

У ДК 551.46.083:629.785

МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ДИСТАНЦИОННОГО

ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ОКЕАНА

Болотин П.А., Поплавская М.Г.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: rybakov@stel.sebastopol.ua

Решена задача уменьшения погрешности измерения характеристик полей океана путем нахождения оптимальной формы аппаратных функций датчиков. Предложен метод нахождения аппаратных функций.

При дистанционном зондировании поверхности океана происходит осреднение значений измеряемого поля по элементу разрешения датчика и вне его с весом, определяемым аппаратной функцией прибора, которая является проекцией диаграммы направленности датчика на морскую поверхность. Результатом такого осреднения является подавление в выходном сигнале прибора высокочастотных составляющих спектра пространственных неоднородностей, что приводит к появлению погрешности измерения пространственной структуры поля [1]. Это осреднение проявляется более существенно при пассивном микроволновом зондировании поверхности океана, где ширина диаграммы направленности антенн довольно велика. Указанная погрешность может быть уменьшена сужением ширины диаграммы направленности прибора, но это требует пропорционального увеличения размеров антенны, что не всегда технически осуществимо. Однако, как показано в работе [2], при одинаковых размерах элемента разрешения метрологические характеристики дистанционного прибора зависят от формы его аппаратной функции. Отсюда возникает задача нахождения такой формы аппаратной функции прибора, которая при заданной величине его элемента разрешения обеспечивает наименьшую погрешность измерения.

Средний квадрат абсолютной погрешности при измерении однородного изотропного стационарного поля прибором с датчиком, имеющим осевую симметрию, выражается формулой [2]

$$\varepsilon^2 = 2\pi \int_0^{\infty} G_2(\alpha) [1 - \tilde{h}(\alpha)]^2 \alpha d\alpha, \quad (1)$$

где α – волновое число, $G_2(\alpha)$ – двумерный пространственный энергетический спектр измеряемого поля; $\tilde{h}(\alpha)$ – спектр аппаратной функции прибора.

Спектр $\tilde{h}(\alpha)$ аппаратной функции прибора связан с самой аппаратной функцией $h(r)$ преобразованием Ганкеля

$$h(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{h}(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha \cdot d\alpha, \quad (2)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя.

Учитывая соотношение (2), характерный радиус аппаратной функции

$R_x = \int_0^\infty \frac{h(r)}{h(0)} dr$ (радиус элемента разрешения прибора) принимает вид:

$$R_x = \frac{\int_0^\infty \tilde{h}(\alpha) d\alpha}{\int_0^\infty \tilde{h}(\alpha) \alpha d\alpha}.$$

Найдем форму аппаратной функции, которая обеспечит минимум выражения (1) при условии, что

$$R_x = \text{const}. \quad (3)$$

Назовем такую аппаратную функцию оптимальной и решим поставленную задачу путем разложения спектра $\tilde{h}(\alpha)$ прибора в конечную сумму по полной в бесконечном интервале системе функций $\tilde{h}_n(\rho\alpha)$

$$\tilde{h}(\alpha) = \sum_{n=0}^N a_n \tilde{h}_n(\rho\alpha). \quad (4)$$

Здесь ρ – множитель, одинаковый для всех $\tilde{h}_n(\rho\alpha)$.

Учитывая, что в рассматриваемом случае $\tilde{h}(\alpha)$ – четная функция своего аргумента, в качестве такой системы выберем функции [3]

$$\tilde{h}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^{2n}, \quad (5)$$

с которыми имеют смысл входящие в формулу (1) интегралы для всех практически важных видов спектра поля $G_2(\alpha)$ и любых номеров n слагаемых суммы (4). В этом случае задача нахождения оптимальной функции $\tilde{h}(\alpha)$ сводится к определению такого набора коэффициентов a_n в разложении (4), который при условии (3) обеспечит минимум ошибки (1).

Установим связь между коэффициентами a_n , вытекающую из условия (3). Поскольку

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2n} dx = 2^{n-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2n+1} dx = 2^n \cdot \Gamma(n+1),$$

где $\Gamma(n)$ – гамма-функция,

выбирая $\rho = R_x$, приведем условие (3) к виду

$$\sum_{n=0}^N a_n q_n = 0, \quad (6)$$

где $q_n = 1 - 2^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$.

