

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий
и управления в технических системах СГУ
Кафедра «Высшая математика»

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания и контрольные задания
для подготовки к Единому государственному экзамену
по математике

Севастополь
СевГУ
2016

УДК 519

Рецензент:
С.Г. Глеч – доцент, к.т.н.

Составители: М.И. Деркач, Н.А. Деркач, Т.Ю. Кротова

Введение в теорию вероятностей: метод. указания и контрольные задания / Сост. М.И. Деркач, Н.А. Деркач, Т.Ю. Кротова. – Севастополь: СевГУ, 2016. – 32 с.: ил.

Целью методических указаний является оказание помощи учащимся при изучении элементов теории вероятностей в курсе математики средней школы, а также при подготовке к Единому государственному экзамену по математике.

Указания содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

УДК 519

Рассмотрено и рекомендовано на заседании кафедры «Высшая математика» в качестве методических указаний и контрольных заданий для подготовки к Единому государственному экзамену по математике, протокол № 6 от 1.07.2015 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Элементы комбинаторики	4
§ 2. Понятие случайного события. Виды случайных событий. Классическое определение вероятности	5
§ 3. Геометрические вероятности	11
§ 4. Операции над случайными событиями Аксиомы теории вероятностей	15
§ 5. Условная вероятность. Зависимые и независимые случайные события. Вероятность произведения случайных событий	17
§ 6. Вероятность суммы совместных событий. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса	24
§ 7. Последовательность испытаний. Формула Бернулли	28
Библиографический список	31

§1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Перестановкой из n элементов называется всякое расположение n данных различных элементов в определённом порядке. Число всех возможных перестановок из n элементов

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$.

Размещением из n элементов по m ($m \leq n$) называется всякое упорядоченное расположение m различных элементов из данных n различных элементов. Число всех возможных размещений из n элементов по m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1).$$

Сочетанием из n элементов по m ($m \leq n$) называется всякий набор m различных элементов из данных n различных элементов. Число всех возможных сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Размещением с повторениями из n элементов по m называется всякое упорядоченное расположение m элементов (среди которых могут быть и одинаковые) из данных n различных элементов. Число всех возможных размещений с повторениями из n элементов по m элементам

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Правило суммы: если объект A_1 можно выбрать n_1 способами, объект A_2 — n_2 способами, ..., объект A_k — n_k способами, причём выборы всех указанных объектов несовместны, то выбрать или A_1 , или A_2 , ..., или A_k можно $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ способами.

Правило произведения: если объект A_1 можно выбрать n_1 способами, объект A_2 (после того, как объект A_1 уже выбран) можно выбрать n_2 способами, ..., объект A_k (после того, как все предыдущие объекты уже выбраны) можно выбрать n_k способами, то выбрать упорядоченный объект $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ можно $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

§2. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Случайным событием называется событие, которое может наступить или не наступить при реализации некоторой системы условий S .

Достоверным называется событие, которое всегда наступает при реализации некоторой системы условий S .

Невозможным называется событие, которое заведомо не наступает при реализации некоторой системы условий S .

Достоверное и невозможное события в теории вероятностей рассматривают как частные (предельные) случаи случайных событий.

Случайные события будем обозначать заглавными буквами русского и латинского алфавитов: A, B, C и т.д. Для обозначения достоверного и невозможного события используются также символы Ω и $\emptyset$ соответственно.

В дальнейшем вместо того, чтобы говорить, что реализована система условий S , будем говорить, что проведено *испытание* (*опыт, эксперимент*).

В теории вероятностей рассматриваются не все случайные события и явления, а лишь *однородные массовые* события и явления, то есть такие события и явления, которые могут неоднократно наблюдаться при реализации одной и той же системы условий S . Это значит, что соответствующий эксперимент должен обладать свойством *многократной воспроизводимости*.

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие однородным массовым случайным событиям и явлениям.

Пример. Испытание – однократное подбрасывание игральной кости. Случайные события: $A = \{\text{выпадение чётного числа очков на верхней грани игральной кости}\}$; $B = \{\text{выпадение семи очков на верхней грани игральной кости}\}$; $C = \{\text{число очков на верхней грани игральной кости меньше семи}\}$. Отметим, что событие B является невозможным, а событие C – достоверным.

Два случайных события называются *несовместными* (*несовместимыми*), если наступление одного из этих событий исключает наступление другого в одном и том же испытании. В противном случае два случайных события называются *совместными* (*совместимыми*).

Пример. Пусть из колоды карт наудачу извлекается одна карта. Рассмотрим следующие случайные события:

$$A = \{\text{извлечен туз}\}, B = \{\text{извлечена шестерка}\}; \\ C = \{\text{извлечена карта бубновой масти}\}.$$

События A и B несовместны, а события A и C , а также B и C , являются **совместными**.

Несколько событий образуют *полную группу* событий, если в результате испытания наступает хотя бы одно из этих событий.

Пример. Из ящика, содержащего черные и белые шары, наудачу извлекаются два шара. Рассмотрим следующие случайные события.

$A = \{\text{извлечены два белых шара}\}, B = \{\text{извлечены два черных шара}\};$

$C = \{\text{извлечены один белый шар и один черный}\};$

$D = \{\text{извлечен хотя бы один белый шар}\}, E = \{\text{извлечен хотя бы один черный шар}\}.$

События A, B, C образуют полную группу несовместных событий, а события D, E образуют полную группу совместных событий.

Случайные события называются *равновозможными*, если нет никаких оснований считать, что наступление одного из них более возможно, чем другого.

Пример. Выпадение «герба» и «решки» – равновозможные события при однократном подбрасывании монеты.

Простейшим примером случайного события является *элементарное событие*, или *элементарный исход*. Элементарным исходом называется каждый из возможных результатов испытания: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$

Элементарные исходы несовместны, а их множество образует полную группу, которая называется *пространством элементарных исходов* Ω .

Пример. Однократно подбрасывается игральная кость. Пространство элементарных исходов состоит из шести элементарных исходов: $\omega_i = \{\text{на верхней грани выпало } i \text{ очков}\}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$ Таким образом, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$

Элементарные исходы, в которых событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию.

