
 $B = \{5, 6, 3, 15, 11, 1, 16\}$
 $C = \{19, 3, 9, 14, 7, 8, 6, 11\}$

5.

$A = \{2, 3, 4, 8, 6, 15\}$
 $B = \{5, 6, 20, 10, 11, 1, 15\}$
 $C = \{11, 3, 5, 4, 7, 8, 9, 10\}$

7.

$A = \{2, 3, 4, 5, 11, 16\}$
 $B = \{5, 6, 1, 11, 9, 16\}$
 $C = \{10, 3, 15, 4, 7, 8, 6, 18\}$

9.

$A = \{12, 6, 14, 1, 8, 16\}$
 $B = \{5, 6, 1, 11, 9, 20\}$
 $C = \{2, 3, 11, 4, 7, 18, 6, 10\}$

2.

$A = \{2, 3, 14, 5, 8, 18\}$
 $B = \{5, 18, 20, 15, 11, 1, 2\}$
 $C = \{1, 13, 5, 14, 7, 8, 6, 19\}$

4.

$A = \{2, 13, 14, 7, 6, 18\}$
 $B = \{6, 2, 15, 13, 18, 3\}$
 $C = \{20, 3, 9, 4, 7, 8, 6, 17\}$

6.

$A = \{2, 3, 9, 8, 16, 20\}$
 $B = \{5, 6, 2, 20, 11, 1, 16\}$
 $C = \{11, 3, 15, 4, 17, 5, 9, 1\}$

8.

$A = \{4, 3, 14, 5, 10, 6\}$
 $B = \{5, 6, 1, 10, 9, 3\}$
 $C = \{10, 13, 5, 4, 7, 2, 6, 18\}$

10.

$A = \{12, 6, 11, 7, 10, 19\}$
 $B = \{15, 6, 8, 11, 19, 20\}$
 $C = \{5, 9, 10, 4, 7, 8, 6, 20\}$

11.

A={16,6,10,1,2,8}

B={5,6,1,11,9,10}

C={2,3,11,4,8,17,6,12}

13.

A={5,6,14,1,8,16}

B={6,1,5,11,9,2}

C={12,3,1,4,17,8,6,10}

15.

A={20,19,14,3,8,11}

B={5,6,3,11,9,20}

C={2,3,11,14,7, 8,16,10}

17.

A={12,3,14,11,5,1,13}

B={5,6,1,13,9,18}

C={12,3,10,4,7,18,6,1}

19.

A={4,6,14,7,8,19}

B={6,1,11,4,9,20}

C={2,3,10,4,11,18,6,13}

21.

A={7,16,14,2,8,19}

B={2,1,11,4,19,20}

C={12,20,4,11,18,6,3,13}

23.

A={14,6,17,3,18,2}

B={6,1,11,14,9,12}

C={2,3,20,14,1,18,6,13}

25.

A={14,5,14,17,8,9}

B={6,1,11,14,9,18}

C={2,15,16,11,4,20,8,13}

27.

A={12,15,4,6,10,9}

B={6,10,11,15,19,4}

C={12,15,1,4,20,18,6,13}

29.

A={15,5,9,1,3,7}

B={5,6,1,11,9,10}

C={2,3,11,4,8,17,6,12}

12.

A={16,6,10,1,2,8}

B={5,6,1,11,9,10}

C={11,4,8,2,3,17,6,12}

14.

A={15,8,14,10,9,6}

B={6,1,8,11,9,2,20}

C={8,16,12,13,7,4,9,10}

16.

A={12,1,14,13,8,2}

B={2,6,3,1,9,20}

C={13,11,4,7,18,2,16,10}

18.

A={10,14,12,8,15,1,13}

B={5,6,1,13,9,8}

C={12,9,10,4,17,5,6,1}

20.

A={12,7,14,6,8,9}

B={6,14,11,4,9,20}

C={12,15,1,4,20,18,6,13}

22.

A={12,15,4,6,10,9}

B={6,14,11,4,9,20}

C={20,15,1,4,3,18,6,13}

24.

A={15,7,14,6,18,19}

B={6,14,11,14,19,20}

C={2,15,1,4,20,8,16,3}

26.

A={16,8,13,7,19,20}

B={7,15,12,11,6,7,19}

C={2,3,19,14,1,18,6,13}

28.

A={20,9,14,2,8,11}

B={6,2,12,4,9,20}

C={13,11,4,7,18,2,6,20}

30.

A={16,6,10,1,2,8}

B={5,6,1,11,9,10}

C={11,4,8,2,3,17,6,12}

5.2. Задание 2. Подмножества

Построить множество всех подмножеств множества Y , полученного при выполнении задания 1 (п.5.1).

5.3. Задание 3. Основные операции над отношениями

Заданы отношения R_1 и R_2 . Построить:

- $R_1 \cup R_2$,
- $R_1 \cap R_2$,
- $\bar{R}_1$
- $R_1 \circ R_2$.

1.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			1
x_2		1		
x_3	1		1	

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1	1		
y_2		1	
y_3	1	1	1
y_4			1

2.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			
x_2		1		1
x_3			1	1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1		1	
y_2	1		1
y_3	1	1	1
y_4	1		

3.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			
x_2	1	1		1
x_3	1		1	

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1	1		1
y_2		1	
y_3	1	1	
y_4			1

4.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			
x_2		1		1
x_3			1	1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1		1	
y_2	1		
y_3	1	1	1
y_4	1		1

5.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1		
x_2	1	1		1
x_3		1	1	

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1	1		1
y_2	1	1	
y_3	1	1	
y_4			1

6.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1			1	1
x_2		1		1
x_3		1	1	1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	1		1
y_2		1	
y_3	1	1	
y_4			1

7.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			1
x_2		1	1	1
x_3		1	1	

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1	1		1
y_2	1	1	
y_3	1	1	
y_4			1

8.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			1
x_2		1	1	1
x_3		1	1	

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1		1	
y_2	1	1	
y_3	1	1	
y_4		1	1

9.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1		
x_2	1	1	1	
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1			1
y_2	1		1
y_3	1		1
y_4	1	1	

10.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1		1	
x_2		1	1	1
x_3		1	1	

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1		1	
y_2	1	1	1
y_3			1
y_4	1	1	

11.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1		1	1
x_2	1	1		
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1			1
y_2	1	1	
y_3	1		1
y_4	1		1

12.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1		
x_2	1	1	1	
x_3		1		1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1			1
y_2	1		1
y_3	1		
y_4	1	1	1

13.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			1
x_2	1		1	1
x_3	1			1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1			1
y_2	1	1	1
y_3	1	1	
y_4			1

14.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1		
x_2	1	1	1	
x_3		1		1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1			1
y_2		1	
y_3	1	1	1
y_4	1		1

15.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1		1	
x_2	1	1	1	
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1			1
y_2	1	1	
y_3	1		1
y_4	1	1	1

16.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1	1	
x_2	1	1	1	
x_3		1		1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1		1	1
y_2	1		
y_3	1		1
y_4	1	1	1

17.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1	1	
x_2		1	1	1
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1		1	1
y_2	1		
y_3	1		1
y_4	1	1	1

18.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1		1	
x_2	1	1		1
x_3		1		1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	1	1	1
y_2			
y_3	1	1	1
y_4	1		1

19.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1			1	
x_2	1	1	1	
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1			1
y_2	1	1	
y_3	1		1
y_4	1	1	1

20.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1		1	1
x_2	1	1		
x_3		1		1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1			
y_2	1	1	
y_3			1
y_4	1	1	1

21.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1	1	
x_2		1		
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1		1	1
y_2	1	1	
y_3	1		
y_4	1	1	1

22.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1		1
x_2	1	1	1	
x_3		1		1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	1		1
y_2		1	
y_3	1		1
y_4		1	1

23.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1	1	
x_2	1		1	
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1		1	1
y_2	1		
y_3			1
y_4	1	1	1

24.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1	1	1
x_2	1		1	
x_3			1	1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	1		1
y_2	1	1	1
y_3			
y_4	1	1	

25.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			1
x_2		1	1	
x_3	1		1	1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1	1		
y_2	1	1	1
y_3			1
y_4	1		1

26.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1		1
x_2		1		
x_3	1			1

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	1		
y_2		1	1
y_3	1	1	1
y_4			

27.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1	1	
x_2	1			1
x_3		1		1

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1	1	1	1
y_2		1	
y_3	1		1
y_4		1	1

28.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1			1
x_2		1	1	
x_3	1		1	

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1		1	1
y_2	1	1	
y_3		1	
y_4	1	1	1

29.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1		1	
x_2		1		1
x_3	1		1	

R_1	y_1	y_2	y_3
y_1	1		1
y_2	1	1	
y_3		1	1
y_4			1

30.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		1		1
x_2		1	1	1
x_3	1		1	

R_2	z_1	z_2	z_3
y_1	1		
y_2	1	1	1
y_3		1	
y_4		1	1

5.4. Задание 4. Максимальные совместимые подмножества

На множестве X задано отношение несовместимости R . Построить все максимальные совместимые подмножества множества X .

1.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	—	1		1	1	
x_2	1	—	1			1
x_3		1	—	1		
x_4	1		1	—		1
x_5	1				—	1
x_6		1		1	1	—

2.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	—		1			1
x_2		—	1	1		
x_3	1	1	—			1
x_4		1		—	1	1
x_5				1	—	1
x_6	1		1	1	1	—

3.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	—	1			1	1
x_2	1	—		1		1
x_3			—	1	1	
x_4		1	1	—		1
x_5	1		1		—	
x_6	1	1		1		—

4.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	—		1	1		
x_2		—	1		1	
x_3	1	1	—			1
x_4	1			—	1	
x_5		1		1	—	1
x_6			1		1	—

5.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	—	1			1	
x_2	1	—		1	1	
x_3			—	1	1	1
x_4		1	1	—		
x_5	1	1	1		—	1
x_6			1		1	—

6.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	—		1	1		1
x_2		—	1		1	
x_3	1	1	—		1	
x_4	1			—		1
x_5		1	1		—	1
x_6	1			1	1	—

7.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–			1	1	1
x ₂		–	1		1	
x ₃		1	–			1
x ₄	1			–	1	1
x ₅	1	1		1	–	
x ₆	1		1	1		–

8.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–		1		1	1
x ₂		–	1	1		
x ₃	1	1	–			1
x ₄		1		–	1	1
x ₅	1			1	–	
x ₆	1		1	1		–

9.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1			1	1
x ₂	1	–		1		1
x ₃			–	1	1	
x ₄		1	1	–		
x ₅	1		1		–	1
x ₆	1	1			1	–

10.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1				1
x ₂	1	–		1	1	
x ₃			–	1	1	1
x ₄		1	1	–		1
x ₅	1	1			–	
x ₆	1		1	1		–

11.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–		1	1		1
x ₂		–	1		1	
x ₃	1	1	–			1
x ₄	1			–	1	
x ₅		1		1	–	1
x ₆	1		1		1	–

12.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1		1		1
x ₂	1	–			1	1
x ₃			–	1	1	
x ₄	1		1	–		
x ₅		1	1		–	1
x ₆	1	1			1	–

13.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1		1		1
x ₂	1	–	1			1
x ₃		1	–	1	1	
x ₄	1		1	–	1	
x ₅			1	1	–	
x ₆	1	1				–

14.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–		1		1	1
x ₂		–	1	1	1	
x ₃	1	1	–			1
x ₄		1		–	1	
x ₅	1	1		1	–	
x ₆	1		1			–

15.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–			1	1	
x ₂		–	1	1		
x ₃		1	–		1	1
x ₄	1	1		–		
x ₅	1		1		–	1
x ₆			1		1	–

16.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1			1	
x ₂	1	–		1		1
x ₃			–	1		1
x ₄		1	1	–		
x ₅	1				–	1
x ₆		1	1		1	–

17.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1				1
x ₂	1	–		1	1	
x ₃			–		1	1
x ₄		1		–	1	1
x ₅		1	1	1	–	
x ₆	1		1	1		–

18.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–		1			1
x ₂		–	1	1		1
x ₃	1	1	–		1	
x ₄		1		–	1	1
x ₅			1	1	–	
x ₆	1	1		1		–

19.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–		1		1	1
x ₂		–	1	1		1
x ₃	1	1	–	1		
x ₄		1	1	–		1
x ₅	1				–	
x ₆	1	1		1		–

20.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1		1	1	
x ₂	1	–			1	
x ₃			–	1		1
x ₄	1		1	–	1	1
x ₅	1	1		1	–	
x ₆			1	1		–

21.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1		1	1	1
x ₂	1	–		1		
x ₃			–	1	1	
x ₄	1	1	1	–		
x ₅	1		1		–	1
x ₆	1				1	–

22.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1	1			1
x ₂	1	–		1		1
x ₃	1		–	1	1	
x ₄		1	1	–		
x ₅			1		–	1
x ₆	1		1		1	–

23.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1				1
x ₂	1	–		1	1	
x ₃			–	1	1	1
x ₄		1	1	–		1
x ₅		1	1		–	
x ₆	1		1	1		–

24.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1			1	
x ₂	1	–	1			1
x ₃		1	–	1		1
x ₄			1	–	1	
x ₅	1			1	–	1
x ₆		1	1		1	–

25.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–		1			1
x ₂		–	1	1	1	
x ₃	1	1	–			1
x ₄		1		–		1
x ₅		1			–	1
x ₆	1		1	1	1	–

26.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1		1		1
x ₂	1	–	1		1	
x ₃			–	1		1
x ₄		1	1	–		1
x ₅		1			–	1
x ₆	1		1	1		–

27.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1		1	1	
x ₂	1	–	1			1
x ₃		1	–	1	1	
x ₄			1	–	1	
x ₅	1		1	1	–	
x ₆		1	1		1	–

28.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1		1	1	
x ₂	1	–			1	1
x ₃		1	–	1		1
x ₄	1		1	–	1	
x ₅			1	1	–	
x ₆	1	1		1		–

29.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–		1			1
x ₂		–	1	1	1	
x ₃	1		–	1		1
x ₄	1	1		–	1	
x ₅	1	1		1	–	
x ₆	1		1		1	–

30.

R	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	–	1			1	
x ₂		–	1	1		1
x ₃		1	–		1	1
x ₄	1	1		–		1
x ₅	1		1		–	1
x ₆	1		1		1	–

5.5. Задание 5. Поиск минимального покрытия таблицы покрытий

Задана таблица покрытий. Построить хотя бы одно минимальное покрытие.

1.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1	1			1			1
B	1				1		1			1
C		1	1	1					1	2
D		1		1	1		1	1		4
E	1		1			1			1	3
F					1			1	1	1
G		1				1		1		2
H			1						1	4

2.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A				1	1		1			1
B	1					1			1	2
C	1			1	1			1	1	3
D			1					1	1	1
E		1	1			1	1			3
F	1	1		1		1	1			2
G		1			1			1		2
H	1			1						4

3.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1	1		1			1		3
B	1		1	1				1		2
C	1			1		1	1		1	4
D		1				1			1	1
E			1	1					1	2
F	1						1	1		2
G					1	1	1			1
H			1					1		3

4.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1		1				1		2
B			1			1			1	1
C		1			1		1		1	3
D	1			1			1		1	2
E	1		1		1					1
F	1		1	1		1		1		3
G			1						1	2
H						1	1	1		2

5.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1					1	1		1
B						1		1	1	2
C		1	1		1	1				3
D			1	1					1	2
E	1				1		1			1
F	1		1	1		1				2
G							1	1		2
H	1			1			1	1	1	3

6.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1			1	1					2
B	1			1		1	1		1	3
C					1		1		1	1
D		1				1	1			2
E		1	1		1			1		3
F	1		1	1	1					2
G	1					1		1		2
H			1	1					1	1

7.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1					1		1
B		1		1		1				2
C	1	1		1	1			1		3
D	1			1		1			1	2
E	1				1		1			1
F		1			1				1	2
G		1			1			1		4
H			1			1	1		1	3

8.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1				1		1		1
B		1		1			1		1	3
C				1	1			1	1	2
D			1			1			1	2
E	1				1		1			1
F	1		1	1						2
G			1			1				3
H	1		1		1	1		1		3

9.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1			1					1	2
B	1						1		1	1
C	1		1			1		1		3
D					1		1	1		2
E		1		1	1		1		1	4
F		1	1	1						1
G		1			1	1				1
H	1						1			3

10.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1	1						1		1
B		1		1	1		1	1		4
C		1		1		1				2
D					1	1	1			1
E			1				1	1		1
F	1		1			1			1	3
G		1						1		3
H				1	1				1	2

11.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1		1				1	1
B		1	1			1	1			3
C		1	1	1					1	2
D	1			1	1			1	1	3
E					1	1		1		1
F	1	1		1		1				2
G	1						1	1		2
H		1	1						1	3

12.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A					1		1	1		2
B	1			1		1				1
C	1	1	1							1
D		1				1	1		1	3
E			1		1		1		1	2
F	1		1	1	1			1		4
G				1				1	1	1
H	1			1						3

13.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1		1				1	1
B		1	1	1				1		3
C			1	1			1		1	2
D	1				1	1	1		1	4
E					1	1		1		2
F	1	1					1			1
G			1	1					1	4
H	1			1		1				1

14.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1	1					1			2
B				1	1				1	2
C					1	1	1	1		2
D		1				1			1	1
E	1		1		1	1				3
F			1	1				1		1
G		1		1			1	1	1	4
H		1				1				3

15.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1			1	1		1		1	4
B	1		1			1	1			2
C	1			1				1		1
D			1				1		1	1
E				1	1	1				2
F		1			1				1	1
G		1		1		1		1		3
H				1		2				3

16.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1			1	1				2
B	1	1		1						1
C	1	1			1			1	1	4
D			1					1	1	2
E	1					1	1	1		2
F					1		1		1	1
G		1		1						3
H			1	1		1	1			3

17.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1	1	1			1	1		3
B			1	1	1					1
C			1				1		1	2
D	1	1		1						1
E		1				1		1		1
F					1	1	1	1		2
G	1				1	1			1	3
H			1	1				1		3

18.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1			1	1	1			3
B		1						1	1	1
C	1		1				1			2
D			1		1	1			1	2
E	1		1	1				1	1	3
F	1			1		1				1
G		1						1		2
H				1	1			1		1

19.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1			1					1	2
B			1			1		1		1
C			1	1	1	1			1	3
D	1			1	1		1			2
E	1	1					1	1		3
F			1				1		1	1
G				1			1			3
H		1			1	1				1

20.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1	1			1			1
B		1	1		1				1	2
C					1	1		1		2
D	1			1	1				1	3
E							1	1	1	1
F	1	1				1				1
G		1	1			1	1	1		3
H							1	1		2

21.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1			1				1		1
B		1	1			1	1			2
C	1				1				1	1
D			1		1	1				2
E	1			1	1	1	1			3
F		1	1					1	1	3
G	1				1	1				3
H		1		1			1			1

22.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A				1			1	1	1	3
B		1	1						1	2
C	1	1	1		1	1				3
D			1	1	1			1		2
E	1					1	1			1
F	1			1	1					1
G			1					1		3
H		1				1		1		1

23.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A					1		1		1	1
B	1		1			1			1	3
C			1	1		1				2
D	1	1					1			1
E		1	1					1		2
F		1		1	1		1	1		3
G					1	1		1		1
H			1			1				3

24.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1			1			1	2
B	1				1		1	1		2
C		1	1	1						1
D	1			1	1				1	3
E					1	1		1		2
F	1	1					1			1
G		1	1			1	1	1		3
H		1					1			2

25.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1		1				1	1
B	1			1					1	2
C		1					1	1		1
D	1		1		1			1		2
E	1		1			1	1			3
F		1		1	1			1	1	3
G		1		1		1				2
H	1				1			1		3

26.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1	1					1			2
B				1	1				1	2
C				1		1	1	1		2
D		1				1			1	1
E	1		1	1		1				3
F			1		1			1		1
G		1			1		1	1	1	4
H		1				1				3

27.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A			1				1			1
B		1			1	1				2
C	1	1		1	1				1	3
D	1			1		1		1		2
E	1				1		1			1
F		1		1				1		2
G		1		1					1	4
H			1			1	1	1		3

28.