Подставляя выражение $\tilde{h}(\alpha)$ в равенство (1), получим

$$\varepsilon_N^2 = \sigma^2 \left(1 - 2 \sum_{n=0}^N a_n W_n + \sum_{m=0}^N \cdot \sum_{n=0}^N a_m a_n A_{mn} \right), \quad (7)$$

где σ^2 – дисперсия измеряемого поля;

$$A_{mn} = M_{m+n}(1) / (2^{m+n} \cdot m!n!); \quad W_n = 2M_n(\sqrt{2})/n!; \quad (8)$$

$$M_k(t) = \frac{2\pi}{\sigma^2 R_x^2} \int_0^{\infty} G_2(t \cdot x/R_x) e^{-x^2} x^{2k+1} dx. \quad (9)$$

Используя соотношения (4) и (5) в формуле (2), найдем выражение для оптимальной аппаратной функции прибора

$$h(r) = \sum_{n=0}^N a_n h_n(r), \quad (10)$$

где $h_n(r) = \frac{1}{2\pi R_x^2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_x}\right)^2\right] \cdot L_n\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_x}\right)^2\right]$; $L_n(z)$ – полиномы

Лагерра. Найдем коэффициенты a_i ($i = \overline{0, N}$), минимизирующие (7) при выполнении условия (6). Записав коэффициент a_N из этого условия в виде

$a_N = -\frac{1}{q_N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n q_n$, и подставив его в равенство (7), а затем, разделив обе части этого равенства на величину σ^2 , получим формулу для квадрата относительной погрешности измерения:

$$\left(\frac{\varepsilon_N}{\sigma} \right)^2 = 1 - 2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n W_n - 2a_N W_N + \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n A_{mn} +$$

$$+ 2a_N \sum_{n=0}^{N-1} a_n A_{nN} + a_N^2 A_{NN}. \quad (11)$$

Его минимум достигается при условии выполнения N равенств:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\varepsilon_N}{\sigma} \right)^2 = 0, \quad (k = \overline{0, N-1}).$$

Их развернутая форма имеет вид

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(A_{nk} - \frac{q_k}{q_N} A_{nN} \right) - \left(A_{kN} - \frac{q_k}{q_N} A_{NN} \right) \cdot \frac{q_n}{q_N} a_n = W_k - \frac{q_k}{q_N} W_N$$

$$\text{при } k = \overline{0, N-1}. \quad (12)$$

Упростим выражение (11), соответствующее минимуму погрешности измерения. Для этого умножим k -ое уравнение системы (12) на коэффициент a_k и просуммируем найденные равенства по k от 0 до $N-1$.

При этом получим, что при условии минимума величины $(\varepsilon_N/\sigma)^2$, должно выполняться равенство

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n A_{mn} + 2a_N \sum_{n=0}^{N-1} a_n A_{nN} + a_N^2 A_{NN} = \sum_{n=0}^N W_n a_n.$$

Используя это равенство в выражении (11), находим:

$$\left(\frac{\varepsilon_{N \min}}{\sigma} \right)^2 = 1 - \sum_{n=0}^N W_n a_n. \quad (13)$$

Найденные из системы (12) коэффициенты $a_k (0 \leq k \leq N)$ решают поставленную задачу для любого конечного числа N . При $N \rightarrow \infty$ по формуле (10) может быть найден предельный вид оптимальной аппаратной функции прибора, а по формуле (11) – соответствующая ему погрешность измерения. Как было показано ранее [2], величина числа N определяет количество лепестков аппаратной функции. На практике возможно создание диаграмм направленности антенн (а значит, и аппаратных функций) только с конечным числом лепестков. Поэтому наибольший интерес представляют конечные значения N .

Найдем оптимальную аппаратную функцию дистанционного прибора при измерении им поля, двумерный спектр которого $G_2(x)$ имеет вид

$$G_2(\alpha) = \frac{\sigma^2 r_x^2}{\pi^2} \cdot \exp \left[-\frac{(r_x \alpha)^2}{\pi} \right], \quad (14)$$

где r_x – характерный масштаб поля.

Подставляя соотношение (14) в формулу (9), найдем, что

$$M_k(t) = \frac{k!}{\pi z^2 \left[1 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{z} \right)^2 \right]^{k+1}}. \quad \text{Здесь величина } z = \frac{R_x}{r_x} \text{ – отношение}$$

характерного радиуса аппаратной функции прибора к масштабу поля. Учитывая равенство (14), выражения (8) и (9) можно записать как:

$$A_{mn} = \frac{(m+n)!}{m! n!} A_0 \delta_1^{m+n}, \quad W_n = W_0 \delta^n, \quad (15)$$

где $A_0 = \frac{1}{1 + \pi z^2}$; $W_0 = \frac{2A_0}{1 + A_0}$; $\delta_1 = \frac{1 - A_0}{2}$; $\delta = \frac{1 - A_0}{1 + A_0}$.

