

УДК 681.3

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРОЦЕССОВ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ КАЧУР С.А.

Севастопольский национальный технический университет
Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

Рассмотрено применение стохастических сетей Петри со сдерживающими событийными гипердугами для описания структуры вероятностных соединений стохастических систем. Предложен критерий наиболее вероятного отклонения, вызванного помехой входных сигналов системы.

В настоящее время задача фильтрации процессов переменной структуры решается на основе байесовских критериев условного риска и определении апостериорной плотности вероятности оцениваемого сигнала при условии наблюдения некоторого другого сигнала с гауссовскими помехами [1].

Трудности решения задачи связаны с получением апостериорной плотности вероятности, которая может быть определена двумя путями: интегральным и дифференциальным. В случае если процесс является немарковским, второй путь неприемлем. Процессы немарковского типа характерны для вероятностных соединений стохастических систем. Получить аналитическое решение для таких систем практически не удастся. Перспективным является путь разработки приближенных алгоритмов фильтрации. Однако эти процессы также содержат ограничение в виде условия марковости. Условные марковские процессы в основном определяют и модели различных методов стохастического моделирования на ЭВМ. На практике проблема моделирования и фильтрации немарковских процессов переменной структуры связана с задачей снижения размерности модели и объема вычислений.

Для решения данной задачи эффективно использование сетевых моделей, в частности, стохастических сетей Петри [2]. Однако предлагаемые модели либо основаны на теории вероятностных автоматов и следовательно эквивалентны марковским цепям, либо ориентированы на задачи, связанные с распределением ресурсов и обработкой языковых конструкций.

Расширение стохастических сетей Петри со сдерживающими событийными гипердугами позволяет моделировать немарковские процессы вероятностных соединений стохастических систем.

Пусть система, элементами которой являются стохастические подсистемы, связанные между собой каналами передачи информации, описывается следующими множествами:

- 1) конечным множеством $M = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ элементов системы; каждый l -ый элемент системы описывается стохастическим уравнением

$$\dot{Y}^{(l)} = D^{(l)}(t)\varphi^{(l)}(Y, t) + W^{(l)}(Y, t)F^{(l)}(t) + H^{(l)}(Y, t)V(t), \quad Y(t_0) = Y_0, \quad l = \overline{1, n}$$

где $Y^{(l)}(t)$ – k_l -мерный вектор фазовых координат; $D^{(l)}(t)$ – $(k_l \times k_l)$ -матрица заданных коэффициентов; $\varphi^{(l)}(Y, t)$ – k_l -мерный вектор нелинейных функций; $W^{(l)}(Y, t)$ и $H^{(l)}(Y, t)$ – $(k_l \times k_l)$ -матрицы известных дифференцируемых по Y функций; $F^{(l)}(t)$ – k_l -мерный вектор входных сигналов; $V(t)$ – k_l -мерный вектор гауссовского белого шума;

- 2) множествами $F^{(l)}$ и $X^{(l)}$ соответственно входов и выходов элемента $M^{(l)}$ ($X^{(l)} \subseteq Y^{(l)}$); $Y^{(l)} = X^{(l)} \mathbf{U} Y B H^{(l)}$, где $Y B H^{(l)}$ – вектор фазовых координат, определяемый внутренней структурой элемента ($X^{(l)} \mathbf{I} Y B H^{(l)} \neq 0$);

- 3) непересекающимися подмножествами входов $f_i^{(l)} \subseteq F^{(l)} (i = \overline{1, k}, \mathbf{I} f_i = 0)$ и выходов $x_i^{(l)} \subseteq X^{(l)} (i = \overline{1, q}, \mathbf{I} x_i^{(l)} = 0)$

элемента M_i , которые определяют каналы передач со стороны приемника и источника;

- 4) множеством $D = \{d_1, d_2, \dots, d_h\}$ каналов, соединяющих выходы источника и входы приемника сигналов ($x_i^{(l)}, f_j^{(q)}$);

- 5) множеством Θ априорных вероятностей $\theta_0^{(i)}$ передачи по каналу d_i из множества D в момент времени $t_0 = 0$; параметр $\theta_0^{(i)}$ распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $m_0^{(i)}$ и дисперсией $\sigma_0^{2(i)}$ и описывается функцией плотности распределения $\omega_0(\theta, t)$;

- 6) множеством $S = \{s_1, s_2, \dots, s_e\}$ взаимоисключающих событий, а именно передачи сигналов по различным каналам; взаимоисключающее событие $s_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{ie}\}$ определяет набор каналов, по которым запрещена одновременная передача сигналов.

