

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Севастопольский государственный университет»**

**Методические указания и контрольные задания по теме
"Интегрирование функций комплексного переменного"**

**Севастополь
2017**

УДК 51(035)
ББК 22.1

Рецензенты:

Песчанский А.И. - профессор кафедры высшей математики;
Филипович О.В. – канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой
«Приборные системы и автоматизация технических процессов»

Составитель: Л.Н. Григорюк

Методические указания и контрольные задания по теме "Интегрирование функций комплексного переменного"/ Сост. Л.Н. Григорюк. — Севастополь: Изд-во СевГУ, 2017. — 28 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам дневной формы обучения инженерных специальностей при изучении темы «Интегрирование функций комплексного переменного». В них приведены теоретические сведения, подробно рассмотрены примеры решения типовых задач, представлены 30 вариантов индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

УДК 51(035)
ББК 22.1

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Высшая математика", протокол № 3 от 21 апреля 2016 г.

Издательский номер 14/17

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Интеграл от функции комплексного переменного. Основные определения и теоремы. Примеры решения задач.	4
2. Индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов.	16
Библиографический список	28

Интеграл от функции комплексного переменного.

Основные определения и теоремы.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D , а L - кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D .

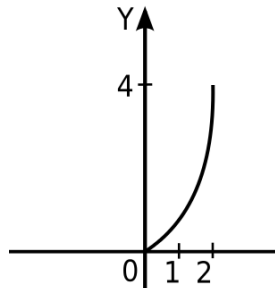
Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$,
где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ - действительные функции действительных переменных x и y , кроме того, $dz = dx + i dy$.

Тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy, \quad (1)$$

Вычисление интеграла от $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов II рода. Значит, на интегралы от функций комплексного переменного распространяются свойства криволинейных интегралов II рода.

Пример 1. Вычислить $\int_L \bar{z} \operatorname{Re} z dz$,



L : $y = x^2$ от точки $z_0 = 0$ до $z_1 = 2 + 4i$.

Решение: Выделим в подынтегральной функции действительную и мнимую части.

$$\bar{z} \operatorname{Re} z = (x - iy)x = x^2 - ixy,$$

умножим полученное выражение на $dz = dx + i dy$

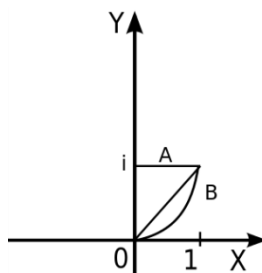
$$(x^2 - ixy)(dx + idy) = x^2 dx + xy dy + i(-xy dx + x^2 dy).$$

Учитывая, что $y = x^2$, x изменяется от 0 до 2, $dy = 2x dx$,

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z} \operatorname{Re} z dz &= \int_0^2 (x^2 + x \cdot x^2 \cdot 2x) dx + i \int_0^2 (x^2 \cdot 2x - x \cdot x^2) dx = \int_0^2 (x^2 + 2x^4) dx + i \int_0^2 x^3 dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_0^2 + i \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{232}{15} + 4i. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_L f(z)dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования L .

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L \bar{z} dz$ по следующим путям, соединяющим точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$



- а) по прямой L_1 ;
- б) по параболе $L_2: y = x^2$;
- в) по ломаной, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_3 = i$ и $z_2 = 1 + i$.

Решение: Преобразуем подынтегральное выражение

$$\bar{z} dz = (x - iy)(dx + idy) = xdx + ydy + i(-ydx + xdy)$$

$$I_1 = \int_{L_1} xdx + ydy + i \int_{L_1} -ydx + xdy;$$

Уравнение прямой, соединяющей точки z_1 и z_2 , $y = x$.