Подстановка величин A_{mn} и W_n из равенств (15) в выражения (12) и (13) решает поставленную задачу.

Используя полученные выше соотношения, найдем приближенные аналитические выражения для небольших значений N и малых z .

При $N=0$ аппаратная функция прибора, полученная из формулы (10), принимает вид $h(r) = \frac{a_0}{4R_x^2} \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{R_x} \right)^2 \right]$.

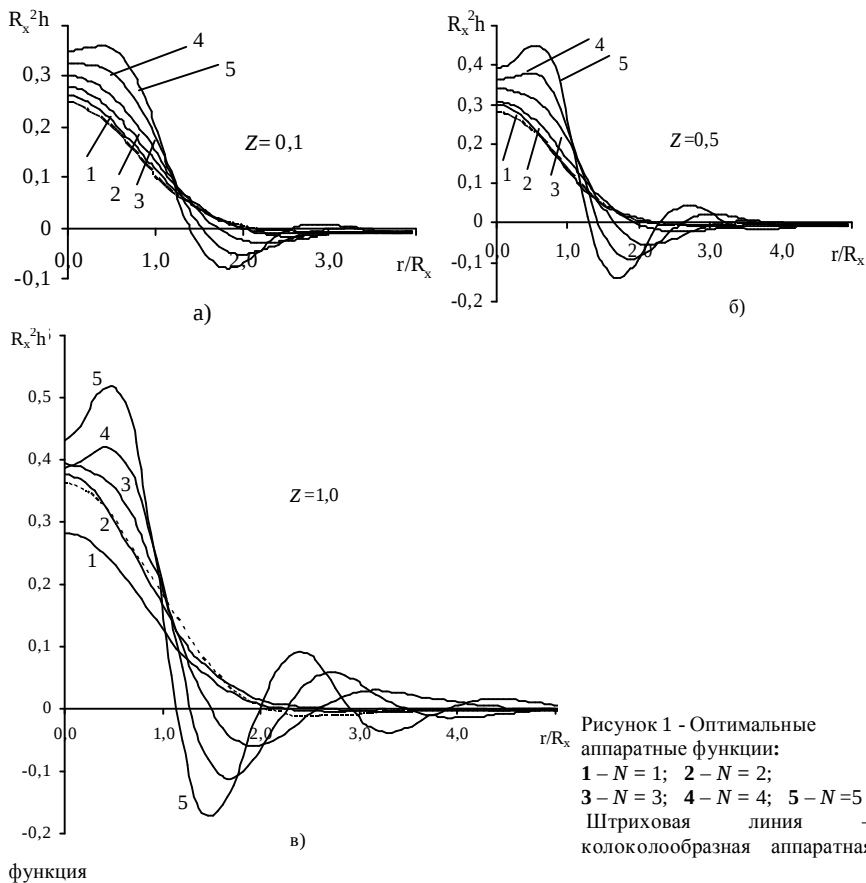
Квадрат относительной погрешности измерения запишется как $\left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma} \right)^2 = 1 - \frac{2a_0}{1 + z^2} + \frac{a_0^2}{1 + 2z^2}$. Его минимум достигается при $a_0 = \frac{1 + 2z^2}{1 + z^2}$ и составляет $\left(\frac{\varepsilon_{0\min}}{\sigma} \right)^2 = \left(\frac{z^2}{1 + z^2} \right)^2$.

При $N=1$ выражение для аппаратной функции прибора принимает вид $h(r) = \frac{a_0}{2\pi R_x^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_x} \right)^2 \right] \cdot \left[1 - C_{01} + \frac{1}{2} C_{01} \left(\frac{r}{R_x} \right)^2 \right]$, где $C_{01} = \frac{q_0}{q_1}$.

Минимум квадрата относительной погрешности измерения составляет величину $\left(\frac{\varepsilon_{1\min}}{\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{W_0^2}{A_0} \cdot \frac{(1 - C_{01}\delta)^2}{(1 - 2C_{01}\delta_1 + 2C_{01}^2\delta_1^2)}$ и достигается при

$$a_0 = \frac{W_0 - C_{01}W_1}{A_{00} - 2C_{01}A_{01} + C_{01}^2A_{11}} \text{ и } a_1 = -C_{01}q_0.$$

Для значений N от 2 до 10 и различных z , задача была решена численными методами. Результаты решения показаны на рисунках 1 и 2.