Измеритель будем считать линейным и безынерционным. Измерения проводятся через интервал времени Δt . Уравнения наблюдения

записывается в виде m -мерного вектора $Z(m < n_1, n_1 = \sum_{i=1}^n k_i$, где k_i –

количество выходов i -го элемента)

$$Z(t) = C(t)X(t) + N(t),$$

где $C(t)$ – $(m \times n_1)$ -матрица измерения фазовых координат $X(t)$; $N(t)$ – m -мерный вектор гауссовского белого шума.

Требуется по результатам дискретного наблюдения $Z(t)$, производимого через промежуток времени Δt , найти оптимальную оценку $\hat{X}(t)$ в каждый момент времени $t = k\Delta t$ ($k = 1, 2, \dots$).

Решение задачи оптимальной фильтрации основывается на результатах синхронного моделирования процесса передачи сигналов в системе, поведение которой описывается стохастической сетью Петри со сдерживающими событийными гипердугами. Сетевая модель позволяет свести работу системы на интервале Δt к параллельному, независимому функционированию всех подключенных элементов. Это увеличивает мощность моделирования в случае применения мультипроцессорных систем. В процессе моделирования в момент времени t определяются следующие характеристики поведения системы во времени: 1) текущая структура системы; 2) частота появления каждой структуры из множества структур определенных в процессе моделирования; 3) значения вектора моделируемых сигналов $X_{\text{mod}}(t)$ на выходах элементов; 4) функции $\omega(X_{\text{mod}}, t)$ плотности распределения сигнала $X^{(i)}_{\text{mod}}(t)$.

Однако такая модель не рассчитана на коррекцию значений моделируемых сигналов на основе результатов наблюдения $Z(t)$. Введя формальное разделение одного и того же состояния на выходное состояние элемента i и входное элемента j или внутреннее состояние элемента i , т.е. рассматривая вместо одного вектора два вектора сигналов X_{mod} и XZ , можно моделировать выходной сигнал j -го элемента с учетом наблюдаемых значений на выходах i -го элемента.

В качестве критерия оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ предполагается использовать критерий наиболее вероятного отклонения, вызванного помехой $N(t)$

$$\hat{N}(t) = Z(t) - C(t)\hat{X}(t).$$

Критерий наиболее вероятной помехи можно записать в следующем виде:

$$\hat{N}(t) = C(t)K'(t)(Z'(t) - X_{\text{mod}}(t)) + C(t)(E - K'(t))(Z'(t) - \hat{X}_{\text{mod}}(t))$$

Выполнив преобразования, приняв во внимание, что $Z(t) = C(t)Z'(t)$, получим

$$\hat{N}(t) = Z(t) - C(t)(E - K'(t))\hat{X}_{\text{mod}}(t) - C(t)K'(t)X_{\text{mod}}(t),$$

где $\hat{N}(t)$ – m -мерный вектор оценки помех на выходах наблюдаемых элементов системы; $Z(t)$ – m -мерный вектор наблюдаемых сигналов; $C(t)$ –

$(m \times n_1)$ -матрица измерений; $X_{\text{mod}}(t)$ – n_1 -мерный вектор моделируемых сигналов на выходах элементов системы; $K'(t)$ – $(n_1 \times n_1)$ -матрица, диагональные элементы которой определяются вектором $K(t)$ ($K'_{i,i}(t) = K(t)$), рассчитываемым по формуле (1), элементы $K'_{i,j}(t) = 0 (i \neq j)$; $\hat{X}_{\text{mod}}(t)$ – n_1 -мерный вектор оценки моделируемых сигналов на выходах элементов системы, определяемый по формуле (2).

После выполнения алгоритма фильтрации, формируется вектор значений $XZ(t) = \hat{X}(t - \Delta t) + \Delta Z'(t)$, где $\Delta Z'(t) = Z'(t) - Z'(t - \Delta t)$, который поступает на соответствующие входы элементов в следующем такте моделирования.