(Точки $(0;0)$ и $(1;1)$ принадлежат прямой $y = x$)

Тогда $dy = dx$, x изменяется от 0 до 1.

$$I_1 = \int_0^1 xdx + xdx + i \int_0^1 -xdx + xdx = \int_0^1 2xdx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

$$I_2 = \int_{L_2} xdx + ydy + i \int_{L_2} -ydx + xdy;$$

$L_2: y = x^2$, $dy = 2xdx$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (x - x^2 \cdot 2x)dx + i \int_0^1 (-x^2 + 2x^2)dx = \int_0^1 (x - 2x^3)dx + i \int_0^1 x^2 dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 + i \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} + i \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл по ломаной, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_3 = i$, $z_2 = 1 + i$, т.е. $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$

$$I_3 = \int_{OA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz$$

$$\int_{OA} f(z)dz = \int_{OA} xdx + ydy + i \int_{OA} -ydx + xdy = \int_0^1 ydy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

Т.к. $OA: x = 0$, $dx = 0$, $0 \leq y \leq 1$.

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} xdx + ydy + i \int_{AB} -ydx + xdy = \int_0^1 xdx - i \int_0^1 dx = \frac{1}{2} - i$$

AB: $y = 1$, $dy = 0$, $0 \leq x \leq 1$

$$I_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - i = \underline{1 - i}.$$

В рассмотренном примере подынтегральная функция непрерывная, но не аналитическая, интегралы по различным кривым, соединяющим две данные точки, имеют различные значения.

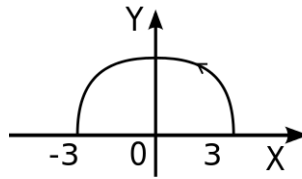
Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

и начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} (z(t))z'(t)dt, \text{ где } z(t) = x(t) + iy(t) \quad (2)$$

Пример 3. Вычислить $\int_L \operatorname{Im} z dz$, где $L: |z| = 3$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.



Решение: Преобразуем подынтегральное выражение

$$\operatorname{Im} z dz = y(dx + idy) = ydx + i y dy.$$

Верхняя половина окружности $|z| = 3$ будет задана уравнениями

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\int_L \operatorname{Im} z dz = \int_L y dx + i \int_L y dy = \left[\begin{matrix} x = 3 \cos t, & dx = -3 \sin t dt \\ y = 3 \sin t, & dy = 3 \cos t dt \end{matrix} \right]_{0 \leq t \leq \pi} = - \int_0^\pi 9 \sin^2 t dt + 9i \int_0^\pi \sin t \cos t dt =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{9}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt + 9i \int_0^\pi \sin t \cos t dt = -\frac{9}{2} \int_0^\pi dt + \frac{9}{2} \int_0^\pi \cos 2t dt + \frac{9i}{2} \sin^2 t \Big|_0^\pi = \\ &= -\frac{9}{2} \pi + \frac{9}{4} \sin 2t \Big|_0^\pi + \frac{9i}{2} (\sin^2 \pi - \sin^2 0) = -\frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

Если интегрирование проводится по окружности или какой-либо ее части, то можно перейти к показательной форме комплексного переменного $z = re^{i\varphi}$, сохраняя модуль постоянным, а меняя только аргумент.

Пример 4. Вычислить $\int_L (z + 2\bar{z})dz$, где $L: |z| = 2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение: Так как $z = re^{i\varphi}$, то в нашем случае $z = 2e^{i\varphi}$,

$$dz = 2ie^{i\varphi} d\varphi, \quad \bar{z} = 2e^{-i\varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_L (z + 2\bar{z}) dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2e^{i\varphi} + 4e^{-i\varphi}) 2ie^{i\varphi} d\varphi = 4i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2i\varphi} d\varphi + 8i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2e^{2i\varphi} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 8i \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 2(e^{i\pi} - e^{-i\pi}) + 8\pi i = 2(\cos \pi + i \sin \pi - \cos(-\pi) - i \sin(-\pi)) + 8\pi i = 8\pi i. \end{aligned}$$

Вычисление интегралов от аналитических функций в односвязных областях.

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D и L – произвольная незамкнутая линия с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 (z_1, z_2, L принадлежат области D). Тогда значение интеграла не зависит от формы кривой, соединяющей точки z_1 и z_2 , можно использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_L f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1), \quad (3)$$

где $F(z)$ – первообразная для $f(z)$, $F'(z) = f(z)$, $f(z)$ и $\varphi(z)$ – аналитические в односвязной области D , а z_1 и z_2 – произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \varphi'(z) dz = (f(z) \varphi(z)) \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) f'(z) dz, \quad (4)$$

Замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного производится аналогично случаю функции действительного переменного.