R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1				1		1		1
B		1		1			1		1	3
C				1	1			1	1	2
D			1			1			1	2
E	1				1		1			1
F	1		1	1						2
G			1			1				3
H	1		1		1	1		1		3

29.

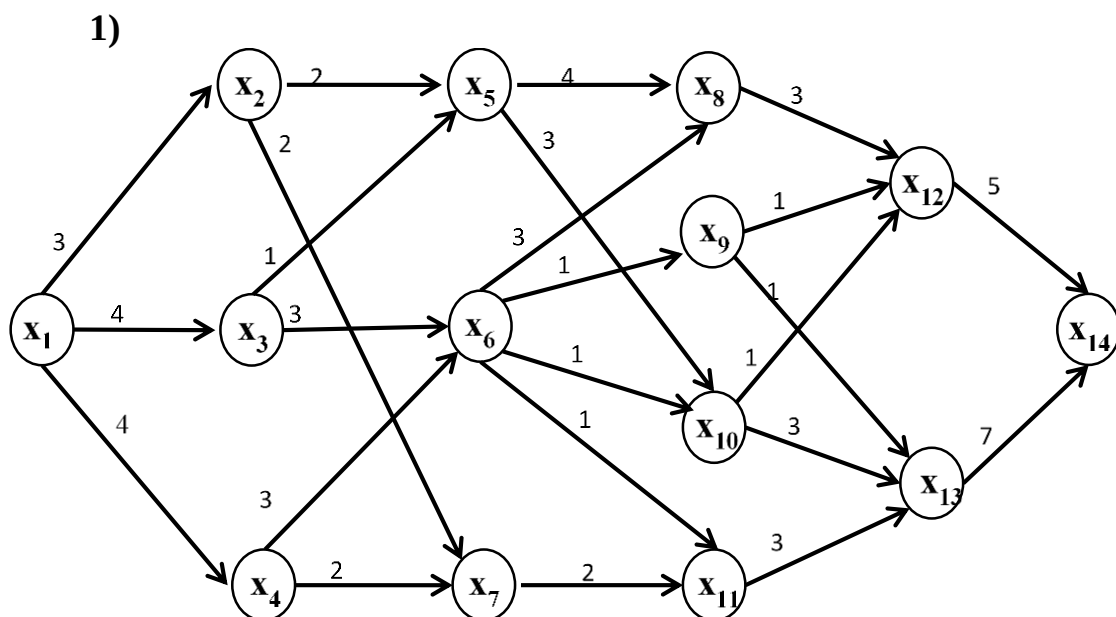
R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A	1		1		1		1	1		4
B	1			1		1	1			2
C	1		1						1	1
D				1			1	1		1
E			1		1	1				2
F		1			1			1		1
G		1	1			1			1	3
H			1			2				3

30.

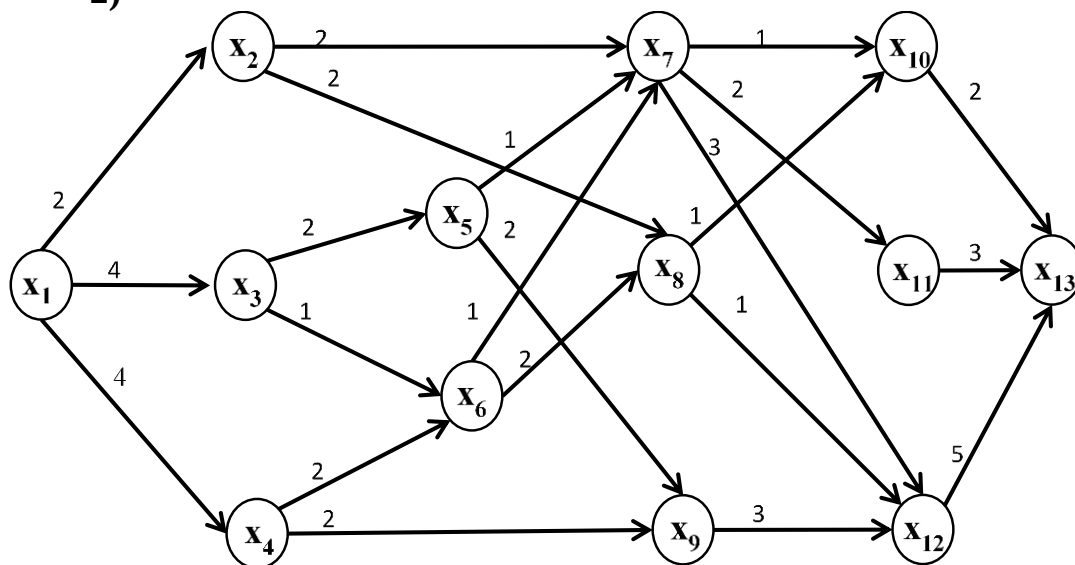
R	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	c
A		1			1	1				2
B	1	1	1							1
C	1	1			1			1	1	4
D				1				1	1	2
E	1					1	1	1		2
F					1	1			1	1
G		1	1							3
H			1	1		1	1			3

5.6. Задание 6. Поиск кратчайшего пути в графе

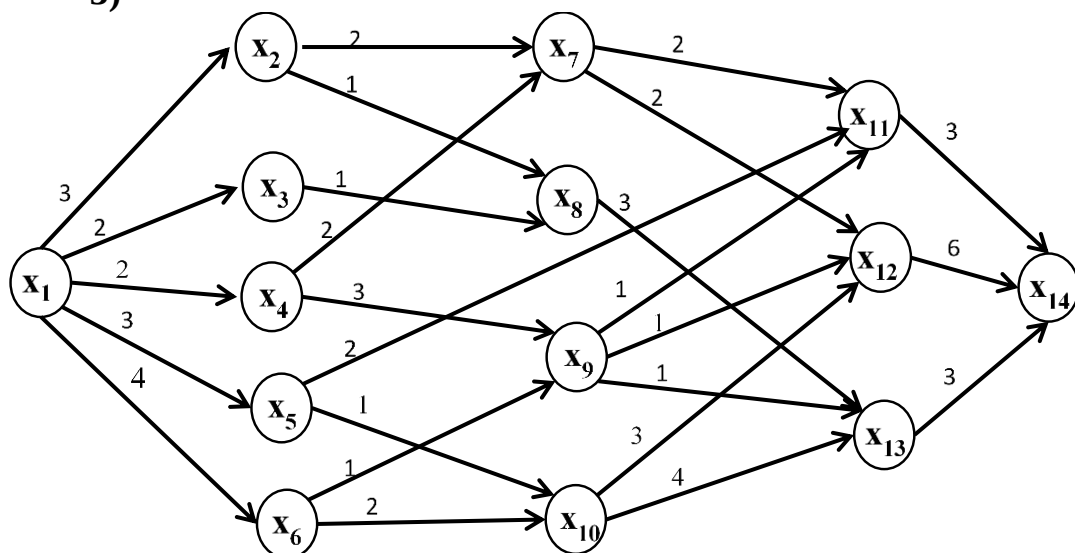
Построить в графе кратчайший путь волновым алгоритмом или алгоритмом Дейкстры. В решении должны присутствовать все промежуточные результаты (см. Приложение В).



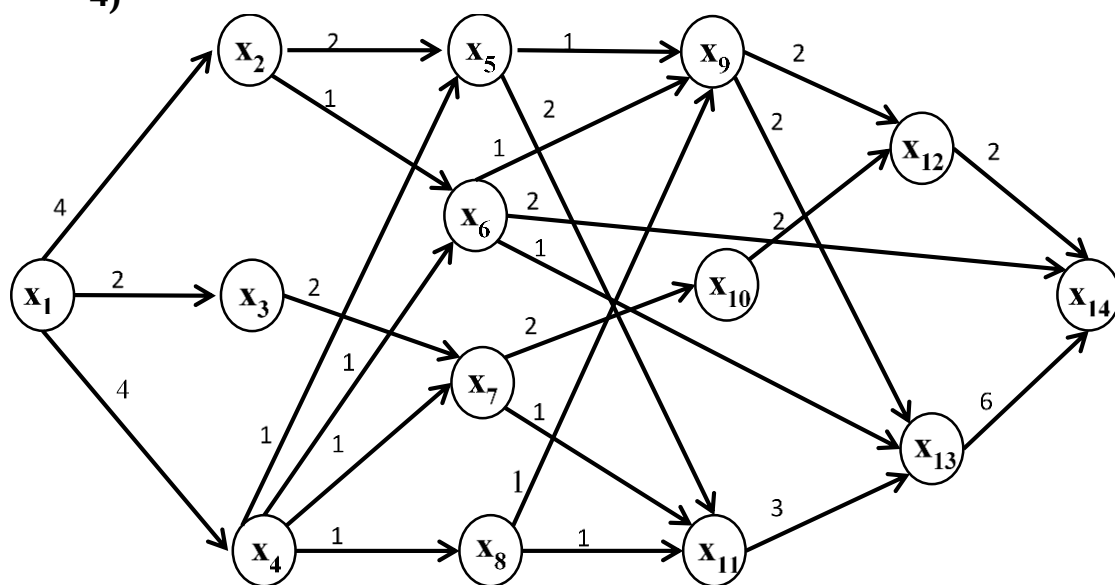
2)

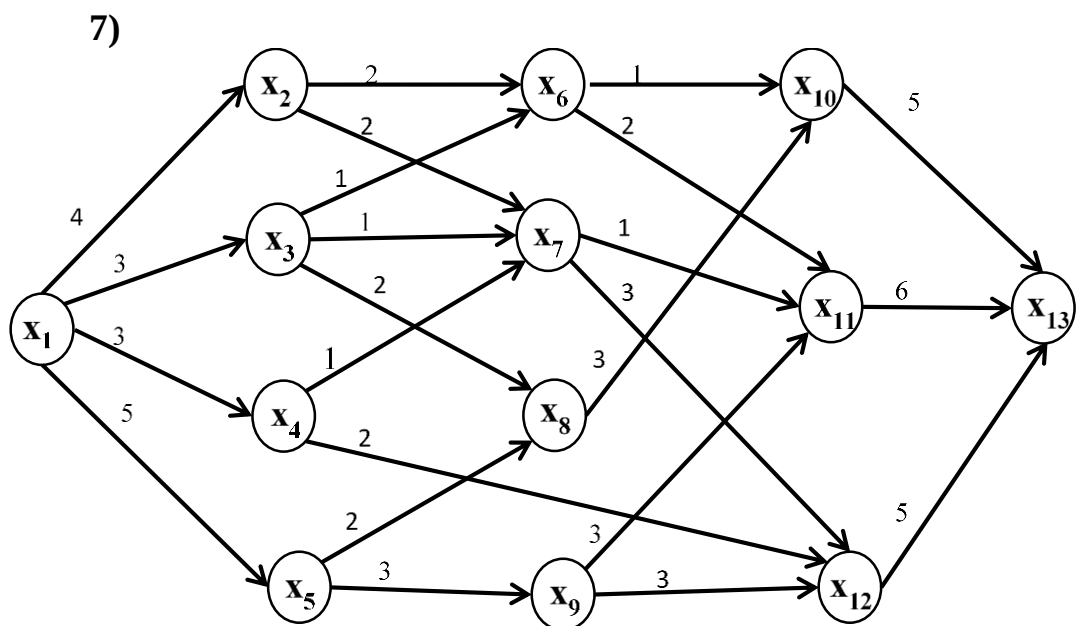
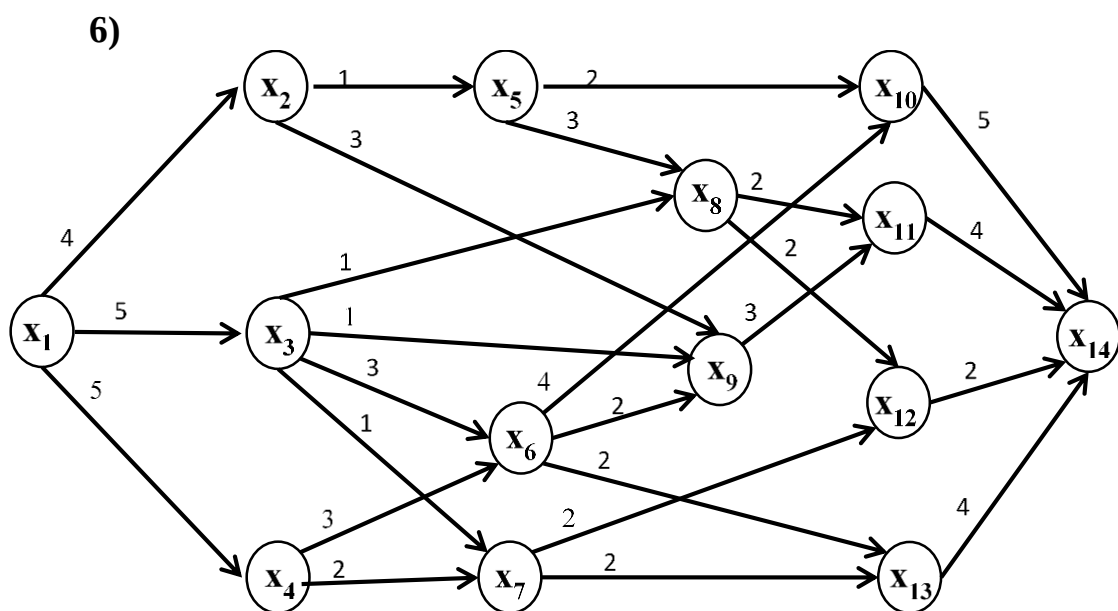
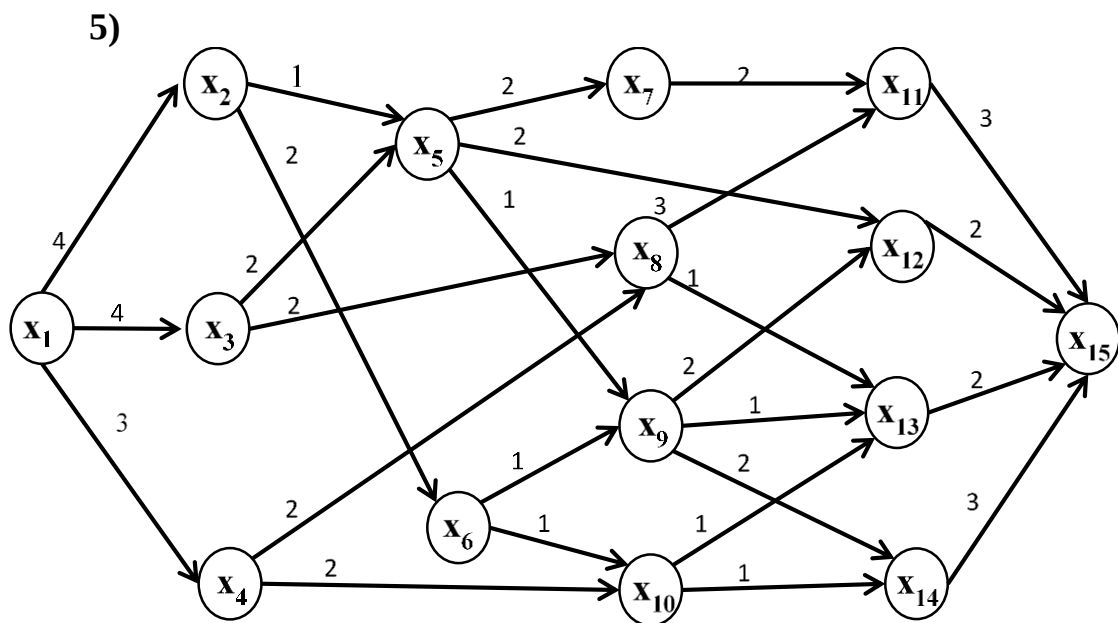


3)

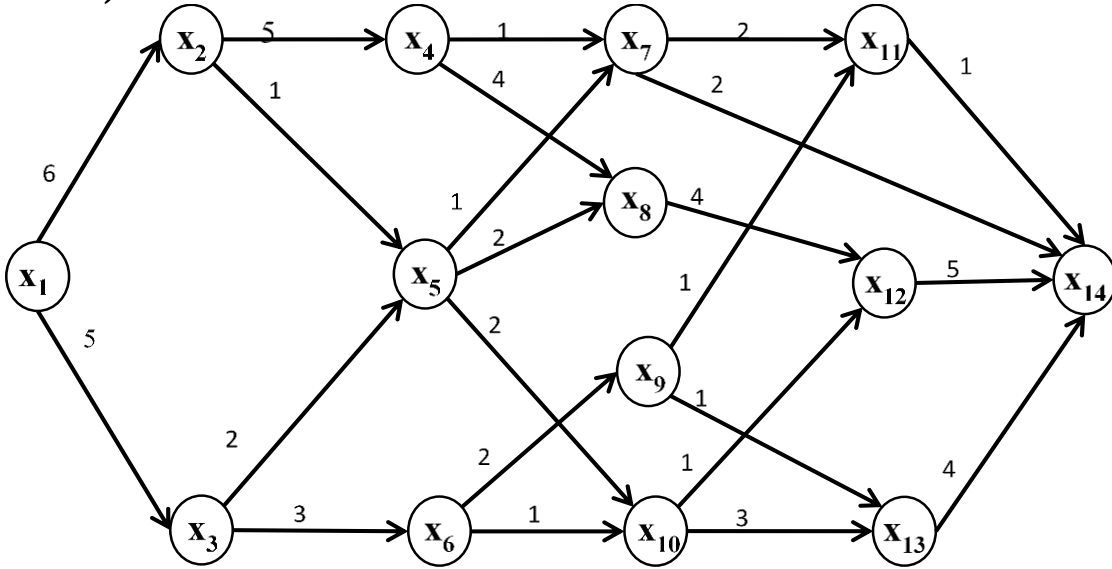


4)