Вектор $K(t)$ задает вероятности моделируемой помехи $\Delta = Z'(t) - X_{\text{mod}}(t)$ на выходах активных элементов. Для неактивного j -го элемента $K_j(t) = 0$.

$$K(t) = \mathbf{p}^{(TEK)} W^{(TEK)}, \quad (1)$$

где $\mathbf{p}^{(TEK)}$ – частота появления текущей структуры; $W^{(TEK)}$ – вектор функций $\omega_i^{(TEK)}(X_{\text{mod}}, t)$ плотностей распределения значений сигналов $X_{\text{mod}}^{(i)}$ для каждого i -го элемента текущей структуры, описываемых нормальным законом со средним $\mathbf{m}_i^{(TEK)}$ и средним квадратическим отклонением $\mathbf{\sigma}_i^{(TEK)}$

$$\omega_i^{(TEK)}(X_{\text{mod}}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{\sigma}_i^{(TEK)}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{m}_i^{(TEK)} - X_{\text{mod}}^{(i)})^2}{2(\mathbf{\sigma}_i^{(TEK)})^2}\right)$$

Вектор $\hat{X}_{\text{mod}}(t)$ моделируемых средних значений сигналов определяется по формуле

$$\hat{X}_{\text{mod}}(t) = \sum_{j=1}^r \mathbf{p}^{(j)} \mathbf{m}^{(j)}, \quad \sum_{j=1}^r \mathbf{p}^{(j)} = 1, \quad (2)$$

где $\mathbf{p}^{(j)}$ – вероятность j -ой структуры ($j = \overline{1, r}$, где r – число моделируемых структур); $\mathbf{m}^{(j)}$ – вектор средних значений j -ой структуры

Оптимальной назовем оценку $\hat{X}_o(t)$, которая минимизирует величину дисперсии потерь в результате наличия помех в канале. В качестве оптимальной оценки выступает математическое ожидание квадрата отклонения $M[(N(t) - \hat{N}(t))^2]$

$$I_o = \min_{\hat{X} \in X} M[(\hat{X}(t) - X(t))^2] = \min_{\hat{N} \in N} M[(N(t) - \hat{N}(t))^2].$$

Моделирование помех осуществляется в соответствии с законом их распределения и корреляционными характеристиками. Все расчеты выполняются с учетом инерционности элементов, т.е. с задержкой, кратной такту моделирования Δt .

Уравнение фильтра имеет вид

$$\hat{X}(t) = \hat{X}'(t - \Delta t) + C(t) \hat{X}(t) \Delta t$$

или

$$\hat{X}(t) = Z(t) - A \hat{N}(t - \Delta t) - \Delta \hat{N}(t - \Delta t), \quad (3)$$

где

$$\hat{X}'(t - \Delta t) = C(t - \Delta t)(E - K'(t - \Delta t)) \hat{X}_{\text{mod}}(t - \Delta t) - C(t - \Delta t) K'(t - \Delta t) X_{\text{mod}}(t - \Delta t);$$

$$\Delta \hat{N} - \text{приращение } \hat{N}; \quad A = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta Z(t) \cdot \Delta Z(t - \Delta t) \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Ошибка фильтрации определяется как

$$\varepsilon \approx \hat{N}(t) \Delta t,$$

где $\hat{N}$ – вторая производная $\hat{N}$.

В уравнении (3) отсутствует явное задание матриц ковариаций сигналов. Использование сетей Петри позволяет снизить объем вычислений за счет рассмотрения не всех элементов системы, а лишь активных. Это дает возможность изменять размерность ковариационной матрицы во времени в зависимости от числа активных элементов. Кроме того СП позволяет при моделировании естественным образом производить замену значений смоделированных сигналов их оценками, учитывающими сигналы наблюдения, без дополнительных преобразований и вычислений, связанных с изменением структуры системы.

Моделирование событий включения (исключения) элементов из текущей структуры производится с использованием байесовского подхода к оцениванию вероятностей передачи информации по каналам связи элементов. Большая априорная неопределенность по сравнению с информацией получаемой в процессе моделирования передачи сигналов, позволяет в качестве байесовских оценок значений сигналов на выходах элементов принять средние значения этих сигналов, а в качестве дисперсии использовать меру размаха. На основании этих оценок формируется матрица ковариации $R(t)$ для множества моделируемых элементов.

Предложенный метод оптимальной фильтрации предназначен для анализа сложных стохастических систем с применением современной вычислительной техники, в частности, мультипроцессорных систем,

способных обеспечить высокое быстродействие и следовательно точность алгоритма фильтрации, определяемую тактом моделирования.

Библиографический список

1. Казаков И.Е. Оптимизация динамических систем случайной структуры / И.Е. Казаков, В.М. Артемьев. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

2. Лескин А.А. Сети Петри в моделировании и управлении / А.А. Лескин,

П.А. Мальцев, А.М. Спиридонов. — Л.: Наука, 1989. — 133 с.

Поступила в редакцию 16.11.2001 г.