Пусть аналитическая функция $z = \varphi(\omega)$ отображает взаимно однозначно контур L_1 в ω –плоскости на контур L в z -плоскости. Тогда

$$\int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(\varphi(\omega)) \varphi'(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0 , или окружностью с центром в точке z_0 , то полезно делать замену переменной вида

$$z - z_0 = re^{i\varphi}. \quad (6)$$

В первом случае $\varphi = \text{const}$, а r – действительная переменная интегрирования, во втором случае $r = \text{const}$, а φ – действительная переменная интегрирования.

Пример 5. Вычислить $\int_0^i z \cos z dz$.

Решение: В соответствии с формулой (4) $f(z) = z$, $\varphi'(z) = \cos z$, тогда $f'(z) = 1$, $\varphi(z) = \sin z$.

Значит,

$$\int_0^i z \cos z dz = z \sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = i \sin i - 0 \cdot \sin 0 + \cos z \Big|_0^i = i \sin i + \cos i - \cos 0$$

Учитывая, что $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, получим

$$i \sin i + \cos i - \cos 0 = \frac{i(e^{-1} - e^1)}{2i} + \frac{e^{-1} + e^1}{2} - 1 = \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e}{2} - 1 = \frac{1}{e} - 1.$$

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D , то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае

$$\int_L f(z) dz = 0. \quad (7)$$

где L – любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области D .

Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D , ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром L , и на самом контуре, то справедлива формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}, \quad (z_0 \in D), \quad (8)$$

где контур L обходится так, чтобы область D оставалась все время слева. Эта формула позволяет вычислить некоторые интегралы.

Перепишем ее так

$$\int_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0), \quad (z_0 \in D), \quad (9)$$

Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на ее границе L , то для любого натурального n имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad \begin{matrix} (z_0 \in D) \\ (z \in L) \end{matrix}, \quad (10)$$

Этой формулой можно пользоваться для вычисления некоторых интегралов. Перепишем ее так

$$\int_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad \begin{matrix} (z_0 \in D) \\ (z \in L) \end{matrix}, \quad (11)$$

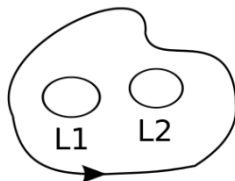
Теорема Коши для многосвязной области

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в многосвязной области D , ограниченной внешним контуром L и внутренними L_1 и L_2 .

Интеграл по внешнему контуру $L \int_L f(z)dz$ равен сумме интегралов по внутренним контурам.

Интегрирование как по внешней, так и по внутренним линиям совершается в положительном направлении. Кривые L_1, L_2, L ориентированы так, чтобы при обходе каждой из этих кривых область D остается слева

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz . \quad (12)$$

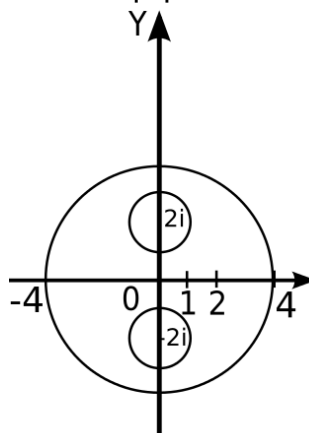


Пример 6. Вычислить с помощью интегральной формулы Коши

$$\int_L \frac{\sin z dz}{z^2 + 4}, \quad \text{где } L_1 - \text{окружность } |z - 2i| = 1;$$

$$L_2 - \text{окружность } |z + 2i| = 1;$$

$$L_3 - \text{окружность } |z| = 4.$$



Решение: Подынтегральная функция

$$\frac{\sin z}{z^2 + 4} = \frac{\sin z}{(z - 2i)(z + 2i)}$$

не является аналитической в точках $z_1 = -2i$ и $z_2 = 2i$. Внутри контура L_1 подынтегральная функция неаналитична в точке $z = 2i$, а функция

$$f(z) = \frac{\sin z}{z + 2i} \text{ является аналитической на контуре } L_1 \text{ и внутри этого контура. По}$$

