

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий
и управления в технических системах СГУ
Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания
и варианты контрольных заданий

Севастополь
СевГУ
2016

УДК 519.442

Рецензент:

С.Ф. Ледаев - канд. техн. наук, доцент

Составители: Е.Г. Бойко, Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров

Теория функций комплексного переменного: метод. указания и варианты контрольных заданий / Сост. Е.Г. Бойко, Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров. – Севастополь: СевГУ, 2016. – **32** с.: ил.

Целью настоящих методических указаний является помощь студентам при изучении модуля по теме «Теория функций комплексного переменного» дисциплин «Высшая математика» и «Математический анализ». При работе над этой темой рекомендуется использовать литературу, приведенную в конце методических указаний.

Данные методические указания содержат пример решения нулевого варианта, содержащего задания аналогичные индивидуальным заданиям для самостоятельного решения с краткими теоретическими сведениями, а также варианты индивидуальных заданий для самостоятельного решения, которые можно использовать по теме «Теория функций комплексного переменного» для проведения модульного контроля.

УДК 519.442

Рассмотрено и рекомендовано на заседании кафедры в качестве методических указаний и вариантов контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей очной формы обучения, протокол № 6 от 01.07.2015.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», **2016**

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Пример решения варианта индивидуального задания	4
2. Варианты для самостоятельного решения	21
Библиографический список	32

1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ 1. Определить и построить на комплексной плоскости Z линии, заданные уравнениями: а) $|z + 2 - 3i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} = 2$

Решение. а) Чтобы определить, какая линия задана уравнением $|z + 2 - 3i| = 2$, воспользуемся определением модуля комплексного числа. С учетом, что $z = x + iy$, получим:

$$|z + 2 - 3i| = |x + iy + 2 - 3i| = |x + 2 + i(y - 3)| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2},$$

тогда,

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = 2 \text{ или } (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке $z_0 = -2 + 3i$ радиуса 2 (рис. 1).

б) Преобразуем заданное уравнение. Так как $z = x + iy$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-i} &= \frac{x+iy-1}{x+iy-i} = \frac{(x-1)+iy}{x+i(y-1)} = \frac{((x-1)+iy)(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))} = \\ &= \frac{x^2 - x + y^2 - y + i(x+y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} = \frac{x^2 - x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} = 2.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$x^2 - x + y^2 - y = 2x^2 + 2(y^2 - 2y + 1) \Rightarrow (x + 0,5)^2 + (y - 1,5)^2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} = 2$ является уравнением окружности радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке $z_0 = -0,5 + 1,5i$ (рис. 2).

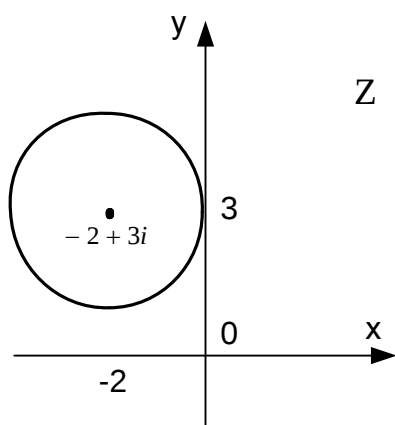


Рис. 1. Линия, заданная уравнением $|z + 2 - 3i| = 2$

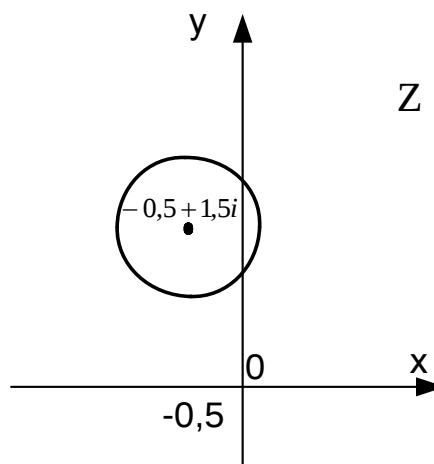


Рис. 2. Линия, заданная уравнением $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} = 2$

ЗАДАНИЕ 2. Изобразить на комплексной плоскости Z множества точек, определяемые следующими неравенствами или системами неравенств:

а) $1 \leq |z - 3 + 2i| < 2$; б) $\left| \arg z - \frac{\pi}{3} \right| < \frac{\pi}{4}$.

Решение. а) Искомое множество точек должно одновременно удовлетворять двум условиям: $1 \leq |z - 3 + 2i|$ и $|z - 3 + 2i| < 2$. Пользуясь определением модуля комплексного числа и учитывая, что $z = x + iy$, преобразуем выражение $|z - 3 + 2i|$:

$$|z - 3 + 2i| = |x + iy - 3 + 2i| = |x - 3 + i(y + 2)| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2}.$$

Следовательно, неравенство $1 \leq |z - 3 + 2i|$ определяет внешность единичного круга с центром в точке $z_0 = 3 - 2i$, включая границу окружности, а неравенство $|z - 3 + 2i| < 2$ – круг радиуса 2 с центром в той же **точке**

$z_0 = 3 - 2i$, без точек окружности, его ограничивающей. Поэтому данное множество точек представляет собой кольцо, ограниченное концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $z_0 = 3 - 2i$ (рис. 3).

б) Так как неравенство $\left| \arg z - \frac{\pi}{3} \right| < \frac{\pi}{4}$ равносильно неравенству $-\frac{\pi}{4} < \arg z - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4}$, то ему удовлетворяют все точки z , лежащие внутри угла, равного $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, не включая его границы, с вершиной в начале координат (рис. 4).