Пример. Случайному событию $C = \{\text{выпало чётное число очков при однократном подбрасывании игральной кости}\}$ благоприятствуют три элементарных исхода: $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ (см. предыдущий пример).

Классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных исходов Ω состоит из конечного числа n элементарных исходов и пусть все элементарные исходы равновозможны.

Тогда вероятностью $P(A)$ случайного события A называется число, которое вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число исходов, благоприятствующих событию A , n – общее число элементарных **ИСХОДОВ**.

Свойства классического определения вероятности

1. Для любого случайного события A справедливо неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Вероятность невозможного события равна 0, т.е. $P(\emptyset) = 0$.
3. Вероятность достоверного события равна 1, т.е. $P(\Omega) = 1$.

Примеры решения задач

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, Р, М, получится слово РАМА?

Решение. Испытание представляет собой упорядоченное расположение (расположение в ряд) четырёх различных кубиков. Поэтому в качестве элементарного исхода испытания возьмём перестановку из четырёх различных элементов (кубиков). Тогда все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = P_4 = 4!$.

Согласно правилу произведения число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{получится слово РАМА}\}$, может быть вычислено по формуле $m = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$, т.е. $m = 2$. В силу классического определения вероятности имеем $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$.

Ответ: 1/12.

2. Из восьми карточек с буквами П, Р, И, П, Р, А, В, А (по одной букве на каждой карточке) наугад выбираются четыре и выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ПАРА.

Решение. Испытание представляет собой упорядоченное расположение (расположение в ряд) четырёх карточек из данных восьми. В качестве элементарного исхода испытания возьмём размещение из восьми различных элементов (карточек) по четырём. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = A_8^4$.

Согласно правилу произведения число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{получится слово ПАРА}\}$, может быть вычислено по формуле $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$, т.е. $m = 8$. В силу классического определения вероятности имеем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{A_8^4} = \frac{8 \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{210}.$$

Ответ: 1/210.

3. Для дежурства на вечере путём жеребьёвки выбирается пять человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 9 юношей и 3

девушки. Какова вероятность того, что в состав дежурных войдёт ровно 2 девушки?

Решение. Испытание состоит в неупорядоченном выборе 5 человек (дежурных) из 12 человек (членов комиссии). В качестве элементарного исхода возьмём сочетание из 12 элементов (членов комиссии) по 5. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_{12}^5$.

Двух девушек из трёх можно выбрать C_3^2 способами, а трёх юношей из девяти можно выбрать C_9^3 способами. Поэтому согласно правилу произведения число исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{в состав дежурных войдёт ровно 2 девушки}\}$, может быть вычислено по формуле $m = C_3^2 \cdot C_9^3$.

В силу классического определения вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2 \cdot C_9^3}{C_{12}^5} = \frac{3 \cdot 9! \cdot 5! \cdot 7!}{3! \cdot 6! \cdot 12!} = \frac{7}{22}.$$

Ответ: 7/22.

4. Шестеро детей (три мальчика и три девочки) случайным образом садятся на шестиместную скамейку. Какова вероятность того, что мальчики и девочки будут чередоваться?

Решение. Испытание состоит в том, что шестеро детей наудачу рассаживаются на шестиместной скамейке. Пространство элементарных исходов можно строить по-разному.

Первый способ. В качестве элементарного исхода выбираем упорядоченное расположение шести детей, т.е. перестановку из шести элементов. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = P_6 = 6!$

Мальчики и девочки будут чередоваться, если мальчики займут все чётные места, а девочки – все нечётные места, или наоборот. Мальчики могут расположиться на чётных (нечётных) местах P_3 способами и девочки могут расположиться на нечётных (чётных) местах P_3 способами. Используя правила суммы и произведения, несложно подсчитать число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{мальчики и девочки будут чередоваться}\}$: $m = 2P_3 \cdot P_3$. Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2P_3 \cdot P_3}{P_6} = \frac{2 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{10}.$$

Второй способ. В качестве элементарного исхода возьмём набор (неупорядоченный) трёх мест, выбранных мальчиками, т.е. сочетание из шести элементов (мест) по три. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_6^3$.

Случайному событию $A = \{\text{мальчики и девочки будут чередоваться}\}$ благоприятствуют только два элементарных исхода (набор чётных мест или набор нечётных мест).

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: 1/10.

5. Из 11 букв слова ВЕРОЯТНОСТЬ наудачу выбраны 2 буквы (не обязательно разные). Какова вероятность того, что выбранные буквы либо обе гласные, либо обе согласные?

Решение. В качестве элементарного исхода выбираем неупорядоченный набор двух букв (не обязательно разных), т.е. сочетание из 11 элементов по 2. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_{11}^2$.

Две гласные буквы из четырёх (Е, О, Я, У) можно выбрать C_4^2 способами, а две согласные буквы из оставшихся 7 (В, Р, Т, Н, С, Д, Б) – C_7^2 способами. Согласно правилу суммы число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{выбранные буквы либо обе гласные, либо обе согласные}\}$, равно $m = C_4^2 + C_7^2$.

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 + C_7^2}{C_{11}^2} = \frac{(6 + 21) \cdot 2! \cdot 9!}{11!} = \frac{27}{55}.$$

Ответ: 27/55.

6. Из колоды 36 игровых карт наудачу выбраны 6 карт. Какова вероятность того, что среди этих шести карт окажется хотя бы один «туз»?

Решение. В качестве элементарного исхода выбираем набор шести карт из 36 игровых карт, т.е. сочетание из 36 элементов по 6. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_{36}^6$.

Так как в колоде 4 «туза», то число указанных наборов, не содержащих «туза», равно C_{32}^6 , а, следовательно, число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{среди шести наудачу выбранных карт окажется хотя бы один «туз»}\}$, можно вычислить по формуле $m = C_{36}^6 - C_{32}^6$.