формуле (9) находим

$$I_1 = \int_{L_1} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4} = \int_{L_1} \frac{\sin z}{z - 2i} dz = 2\pi i \frac{\sin z}{z + 2i} \Big|_{z=2i} = \frac{2\pi i}{4i} \sin(2i) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-2} - e^2}{2i} = -\frac{\pi i}{2} \cdot \frac{e^{-2} - e^2}{2} =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sh} 2.$$

Внутри контура L_2 функция $\frac{\sin z}{z^2 + 4}$ неаналитична в точке $z = -2i$, а функция $f(z) = \frac{\sin z}{z - 2i}$ является аналитической внутри контура L_2 и на этом контуре. По формуле (9) получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{L_2} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \int_{L_2} \frac{\sin z}{z - 2i} \cdot 2\pi i \frac{1}{z + 2i} \Big|_{z=-2i} = \frac{2\pi i}{-4i} \sin(-2i) = \\ &= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2i} = \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sh} 2. \end{aligned}$$

Внутри контура L_3 подынтегральная функция $\frac{\sin z}{z^2 + 4}$ не является аналитической в точках $-2i$ и $2i$. Рассмотрим трехсвязную область, ограниченную контурами L_1 , L_2 и L_3 .

В этой области и на ее полной границе функция $\frac{\sin z}{z^2 + 4}$ является аналитической.

По теореме Коши для многосвязной области интеграл по внешнему контуру L_3 равен сумме интегралов по всем внутренним контурам, поэтому

$$I_3 = \int_{L_3} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \int_{L_1} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz + \int_{L_2} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = I_1 + I_2 = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sh} 2 + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sh} 2 = \pi i \operatorname{sh} 2.$$

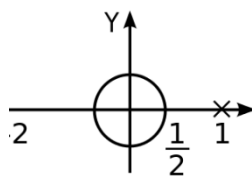
Пример 7. Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши

$$\int_L \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+2)^3} \quad \text{при } L_1: |z| = \frac{1}{2}$$

$$L_2: |z-1| = 1$$

$$L_3: |z+2| = \frac{3}{2}.$$

Решение: Подынтегральная функция неаналитична в точках $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$. Но в замкнутой области, ограниченной окружностью $|z| = \frac{1}{2}$, подынтегральная функция аналитична, точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$ лежат вне области.



В силу теоремы Коши (7) $\int_L \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+2)^3} = 0$

Внутри контура L_2 функция $\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)^3}$ неаналитична в точке $z_1 = 1$, а функция $\frac{e^z}{(z+2)^3}$ является аналитичной внутри контура L_2 и на этом контуре.

По формуле (11) при $n = 1$ получим

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+2)^3} &= \int_{L_2} \frac{\frac{e^z}{(z+2)^3} dz}{(z-1)^2} = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{e^z}{(z+2)^3} \right)'_{z=1} = 0 \\ \left(\frac{e^z}{(z+2)^3} \right)' &= \frac{e^z(z-1)}{(z+2)^4} \end{aligned}$$

Внутри контура L_3 функция $\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)^3}$ неаналитична в точке $z_2 = -2$, а функция $\frac{e^z}{(z+2)^3}$ является аналитической внутри контура L_3 и на этом контуре.

По формуле (11) при $n = 2$ получим

$$\int_{L_3} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+2)^3} = \int_{L_3} \frac{\frac{e^z}{(z+2)^3} dz}{(z-1)^2} = \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{e^z}{(z+2)^3} \right)'' = \pi i \frac{e^z(z^2 - 6z + 11)}{(z-1)^4} \Big|_{z=-2} = \frac{\pi i \cdot 27}{81 \cdot e^2} = \frac{\pi i}{4e^2}$$

Применение вычетов для вычисления интегралов

Изолированные особые точки

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность одной точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z = z_0$.