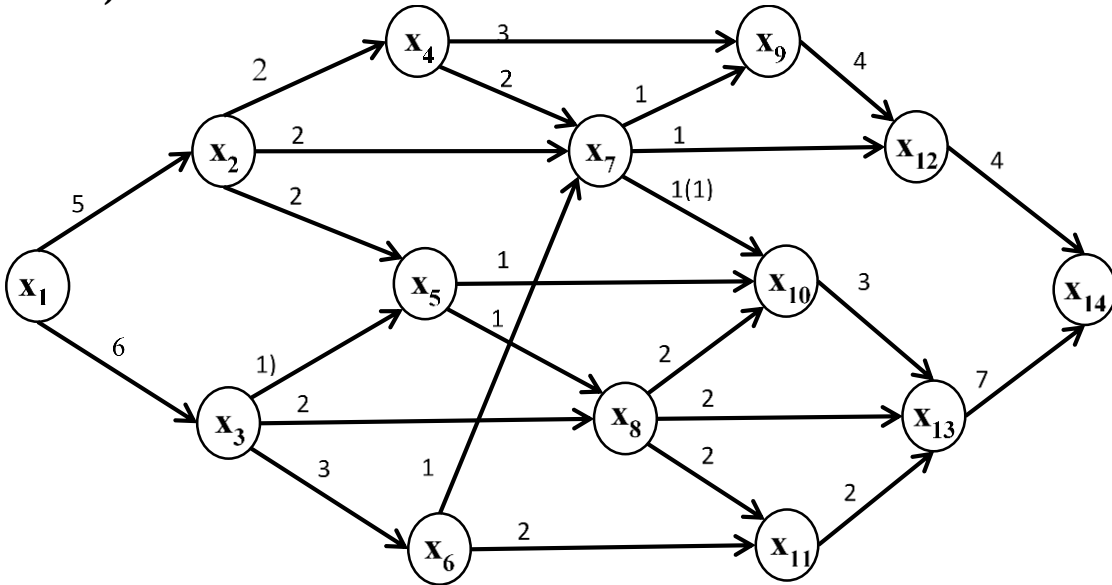




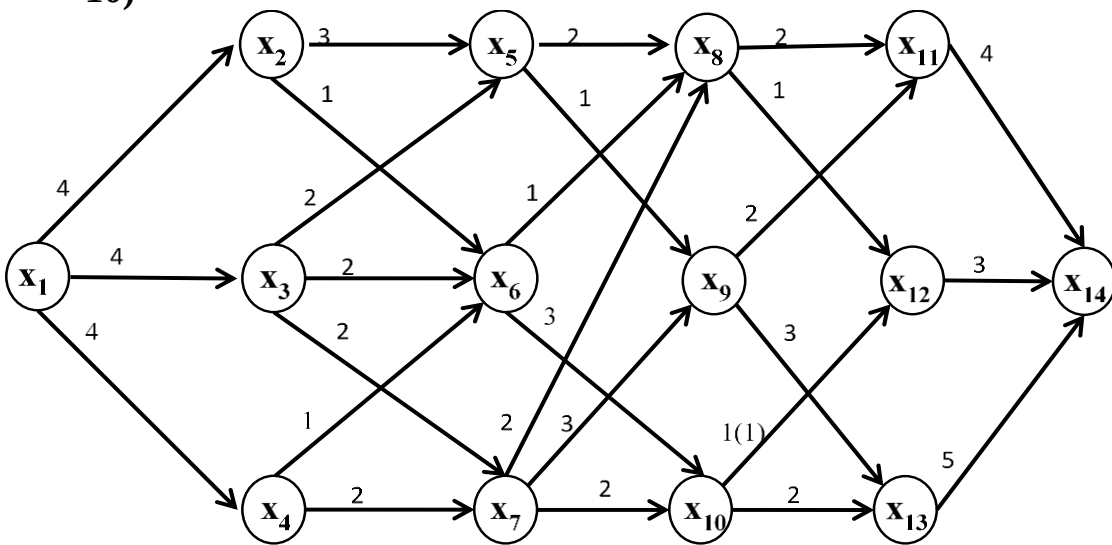
8)



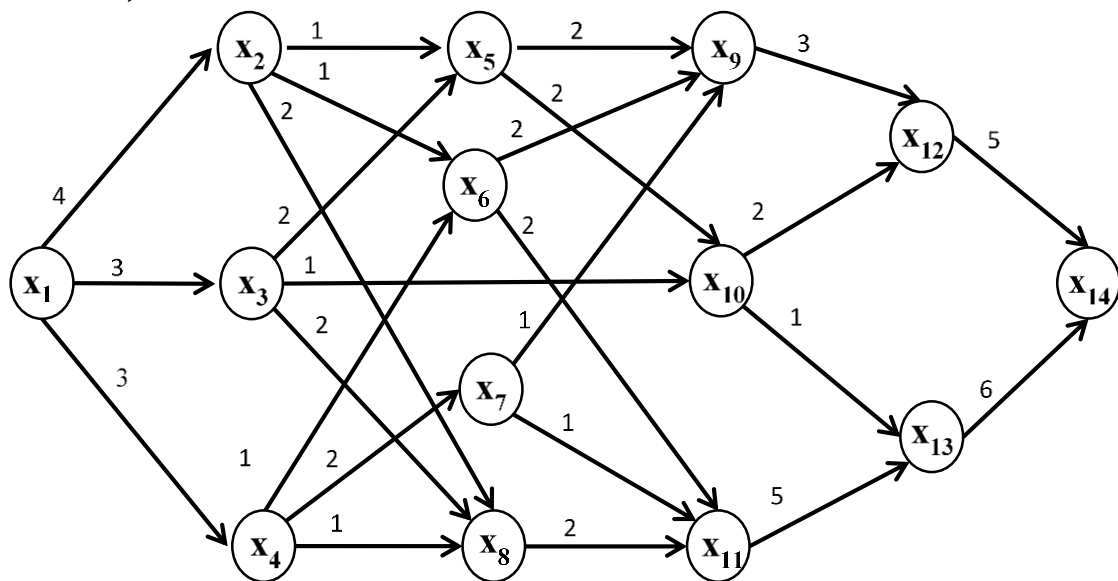
9)



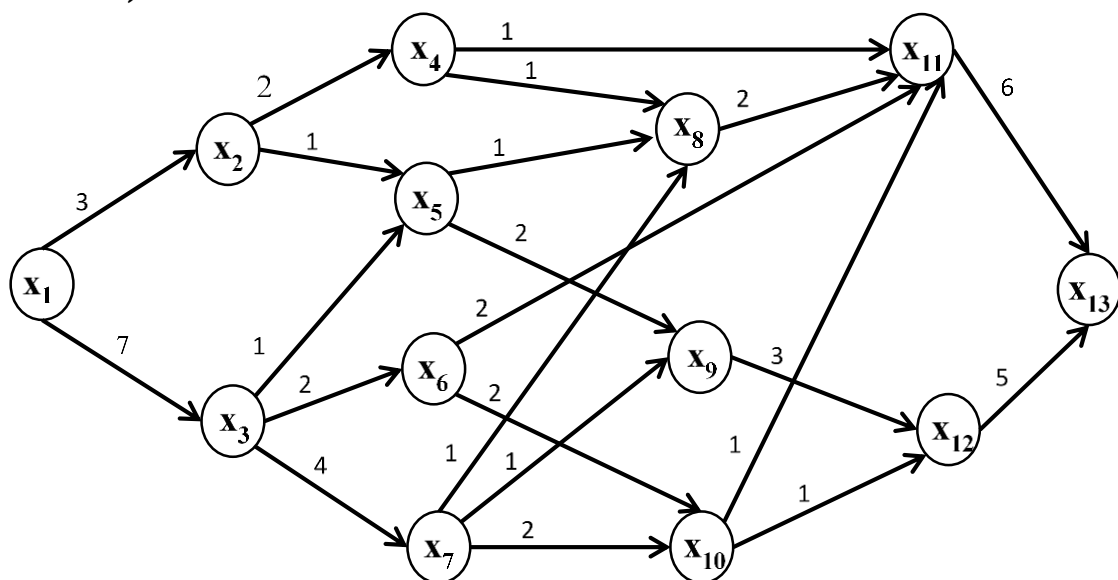
10)



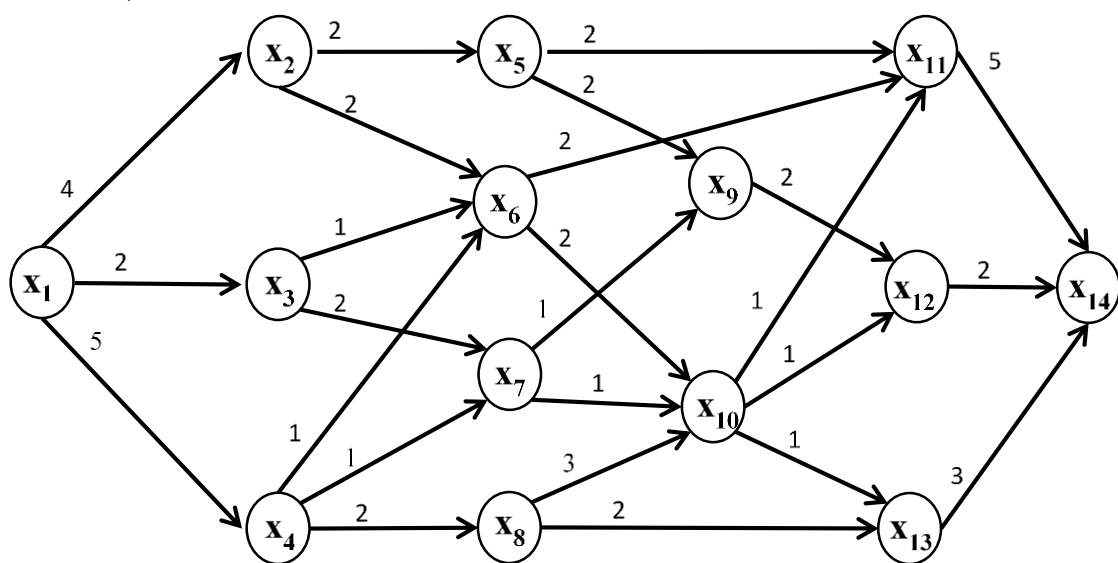
11)



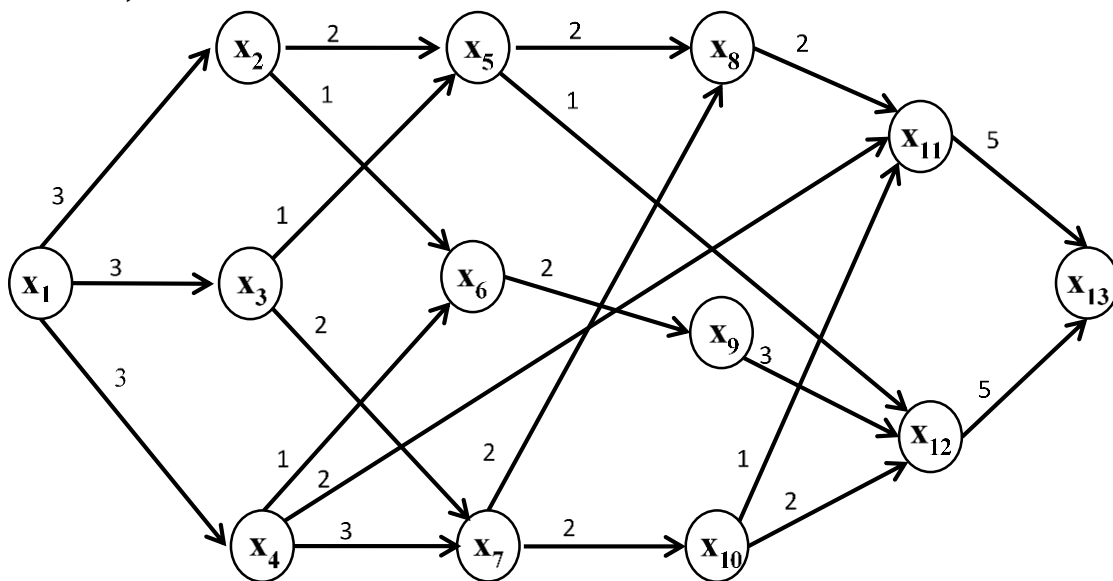
12)



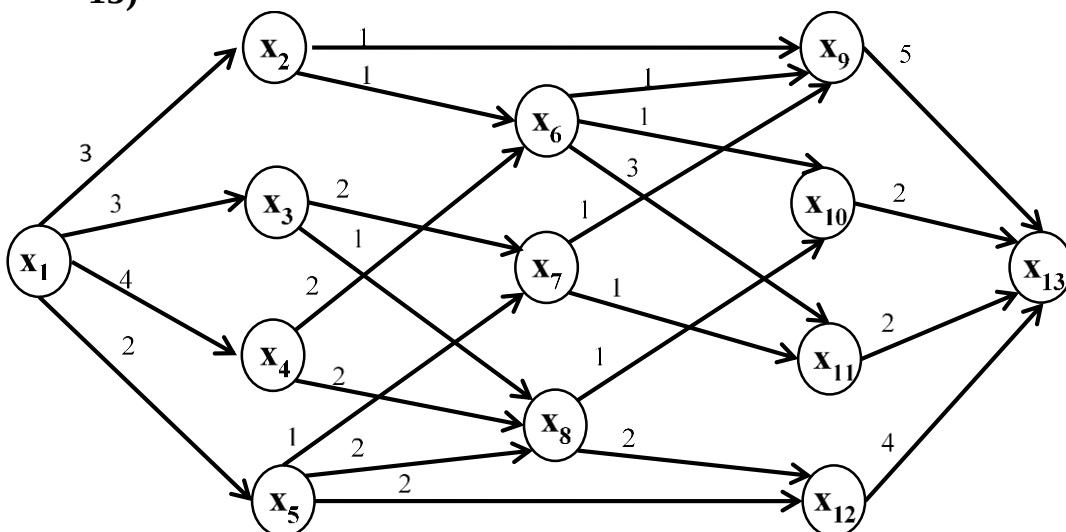
13)



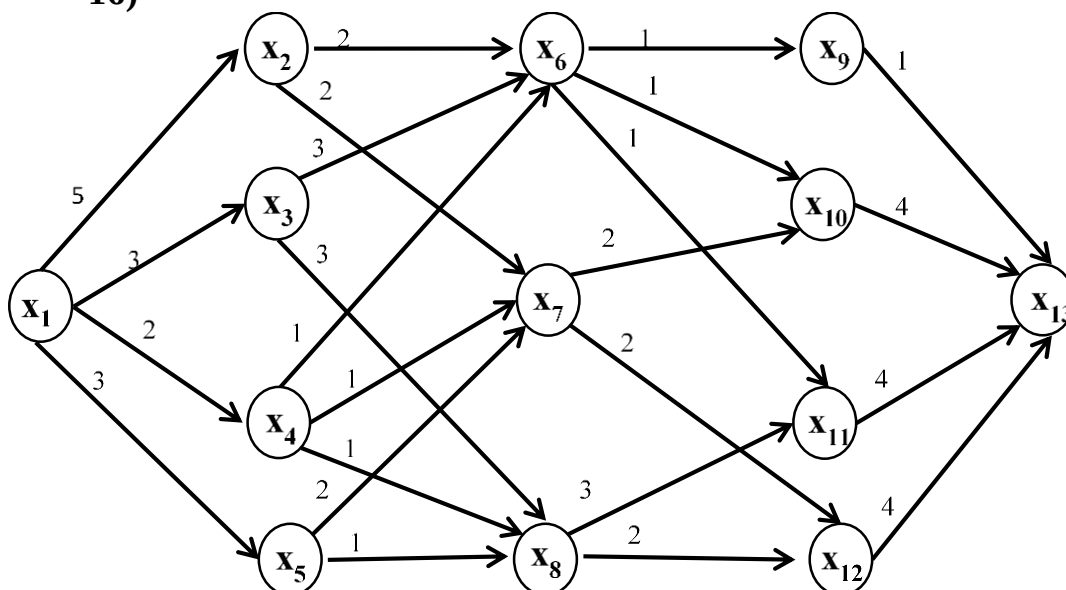
14)



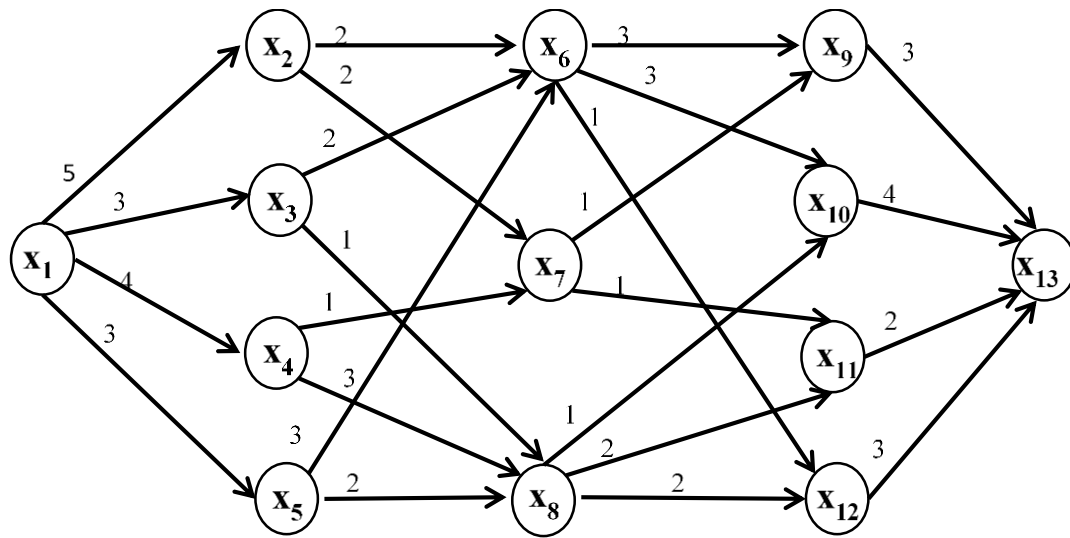
15)



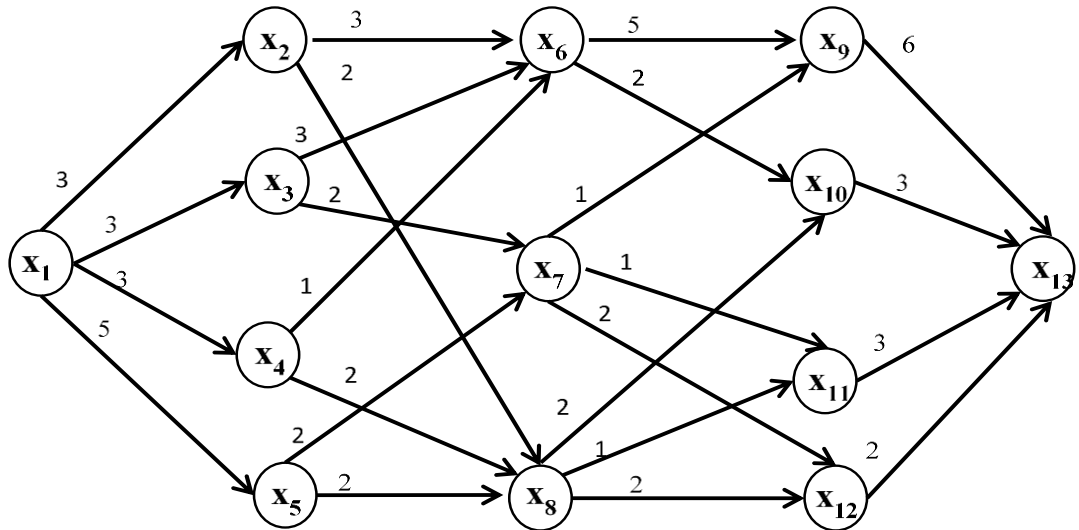
16)