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{36}^6 - C_{32}^6}{C_{36}^6} = 1 - \frac{32! \cdot 6! \cdot 30!}{6! \cdot 26! \cdot 36!} = \frac{100}{187}.$$

Ответ: 100/187.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, А, Н, Н, С, получится слово АНАНАС?

2. Из 6 карточек с буквами З, А, Д, А, Ч, А (по одной букве на каждой карточке) наудачу выбирают 4 карточки и раскладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ДАЧА?

3. Найти вероятность того, что участник лотереи «Спортлото 5 из 36» угадает ровно 3 номера.

4. Шесть человек случайным образом садятся на шестиместную скамейку. Найти вероятность того, что два определённых лица окажутся рядом.

5. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются 3. Найти вероятность того, что из 5 случайно взятых билетов выигрышным окажется хотя бы один билет.

6. Из букв слова ТЕОРЕМА наугад выбрали две буквы (не обязательно разные). Какова вероятность того, что обе буквы будут либо гласными, либо согласными?

7. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, К, С, С, получится слово КАССА?

8. Из 7 карточек с буквами О, Т, Р, Е, З, О, К (по одной букве на каждой карточке) наудачу выбирают 5 карточек и раскладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ОЗЕРО?

9. Устройство состоит из 6 элементов, из которых 2 изношенных. При включении устройства случайным образом включаются три элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

10. Все 8 книг восьмитомного собрания сочинений Ф.М. Достоевского поставили наугад на книжную полку. Какова вероятность того, что все тома с чётными номерами окажутся стоящими левее всех томов с нечётными номерами?

11. В коробке из 25 изделий 15 изделий 1-го сорта. Наудачу извлекаются 3 изделия. Определить вероятность того, что хотя бы одно из извлечённых изделий 1-го сорта.

12. Из колоды 36-ти игральных карт наудачу выбирают 2 карты. Найти вероятность того, что обе карты окажутся либо тузами, либо картами бубновой масти.

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Классическую схему нельзя применить в случае бесконечного числа элементарных исходов. В некоторых задачах этот недостаток позволяет преодолеть геометрическое определение вероятности.

Пусть отрезок CD является частью отрезка AB . На отрезок AB наудачу ставится точка M . Эта точка может, как попасть, так и не попасть на отрезок CD . Рассмотрим событие $F = \{\text{точка попала на отрезок } CD\}$. Естественно предположить, что вероятность события F пропорциональна длине отрезка CD и не зависит от расположения CD на AB . Тогда

$$P(F) = \frac{\text{длина } CD}{\text{длина } AB}.$$

Это геометрическое определение вероятности в одномерном случае.

В двумерном случае вероятность события $A = \{\text{точка, наудачу выбранная в области } G, \text{ попала в область } g, \text{ которая является частью } G\}$ вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G}.$$

При этом предполагается, что вероятность попадания точки в область g пропорциональна площади g и не зависит ни от её формы, ни от расположения относительно G .

Аналогично определяются геометрические вероятности в трёхмерном случае: $P(A) = \frac{\text{объём } g}{\text{объём } G}$.

Примеры решения задач

1. Внутри круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри прямоугольника со сторонами 3 и 4, вписанного в этот круг (рис. 1).

Решение. Поскольку диагональ прямоугольника является диаметром круга, то для определения радиуса R круга можно воспользоваться теоремой Пифагора: $(2R)^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$, откуда $R = \frac{5}{2}$.

Пусть $A = \{\text{точка, наудачу брошенная внутрь круга, попала внутрь прямоугольника}\}$. Согласно

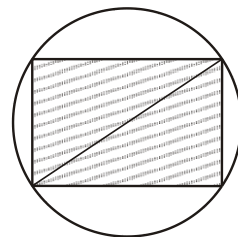


Рис. 1

геометрическому определению вероятностей имеем

$$P(A) = \frac{S_{np}}{S_{кр}},$$

где S_{np} – площадь прямоугольника со сторонами 3 и 4; $S_{кр}$ – площадь круга радиусом $5/2$:

$$S_{пр} = 3 \cdot 4 = 12, \quad S_{кр} = \pi \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25\pi}{4}.$$

Поэтому $P(A) = \frac{12 \cdot 4}{25\pi} = \frac{48}{25\pi}.$

Ответ: $48/25\pi$.

2. В круге радиуса r наудачу выбрана точка M . Найти вероятность того, что расстояние от точки M до центра круга будет не меньше чем r_1 и не больше чем r_2 ($0 < r_1 < r_2 < r$).

Решение. Пространство элементарных исходов Ω представляет собой круг радиуса r , площадь которого $S_{\Omega} = \pi r^2$.

Событию $A = \{\text{точка, наудачу выбранная в круге, находится от центра круга на расстоянии не большем чем } r_1 \text{ и не меньшем чем } r_2\}$ благоприятствуют те элементарные исходы, которые образуют кольцо, расположенное внутри круга и имеющее внутренний радиус r_1 и внешний – r_2 (рис. 2). Площадь этого кольца $S_A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$.

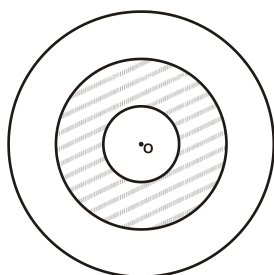


Рис. 2

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2}.$$

Ответ: $\frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2}.$

3. Парк Победы вымощен прямоугольными плитками со сторонами 9 см и 18 см. Из кармана отдыхающего выпал пятак, диаметр которого равен 2,5 см. Какова вероятность, что пятак не пересечёт ни одной из сторон прямоугольных плиток?

Решение. Положение пятака относительно плитки полностью определяется положением центра пятака относительно этой плитки. В результате падения центр пятака может оказаться в любой точке прямоугольника Ω со сторонами 9 см и 18 см. Площадь этого прямоугольника $S_{\Omega} = 9 \cdot 18 = 162$ (см²).