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $z = z_0$. Возможны три случая:

1) Если указанное разложение не содержит главной части (отрицательных степеней разности $z - z_0$), т.е. имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

то точка называется **устранимой** особой точкой функции $f(z)$. В этом случае существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0.$$

2) Разложение в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0 содержит конечное число отрицательных степеней разности $z - z_0$, то есть имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad C_{-m} \neq 0.$$

В этом случае точка z_0 называется **полюсом порядка m** функции $f(z)$, а

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

3) Если разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

содержит бесконечное число отрицательных степеней разности $z - z_0$, то в этом случае точка $z = z_0$ называется **существенно особой точкой**, а предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Вычеты аналитических функций в их изолированных особых точках

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке z_0 называется **число**, обозначаемое символом $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$ и определяется равенством

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz \quad (12)$$

где L – любой замкнутый контур, окружающий точку z_0 и не содержащий внутри себя других особых точек функции $f(z)$. Контур L обходится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$

$$\operatorname{res} f(z) = C_{-1} \quad (13)$$

В устранимой особой точке z_0 функции $f(z)$ вычет равен нулю. В существенно особой точке z_0 вычет может быть найден только по разложению функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Вычет в полюсе может быть найден не только по формуле (12), но и по специальным формулам.

Если точка $z = z_0$ есть полюс n -го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z - z_0)^n) \quad (14)$$

В случае простого полюса ($n = 1$)

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)) \quad (15)$$

Если функция $f(z)$ в окрестности $z = z_0$ представима как частное двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$, т.е. $z = z_0$ - простой полюс функции $f(z)$, то

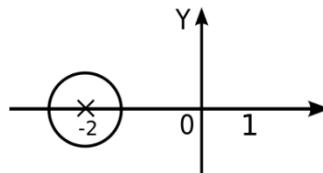
$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad (16)$$

Теорема Коши о вычетах

Если функция $f(z)$ является аналитической на границе L области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) \quad (17)$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} dz$, где $L: |z+2|=1$.



Решение: Особыми точками функции $\frac{\operatorname{tg} z}{z+2}$ будут $z_0 = -2$, $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Все эти точки – полюсы первого порядка. Внутри контура интегрирования лежат полюсы $z = -2$ и $z = -\frac{\pi}{2}$.

$$\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=-2} \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} + \operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} \right)$$

$\operatorname{res}_{z=-2} \frac{\operatorname{tg} z}{z+2}$ найдем по формуле (16)

$$\varphi(z) = \operatorname{tg} z, \quad \psi(z) = z+2$$

$$\operatorname{res}_{z=-2} \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} = \frac{\operatorname{tg}(-2)}{(z+2)'_{z=-2}} = \operatorname{tg}(-2) = -\operatorname{tg} 2.$$

Для отыскания $\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} z}{z+2}$ поступим иначе. Обозначим $\varphi(z) = \sin z$,

$\psi(z) = (z+2)\cos z$, тогда

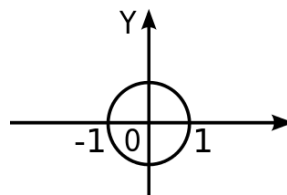
$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} &= \operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{\cos z \cdot (z+2)} = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left((z+2)\cos z\right)' \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}}} = \frac{-1}{(\cos z - \sin z \cdot (z+2)) \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}}} = \\
&= \frac{-1}{0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 2\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-2}{4 - \pi} = \frac{2}{\pi - 4}, \\
\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} dz &= 2\pi i \left(-\operatorname{tg} 2 + \frac{2}{\pi - 4} \right) = 2\pi i \left(\frac{2}{\pi - 4} - \operatorname{tg} 2 \right).
\end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_L \frac{z+2}{z^3 - z^4} dz$, где $L: |z|=2$.

Решение: Особыми точками функции $\frac{z+2}{z^3(1-z)}$ являются $z=+1$ - простой полюс и $z_2=0$ - полюс третьего порядка. Они лежат внутри контура интегрирования.

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{z+2}{z^3(1-z)} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=1} \frac{z+2}{z^3(1-z)} + \operatorname{res}_{z=0} \frac{z+2}{z^3(1-z)} \right) \\
\operatorname{res}_{z=1} \frac{z+2}{z^3(1-z)} &\text{ найдем по формуле (15)} \\
\operatorname{res}_{z=1} \frac{z+2}{z^3(1-z)} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+2)(z-1)}{z^3(1-z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+2}{-z^3} = -3 \\
\operatorname{res}_{z=0} \frac{z+2}{z^3(1-z)} &\text{ найдем по формуле (14), } n=3 \\
\operatorname{res}_{z=0} \frac{z+2}{z^3(1-z)} &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{(z+2)(z-0)^3}{z^3(1-z)} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z+2}{1-z} \right)'' = 3.
\end{aligned}$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int_L z^3 \sin^2 \frac{1}{z} dz$, где $L: |z|=1$.