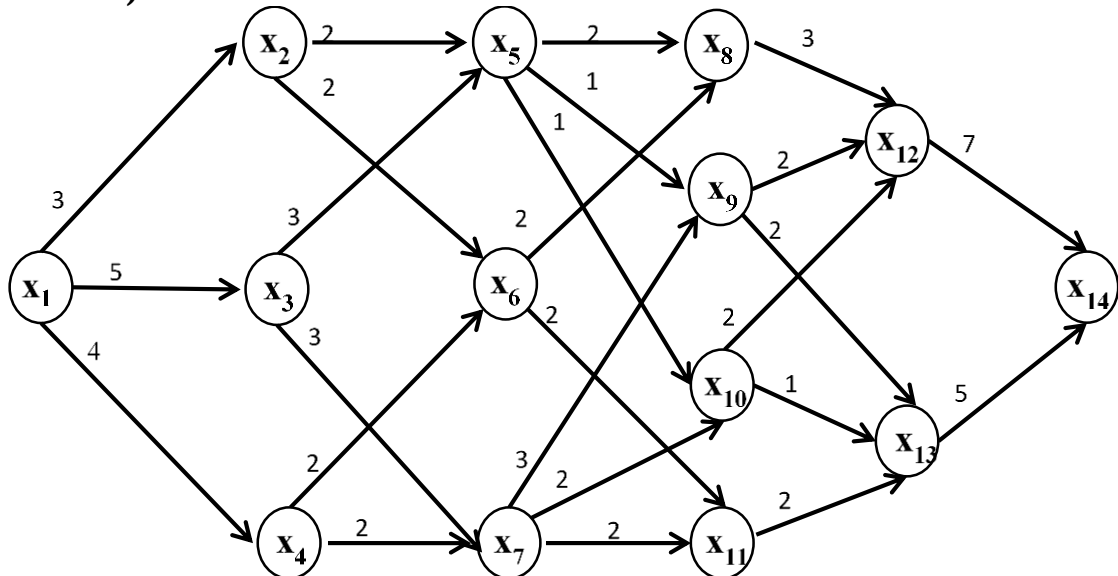
17)



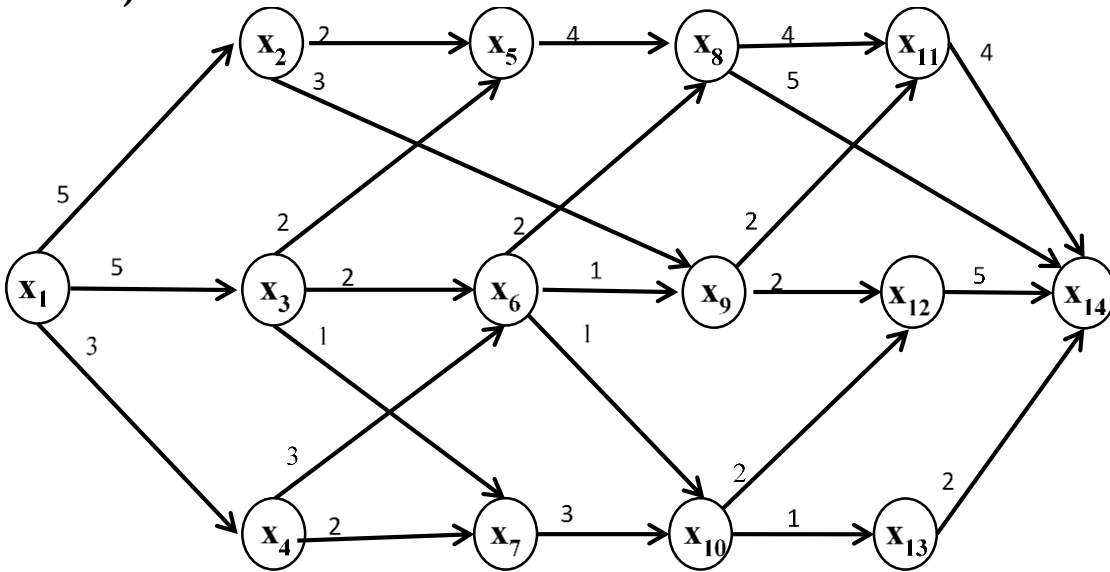
18)



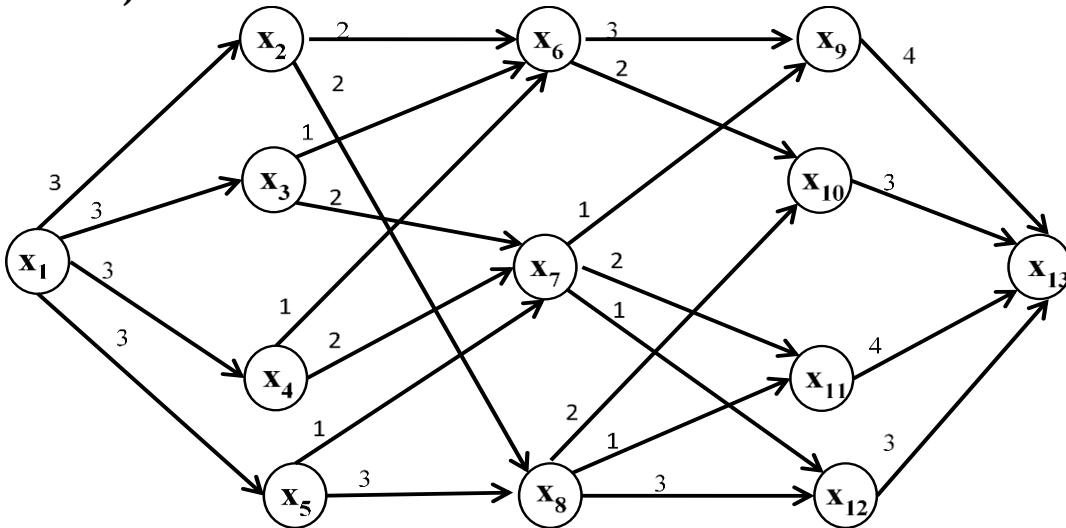
19)



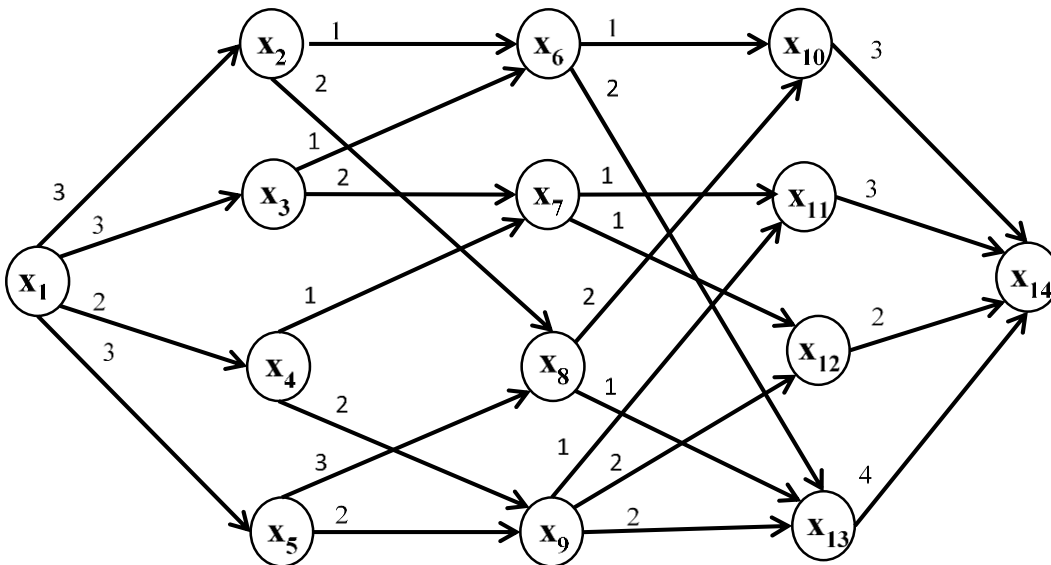
20)



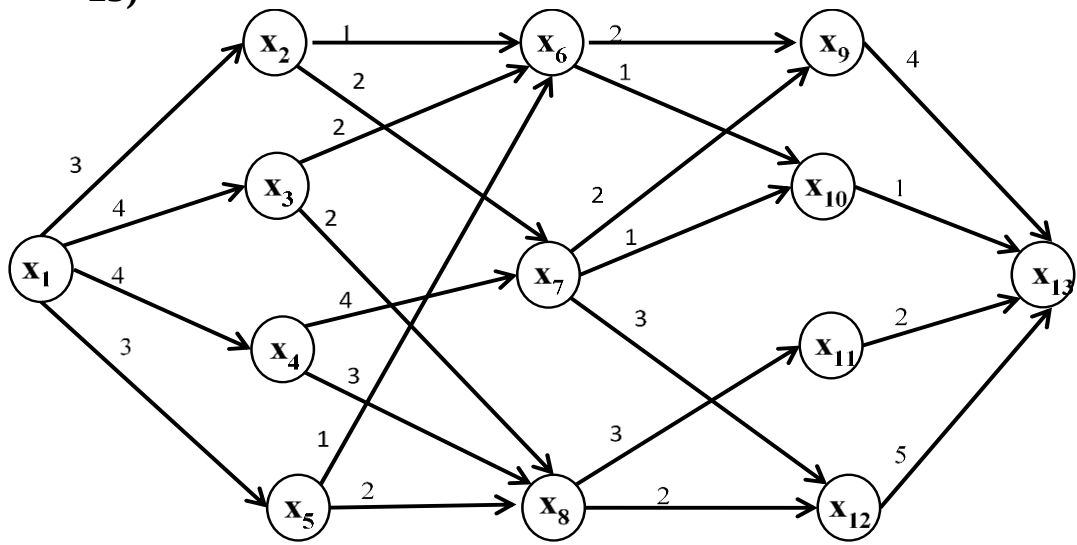
21)



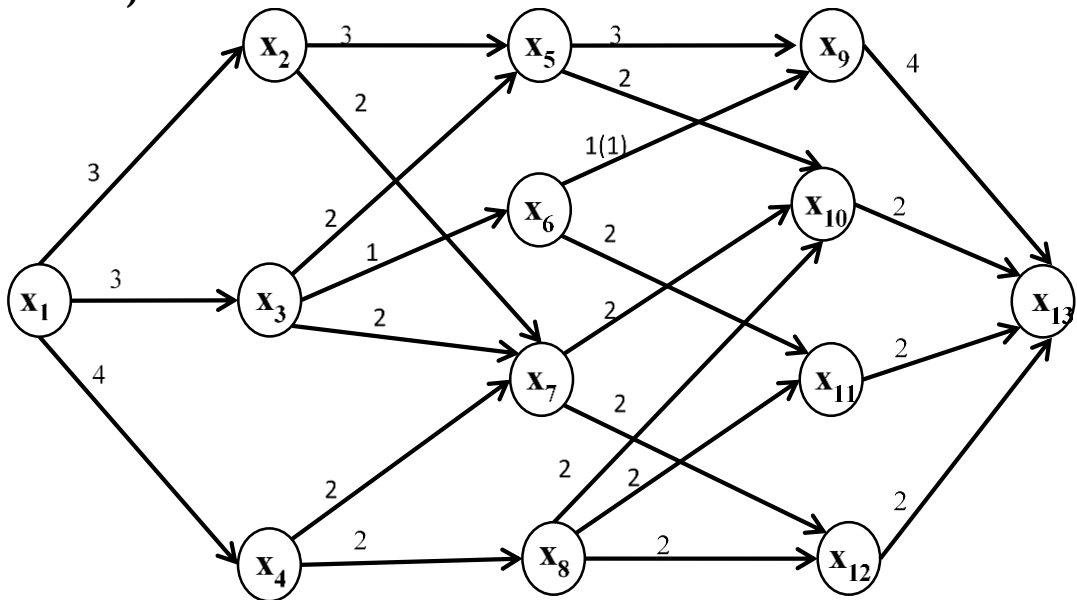
22)



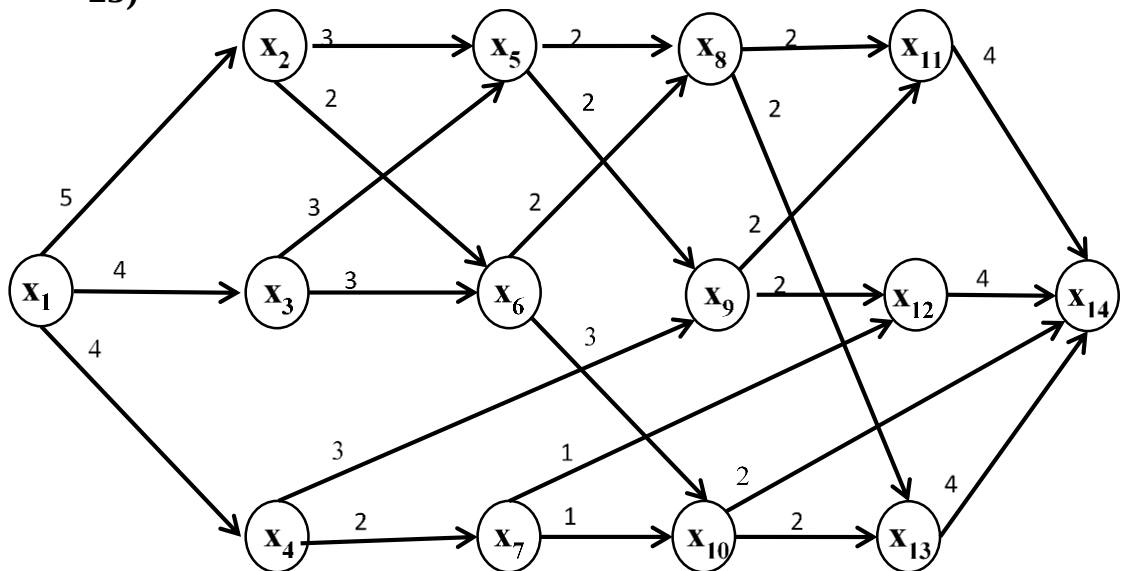
23)



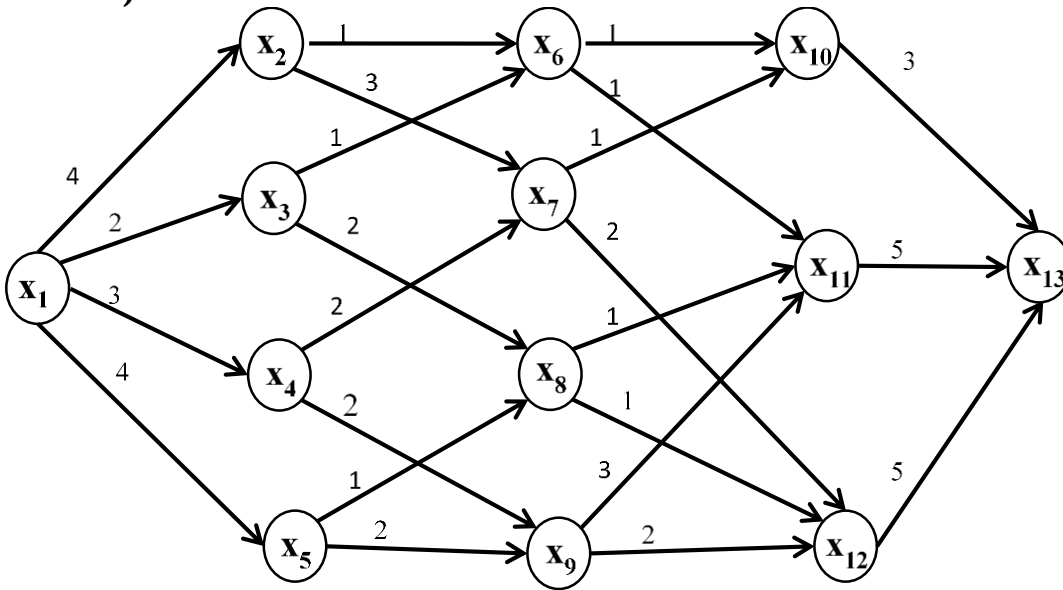
24)



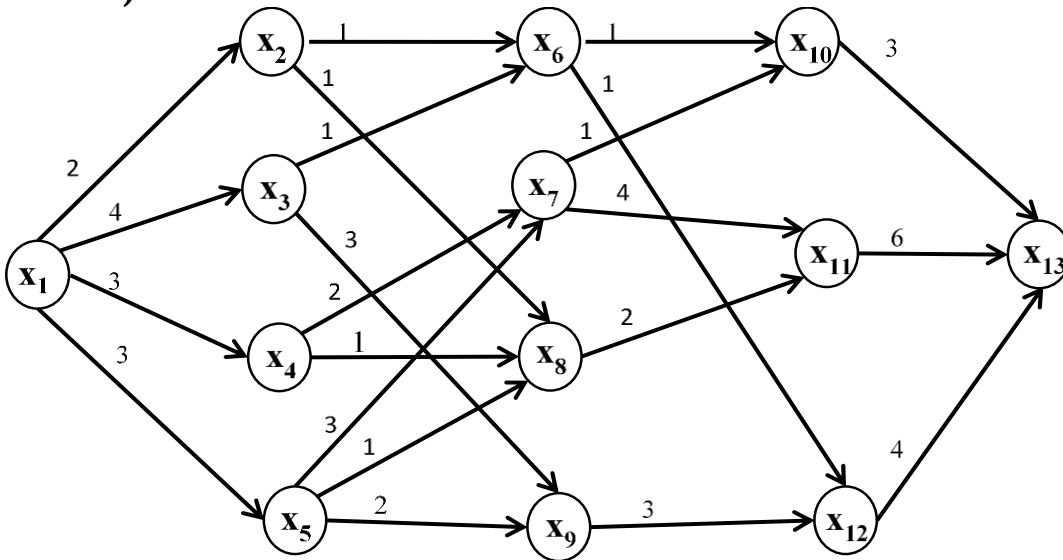
25)



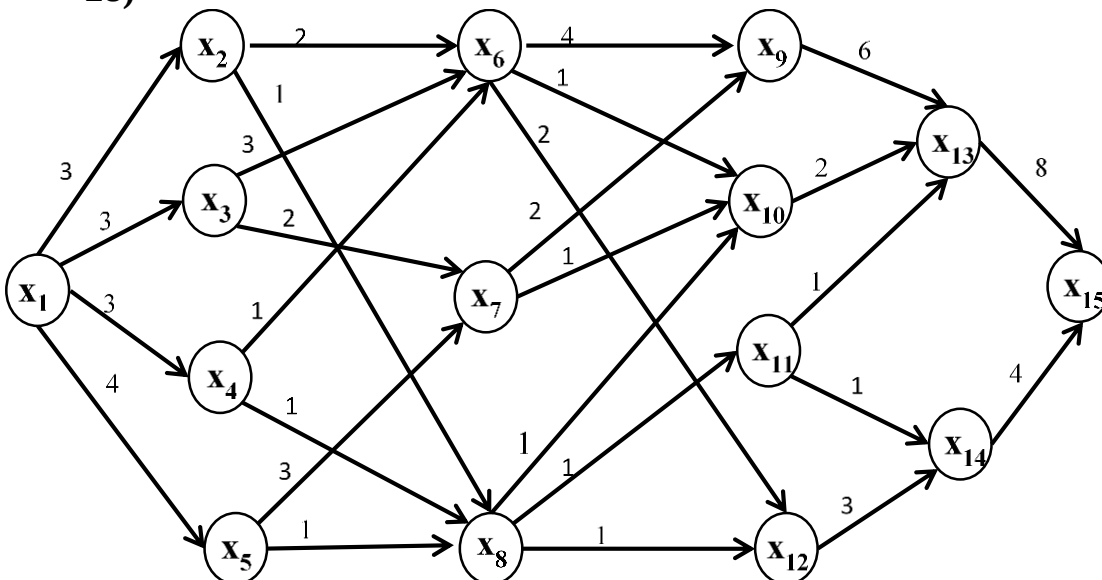
26)