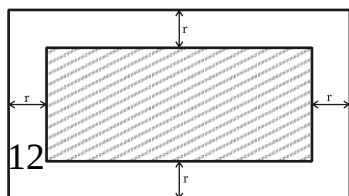


Рис. 3

Событие $A = \{\text{пятак не пересечёт ни одной из сторон прямоугольных плиток}\}$ наступает тогда и

только тогда, когда центр упавшего пятака располагается от ближайшей стороны прямоугольной плитки на расстоянии, не меньшем радиуса пятака, т.е. находится внутри прямоугольника, центр которого совпадает с центром прямоугольной плитки, а стороны параллельны сторонам плитки и меньше соответствующих сторон плитки на величину равную, диаметру пятака (рис. 3).

Площадь такого прямоугольника

$$S_A = (9 - 2,5)(18 - 2,5) = 100,75 \text{ см}^2.$$

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{100,75}{162} \approx 0,62.$$

Ответ: 0,62.

4. Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y , удовлетворяющие условию $x + y \leq 2$. Найти вероятность того, что сумма квадратов $x^2 + y^2$ не больше, чем 1.

Решение. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{(x, y) | x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ представляет собой на плоскости Oxy равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 4), катеты которого равны 2, а, следовательно, площадь $S_\Omega = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Случайное событие $A = \{(x, y) \in \Omega | x^2 + y^2 \leq 1\}$ изображается на плоскости Oxy в виде четверти круга с центром в начале координат и радиусом, равным 1, расположенной в первом квадранте. Площадь этой четверти круга $S_A = \pi / 4$.

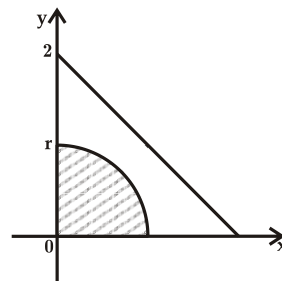


Рис. 4

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi / 4}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\pi / 8$.

5. Внутри прямоугольника со сторонами 4 и 8 наудачу выбрана точка M . Найти вероятность того, что расстояние от точки M до ближайшей длинной стороны не меньше, чем расстояние от точки M до ближайшей короткой стороны.

Решение. Пусть x , y – расстояния от точки M до ближайшей длинной и ближайшей короткой сторон соответственно ($0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$). Пространство элементарных исходов $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$ на плоскости Oxy представляет собой прямоугольник со сторонами 2 и 4 (рис. 5). Площадь этого прямоугольника $S_\Omega = 2 \cdot 4 = 8$.

Событию $A = \{\text{расстояние от точки } M \text{ до ближайшей длинной стороны не меньше, чем расстояние от точки } M \text{ до ближайшей короткой стороны}\}$ благоприятствуют те элементарные исходы, которые удовлетворяют условию $x \geq y$, т.е. $A = \{(x, y) \in \Omega | x \geq y\}$. На плоскости Oxy множество точек A образует прямоугольный равнобедренный треугольник, катеты которого равны 2. Площадь этого треугольника $S_A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

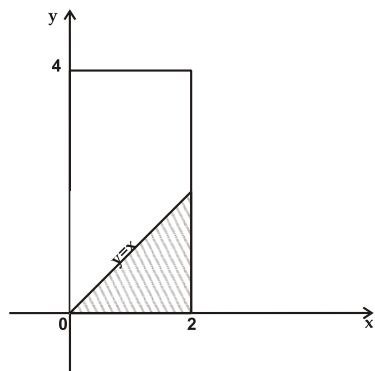


Рис. 5

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $1/4$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y , удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 \leq 1$. Найти вероятность того, что их сумма будет не больше чем 0,5.

2. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $l/2$.

3. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из прямых.

4. Внутри круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

5. В квадрате со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины квадрата не превышает $a/2$.

6. В квадрате со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не превышает $a/4$.

7. Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y , не превосходящие 2. Найти вероятность того, что их сумма будет не больше 1.

8. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причём $y > x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $l/2$.

9. На плоскость с нанесённой сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из сторон квадратов.

10. Внутри круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг равностороннего треугольника.

§4. ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ. АКСИОМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Сложение случайных событий

Суммой $A+B$ двух случайных событий A и B называется событие, которое состоит в наступлении или события A , или события B , или в совместном наступлении A и B .

Роль нуля при сложении случайных событий выполняет невозможное событие $\emptyset$: $A+\emptyset=\emptyset+A=A$, где A – произвольное случайное событие.

Суммой нескольких случайных событий $A_1+A_2+\dots+A_n$ называется случайное событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий A_i .

Умножение случайных событий

Произведением $A \cdot B$ двух случайных событий A и B называется событие, которое состоит в совместном наступлении A и B . В частности, если A и B несовместные события, то $A \cdot B = \emptyset$. Роль единицы при умножении случайных событий выполняет достоверное событие Ω : $A\Omega=\Omega A=A$, где A – произвольное случайное событие.

Произведением нескольких случайных событий $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ называется событие, которое состоит в совместном наступлении всех этих событий.

Переход к противоположному событию

Противоположным событию A называется событие $\bar{A}$, которое состоит в ненаступлении события A . Очевидно, что противоположным событию $\bar{A}$ является событие A . События A и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу.

Многие свойства операций над случайными событиями аналогичны соответствующим свойствам операций над действительными числами. Например, и для событий, и для чисел справедливы переместительный и сочетательный законы сложения и умножения:

$$A+B=B+A, AB=BA;$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C, A(BC)=(AB)C.$$

Однако имеются и отличия. Например, если A – число, то

$$A + A = 2A, A \cdot A = A^2.$$

Если же A – случайное событие, то $A + A = A, A \cdot A = A$.

Аксиомы теории вероятностей

1. Каждому случайному событию A ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$, которое называется вероятностью события A : $P(A) \geq 0$.

2. Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega) = 1$.

3. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Следствия из аксиом теории вероятностей

1. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна 0:

$$P(\emptyset) = 0.$$

3. Вероятность любого случайного события заключена в пределах от 0 до 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

4. Сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, **равна 1**.

§5. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Определение 1. Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется величина, которая обозначается символом $P(B/A)$ и вычисляется по формуле

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ где } P(A) \neq 0.$$

Выясним смысл определения условной вероятности, данного выше, в случае классической схемы.