Для сравнения результатов измерения полей приборами с оптимальными аппаратными функциями при различных значениях

величины N в качестве эталона выбрана аппаратная функция колоколообразной формы $h(r) = \frac{a_0}{4R_x^2} \exp \left[-\frac{\pi \left(\frac{r}{R_x} \right)^2}{4} \right]$. Такие аппаратные

функции применяются для аппроксимации диаграмм направленности приемников инфракрасного и оптического излучения [2]. Выигрыш в точности измерения $\mu_N = \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_N^2}$ поля прибором с оптимальной аппаратной

функцией [2] зависит от чисел N и z . Так, например, для $z < 0,2$ и $N = 1$

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_1^2} = \frac{4}{\pi^2(1 + C_{01})^2} \approx 3,919.$$

При $N = 2$ и $z \leq 0,2$

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_2^2} \approx 0,1059/z^4, \quad \text{т.е. с}$$

уменьшением z выигрыш растет и может достигать существенных величин. В частности, для $z = 0,3$ $\mu_2 \approx 13$, а для $z = 0,2$ выигрыш равен ≈ 66 .

На рисунках 1, а,б,в и 2 изображены зависимости

оптимальных аппаратных функций прибора и квадрата

относительной погрешности измерения для различных значений величин N и z (пунктиром обозначены кривые, соответствующие $N = 0$). Из этих рисунков видно, что рост числа N приводит к следующим результатам

1. Аппаратные функции прибора, убывая с удалением от ее центра, приобретают осциллирующий характер. Число лепестков оптимальной аппаратной функции увеличивается. Ее прогиб при $r = 0$ носит более выраженный характер. Боковые лепестки сужаются, смещаясь к центру аппаратной функции, амплитуда их растет. Например, для $z = 0,5$ амплитуда 1-го бокового лепестка при $N = 5$ почти в 2,5 раза превышает соответствующую амплитуду при $N = 3$.
2. Квадрат относительной погрешности уменьшается. Если для $z = 0,5$ и

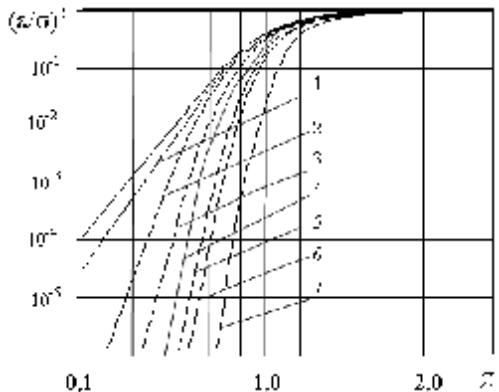


Рисунок 2 – Средний квадрат погрешности измерения поля:

1 - $N = 1$; 2 - $N = 2$; 3 - $N = 3$; 4 - $N = 4$;
5 - $N = 5$; 6 - $N = 6$; 7 - $N = 10$

$$N = 3 \text{ величина } \left(\frac{\varepsilon_{\min}}{\sigma} \right)^2 \approx 5 \cdot 10^{-3}, \text{ то для } N = 5 \left(\frac{\varepsilon_{\min}}{\sigma} \right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-5}.$$

Оптимальные аппаратные функции существенно уменьшают погрешность при малых значениях величины z .

Наличие боковых лепестков у диаграмм направленности приборов приводит к уменьшению погрешности измерения пространственных неоднородностей полей океана, причем более существенно при малых значениях величины z . При значительном удалении дистанционного прибора от поверхности океана при неизменной ширине его аппаратной функции желательно иметь оптимальную форму последней. С точки зрения физики этот факт можно объяснить следующим образом. При дистанционном зондировании физических полей поверхности океана прибор производит пространственное осреднение этих полей, т.е. осуществляет низкочастотную фильтрацию (интегрирование полей). С помощью лепестков различной полярности осуществляется операция, близкая к пространственному дифференцированию, т.е. высокочастотная фильтрация. Результат взаимодействия этих двух факторов при заданном значении характерного масштаба аппаратной функции прибора и приводит к оптимальной форме аппаратных функций приборов.

Библиографический список

1. Dotsenko S.V. Spectral characteristics of remote sensors / S.V. Dotsenko, A. N. Nedovesov, M.G. Poplavskaya // II Colloquies International sure L'Exploitation des Oceans. Bordeaux (France), October 1974g. — Bordeaux, 1974. — V ol. 3. — P. 177–180.
2. Доценко С.В. Уменьшение погрешности дистанционного измерения физических полей океана. / С.В. Доценко, М.Г. Поплавская // Космические исследования на Украине. — 1980. — Вып. 14. — С. 80–89.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. — М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.
4. Доценко С.В. Случайные процессы в гидрофизических измерениях / С.В. Доценко. — Л.: Гидрометеиздат, 1983. — 239 с.

Поступила в редакцию 16.07.2001 г.