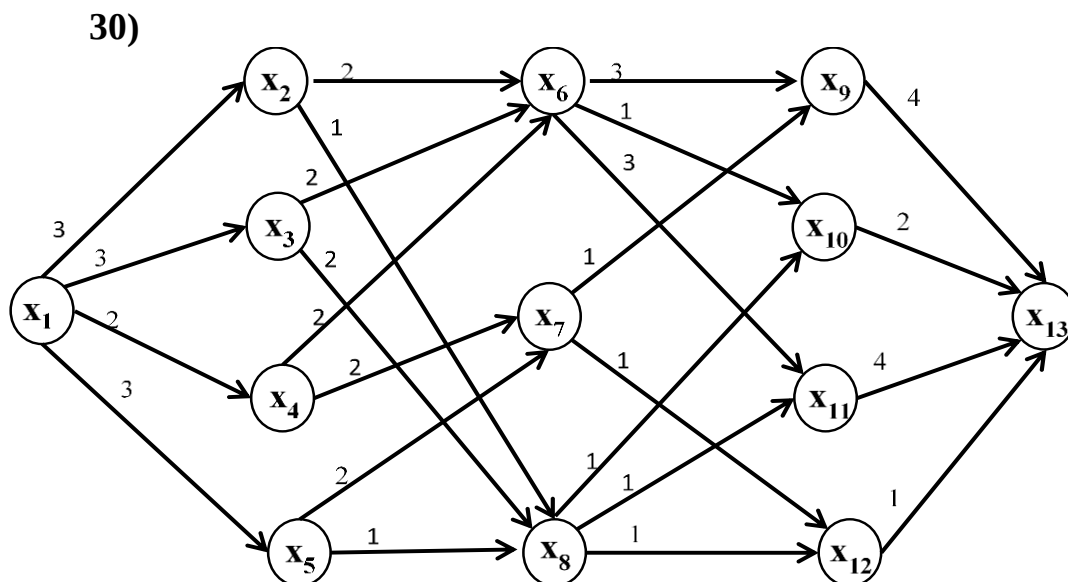
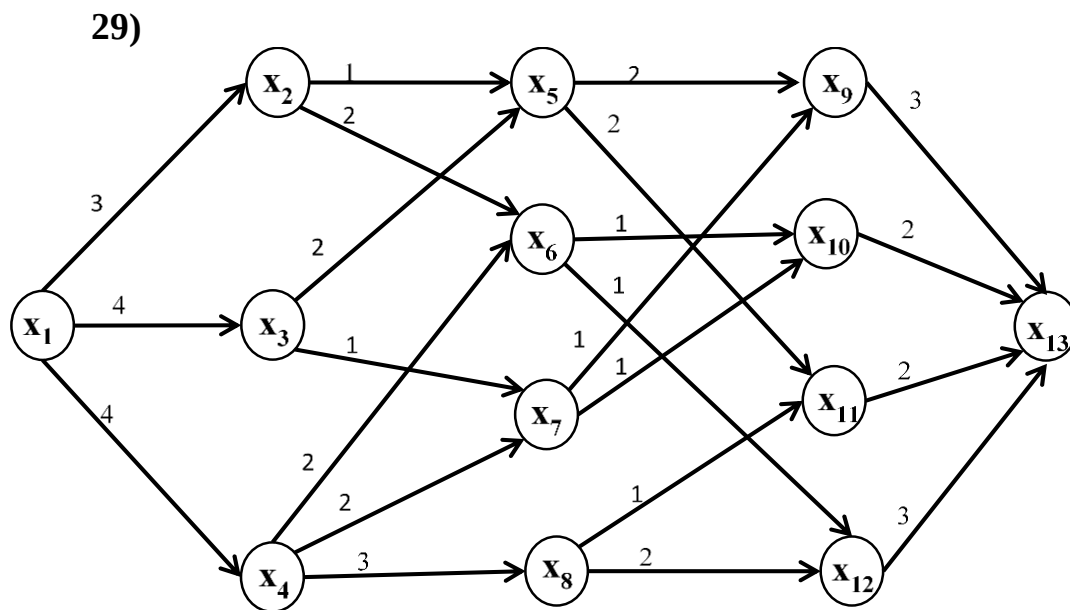


27)



28)





5.7. Задание 7. Система независимых циклов в графе

Для графа построить минимальный остов (с обязательной нумерацией каждого шага) и записать систему независимых циклов (запись каждого цикла начинать с ребра, не принадлежащего остову).

1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

27.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

28.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

29.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

30.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

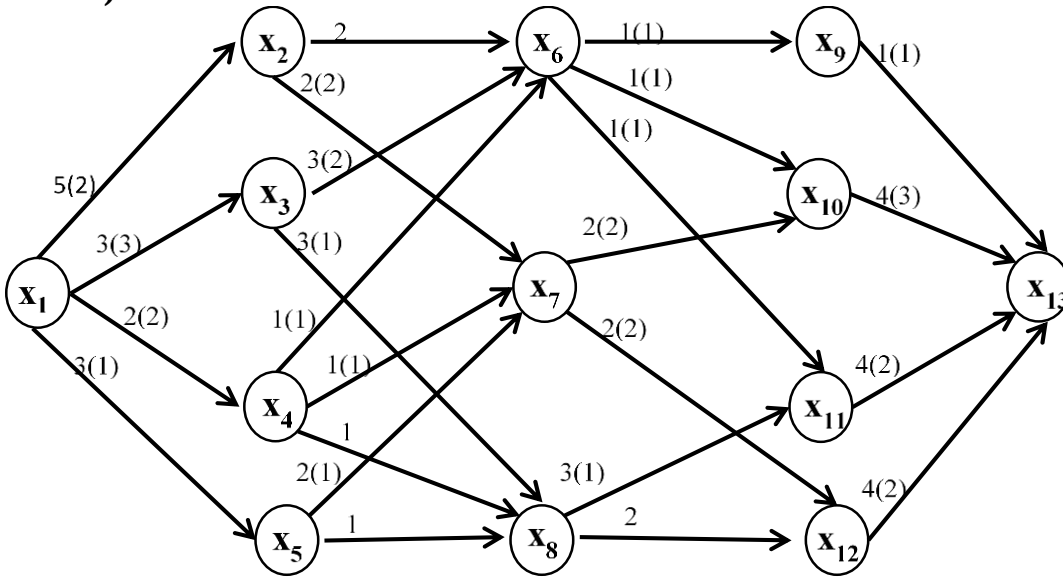
5.8. Задание 8. Кратчайшая раскраска вершин графа

Для заданного в п.5.7 графа произвести кратчайшую раскраску вершин графа. В решении должны присутствовать и быть описаны все промежуточные результаты.

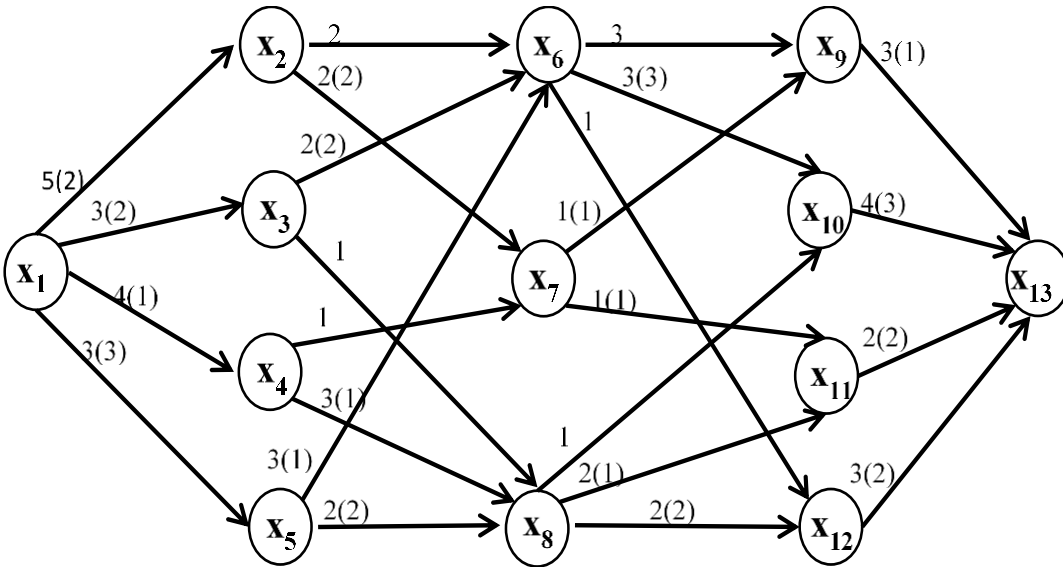
5.9. Задание 9. Максимальный поток в сети

Построить максимальный поток в сети. В решении должны присутствовать все промежуточные результаты.

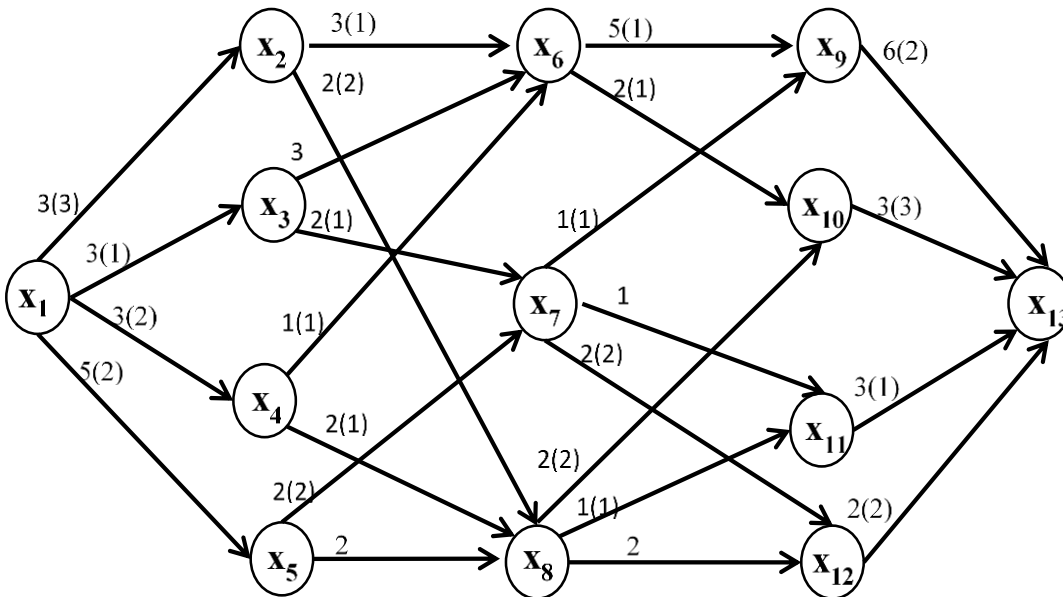
1)



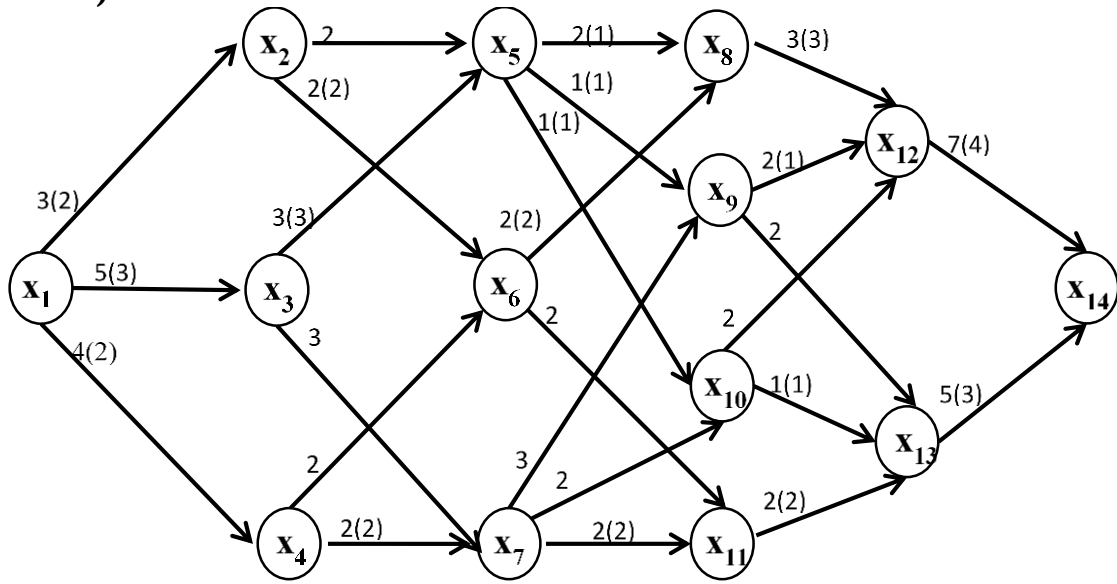
2)



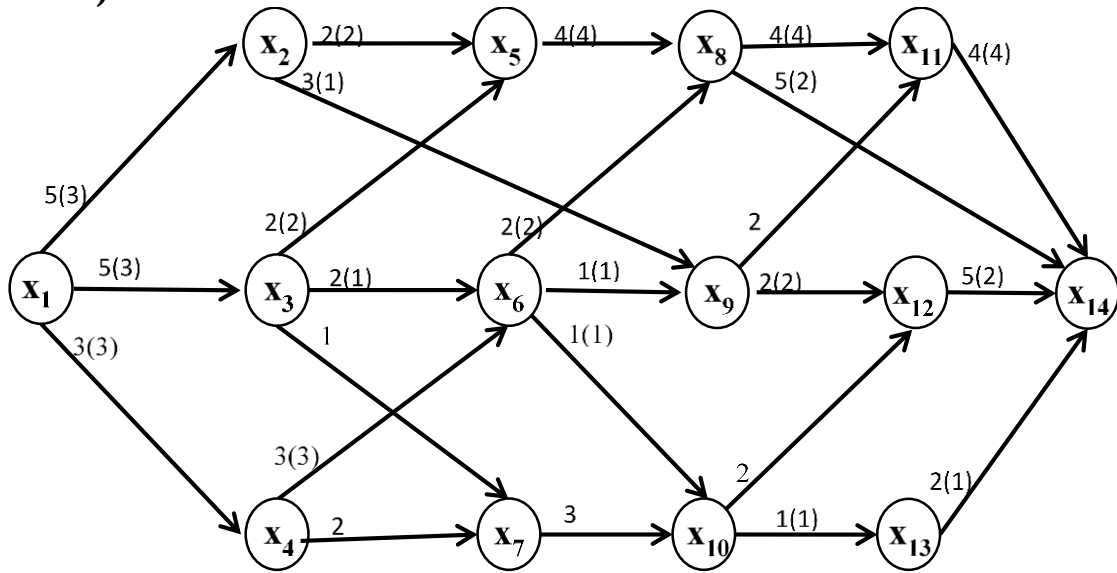
3)



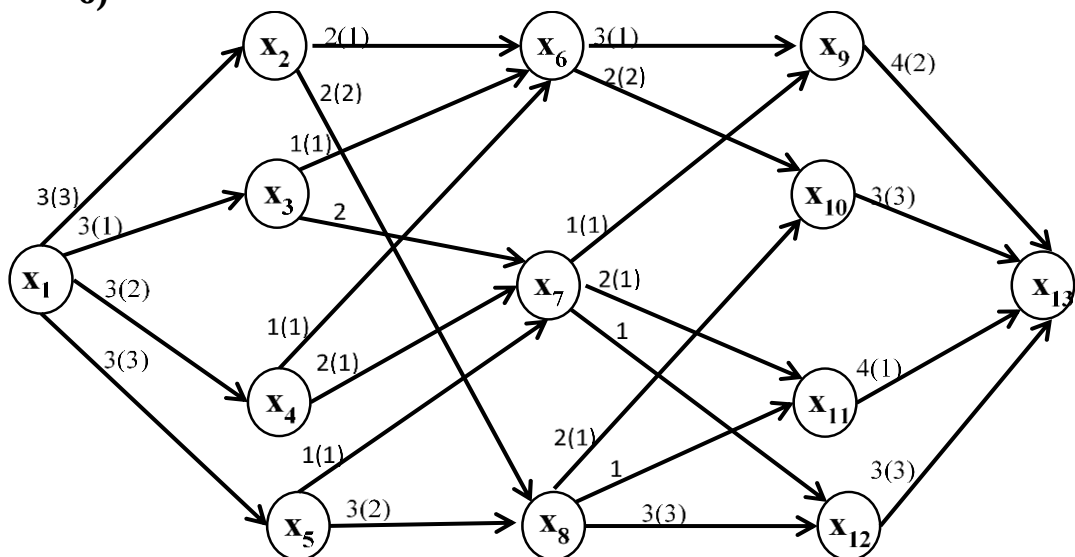
4)



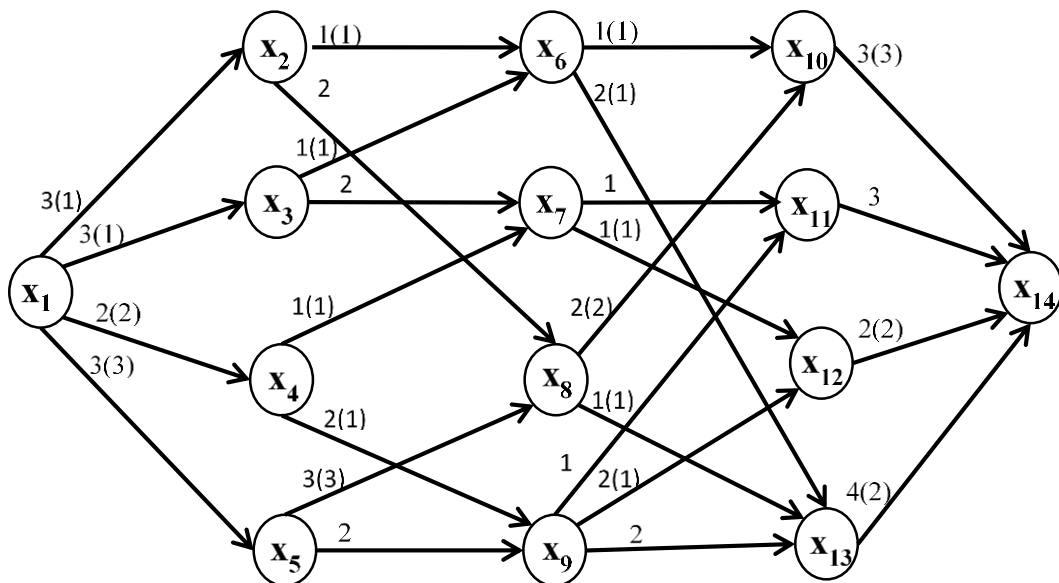
5)