Пусть n – общее число равновозможных элементарных исходов; m_A – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A ; m_{AB} – число элементарных исходов, благоприятствующих событию B , которые также благоприятствуют событию A , то есть число элементарных исходов, благоприятствующих событию AB . Согласно классическому определению вероятности

$$P(AB) = \frac{m_{AB}}{n}, \quad P(A) = \frac{m_A}{n}.$$

С учетом этих формул получаем $P(B/A) = \frac{m_{AB}}{m_A}$. Полученное соотношение означает, что в классическом случае условную вероятность $P(B/A)$ можно вычислять по формуле классического определения вероятности, если в качестве элементарных исходов рассматривать только элементарные исходы, благоприятствующие событию A .

Обобщая полученный результат на случай произвольного пространства элементарных исходов, условную вероятность $P(B/A)$ можно определить также следующим образом.

Определение 2. Условной вероятностью $P(B/A)$ события B при условии, что событие A произошло, называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Замечания. а) Определения 1 и 2 условной вероятности эквивалентны.

б) Значение определения 2 состоит не только в том, что оно вскрывает смысл условной вероятности, но и в том, что оно дает иной способ вычисления этой величины, независимый от формулы определения 1.

в) В общем случае $P(B/A) \neq P(B)$.

г) Условная вероятность удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей:

1. $P(B/A) \geq 0$;

2. $P(A/A) = 1$;

3. Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то $P(B_1 + B_2 / A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A)$.

Пример. Из ящика, содержащего 6 белых и 3 черных шара, наудачу последовательно извлекаются два шара. Найти вероятность того, что вторым извлечен белый шар, если известно, что первым был извлечен черный шар.

Решение. Опишем события: $A = \{\text{первым извлечён чёрный шар}\}$, $B = \{\text{вторым извлечен белый шар}\}$. Необходимо найти условную вероятность $P(B/A)$.

Первый способ (согласно определению 1)

Пространство элементарных исходов представляет собой совокупность упорядоченных пар шаров, следовательно $n = A_9^2$. Число исходов, благоприятствующих наступлению события AB , $m_{AB} = 3 \cdot 6$.

Следовательно, $P(AB) = \frac{m_{AB}}{n} = \frac{3 \cdot 6}{A_9^2} = \frac{18}{9 \cdot 8} = \frac{1}{4}$. Вместе с тем $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Поэтому } P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

Второй способ (согласно определению 2)

Так как событие A наступило, то в ящике осталось 8 шаров, среди которых 6 белых. Поэтому $P(B/A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Вероятность произведения случайных событий

Из определения 1 условной вероятности следует, что

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Таким образом, вероятность совместного наступления событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий и условной вероятности другого события при условии, что первое событие уже наступило.

Последняя формула обобщается непосредственно на случай произведения произвольного числа событий $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Зависимые и независимые случайные события

Событие B называется *независимым* от события A , если наступление события A не меняет вероятности события B , т.е. если условная вероятность $P(B/A)$ равна вероятности события B : $P(B/A) = P(B)$. В противном случае, то есть когда $P(B/A) \neq P(B)$, событие B называется *зависимым* от события A .

Некоторые свойства независимости событий

1. Если событие B не зависит от события A , то и событие A не зависит от события B . В этом случае события A и B называются просто независимыми **событиями**.

2. *Правило умножения вероятностей двух независимых событий*. Если A и B – независимые события, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

т.е. вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

3. *Признак независимости двух событий*. Если для некоторых случайных событий A и B справедливо соотношение

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

то эти события являются независимыми.

4. Если A и B – независимые события, то независимыми также являются следующие события: A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если:

а) они попарно независимы, то есть независимыми являются любые два события из данных;

б) независимыми являются каждое из данных событий и любое произведение остальных.

Пример. События A_1, A_2, A_3 являются независимыми, если независимы события: A_1 и A_2 , A_1 и A_3 , A_2 и A_3 , A_1 и A_2A_3 , A_2 и A_1A_3 , A_3 и A_1A_2 .

Замечание. Из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

Вероятность совместного наступления нескольких независимых случайных событий, т.е. вероятность их произведения, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Примеры решения задач

1. Вероятность того, что при измерении некоторой величины будет допущена относительная ошибка, превышающая 5%, равна 0,2, а

вероятность того, что эта ошибка превысит 10 %, равна 0,08. В результате измерения относительная ошибка превысила 5 %. Какова вероятность того, что эта ошибка превысила 10 %?

Решение. Пусть $A = \{\text{относительная ошибка превысила } 10 \%\}$, $B = \{\text{относительная ошибка превысила } 5 \%\}$. Необходимо найти условную вероятность $P(A/B)$. Согласно определению условной вероятности $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Очевидно, что $AB = A$, т.к. если ошибка измерения превысила 10 %, то она превысила и 5 %, т.е. наступление события A влечёт за собой наступление **события** B .

Поэтому $P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$. По условию $P(A) = 0,08$, $P(B) = 0,2$. Отсюда

$$P(A/B) = \frac{0,08}{0,2} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

2. Только один из 10 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что замок будет открыт с четвёртой попытки, т.е. для открывания замка придётся испытать 4 ключа?

Решение. Пусть $A_i = \{i\text{-й ключ подошёл к замку}\}$, $B = \{\text{для открывания замка придётся испытать 4 ключа}\}$. Тогда $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4$.

Поскольку события-множители являются зависимыми, то $P(B) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 / \bar{A}_1 \bar{A}_2)P(A_4 / \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$. Из условия задачи следует, что $P(\bar{A}_1) = \frac{9}{10}$, $P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) = \frac{8}{9}$, $P(\bar{A}_3 / \bar{A}_1 \bar{A}_2) = \frac{7}{8}$, $P(A_4 / \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = \frac{1}{7}$.

$$\text{Поэтому } P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: 1/10.

3. Три стрелка ведут стрельбу по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность поражения цели а) только двумя стрелками; б) хотя бы одним стрелком.