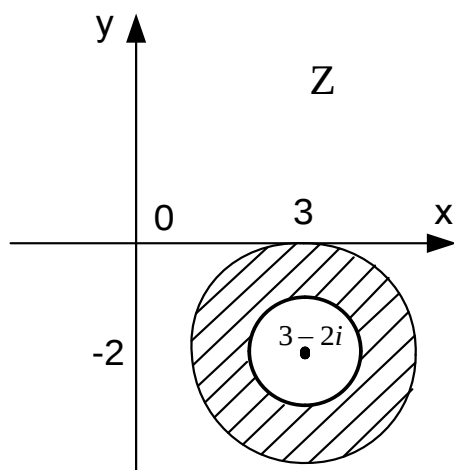


Рис. 3. Множество точек, определяемых системой неравенств

$$1 \leq |z - 3 + 2i| < 2$$

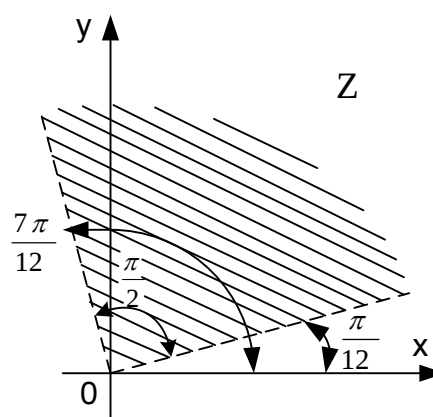


Рис. 4. Множество точек, определяемых

неравенством $\left| \arg z - \frac{\pi}{3} \right| < \frac{\pi}{4}$

ЗАДАНИЕ 3. Исследовать на дифференцируемость и аналитичность функцию $w = f(z)$, найти ее производную, если она существует: а) $w = \sin 2z$; б) $w = (z + 2)\operatorname{Re}(z - 1)$.

Решение. Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой точке z и ее окрестности. Если существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

то он называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$, а функция $f(z)$ называется дифференцируемой в $f(z)$ [1].

Пусть действительные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности точки $z = x + iy$.

Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в некоторой окрестности точки $z = x + iy$, была дифференцируема в точке z , необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

С учетом условий Коши-Римана (1) производную функции $f(z)$ можно находить по формулам:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z , если она дифференцируема не только в данной точке z , но и некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D , называется аналитической в этой области.

Если для функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области D функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывны, то выполнения условий (1) достаточно, чтобы функция $w = f(z)$ была аналитической в этой области [2].

Производная аналитической функции может быть найдена по правилам дифференцирования функции действительного переменного. Для следующих элементарных функций комплексного переменного справедливы

формулы: $(z^n)' = nz^{n-1}$; $(e^z)' = e^z$; $(\cos z)' = -\sin z$; $(\sin z)' = \cos z$; $(\ln z)' = 1/z$;
 $(\arcsin z)' = 1/\sqrt{1-z^2}$; $(\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2}$; $(\operatorname{arctg} z)' = 1/(1+z^2)$;
 $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$; $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

а) Определим действительную и мнимую части функции $w = \sin 2z$.
 Так как $z = x + iy$, то

$$\begin{aligned} w = \sin 2z &= \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{-2y+i2x} - e^{2y-i2x}) = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) - e^{2y}(\cos 2x - i \sin 2x)) = \\ &= \frac{-i}{2} (\cos 2x(e^{-2y} - e^{2y}) + i \sin 2x(e^{-2y} + e^{2y})) = \\ &= \sin 2x \frac{e^{-2y} + e^{2y}}{2} + i \cos 2x \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} = \sin 2x \operatorname{ch} 2y + i \cos 2x \operatorname{sh} 2y. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} \sin 2z = u(x, y) = \sin 2x \operatorname{ch} 2y; \quad \operatorname{Im} \sin 2z = v(x, y) = \cos 2x \operatorname{sh} 2y.$$

Найдем частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y.$$

Сравнивая значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $-\frac{\partial v}{\partial x}$, видим, что условия Коши-

Римана выполняются при всех значениях x и y , поэтому функция $w = \sin 2z$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости Z .

Производную функции $w = \sin 2z$ найдем по одной из формул (2):

$$\begin{aligned}(\sin 2z)' &= 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y - i 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y = \\&= 2 \left(\cos 2x \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - i \sin 2x \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} \right) = \\&= 2 \left(\frac{1}{2} e^{2y} (\cos 2x - i \sin 2x) + \frac{1}{2} e^{-2y} (\cos 2x + i \sin 2x) \right) = \\&= 2 \left(\frac{1}{2} e^{2y} e^{-i 2x} + \frac{1}{2} e^{-2y} e^{i 2x} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} (e^{2y-i 2x} + e^{-2y+i 2x}) \right) = \\&= 2 \frac{e^{i 2z} + e^{-i 2z}}{2} = 2 \cos 2z.\end{aligned}$$

Действительно, если воспользоваться правилами дифференцирования функции действительного переменного, то:

$$(\sin 2z)' = 2 \cos 2z.$$

б) Найдем действительную и мнимую части функции $w = (z + 2) \operatorname{Re}(z - 1)$ [3].