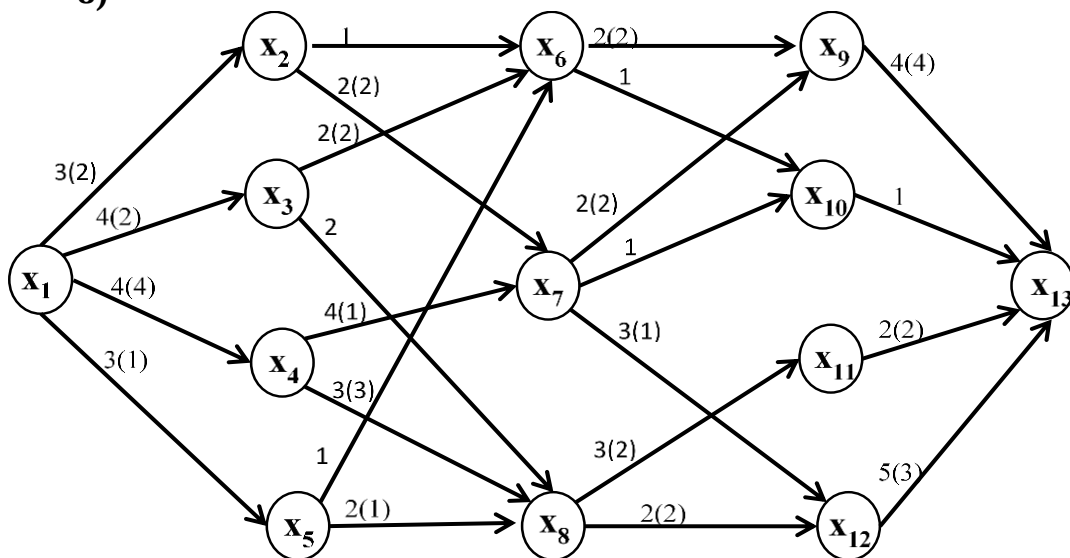
6)



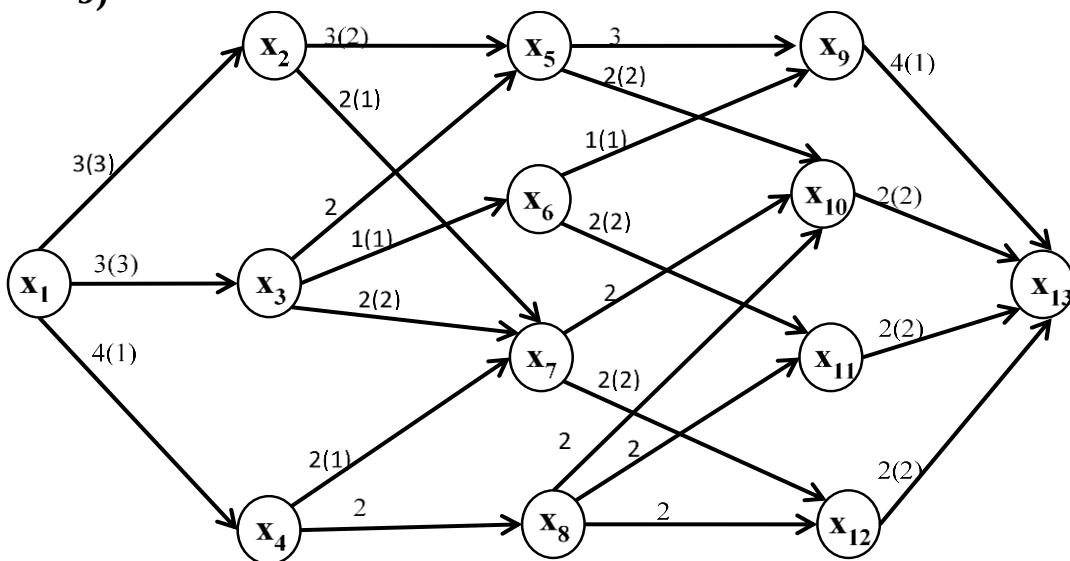
7)



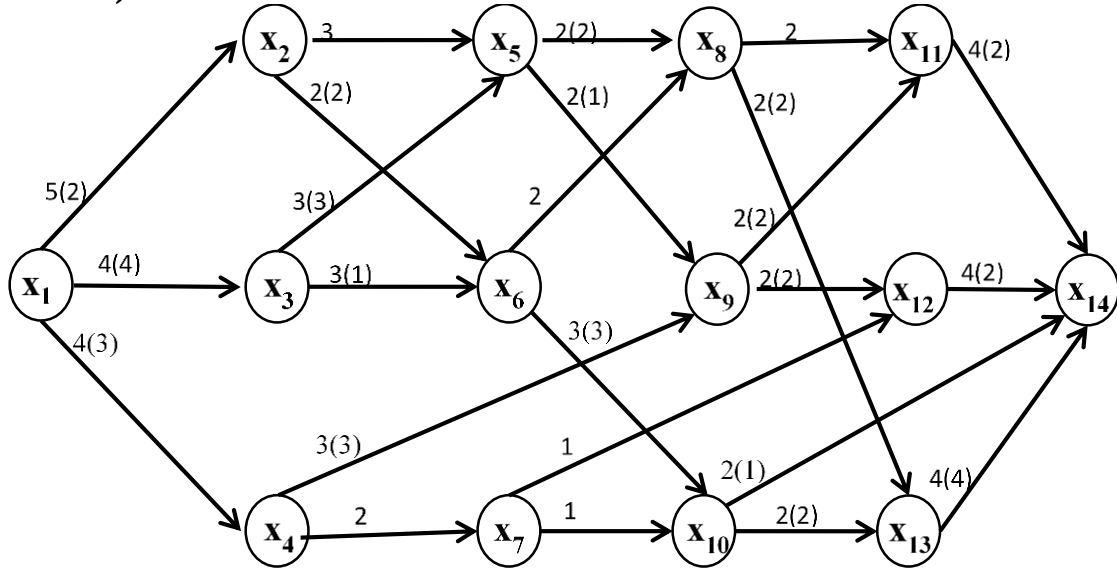
8)



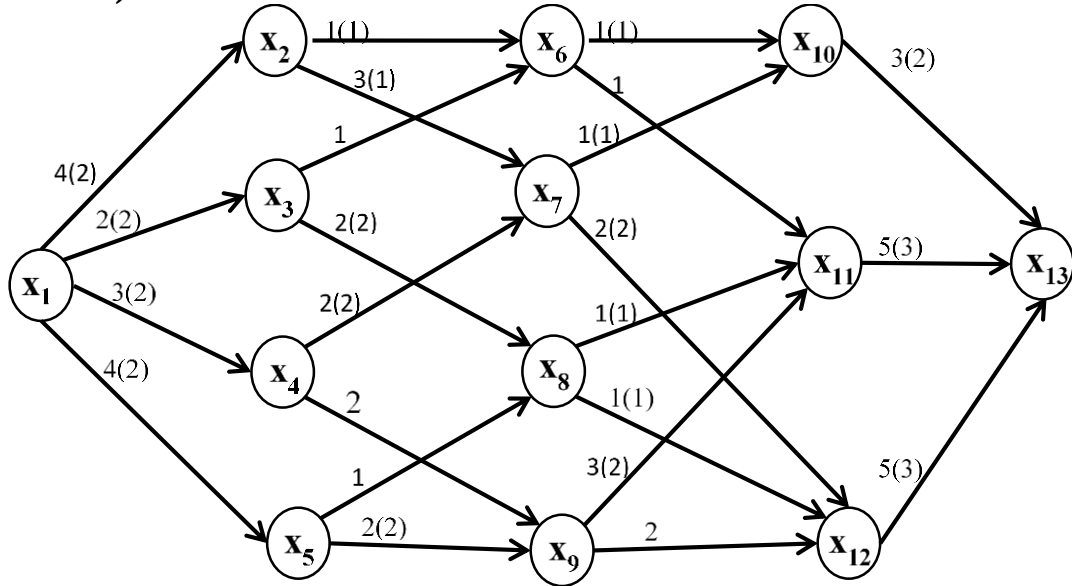
9)



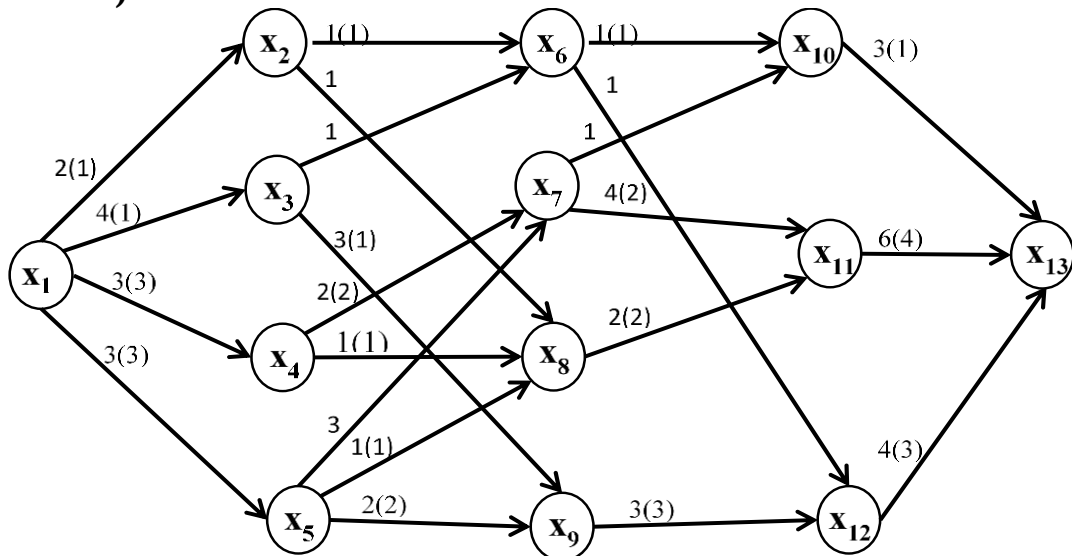
10)



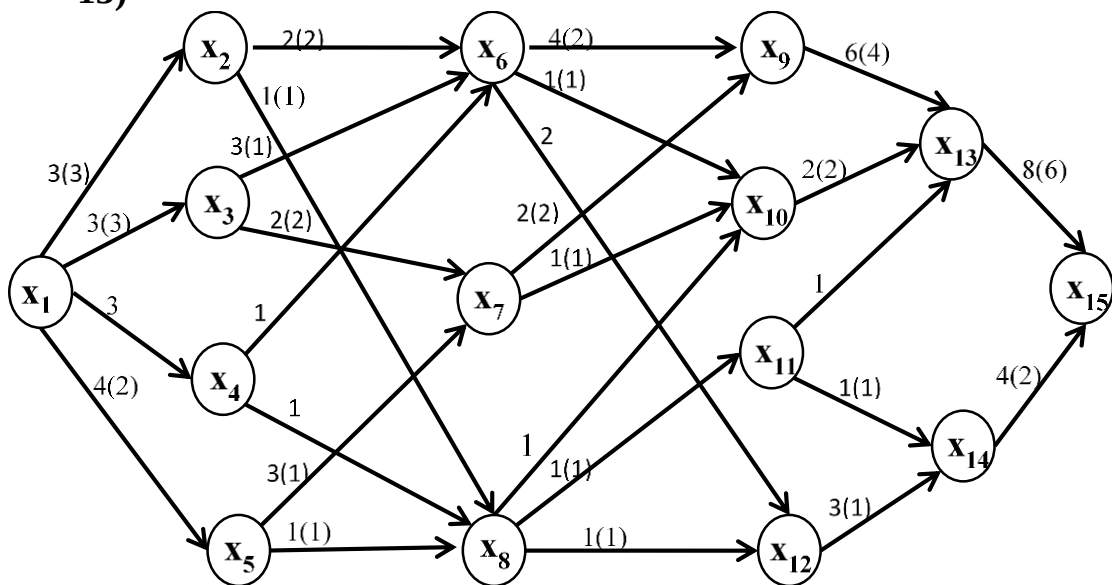
11)



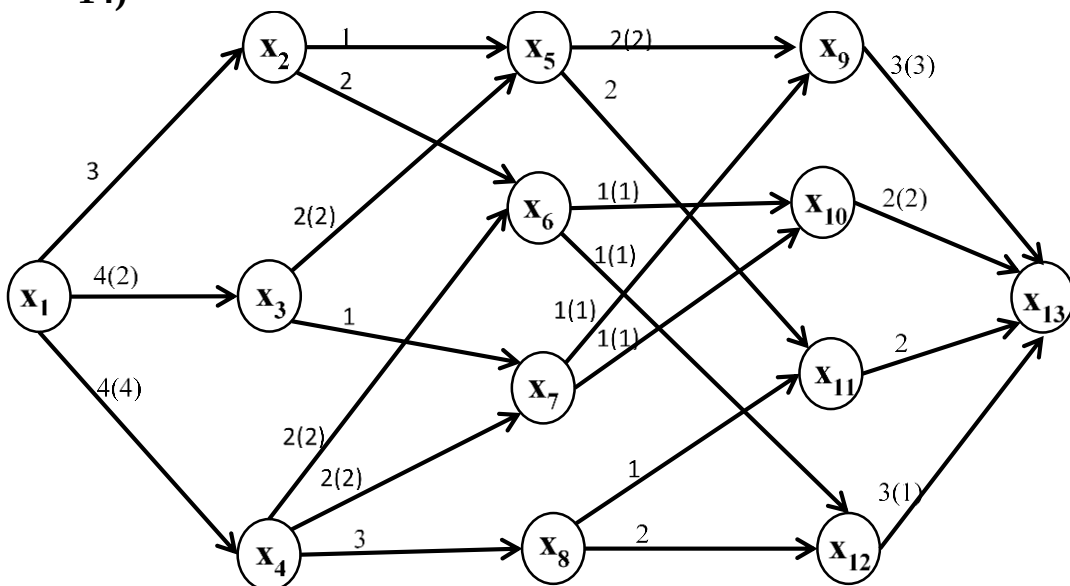
12)



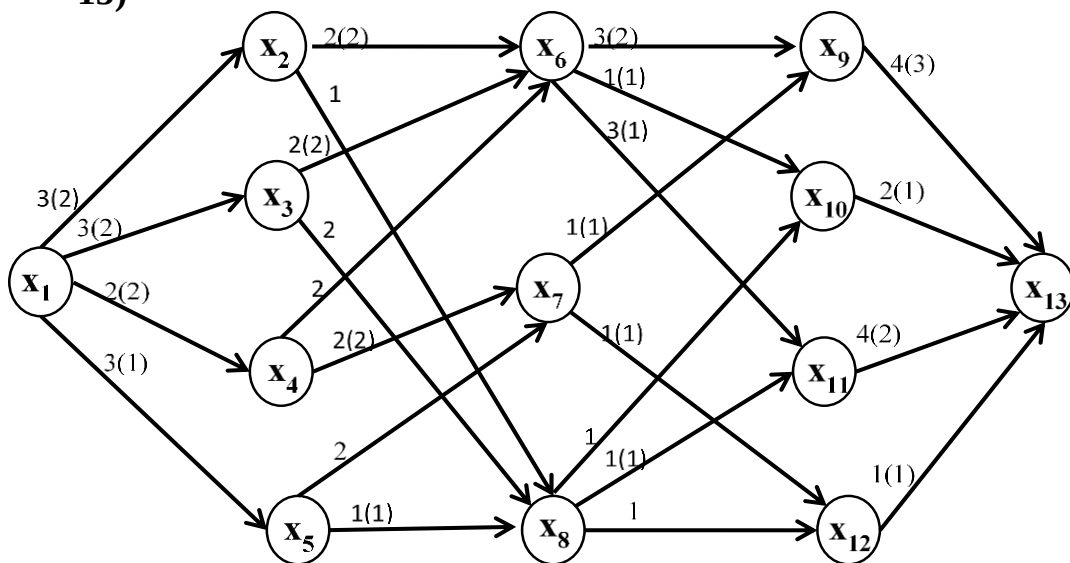
13)



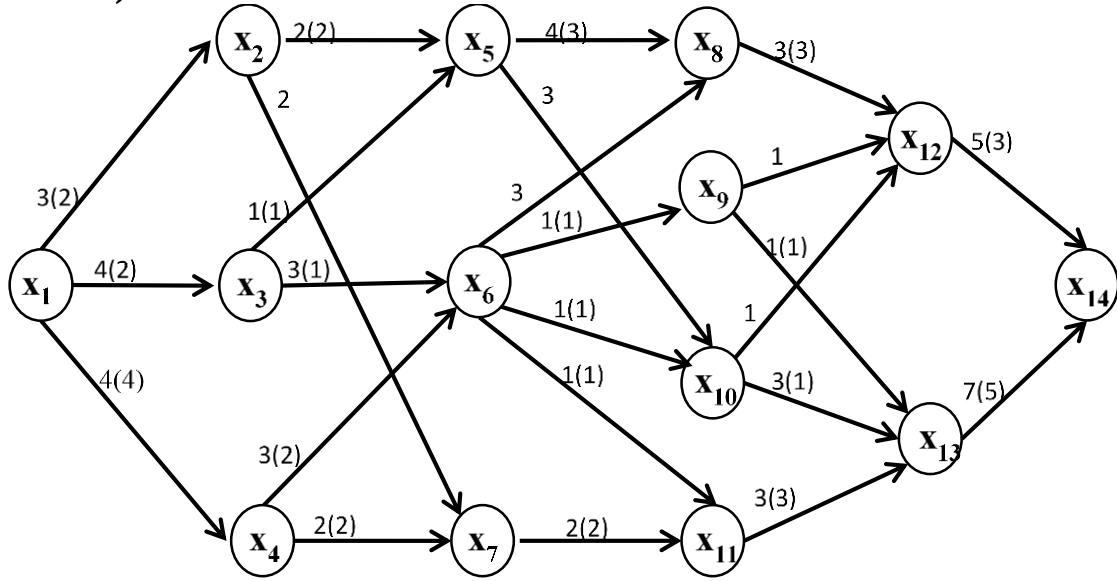
14)



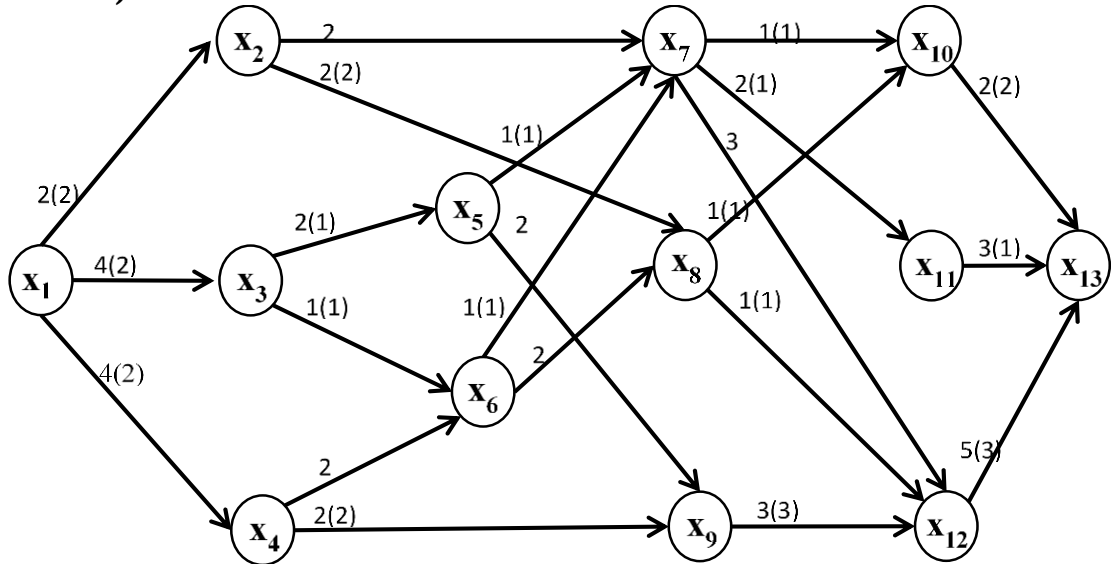
15)