Решение. Пусть $A_i = \{\text{в цель попал } i\text{-й стрелок}\}$, $B = \{\text{цель поражена только двумя стрелками}\}$, $C = \{\text{цель поражена хотя бы одним стрелком}\}$.

По условию $P(A_1) = 0,4$, $P(A_2) = 0,8$, $P(A_3) = 0,9$.

Поэтому $P(\bar{A}_1) = 0,6$, $P(\bar{A}_2) = 0,2$, $P(\bar{A}_3) = 0,1$.

а) Используя операции сложения и умножения, выразим событие B через события A_i и $\bar{A}_i$: $B = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$.

Поскольку все события-слагаемые являются попарно несовместными, то $P(B) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3)$. Так как события-множители являются независимыми, то

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,032;$$

$$P(A_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,072;$$

$$P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432.$$

Окончательно получаем

$$P(B) = 0,032 + 0,072 + 0,432 = 0,536.$$

б) Найдём вероятность события $\bar{C}$, которое выражается через события A_i и $\bar{A}_i$ проще, чем событие C :

$$\bar{C} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3.$$

Так как события A_i , $i = 1, 2, 3$ независимы в совокупности, то

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,012.$$

Следовательно, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,012 = 0,988$.

Ответ: а) 0,536; б) 0,988.

4. Двое по очереди подбрасывают монету до первого появления «герба». Найти вероятность того, что второй сделает столько же подбрасываний, сколько и первый.

Решение. Пусть $A_i = \{\text{выпадение «герба» при } i\text{-м подбрасывании}\}$, $B = \{\text{второй сделает столько же подбрасываний, сколько и первый}\}$. Тогда $B = \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5 A_6 + \dots$

Поскольку все события-слагаемые несовместны, а все события-множители независимы, то, используя аксиому вероятности суммы несовместных событий и теорему произведения независимых событий, получаем:

$$P(B) = P(\bar{A}_1)P(A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4) + \\ + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5)P(A_6) + \dots$$

Из условия следует, что $P(A_i) = 1/2$, а поэтому и $P(\bar{A}_i) = 1/2$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом,

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 1/3.

5. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Двое по очереди наудачу извлекают карточки до первого появления карточки с чётной цифрой (после извлечения карточка обратно в колоду не возвращается). Какова вероятность того, что первый сделает больше извлечений, чем второй?

Решение. $A_i = \{\text{карточка с чётной цифрой появилась при } i\text{-ом извлечении}\}$, $B = \{\text{первый сделает больше извлечений, чем второй}\}$. Тогда $B = A_1 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. Поскольку события A_1 и $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ несовместны, то $P(B) = P(A_1) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$. Так как события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$ – независимы, то

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1)P(A_3 / \bar{A}_1\bar{A}_2).$$

Из условия задачи следует, что

$$P(A_1) = 2/5, P(\bar{A}_1) = 3/5, P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) = 2/4, P(A_3 / \bar{A}_1\bar{A}_2) = 2/3.$$

Поэтому окончательно имеем $P(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$.

Ответ: 3/5.

6. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,96875 «герб» выпал хотя бы один раз?

Решение. Пусть $A = \{\text{при } n \text{ подбрасываниях монеты «герб» выпал хотя бы один раз}\}$. Тогда $\bar{A} = \{\text{при } n \text{ подбрасываниях монеты «герб» не выпал ни разу, т.е. } n \text{ раз подряд выпадала «решка»}\}$.

Так как вероятность выпадения «решки» при одном подбрасывании равна $\frac{1}{2}$, то в силу независимости выпадений «решки» при n -кратном

подбрасывании монеты имеем $P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, а, следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

По условию $P(A) = 0,96875$. Поэтому для определения n получаем уравнение $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,96875$. Отсюда $n = 5$.

Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность попадания снаряда в самолёт при выстреле из орудия равна 0,4, а вероятность того, что самолёт будет сбит при выстреле из орудия, равна 0,1. Найти вероятность того, что самолёт будет сбит, если в него попадёт снаряд.

2. Игральную кость подбрасывают до первого выпадения «6». Какова вероятность того, что придётся сделать четыре подбрасывания?

3. Вероятности безотказной работы в течение промежутка времени длительностью T первого, второго и третьего станков соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что в течение указанного промежутка времени безотказно проработают: а) только 2 станка; б) хотя бы один из станков.

4. Два игрока по очереди извлекают карту из колоды 36-ти игральных карт (извлечённая карта возвращается обратно в колоду). Выигрывает тот, кто первым извлечёт туза. Каковы вероятности выигрыша каждого из игроков?

5. Два стрелка по очереди производят выстрелы по одной и той же цели до первого попадания каким-нибудь из стрелков. Какова вероятность, что первый сделает больше выстрелов, чем второй, если вероятности поражения цели первым и вторым стрелком соответственно равны 0,4 и 0,5 и каждый из стрелков может сделать не более четырёх выстрелов?

6. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий равна 0,9. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

7. Вероятность безотказной работы прибора в течение 100 дней равна 0,5, а вероятность безотказной работы этого же прибора в течение 200 дней равна 0,2. Прибор проработал 100 дней. Найти вероятность того, что он проработает ещё 100 дней.

8. Монету подбрасывают до первого выпадения «герба». Какова вероятность того, что придётся сделать пять подбрасываний?

9. Вероятность показать рекордный результат на спортивных соревнованиях для первого спортсмена равна 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что рекорд будет установлен: а) только одним спортсменом; б) хотя бы одним спортсменом.

10. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

11. Двое по очереди подбрасывают монету до первого выпадения «герба». Какова вероятность того, что второй сделает столько же подбрасываний, сколько и первый, если каждый может подбросить монету не более трёх раз?

12. Вероятность того, что стрелок попадёт в цель хотя бы один раз при трёх выстрелах, равна 0,992. Найти вероятность попадания в цель при одном **выстреле**.