С учетом, что $z = x + iy$, получим:

$$\begin{aligned}w &= (z + 2) \operatorname{Re}(z - 1) = (x + iy + 2) \operatorname{Re}(x + iy - 1) = \\&= ((x + 2) + iy)(x - 1) = x^2 + x - 2 + i(yx - y) \Rightarrow \\&\Rightarrow u(x, y) = x^2 + x - 2, \quad v(x, y) = yx - y.\end{aligned}$$

Найдем частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана (1), для чего сравним значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $-\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$2x + 1 = x - 1, \quad y = 0, \quad \Rightarrow \quad x = -2, \quad y = 0,$$

следовательно, функция $w = (z + 2)\operatorname{Re}(z - 1)$ дифференцируема только в точке $z = -2$ и нигде не является аналитической, так как не существует окрестности точки $z = -2$, в которой функция была бы дифференцируемой.

Производную заданной функции в точке $z = -2$ найдем по одной из формул (2):

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \bigg|_{\substack{x=-2 \\ y=0}} = (2x + 1 + iy) \bigg|_{\substack{x=-2 \\ y=0}} = -3.$$

ЗАДАНИЕ 4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части, если это возможно:

а) $u(x, y) = xe^{x/y}$, б) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

Решение. Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в некоторой области D , то функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ являются гармоническими функциями, так как каждая из них удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$.

Если для функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, аналитической в некоторой области D , известна одна из гармонических функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то функцию $f(z)$ можно восстановить с точностью до постоянного слагаемого. Если известна гармоническая функция $v(x, y)$, то

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \bigg|_{y=y_0} dx - \int_{y_0}^y \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + C. \quad (3)$$

Если известна гармоническая функция $u(x, y)$, то

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \bigg|_{y=y_0} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy + C, \quad (4)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ – произвольная точка. Следовательно, искомая аналитическая функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Если заменить x и y по формулам:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (5)$$

то получим функцию переменной z [4].

а) Функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ можно восстановить только в том случае, если заданная функция $u(x, y) = xe^{x/y}$ является гармонической на всей плоскости. Проверим это.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x/y} + \frac{x}{y} e^{x/y} = e^{x/y} \left(1 + \frac{x}{y} \right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y} e^{x/y} \left(1 + \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} e^{x/y} = \frac{1}{y} e^{x/y} \left(2 + \frac{x}{y} \right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} e^{x/y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3} e^{x/y} + \frac{x^3}{y^4} e^{x/y} = \frac{x^2}{y^3} e^{x/y} \left(2 + \frac{x}{y} \right).$$

Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0$, то заданная функция $u(x, y) = xe^{x/y}$ не является гармонической. Таким образом, невозможно восстановить аналитическую функцию $f(z)$.

б) Проверим, является ли гармонической функция $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2.$$

Так как $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, то заданная функция $v(x, y)$ является гармонической.

Функцию $u(x, y)$ найдем по формуле (3), в которой положим $x_0 = 0, y_0 = 0$:

$$u(x, y) = \int_0^x (-2y) \Big|_{y=0} dx - \int_0^y 2x dy + C = -2xy + C.$$

Следовательно, искомая функция будет иметь вид:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = -2xy + C + i(x^2 - y^2 + 2).$$

Заменим x и y по формулам (5), чтобы получить функцию переменной z :

$$\begin{aligned} f(z) &= -2 \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + C + i \left(\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + 2 \right) = \\ &= i \frac{1}{2} (z^2 - \bar{z}^2) + C + i \frac{1}{4} ((z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + (z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + 8) = C + i(z^2 + 2). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(z) = C + i(z^2 + 2)$.

ЗАДАНИЕ 5. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 , указать правильную и главную часть ряда Лорана:

$$f(z) = (z - 2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}, \quad z_0 = 2.$$

Решение. Всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ ($0 \leq r < R \leq \infty$) с центром в точке z_0 , разлагается внутри этого кольца в ряд Лорана, который состоит из двух частей:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Первая часть ряда Лорана $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, называется правильной частью ряда **Лорана**.

Вторая часть ряда Лорана $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$, называется главной частью ряда Лорана.

Для решения данного задания воспользуемся известным разложением

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots,$$

которое справедливо на всей комплексной плоскости. Положим $u = \frac{1}{z-2}$, тогда:

$$e^{\frac{1}{z-2}} = 1 + \frac{1}{1!(z-2)} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \dots + \frac{1}{n!(z-2)^n} + \dots, \quad z \neq 2.$$

Умножим каждое слагаемое полученного ряда на $(z-2)^3$. Тогда разложение в ряд Лорана функции $f(z) = (z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}$, в окрестности точки $z_0 = 2$ примет вид:

$$\begin{aligned} f(z) = (z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}} &= (z-2)^3 + \frac{(z-2)^2}{1!} + \frac{(z-2)}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!(z-2)} + \\ &+ \frac{1}{5!(z-2)^2} + \dots + \frac{1}{n!(z-2)^{n-3}} + \dots, \quad z \neq 2. \end{aligned}$$

Следовательно, правильная часть ряда Лорана содержит четыре слагаемых:

$$f_1(z) = (z-2)^3 + \frac{(z-2)^2}{1!} + \frac{(z-2)}{2!} + \frac{1}{3!},$$

а главная часть ряда Лорана имеет бесконечное число слагаемых:

$$f_2(z) = \frac{1}{4!(z-2)} + \frac{1}{5!(z-2)^2} + \dots + \frac{1}{n!(z-2)^{n-3}} + \dots, \quad z \neq 2.$$

ЗАДАНИЕ 6. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и указать их тип (характер): а) $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2}$, б) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$.