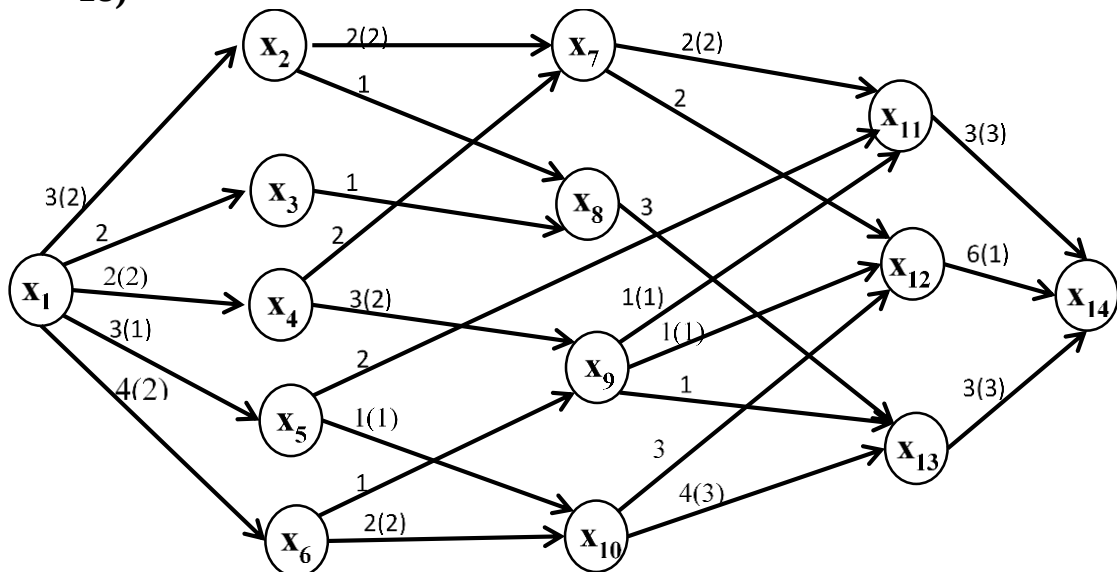
16)



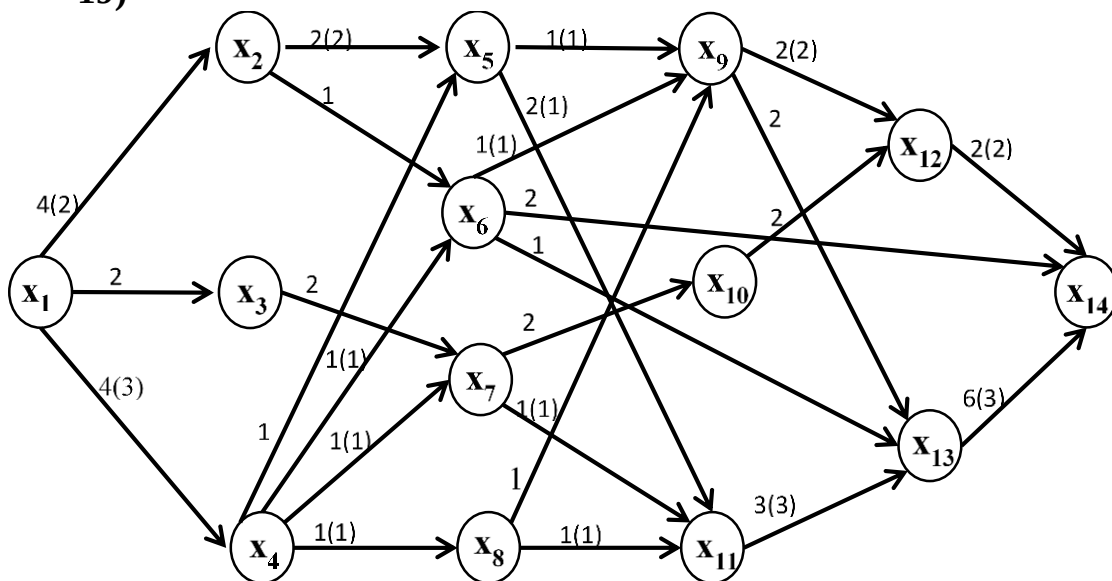
17)



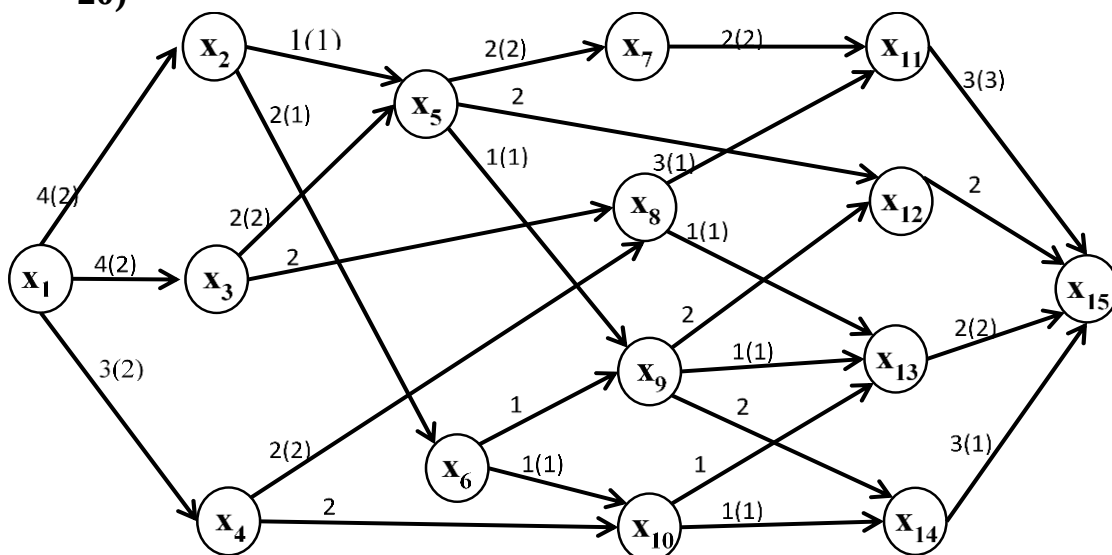
18)



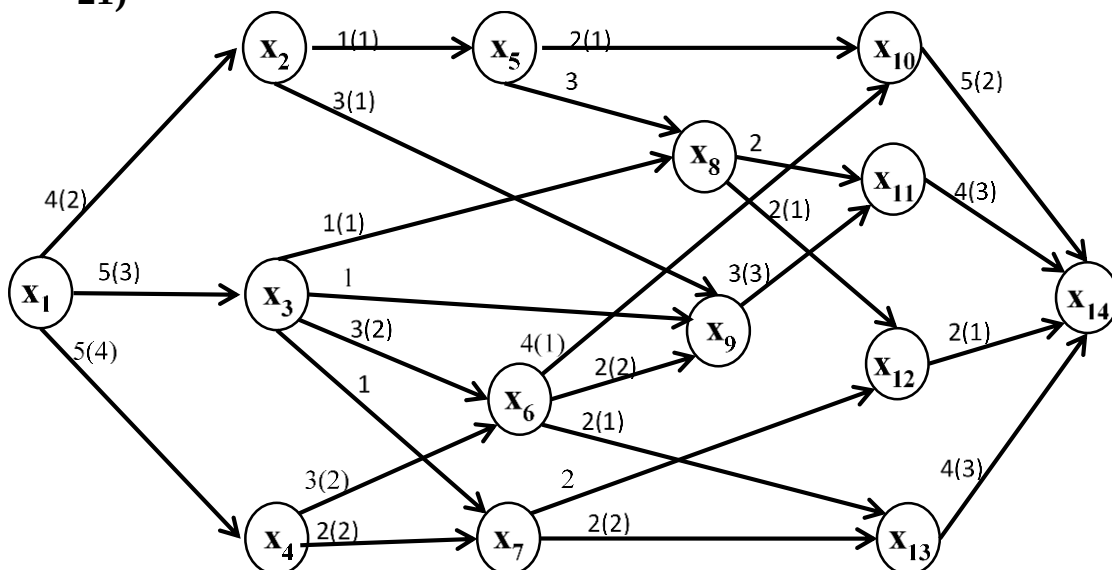
19)



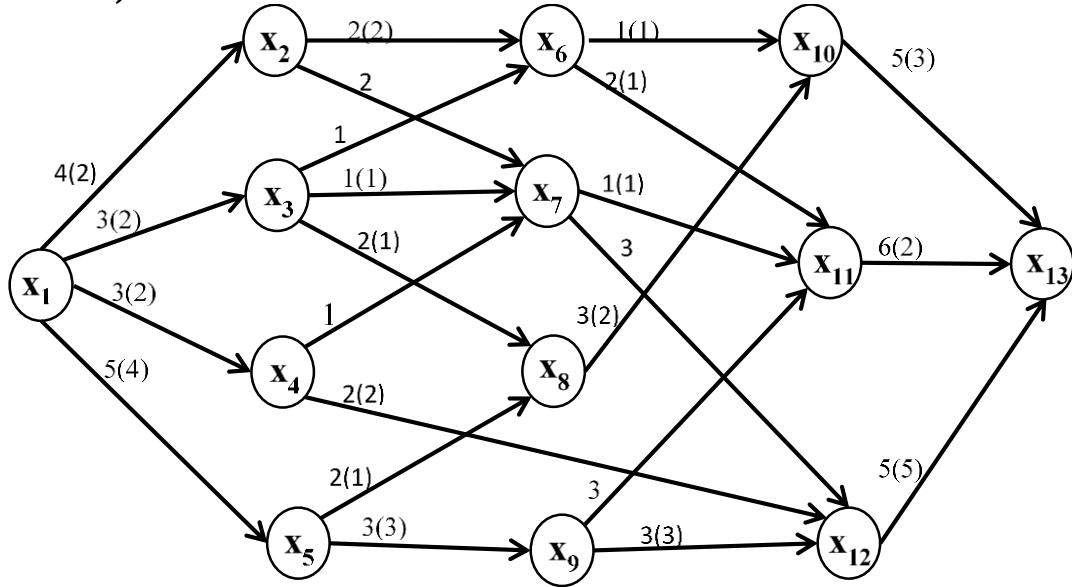
20)



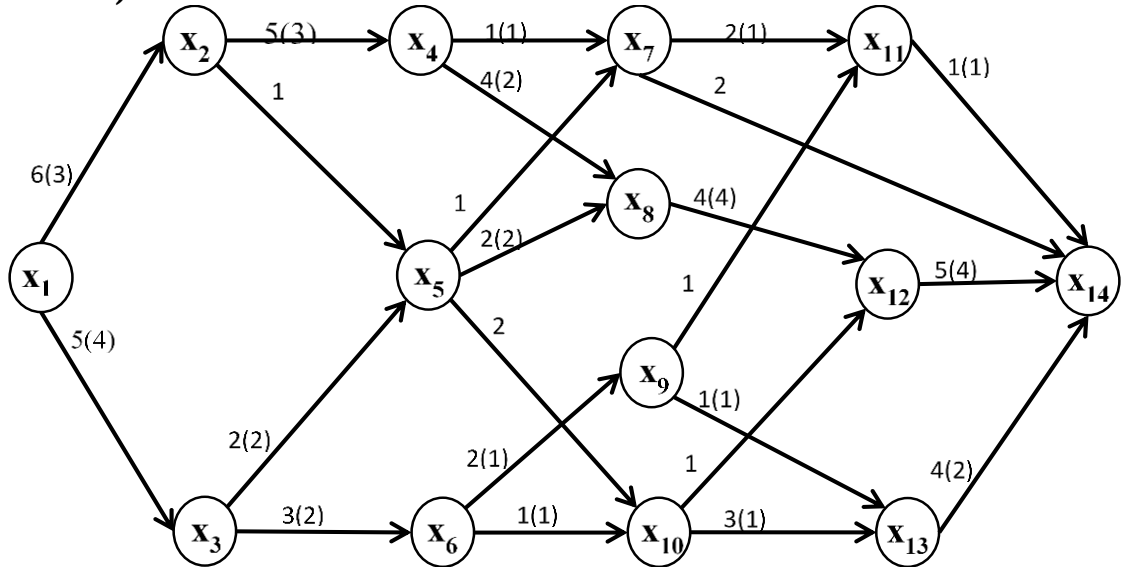
21)



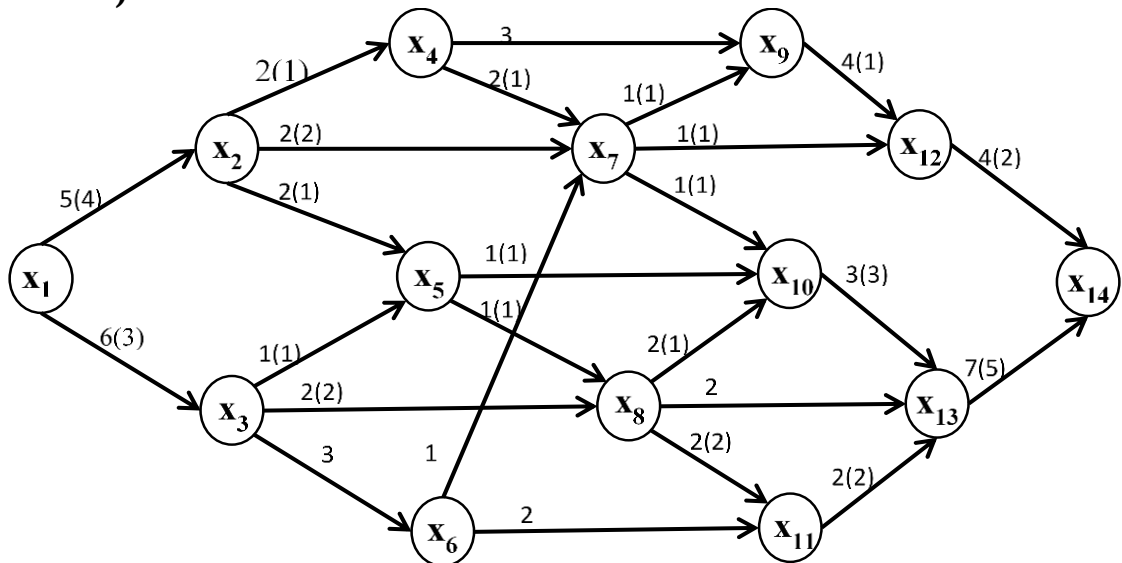
22)



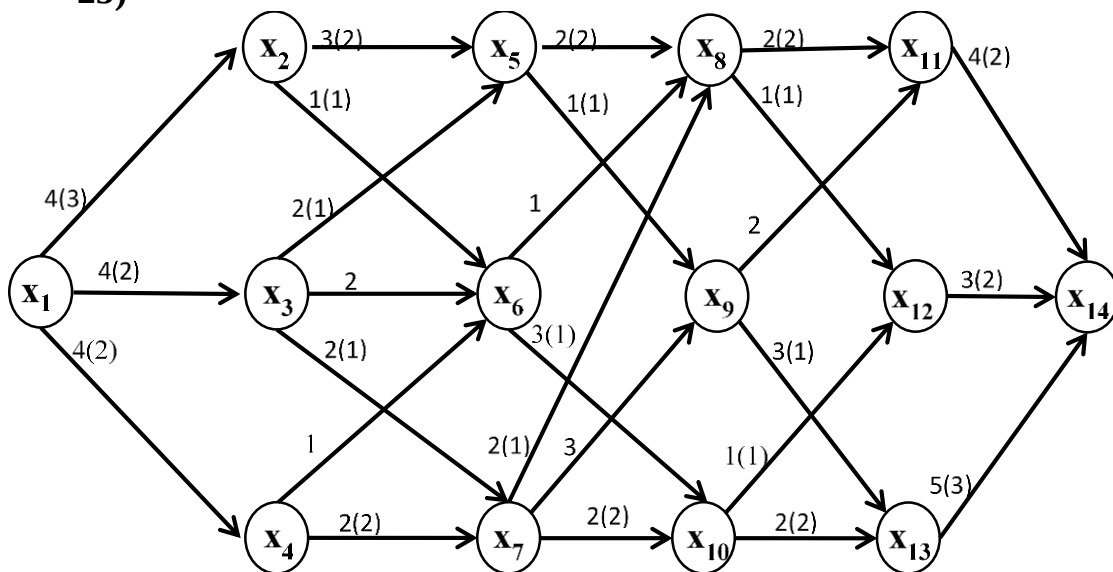
23)



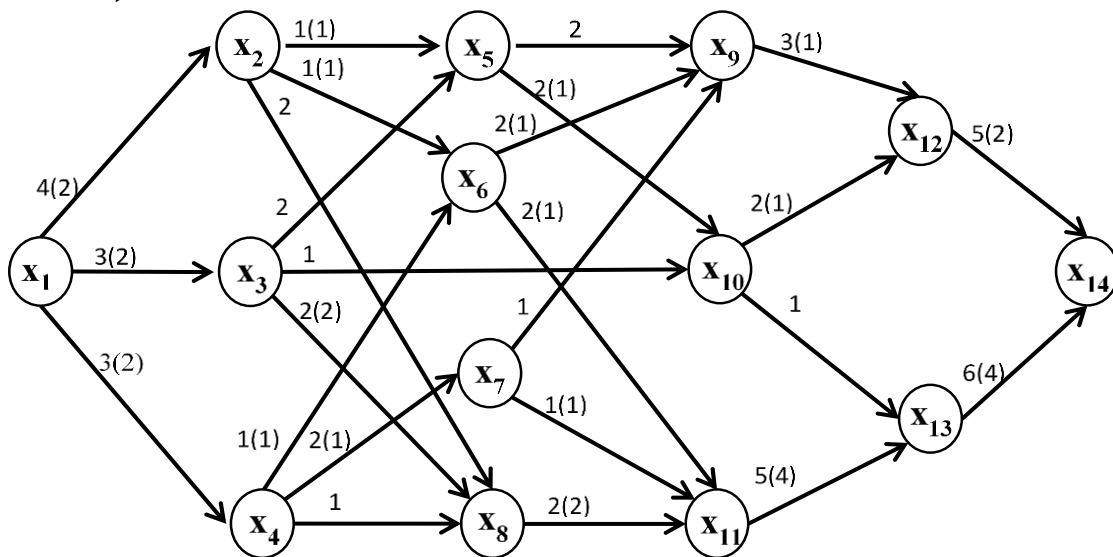
24)