§6. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БЕЙЕСА

Вероятность суммы совместных событий

Вероятность наступления суммы двух совместных событий, т.е. вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий A и B , равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечания. 1. Эта формула справедлива как для совместных, так и для несовместных случайных событий, поскольку в случае несовместных событий

$$P(AB) = 0 \text{ и } P(A+B) = P(A) + P(B).$$

2. Если события независимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ и, следовательно, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.

3. Рассмотрим классический случай. Пусть n – общее число равновозможных элементарных исходов, $m_A, m_B, m_{AB}, m_{A+B}$ – число элементарных исходов, благоприятствующих событиям A , B , AB и $A+B$ соответственно. Тогда согласно формуле включений и исключений $m_{A+B} = m_A + m_B - m_{AB}$. Разделим обе части этого равенства на n :

$$\frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n}.$$

Отсюда в соответствие с классическим определением вероятности $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

4. Полученную формулу можно обобщить на случай нескольких совместных случайных событий. В частности, в случае трех случайных событий получим:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить лишь совместно с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Тогда $P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$.

Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

Замечания. 1. События $H_1, H_2, \dots, H_n$ называются гипотезами по отношению к событию A , так как заранее неизвестно, с каким из этих событий совместно наступит событие A , но известно, что с каким-то одним из них оно обязательно наступит.

2. Условия применимости формулы полной вероятности часто формулируются так: от событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ требуют, чтобы они представляли полную группу попарно несовместных событий, вместе с тем отказываются от требования, чтобы событие A обязательно наступало с каждым из указанных событий.

3. При решении задач с использованием формулы полной вероятности эксперимент представляется происходящим как бы в два этапа. Гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ исчерпывают все возможные исходы первого этапа; событие A – один из возможных исходов второго этапа.

Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить лишь с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ и пусть известно, что в результате испытания событие A наступило. Мы не можем достоверно сказать, с каким именно из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ наступило событие A , однако можно поставить вопрос о вероятности наступления одной из этих гипотез при условии, что событие A наступило. В общем случае наступление события A меняет вероятность гипотезы, то есть $P(H_k/A) \neq P(H_k)$.

Вероятности гипотез вычисляются по *формулам Бейеса*, которые имеют вид:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)},$$

где $k = 1, 2, \dots, n$.

Примеры решения задач

1. В первой студенческой группе обучаются 24 студента, во второй – 36 студентов и в третьей – 40 студентов. По теории вероятностей

получили отличные отметки 6 студентов первой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Какова вероятность того, что наугад выбранный студент получил по теории вероятностей отличную оценку?

Решение. Пусть $A = \{\text{наугад выбранный студент получил по теории вероятностей отличную оценку}\}$, $H_i = \{\text{наугад выбранный студент обучается в } i\text{-ой группе}\}$, $i = 1, 2, 3$.

Из условия следует, что

$$P(H_1) = \frac{24}{100}, P(H_2) = \frac{36}{100}, P(H_3) = \frac{40}{100}.$$

$$\text{Кроме того, } P(A/H_1) = \frac{6}{24}, P(A/H_2) = \frac{6}{36}, P(A/H_3) = \frac{4}{40}.$$

Так как события $H_i, i = 1, 2, 3$, попарно несовместны и образуют полную группу, то согласно формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3).$$

С учётом числовых значений всех вероятностей, входящих в правую часть этой формулы, окончательно получаем

$$P(A) = \frac{24}{100} \cdot \frac{6}{24} + \frac{36}{100} \cdot \frac{6}{36} + \frac{40}{100} \cdot \frac{4}{40} = 0,16.$$

Ответ: 0,16.

2. Имеются две одинаковые урны. В первой урне 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй – 6 белых и 4 чёрных шара. Наудачу выбирается урна и из неё наугад вынимается один шар. Вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?

Решение. Пусть $A = \{\text{наугад вынутый шар из наудачу выбранной урны оказался белым}\}$, $H_i = \{\text{выбрана } i\text{-я урна}\}$, $i = 1, 2$. Необходимо найти условную вероятность $P(H_1/A)$. Так как события H_1 и H_2 несовместны и образуют полную группу, то согласно формулам Байеса имеем

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)}.$$

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}, P(A/H_1) = \frac{7}{10}, P(A/H_2) = \frac{6}{10}.$$

$$\text{Поэтому } P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}} = \frac{7}{13}.$$

Ответ: 7/13.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для посева заготовлены семена четырех сортов пшеницы: 20 % всех семян – семена 1-го сорта, 30 % – семена 2-го сорта, 10 % – семена 3-го сорта и 40 % – семена 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для семян 1-го сорта равна 0,5, 2-го сорта – 0,3, 3-го сорта – 0,2, 4-го сорта – 0,1. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен; б) сорванный колос с 40 зернами вырос из семян 2-го сорта.

2. Для сдачи экзамена студентам было необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8 – по 25 вопросов, 5 – по 20 вопросов, остальные – по 15 вопросов каждый. Какова вероятность того, что: а) опрашиваемый студент ответит на заданный вопрос;

б) ответивший на поставленный вопрос студент подготовил только половину вопросов.

3. Семена для посева поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем первое и второе хозяйства присылают по 40 % всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства равна 90 %, из второго – 85 %, из третьего – 95 %. Определить вероятность того, что: а) наудачу взятое семя не взойдет; б) наудачу взятое взошедшее семя получено от второго хозяйства?

4. Запасная деталь может находиться в первой, второй или третьей партиях с вероятностями 0,2; 0,5 и 0,3 соответственно. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, для первой, второй и третьей партий равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что: а) взятая наудачу деталь проработает положенное время; б) деталь, проработавшая положенное время, взята из первой партии.

5. В сентябре вероятность дождливого дня равна 0,3. Команда «Статистик» выигрывает в футбол в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день – с вероятностью 0,3. Определить вероятность того, что: а) команда проиграет назначенную на сентябрь игру; б) в день матча шёл дождь, если известно, что «Статистик» выиграл.