Решение. Точка, в которой функция $f(z)$ не является аналитической, называется особой точкой функции $f(z)$. Особая точка $z = z_0$ функции $f(z)$ называется изолированной особой точкой, если в некоторой ее окрестности функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Такая точка называется устранимой, если существует предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ ($c_0 \neq \infty$), а ряд Лорана функции $f(z)$ не содержит главной части. Изолированная особая точка $z = z_0 \neq \infty$ функции $f(z)$ называется полюсом, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, а разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит в своей главной части конечное число членов. Если $z = z_0 \neq \infty$ — существенно особая точка, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует, а разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит в своей главной части бесконечное число членов [2].

а) Определим нули знаменателя функции $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2}$.

$$z^3(z^2 + 4)^2 = 0, \Rightarrow z_1 = 0, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = -2i,$$

причем, числитель в этих точках отличен от нуля. Следовательно, точки $z_1 = 0, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = -2i$ — изолированные особые точки функции $f(z)$. Так как $z_1 = 0$ является нулем знаменателя кратности три, то, по теореме о связи между нулем и полюсом функции [2], для заданной функции $z_1 = 0$ является полюсом третьего порядка.

Аналогично $z_2 = 2i, \quad z_3 = -2i$ — полюсы второго **порядка**.

б) Определим нули функции $\frac{\sin z}{z}$. Они совпадают с нулями функции $\sin z$, то есть с числами $z_k = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Кратность нулей определим из условия: если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, то z_0 является нулем кратности m функции $f(z)$. При $k \neq 0$ это нули первого порядка, так как

$$(\sin z)' \Big|_{z_k} = \cos \pi k = (-1)^k \neq 0,$$

следовательно, в этих точках функция $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ имеет простые полюсы.

В точке $z = 0$ в нуль обращаются числитель и знаменатель дроби $\frac{z}{\sin z}$,

однако существует предел $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$, поэтому точка $z = 0$ – устранимая

особая точка функции $\frac{z}{\sin z}$.

ЗАДАНИЕ 7. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2(z - 2)}, \quad \text{б) } f(z) = z \operatorname{ctg} 3z, \quad \text{в) } f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

Решение. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$, взятого в положительном направлении по окружности L с центром в точке z_0 , лежащей в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 обозначается $\operatorname{Res} f(z_0)$ и равен коэффициенту при первом члене с отрицательным показателем в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана, то есть $\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}$. Таким образом, в устранимой особой точке вычет функции всегда равен нулю.

Если изолированная особая точка $z = z_0$ для функции $f(z)$ является полюсом порядка m , то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right). \quad (6)$$

Для полюсов первого порядка формула (6) принимает вид:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (7)$$

а) Особыми точками функции $f(z) = \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2(z - 2)}$ являются простой полюс $z_1 = 2$ и полюс второго порядка $z_2 = 0$. Для точки $z_1 = 2$ найдем вычет по формуле (7):

$$\operatorname{Res} f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2(z - 2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2} = \frac{9}{4}.$$

Вычет в точке $z_2 = 0$ найдем по формуле (6) при $m = 2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2(z - 2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(z - 2) - (z^2 + 3z - 1)}{(z - 2)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - z + 1}{(z - 2)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

б) Особыми точками функции $f(z) = z \operatorname{ctg} 3z = \frac{z \cos 3z}{\sin 3z}$ являются точки

$$z_k = \frac{\pi k}{3}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Точка $z_0 = 0$ для заданной функции – устранимая особая точка, так

$$\text{как } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos 3z}{\sin 3z} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\operatorname{Res} f(0) = 0$.

Точки $z_k = \frac{\pi k}{3}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ для функции $f(z) = z \operatorname{ctg} 3z = \frac{z \cos 3z}{\sin 3z}$ являются простыми полюсами, так как числитель функции $\frac{z \cos 3z}{\sin 3z}$ в них не равен нулю, а $(\sin 3z)'|_{z_k} = 3 \cos \pi k \neq 0$.

Если в окрестности точки $z = z_0$ функция $f(z)$ определена как частное двух аналитических в этой точке функций: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z_0)$ имеет в точке $z = z_0$ нуль первого порядка, то вычет можно вычислить по формуле:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (8)$$

Воспользуемся формулой (8):

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi k}{3}\right) = \frac{z \cos 3z}{(\sin 3z)'} \Big|_{z=\pi k/3} = \frac{z \cos 3z}{3 \cos 3z} \Big|_{z=\pi k/3} = \frac{\pi k}{9}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

в) Функция $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$ имеет особую точку $z = 0$. Разложим заданную функцию в окрестности точки $z = 0$ в ряд Лорана, воспользовавшись известным разложением функции $\sin u$, положив $u = \frac{1}{z}$, тогда:

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots \right) = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{7!z^5} + \dots$$

Очевидно, что точка $z = 0$ — существенно особая точка, тогда

$$\operatorname{Res} f(0) = c_{-1} = -\frac{1}{6}.$$

ЗАДАНИЕ 8. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz, \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2} dt, \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Решение. а) На рис. 5 представлена область, ограниченная контуром интегрирования. Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{\cos z}{z(z-2)^2} = \frac{(\cos z)/z}{(z-2)^2}.$$