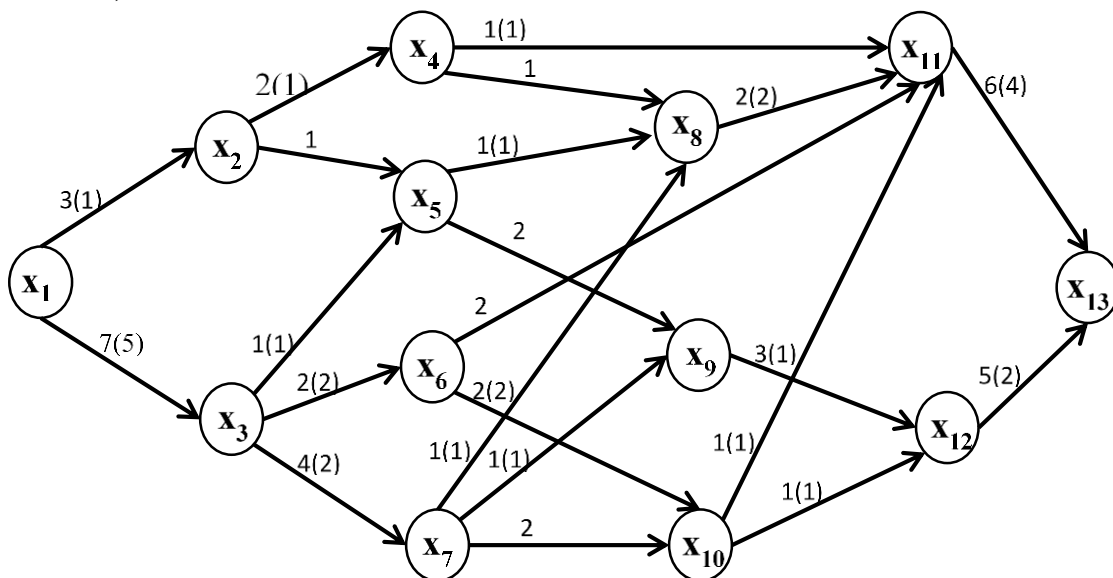
25)



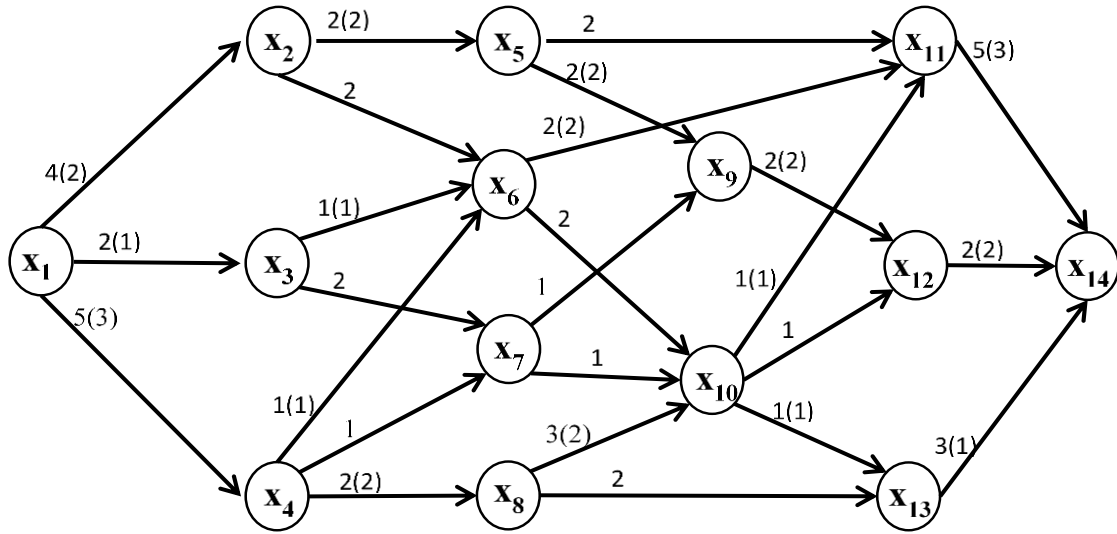
26)



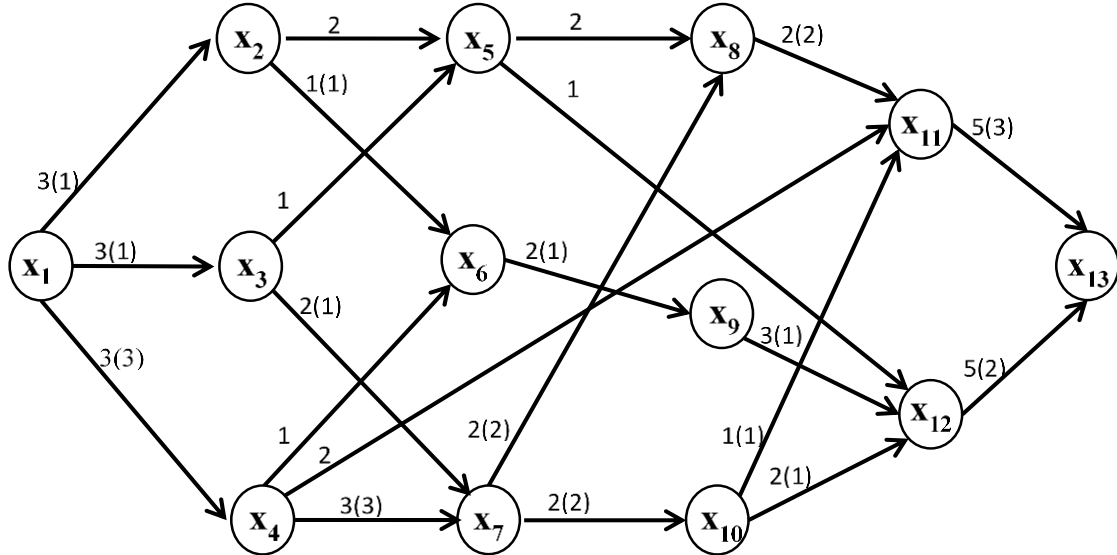
27)



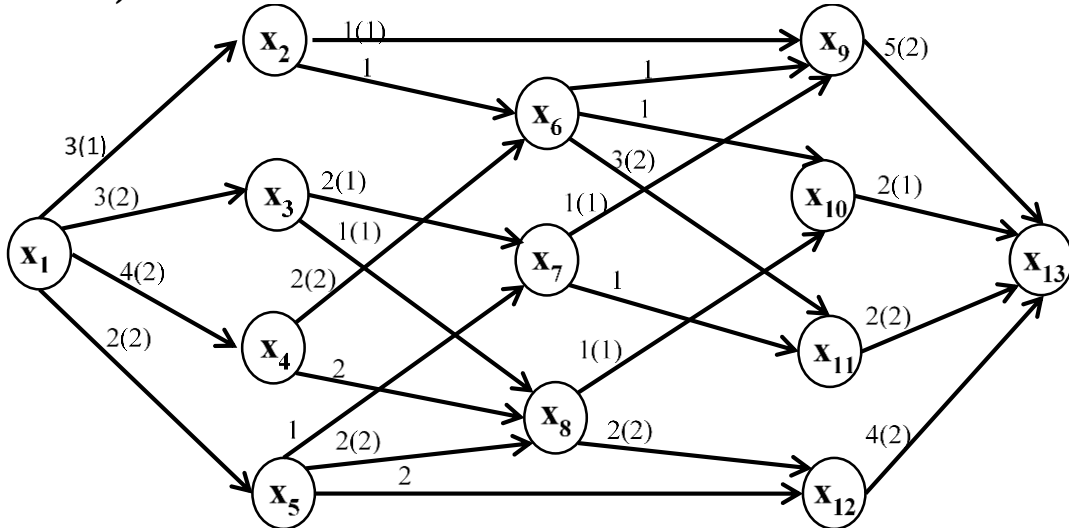
28)



29)



30)



6. Контрольные вопросы

1. Дать определение множества. Как можно задать множество. Что называют мощностью множества.
2. Какие основные операции выполняются над множествами. Какое множество называют универсальным.
3. Дать определение декартового произведения множеств. Дать определение бинарного отношения.
4. Какие операции выполняются над отношениями.
5. Какое подмножество называется максимальным совместимым.
6. Дать определение покрытия. Сформулировать задачу о покрытии.
7. Дать определение кратчайшего и минимального покрытий.
8. В чем сущность метода разложения по столбцу.
9. В чем сущность метода ветвей и границ.
10. Понятие ориентированного графа.
11. Понятие неориентированного графа.
12. Понятие пути в графе. Кратчайший путь.
13. Волновой алгоритм построения кратчайшего пути в невзвешенном и взвешенном графах.
14. Понятие пути в графе. Длиннейший путь.
15. Понятие компонент связности. Компоненты связности в неориентированном графе.
16. Понятие компонент связности. Компоненты связности в ориентированном графе.
17. Понятие цикла в графе. Система независимых циклов.
18. Остов графа. Построение произвольного остова.
19. Остов графа. Построение минимального остова.
20. Задача раскраски графа. Цикломатическое число.
21. Задача кратчайшей раскраски графа.
22. Понятие внутренне устойчивого множества. Алгоритм построения внутренне устойчивого множества.
23. Понятие внешне устойчивого множества. Алгоритм построения внешне устойчивого множества.
24. Гамильтонов контур. Основная идея построения гамильтонова контура.
25. Потоки в сетях. Алгоритм построения полного потока.
26. Потоки в сетях. Задача о максимальном потоке.
27. Потоки в сетях. Задача о минимальном потоке.
28. Планарные графы. Основные свойства планарных графов.
29. Планарные графы. Задача о четырёх красках.
30. Планарные графы. Алгоритм выявления непланарности.
31. Планарные графы. Примеры построения плоских изображений графов.

Список использованных источников

1. Новоселов В.Г. Прикладная математика для системотехников. Дискретная математика в задачах и примерах. / Учебное пособие. / В.Г. Новоселов, А.В. Скатков – Киев: УМК ВО, 1992. – 200 с.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов/ Ф.А. Новиков. – СПб.:Питер, 2009. – 384 с.
3. Белоусов А.Н. Дискретная математика/А.Н. Белоусов, Д.М. Грачев -М: изд. МВТУ им, Баумана, 2001. - 744с.
4. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы/ Б.Н. Иванов -М: Лаборатория базовых знаний, 2001. -288с.
5. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. — 2-е изд., стереотип. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. — 448 с.
6. Мангушева И.П., Хрусталева П.М. Лекции по дискретной математике. Часть I. Элементы теории множеств и отношений. Функции алгебры логики. Функции k-значной логики. Учебное пособие. -Саратов: Изд-во «Научная книга», 2010.-68с.
7. Макоха А.Н., Сахнюк П.А., Червяков Н.И. Дискретная математика. Учебное пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005 г. - 368 с.
8. Набебин А.А., Тарасиков А.С. Алгебраическая спецификация программных систем М.: ИНЭК, 2012 г. - 84 с.
9. Оре О. Графы и их применение/ О. Оре.— М.: Ленанд, 2015. – 208с.
10. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари – М.: Ленанд, 2015 – 304 с.
11. Ловас Л. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике и химии. / Л. Ловас, М. Пламмер – М.: Мир, 1998, 343 с.
12. Дистель Р. Теория графов Пер. с англ. - Новосибирск: Издательство института математики, 2002. - 336 с. ISBN 5-86134-101-X.
13. Кормен Т.Х. Часть VI. Алгоритмы для работы с графами // Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2006. — С. 1296. — ISBN 0-07-013151-1.

Приложение А. Пример оформления титульного листа.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Севастопольский государственный университет»**

Кафедра информационных технологий
и компьютерных систем

Отчет
о выполнении контрольной работы
по дисциплине
«Дискретная математика»

Выполнил:
ст. гр. ИВТб-11з Иванов И.И.

Проверил:
доц. каф. ИТиКС Ченгарь О.В.

Севастополь
2016

Приложение Б. Пример решения задачи о минимальном покрытии.

Постановка задачи.

Задана таблица покрытий (ТП), содержащая 6 строк и 7 столбцов, для каждой строки известен вес:

<i>R</i>	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	c
<i>A</i>	1	1				1	1	2
<i>B</i>		1		1	1	1		4
<i>C</i>			1		1		1	3
<i>D</i>	1		1	1		1		2
<i>E</i>	1		1				1	1
<i>F</i>			1				1	4

Построить хотя бы одно минимальное покрытие. Для решения использовать метод разложения по столбцу.

Решение.

Проверим, является ли таблица покрытий циклическим остатком.

Столбец **b_6** *больше* столбца **b_2** ($b_6 > b_2$), следовательно, **b_6** можно удалить; строка **F** *меньше* строки **E** ($F < E$) и вес строки **F** *больше* веса строки **E** ($c_F > c_E$), следовательно, **F** можно удалить. Таким образом, получен циклический остаток:

<i>R</i>	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	c
<i>A</i>	1	1				1	1	2
<i>B</i>		1		1	1	1		4
<i>C</i>			1		1		1	3
<i>D</i>	1		1	1		1		2
<i>E</i>	1		1				1	1
<i>F</i>			1				1	4

Выполним разложение полученной ТП по столбцу, для чего выберем столбец с минимальным числом единиц. Таких столбцов два:

b_2 и **b_4** . Возьмем, к примеру, столбец **b_2** , тогда

R	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_7	c
A	1	1				1	2
B		1		1	1		4
C			1		1	1	3
D	1		1	1			2
E	1		1			1	1

$A(2)B(4)$

R_1	b_3	b_4	b_5	c
B		1	1	4
C	1		1	3
D	1	1		2
E	1			1

R_2	b_1	b_3	b_7	c
C		1	1	3
D	1	1		2
E	1	1	1	1

$\emptyset$

$B(4)D(2)П1=\{E,B\}, P1= 5$

R_3	b_3	c
C	1	3
D	1	2
E	1	1

R_4	b_5	c
C	1	2
E	1	1

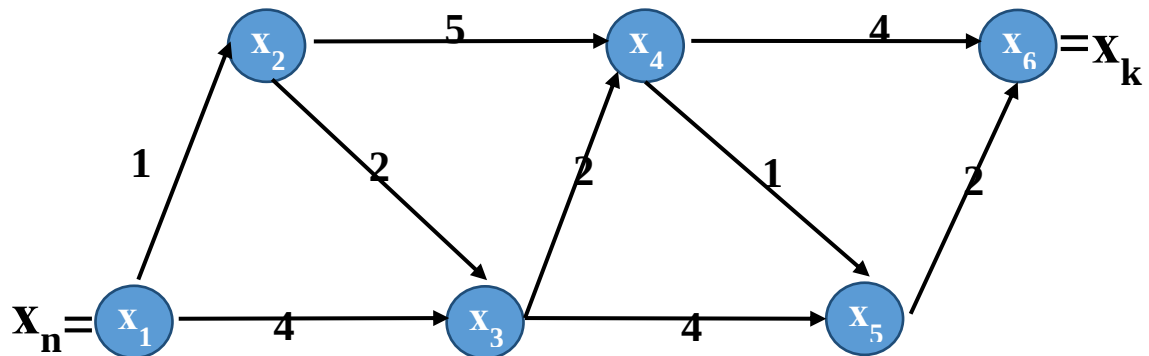
$\emptyset\emptyset$

$П2=\{E,B,A\}, P2= 7 П3=\{E,D,A\}, P3= 5$

Для полученных ТП R_1 и R_2 повторяем процедуры сокращения и разложения. ТП R_1 является циклическим остатком, ТП R_2 — допускает упрощение: $C < E$ ($c_C > c_E$) и $D < E$ ($c_D > c_E$), следовательно, C и D удаляем. В результате, E — ядерная, значит, вводим E в покрытие. Удаляем из таблицы R_2 строку E и все столбцы, которые она покрывает, тогда множество непокрытых столбцов — пусто. Поднимаясь по дереву решения к корню, получаем покрытие $П1$ с весом 5. Выполняем разложение ТП R_1 по столбцу b_4 , упрощаем полученные ТП R_3 и R_4 , получаем $П2$ с весом 7 и $П3$ с весом 5.

Таким образом, найдены два минимальных покрытия $П1$ и $П3$ с весом 5.

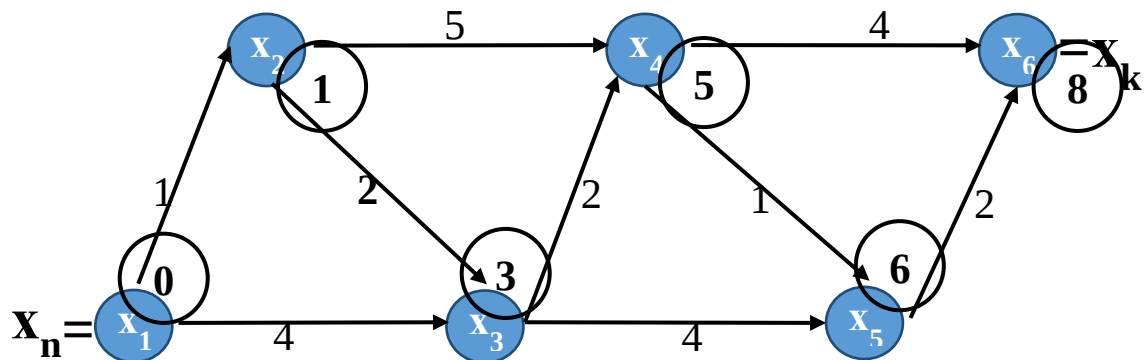
**Приложение В. Пример поиска кратчайшего пути в орграфе
волновым алгоритмом.**



Прямой ход решения оформляется в виде следующей таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	M
0	∞	∞	∞	∞	∞	<u>1</u>
0	1	4	∞	∞	∞	<u>2, 3</u>
0	1	3	6	∞	∞	<u>3, 4</u>
0	1	3	5	7	∞	<u>4, 5</u>
0	1	3	5	6	9	<u>5, 6</u>
0	1	3	5	6	8	<u>6</u>
0	1	3	5	6	8	$\emptyset$

Исходный граф с уже полученными весами вершин, полученными в результате прямого хода алгоритма:



Обратный ход решения:

x_6 : $G^{-1}(x_6) = \{x_4, x_5\}$;
дуга (x_4, x_6) : $(l_{4,6} = 4) \neq (V_6 - V_4 = 3)$ — не выделяется;
дуга (x_5, x_6) : $(l_{5,6} = 2) = (V_6 - V_5 = 2)$ — выделяется;
вершина x_5 выделяется.

x_5 : $G^{-1}(x_5) = \{x_3, x_4\}$;
дуга (x_3, x_5) : $(l_{3,5} = 4) \neq (V_5 - V_3 = 3)$ — не выделяется;
дуга (x_4, x_5) : $(l_{4,5} = 1) = (V_5 - V_4 = 1)$ — выделяется;
вершина x_4 выделяется.

x_4 : $G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3\}$;
дуга (x_2, x_4) : $(l_{2,4} = 5) \neq (V_4 - V_2 = 4)$ — не выделяется;
дуга (x_3, x_4) : $(l_{3,4} = 2) = (V_4 - V_3 = 2)$ — выделяется;
вершина x_3 выделяется.

x_3 : $G^{-1}(x_3) = \{x_1, x_2\}$;
дуга (x_1, x_3) : $(l_{1,3} = 4) \neq (V_3 - V_1 = 3)$ — не выделяется;
дуга (x_2, x_3) : $(l_{2,3} = 2) = (V_3 - V_2 = 2)$ — выделяется;
вершина x_2 выделяется.

x_2 : $G^{-1}(x_2) = \{x_1\}$;
дуга (x_1, x_2) : $(l_{1,2} = 1) = (V_2 - V_1 = 1)$ — выделяется;
вершина $x_1 = x_k$

Построен кратчайший путь (x_n, x_k) длиной **8**:

$(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6)$