6. Поток автомобилей, проезжающих мимо АЗС, состоит из 60 % грузовых и 40 % легковых автомобилей. Известно, что вероятность заправки грузового автомобиля равна 0,1, а легкового – 0,3. Найти вероятность того, что: а) проезжающий мимо АЗС автомобиль заправится на этой станции; б) автомобиль, заправившийся на данной АЗС, был легков**ым**.

§7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ИСПЫТАНИЙ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

В теории и на практике представляет интерес эксперимент, состоящий в последовательном проведении испытаний, в каждом из которых интересуются лишь наступлением или ненаступлением некоторого события A .

Примеры. 1. Трехкратное подбрасывание игральной кости, при этом событие $A = \{\text{выпадение «6»}\}$.

2. Пятикратное извлечение игральной карты из полной колоды, событие $A = \{\text{извлечен туз}\}$.

Испытания называются *независимыми* от события A , если вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Примеры. 1. Подбрасывания монеты – независимые испытания относительно выпадения герба.

2. Извлечение карты из колоды карт без последующего возвращения карты обратно в колоду – зависимые испытания относительно события $A = \{\text{извлечен туз}\}$.

Последовательность исходов испытаний представляет собой случайное событие, которое может быть записано в виде последовательности символов A и $\bar{A}$, и называется сложным событием по отношению к событиям A и $\bar{A}$, а события A и $\bar{A}$ – называются простыми по отношению к указанному сложному событию.

Пример. Запись $A\bar{A}A\bar{A}\bar{A}$ означает сложное событие, состоящее в том, что в 1-м и 3-м испытаниях серии событие A наступило, а во 2-м, 4-м, 5-м – не наступило. Такое сложное событие можно рассматривать и как произведение событий, если считать, что значение символа определяется

его местом в указанной последовательности символов. В частности, данное сложное событие можно рассматривать как произведение $A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4\bar{A}_5$, где событие $A_i = \{\text{наступление события } A \text{ в } i\text{-м испытании}\}$.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события A одна и та же и равна p , событие A наступит ровно k раз, может быть вычислена по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (q = 1 - p).$$

Число k , при котором вероятность $P_n(k)$ принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим* числом наступлений события A . Наивероятнейшее число k_0 наступлений события A в независимых испытаниях удовлетворяет условию:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Примеры решения задач

1. Вратарь киевского «Динамо» отражает в среднем 3 пенальти из 10. Какова вероятность того, что он отразит не меньше двух пенальти из пяти?

Решение. Пусть $A = \{\text{вратарь отразит пенальти}\}$, $B = \{\text{вратарь отразит не меньше двух пенальти из пяти}\}$. Вычислим вероятность события $\bar{B} = \{\text{вратарь отразит меньше двух пенальти из пяти}\}$:

$$P(\bar{B}) = P_5(0) + P_5(1),$$

где $P_5(0)$ – вероятность того, что вратарь не отразит ни одного пенальти из пяти, $P_5(1)$ – вероятность того, что вратарь отразит ровно один пенальти из пяти.

Согласно формуле Бернулли

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = q^5, \quad P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5pq^4.$$

Из условия задачи следует, что $p = P(A) = 0,3$, а, следовательно, $q = 1 - p = 0,7$.

Поэтому $P(\bar{B}) = (0,7)^5 + 5 \cdot 0,3 \cdot (0,7)^4 \approx 0,53$. Отсюда

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 1 - 0,53 = 0,47.$$

Ответ: 0,47.

2. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

Решение. Пусть k_0 – наивероятнейшее число наступлений данного события в 39 независимых испытаниях. Тогда имеет место следующее двойное неравенство

$$np - q \leq k_0 \leq np + p$$

или, так как $q = 1 - p$, то $np + p - 1 \leq k_0 \leq np + p$, где по условию $n = 39$, $k_0 = 25$.

Таким образом, для нахождения вероятности p получаем систему неравенств
$$\begin{cases} 40p - 1 \leq 25, \\ 25 \leq 40p. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{25}{40} \leq p \leq \frac{26}{40}$ или $0,625 \leq p \leq 0,65$, т.е. $p \in [0,625; 0,65]$.

Ответ: $p \in [0,625; 0,65]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Посажено 6 саженцев. Вероятность того, что саженец приживется, равна 0,7. Найти вероятность того, что: а) приживутся два саженца;

б) не более трех **саженцев**.

2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,4. Найти наивероятнейшее число залпов, при котором не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

3. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) выключены все моторы.

4. В цехе работают 8 двигателей. Вероятность перегрева каждого из них за определенное время работы равна 0,3. Найти вероятность того, что за время работы перегреется: а) половина двигателей; б) не менее двух двигателей.

5. При передаче сообщения вероятность искажения для каждого знака равна 0,1. Какова вероятность того, что сообщение из 5 знаков: а) не будет искажено; б) содержит ровно одно искажение.

6. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

7. Проверяются на стандартность 4 детали. Вероятность того, что деталь окажется стандартной, равна 0,8. Определить вероятность того, что: а) две детали окажутся стандартными; б) не менее трех деталей окажутся стандартными.

8. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 60 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

9. Найти наиболее вероятное число выпадений двух «6» при 1000-кратном подбрасывании двух игральных костей.

10. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти? (Ничьи в расчёт не **принимаются**).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика/ В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977. – 478 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1979. – 400 с.
3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Физ. мат. гиз, 1962. – 560 с.
4. *Солодовников А.С.* Теория вероятностей / А.С. Солодовников. – М.: Просвещение, 1978. – 192 с.
5. *Виленкин Н.Я.* Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистике / Н.Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1979. – **112 с.**

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Методические указания и контрольные задания
для подготовки к Единому государственному экзамену
по математике*

*Составители: Деркач Михаил Иванович,
Деркач Наталья Александровна,
Кротова Татьяна Юрьевна*

Технический редактор – *Р.В. Дмитриева*

Подписано к печати 31.05.16. Изд. № 64/15. Зак. 63/2016. Тираж 30 экз.
Объем 2,0 п.л. Усл.печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96
Формат бумаги 60 x 84 1/16

РИИЦМ ФГАОУВО «Севастопольский государственный университет»