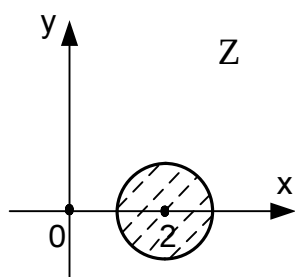


Рис. 5. Область, ограниченная контуром интегрирования

В круге $|z-2| \leq 1$ функция $\frac{\cos z}{z}$ аналитическая, точка $z=2$ лежит в центре этого круга. Для вычисления данного интеграла воспользуемся формулой, являющейся следствием из интегральной формулы Коши:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где z_0 – точка внутри линии L , направление обхода которой положительное. Получим:

$$\begin{aligned} \oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{\cos z}{z} \right)' \Big|_{z=2} = 2\pi i \left(\frac{-z \sin z - \cos z}{z^2} \right) \Big|_{z=2} = \\ &= -2\pi i \frac{2\sin 2 + \cos 2}{4} = -\frac{2\sin 2 + \cos 2}{2} \pi i. \end{aligned}$$

б) Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\bar{D}$, ограниченная контуром L , за исключением конечного числа особых точек z_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$), лежащих внутри области D , то

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z_k). \quad (9)$$

Вычислим с помощью вычетов интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2} dt$. Если положить $z = e^{it}$, тогда $dz = ie^{it} dt = izdt$, $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$.

При изменении t от 0 до 2π точка z опишет в положительном направлении окружность $|z|=1$.

Тогда:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2} dt = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} \frac{(z^2+1)/(2z)}{\left(5-4(z^2+1)/(2z)\right)^2} dz = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{(2z^2-5z+2)^2} = I.$$

Найдем особые точки подынтегральной функции: $z_1 = 0,5$, $z_2 = 2$. Эти точки являются полюсами второго порядка для подынтегральной функции. Только полюс $z_1 = 0,5$ находится внутри окружности $|z|=1$. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (9). Найдем вычет подынтегральной функции в точке $z_1 = 0,5$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(0,5) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d}{dz} \left((z-0,5)^2 \frac{z^2+1}{4(z-0,5)^2(z-2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0,5} \left(\frac{z^2+1}{(z-2)^2} \right)' = \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{2z(z-2)^2 - 2(z^2+1)(z-2)}{(z-2)^4} = \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Тогда, по формуле (9) получим:

$$I = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{(2z^2-5z+2)^2} = \frac{1}{2i} 2\pi i \frac{8}{27} = \frac{8\pi}{27}.$$

в) Если $f(z)$ – дробно-рациональная функция, аналитическая на действительной оси и в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_n$, лежащих в верхней полуплоскости и $zf(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k). \quad (10)$$

Чтобы вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$, введем функцию

$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$, которая на действительной оси, т.е. при $z = x$, совпадает

с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^2}$.

Введенная функция – дробно-рациональная, знаменатель которой не имеет действительных корней. Так как выполняется условие $zf(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то заданный интеграл может быть вычислен по формуле (10).

Функция $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$ имеет полюсы второго порядка $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$. Нас интересует только тот полюс, мнимая часть которого положительна, то есть $z_1 = 2i$.

Найдем вычет функции $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$ в точке $z_1 = 2i$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left((z - 2i)^2 \frac{1}{(z^2 + 4)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z + 2i)^2} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{-2}{(z + 2i)^3} = -\frac{1}{32}i. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = 2\pi i \left(-\frac{1}{32}i \right) = \frac{\pi}{16}.$$

2. ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАНИЕ 1. Определить и построить на комплексной плоскости Z линии, заданные уравнениями:

1.1. а) $|z - 1 - 3i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-2}{z+i} = 1$.

1.2. а) $|z - 3i| = 3$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} = 2$.

1.3. а) $|z + 1 + i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-2i} = 3$.

1.4. а) $|z + 2 - 3i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} = 2$.

1.5. а) $|z + 2| = 3$, б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z+i} = 2$.

1.6. а) $|z + 1 - 3i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-3}{z-i} = 1$.

1.7. а) $|z - 4 - 3i| = 1$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+4i} = 2$.

1.8. а) $|z - 3 + 2i| = 1$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+i} = 3$.

1.9. а) $|z + 1 - 2i| = 3$, б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-2i} = 1$.

1.10. а) $|z - 2 - i| = 1$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-2}{z-3i} = 2$.

1.11. а) $|z - 2 - 4i| = 2$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-2i} = 3$.

1.12. а) $|z + 1 + 3i| = 3$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+2i} = 1$.

1.13. а) $|z + 2 + i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-i} = 2$.

1.14. а) $|z + 2i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} = 1$.

1.15. а) $|z - 1 - 2i| = 1$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z+2}{z-i} = 2$.

1.16. а) $|z + 1 + i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z+2}{z-i} = 1$.

1.17. а) $|z - i| = 1$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+2i} = 2$.

1.18. а) $|z - 3 - i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-2i} = 1$.

1.19. а) $|z - 1 + 3i| = 1$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z-3i} = 2$.

1.20. а) $|z + 2 - i| = 3$, б) $\operatorname{Re} \frac{z+3}{z-i} = 2$.

1.21. а) $|z + 4 - i| = 2$, б) $\operatorname{Re} \frac{z-2}{z-i} = 1$.

1.22. а) $|z - 1 + 2i| = 3$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-3i} = 2$.

1.23. а) $|z - 2 - 2i| = 1$, б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z+i} = 3$.

1.24. а) $|z + 2 - i| = 2$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z+2}{z+2i} = 1$.

1.25. а) $|z - 1 - 4i| = 2$,

б) $\operatorname{Re} \frac{z+3}{z-2i} = 2$.