Решение: Функция $z^3 \sin^2 \frac{1}{z}$ имеет особую точку $z=0$ внутри контура.

Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$.

$$z^3 \sin^2 \frac{1}{z} = z^3 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2}{z} \right);$$

так как $\cos \frac{2}{z} = 1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{2^2}{z^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{2^4}{z^4} - \frac{1}{6!} \cdot \frac{2^6}{z^6} + \dots$, то

$$\begin{aligned} z^3 \sin^2 \frac{1}{z} &= \frac{z^3}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{2^2}{z^2} - \frac{1}{4!} \cdot \frac{2^4}{z^4} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{2^6}{z^6} - \dots \right) = \\ &= \frac{z^3}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{z^2} - \frac{1}{4!} \cdot \frac{2^4}{z^4} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{2^6}{z^6} - \dots \right) = z - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} + \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{z^3} - \dots \end{aligned}$$

$z=0$ - существенно особая точка для данной функции, коэффициент при степени $\frac{1}{z}$ равен $-\frac{1}{3}$.

$$\operatorname{res}_{z=0} z^3 \sin^2 \frac{1}{z} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Тогда } \int_L z^3 \sin^2 \frac{1}{z} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{2\pi i}{3}.$$

Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Если $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - отношение двух многочленов, причем степень n многочлена в знаменателе хотя бы на две единицы больше степени m многочлена в числителе ($n \geq m+2$), функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_n(x) \neq 0$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sigma, \quad (18)$$

где σ - означает сумму вычетов функции $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней плоскости.

Пример 11. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 13x^2 + 36}$.

Решение: Так как $x^4 + 13x^2 + 36 = (x^2 + 4)(x^2 + 9)$, то

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 13x^2 + 36} = \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}.$$

Аналитическим продолжением функции $f(x)$ будет функция комплексного переменного $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)}$, особыми точками которой являются полюсы первого порядка $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -3i$. В верхней полуплоскости лежат точки $z = 2i$ и $z = 3i$.

Применяя формулу (17), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 13x^2 + 36} = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} + \operatorname{res}_{z=3i} \frac{z^2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} \right);$$

находим по формуле (16)

$$\operatorname{res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} = \left(\frac{z^2}{2z(z^2 + 9)(z^2 + 4)2z} \right) \Big|_{z=2i} = \frac{z}{z(2z^2 + 13)} \Big|_{z=2i} = \frac{i}{5}$$

$$\operatorname{res}_{z=3i} \frac{z^2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} = \left(\frac{z^2}{2z(z^2 + 9)(z^2 + 4)2z} \right) \Big|_{z=3i} = \frac{-3i}{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} = 2\pi i \left(\frac{i}{5} - \frac{3i}{10} \right) = \frac{2\pi i(-i)}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

Индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов

Задача 1. Вычислить интеграл

1)	$\int_L \operatorname{Re} z^2 dz$, где	а) L – отрезок OB , соединяющий точки $O(0; 0)$ и $B(1; 2)$, б) L – ломаная OAB , соединяющая точки $O(0; 0)$, $A(0; 2)$, $B(1; 2)$
2)	$\int_L (2z + 1) dz$, где	а) L – дуга параболы $y = x^3$ от точки $O(0; 0)$ до точки $B(1; 1)$, б) L – ломаная OAB , соединяющая точки $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$
3)	$\int_L \operatorname{Im} z^2 dz$, где	а) L – отрезок прямой OB , соединяющий точки $O(0; 0)$, $B(1; 1)$, б) L – ломаная OAB , соединяющая точки $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(1; 1)$
4)	$\int_L (3z^2 + 2z) dz$, где	а) L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $B(1; 1)$, б) L – ломаная OAB , соединяющая точки $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$
5)	$\int_L \operatorname{Im} z^3 dz$, где	а) L – отрезок прямой OB , соединяющий точки $O(0; 0)$, $B(2; 2)$,