ЗАДАНИЕ 2. Изобразить на комплексной плоскости Z области, определяемые следующими неравенствами или системами неравенств:

$$2.1. \text{ а) } 2 < |z + 1 + 3i| \leq 3, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{6} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.2. \text{ а) } 1 < |z - 1 + 3i| \leq 2, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{\pi}{6} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.3. \text{ а) } 1 \leq |z - 2 + i| < 3, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{3} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$2.4. \text{ а) } 2 \leq |z - 1 + i| < 3, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$2.5. \text{ а) } 1 \leq |z + 1 + i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{4\pi}{3} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2.6. \text{ а) } 1 \leq |z - 1 + 2i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.7. \text{ а) } 2 < |z - 1 + 2i| \leq 4, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$2.8. \text{ а) } 1 \leq |z + 1 - 2i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{2\pi}{3} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.9. \text{ а) } 2 \leq |z + 2 + 2i| < 5, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{5\pi}{6} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2.10. \text{ а) } 1 \leq |z - 1 + 2i| < 4, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{\pi}{12} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.11. \text{ а) } 1 \leq |z - 4 + 2i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{8} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.12. \text{ а) } 1 \leq |z + 1 + 4i| < 3, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{5\pi}{6} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$2.13. \text{ а) } 3 \leq |z - 1 + 2i| < 4, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{2\pi}{3} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2.14. \text{ a) } 1 \leq |z - 1 + 5i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{\pi}{8} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.15. \text{ a) } 2 \leq |z - 4 + 2i| < 3, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{12} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.16. \text{ a) } 3 \leq |z - 1 + 2i| < 5, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$2.17. \text{ a) } 4 \leq |z - 3 + 2i| < 5, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{2\pi}{3} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2.18. \text{ a) } 1 \leq |z - 4 + i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{3\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.19. \text{ a) } 2 \leq |z + 4 + 2i| < 3, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{3\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.20. \text{ a) } 1 \leq |z - 5 + 2i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{5\pi}{6} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$2.21. \text{ a) } 1 \leq |z + 4 + 3i| < 3, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{2\pi}{3} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2.22. \text{ a) } 2 < |z + 3 + 2i| \leq 3, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{8} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$2.23. \text{ a) } 1 \leq |z - 1 + 5i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{3\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$2.24. \text{ a) } 3 \leq |z - 5 - 2i| < 4, \text{ б) } \left| \arg z - \frac{\pi}{8} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2.25. \text{ a) } 1 \leq |z - 4 - 2i| < 2, \text{ б) } \left| \arg z + \frac{3\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{6}.$$

ЗАДАНИЕ 3. Исследовать на дифференцируемость и аналитичность функцию $w = f(z)$, найти ее производную, если она существует.

3.1. $w(z) = (z - 1)\operatorname{Re}(z + 1)$.

3.14. $w(z) = z^3 + 3i$.

3.2. $w(z) = e^{i3z+1}$.

3.15. $w(z) = 7 - i(e^z - e^{\bar{z}})$.

3.3. $w(z) = z^2 - z + 5i$.

3.16. $w(z) = z^2 - 3z + 1$

3.4. $w(z) = e^z + 3i$.

3.17. $w(z) = z^2 + z + 5i$

3.5. $w(z) = e^{3z}$

3.18. $w(z) = -\cos z + 4$.

3.6. $w(z) = 2z^2 - 3z - 4i$.

3.19. $w(z) = e^{3z} - 3i$

3.7. $w(z) = \frac{1}{z} + i(3 - z)$.

3.20. $w(z) = z^2 + z - 4i$

3.8. $w(z) = z\operatorname{Re}(z - 2i)$

3.21. $w(z) = \sin 2z$

3.9. $w(z) = (1 + i)z + 10$.

3.22. $w(z) = z^2 + z + 7i$

3.10. $w(z) = z^2 + 5z - 7$

3.23. $w(z) = \operatorname{sh} 3z$

3.11. $w(z) = \cos(iz - 1)$

3.24. $w(z) = z^2 + z - 3i$

3.12. $w(z) = z^2 + z - 7i$

3.25. $w(z) = -\cos z + 4i$

3.13. $w(z) = \sin 4z$

ЗАДАНИЕ 4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

4.1. $v(x, y) = x^2 - y^2 - 1$.

4.7. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$.

4.2. $u(x, y) = -y(4x + 1)$.

4.8. $v(x, y) = e^{1-2y} \sin 2x$.

4.3. $v(x, y) = y - e^{2x} \sin 2y$.

4.9. $u(x, y) = \sin 2x \operatorname{ch} 2y$.

4.4. $u(x, y) = e^{1-2y} \cos 2x$.

4.10. $v(x, y) = 3xy^2 - x^2 + 5$.

$$4.5. u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$4.6. v(x, y) = x + y - 3.$$

$$4.13. u(x, y) = 2^x \cos(y \ln 2).$$

$$4.14. v(x, y) = \cos 2x \operatorname{sh} 2y.$$

$$4.15. u(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 3x.$$

$$4.16. u(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

$$4.17. u(x, y) = (e^x + e^{-x}) \sin y.$$

$$4.18. v(x, y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + 4.$$

$$4.19. u(x, y) = e^x \cos y.$$

$$4.11. v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$4.12. u(x, y) = x - y + 2.$$

$$4.20. v(x, y) = 3^x \sin(y \ln 3).$$

$$4.21. u(x, y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$4.22. v(x, y) = e^x \sin y.$$

$$4.23. v(x, y) = x + y - 5.$$

$$4.24. u(x, y) = 3x^2 y - y^2.$$

$$4.25. v(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y.$$

ЗАДАНИЕ 5. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 , указать правильную и главную часть ряда Лорана:

$$5.1. f(z) = \sin \frac{5}{z - 2i}, \quad z_0 = 2i.$$

$$5.2. f(z) = (z - 2) \cos \frac{1}{z - 2}, \quad z_0 = 2.$$

$$5.3. f(z) = (z - 1)^2 e^{\frac{1}{z-1}}, \quad z_0 = 1.$$

$$5.4. f(z) = z^2 \sin \frac{2}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$$5.5. f(z) = (z - 3)^3 e^{\frac{1}{z-3}}, \quad z_0 = 3.$$

$$5.6. f(z) = \frac{1}{(z - i)^3} \cos(z - i), \quad z_0 = i.$$

$$5.7. f(z) = \frac{1}{(z + 2)^4} \sin(z + 2), \quad z_0 = -2.$$

$$5.8. f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} e^{(z-1)}, \quad z_0 = 1.$$

$$5.9. f(z) = (z-\pi)^3 e^{\frac{1}{z-\pi}}, \quad z_0 = \pi.$$

$$5.10. f(z) = (z+1)^4 \sin \frac{2}{(z+1)}, \quad z_0 = -1.$$

$$5.11. f(z) = \frac{1}{(z-3i)^5} \cos(z-3i), \quad z_0 = 3i.$$

$$5.12. f(z) = z^5 \sin \frac{2}{z^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$5.13. f(z) = (z-4)^2 e^{\frac{1}{z-4}}, \quad z_0 = 4.$$

$$5.14. f(z) = (z-3)^5 \cos \frac{1}{z-3}, \quad z_0 = 3.$$

$$5.16. f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \sin(z-2), \quad z_0 = 2.$$

$$5.17. f(z) = (z-1)^5 e^{\frac{1}{(z-1)^2}}, \quad z_0 = 1.$$

$$5.18. f(z) = (z+i)^4 \sin \frac{2}{(z+i)}, \quad z_0 = -i.$$

$$5.19. f(z) = (z+3i)^5 \cos \frac{1}{z+3i}, \quad z_0 = -3i.$$

$$5.20. f(z) = \frac{1}{(z-i)^4} e^{(z-i)}, \quad z_0 = i.$$

$$5.21. f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \sin(z+2i), \quad z_0 = -2i.$$

$$5.22. f(z) = z^5 \cos \frac{1}{z^3}, \quad z_0 = 0.$$

$$5.23. f(z) = (z+1)^3 e^{\frac{1}{z+1}}, \quad z_0 = -1.$$

$$5.24. f(z) = (z-i)^3 \sin \frac{3}{(z-i)^2}, \quad z_0 = i.$$

$$5.25. f(z) = \frac{1}{(z+3i)^3} \cos(z+3i), \quad z_0 = -3i.$$

ЗАДАНИЕ 6. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и указать их тип (характер):

$$6.1. \text{ а) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{z^2}.$$

$$6.2. \text{ а) } f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 4}, \quad \text{б) } f(z) = e^{-z} \cos \frac{1}{z}.$$

$$6.3. \text{ а) } f(z) = \frac{2z^2 - 1}{z^5(z^2 + 9)^3}, \quad \text{б) } f(z) = ze^{-\frac{1}{z^2}}.$$

$$6.4. \text{ а) } f(z) = (z+i) \cos \frac{1}{z+i}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{(z^4 + 1)^2}.$$

$$6.5. \text{ а) } f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-i)^2(z^2 + 4)}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

$$6.6. \text{ а) } f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}.$$

$$6.7. \text{ а) } f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)^2}, \quad \text{б) } f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}.$$

$$6.8. \text{ а) } f(z) = \frac{z+2}{z^3 + z^2 - z - 1}, \quad \text{б) } f(z) = \sin \frac{1}{1-z}.$$

$$6.9. \text{ а) } f(z) = (z+1) \sin \frac{1}{z^2}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}.$$

$$6.10. \text{ а) } f(z) = z^2 \cos \frac{\pi}{z}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z+i)^2(z^2 + 4)}.$$

$$\begin{aligned}
6.11. \text{ a) } f(z) &= \frac{\sin z}{(z + \pi)(z^2 - 1)}, \quad \text{б) } f(z) = e^{\frac{z}{z+2}}. \\
6.12. \text{ a) } f(z) &= \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{e^z - 1}. \\
6.13. \text{ a) } f(z) &= \frac{1}{z^2(z^2 + 4)^2}, \quad \text{б) } f(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}. \\
6.14. \text{ a) } f(z) &= \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}, \quad \text{б) } f(z) = \sin \frac{z}{z + 1}. \\
6.15. \text{ a) } f(z) &= z(e^{\frac{1}{z}} - 1), \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{(z + i)^3(z^2 + 9)}. \\
6.16. \text{ a) } f(z) &= \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad \text{б) } f(z) = z \cos^2 \frac{\pi}{z}. \\
6.17. \text{ a) } f(z) &= \frac{z + 2}{z - z^3}, \quad \text{б) } f(z) = \cos \frac{z}{z + 1}. \\
6.18. \text{ a) } f(z) &= \frac{\cos z}{z^3 + z^2 - z - 1}, \quad \text{б) } f(z) = z \operatorname{sh} \frac{1}{z}. \\
6.19. \text{ a) } f(z) &= \frac{z^4}{1 + z^4}, \quad \text{б) } f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}. \\
6.20. \text{ a) } f(z) &= \frac{\sin z}{(z^3 - 1)^2}, \quad \text{б) } f(z) = z e^{1 + \frac{1}{z^3}}. \\
6.21. \text{ a) } f(z) &= \operatorname{tg} 2z, \quad \text{б) } f(z) = \frac{ze^{2z}}{z^4 + 8z^2 - 9}. \\
6.22. \text{ a) } f(z) &= \frac{z}{(z^2 + 1)^2}, \quad \text{б) } f(z) = \cos \frac{1}{z} + \sin \frac{2 - \pi z}{2z}. \\
6.23. \text{ a) } f(z) &= \frac{\ln(1 + z) - z}{z^2}, \quad \text{б) } f(z) = (z + 1) \operatorname{sh} \frac{1}{z + 1}.
\end{aligned}$$

$$6.24. \text{ а) } f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+4)^2}, \quad \text{ б) } f(z) = e^{\frac{z+1}{1-z}}.$$

$$6.25. \text{ а) } f(z) = \frac{\ln(1+z^3)}{z^2}, \quad \text{ б) } f(z) = \cos \frac{1}{z+\pi}.$$

ЗАДАНИЕ 7. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

$$7.1. f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}.$$

$$7.13. f(z) = (1-z)e^{\frac{1}{1-z}}.$$

$$7.2. f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}.$$

$$7.14. f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}.$$

$$7.3. f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}.$$

$$7.15. f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}.$$

$$7.4. f(z) = \frac{\cos 4z}{(z-2)^6}.$$

$$7.16. f(z) = \frac{\cos^3 z}{z^3}.$$

$$7.5. f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)^2}.$$

$$7.17. f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}.$$

$$7.6. f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}.$$

$$7.18. f(z) = \frac{1 - \sin z}{z^3(z-3)}.$$

$$7.7. f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}.$$

$$7.19. f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}.$$

$$7.8. f(z) = \operatorname{ctg}^2 z.$$

$$7.20. f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^2}.$$

$$7.9. f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}.$$

$$7.21. f(z) = \frac{z^2+1}{(z-2)^2}.$$

$$7.10. f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}.$$

$$7.22. f(z) = e^{z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

$$7.11. f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}.$$

$$7.23. f(z) = \frac{z+2}{z^5-z^3}.$$

$$7.12. f(z) = \cos \frac{1}{z-2}.$$

$$7.24. f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 + 1)^2}.$$

$$7.25. f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2(z + 2)}.$$

ЗАДАНИЕ 8. Вычислить интегралы:

$$8.1. \text{ а) } \oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-5\sin t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$8.2. \text{ а) } \oint_{|z-i|=3} \frac{(e^z - 1)}{z^3 - iz^2} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$8.3. \text{ а) } \oint_{|z|=1} z^3 \sin z \frac{1}{z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}.$$

$$8.4. \text{ а) } \oint_{|z+1|=2} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2 + 9)}, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \cos t)^2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$$

$$8.5. \text{ а) } \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2 - 9)} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t + 5}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$8.6. \text{ а) } \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^2 z + 2}{z^2 - 4\pi^2} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + \cos t)^2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

$$8.7. \text{ а) } \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} dz}{z^2(z^2 + 4)}, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t + 5}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

$$8.8. \text{ а) } \oint_{|z|=1} z \cos^2 \frac{1}{z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)}.$$

$$8.9. \text{ а) } \oint_{|z|=1/3} \frac{3-2z+z^2}{z^3} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

$$8.10. \text{ а) } \oint_{|z|=3} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx.$$

$$\begin{aligned}
8.11. \text{ a) } & \oint_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z \sin z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+3\cos t)^2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}. \\
8.12. \text{ a) } & \oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}. \\
8.13. \text{ a) } & \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+z^2-2z}, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2} dx. \\
8.14. \text{ a) } & \oint_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}. \\
8.15. \text{ a) } & \oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx. \\
8.16. \text{ a) } & \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6} dx. \\
8.17. \text{ a) } & \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2} dx. \\
8.18. \text{ a) } & \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sqrt{7}\sin t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx. \\
8.19. \text{ a) } & \oint_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin t + \cos t + 2}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2} dx. \\
8.20. \text{ a) } & \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2+1)}, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{2+\cos t}{2-\sin t} dt, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2} dx. \\
8.21. \text{ a) } & \oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i \sin z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin t + \cos t}{2\sin t + 3} dt, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx. \\
8.22. \text{ a) } & \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}+\cos t}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}.
\end{aligned}$$

$$8.23. \text{ а) } \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{5 + 3\cos 2t} dt, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}.$$

$$8.24. \text{ а) } \oint_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}} + 1}{z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

$$8.25. \text{ а) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz, \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2t}{5 - 4\cos t} dt, \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 16)}.$$

Библиографический список

1. *Краснов М.Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – Москва: Наука, 1981. – 303 с.
2. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.2 / Д.Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2008. – 256 с.
3. *Кручкович Г.И.* Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1973. – 576 с.
4. Руководство к решению задач по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.2 / [Е.И. Гурский и др.]; под ред. Гурского Е.И. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 400 с.

Технический редактор – *Р.В. Дмитриева*

Подписано к печати 25.05.16. Изд. № 65/15. Зак. 62/2016. Тираж 30 экз.
 Объем 2,0 п.л. Усл.печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96
 Формат бумаги 60 x 84 1/16

РИИЦМ ФГАОУВО «Севастопольский государственный университет»