		б) L – ломаная OAB , соединяющая точки $O(0; 0)$, $A(0; 2)$, $B(2; 2)$
6)	$\int_L \bar{z} dz$, где	а) L – дуга параболы $y = \sqrt{x}$ от точки $A(0; 1)$ до точки $B(2; 2)$, б) L – ломаная ACB , соединяющая точки $z_A = i$, $z_C = 2i$, $z_B = 2 + 2i$
7)	$\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz$, где	а) L – отрезок прямой от точки $z_A = 0$ до точки $z_B = 1 + i$ б) L – ломаная ACB , соединяющая точки $z_A = 0$, $z_C = i$, $z_B = 1 + i$
8)	$\int_L z \operatorname{Im} z dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, б) L – ломаная ACB , соединяющая точки $A(0; 0)$, $C(0; 3)$, $B(1; 3)$
9)	$\int_L \operatorname{Re} z^3 dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(1; 0)$, $B(1; 2)$
10)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(0; 1)$, $B(1; 1)$
11)	$\int_L z \operatorname{Re} z dz$, где	а) L – отрезок AC , $A(0; 0)$, $C(1; 2)$, б) L – ломаная ABC , $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$
12)	$\int_L z dz$, где	а) L – отрезок AC , $A(0; 0)$, $C(1; 1)$, б) L – ломаная ABC , $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$
13)	$\int_L (12z^5 + 4z^3 + 1) dz$,	где а) L – отрезок AB , $A(1; 1)$, $B(0; 0)$, б) L – ломаная ACB , $A(1; 1)$, $C(0; 1)$, $B(0; 0)$
14)	$\int_L \operatorname{Im} z^3 dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(1; 0)$, $B(1; 1)$
15)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz$, где	а) L – часть кривой $y = x^2$ от точки $A(0; 0)$ до точки $B(1; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(1; 0)$, $B(1; 1)$
16)	$\int_L \bar{z}^2 dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(0; 1)$, $B(1; 1)$
17)	$\int_L \operatorname{Im} z dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(2; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(1; 0)$, $B(2; 1)$
18)	$\int_L \bar{z} dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(2; 0)$, $B(1; 2)$
19)	$\int_L \operatorname{Im} z^2 dz$, где	а) L – часть кривой $y = x^2$ от точки $A(0; 0)$ до точки $B(2; 4)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(2; 0)$, $B(2; 4)$
20)	$\int_L \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(2; 0)$, $B(1; 2)$

21)	$\int_L (\bar{z})^2 dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(0; 2)$, $B(1; 2)$
22)	$\int_L \operatorname{Im} z^3 dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(1; 0)$, $B(1; 1)$
23)	$\int_L \operatorname{Re} z^3 dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(2; 0)$, $B(1; 2)$
24)	$\int_L \bar{z}^2 dz$, где	а) L – дуга кривой $y = x^2$ от точки $A(0; 0)$ до точки $B(1; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(1; 0)$, $B(1; 1)$
25)	$\int_L (12z^5 + 4z^3 + 1) dz$,	где а) L – отрезок AB , $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(1; 0)$, $C(0; 0)$, $B(0; 1)$
26)	$\int_L \bar{z}^2 dz$, где	а) L – отрезок AC , $A(0; 0)$, $C(1; 2)$, б) L – ломаная ABC , $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$
27)	$\int_L (3z^2 + 7z + 1) dz$,	где а) L – отрезок AB , $A(1; 0)$, $B(2; -1)$, б) L – ломаная ACB , $A(1; 0)$, $C(1; -1)$, $B(2; -1)$
28)	$\int_L \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, б) L – ломаная ACB , $A(1; 0)$, $C(0; 0)$, $B(0; 1)$
29)	$\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz$, где	а) L – отрезок AB , $A(0; 0)$, $B(1; -2)$, б) L – ломаная ACB , $A(0; 0)$, $C(0; -2)$, $B(1; -2)$
30)	$\int_L \operatorname{Re} z dz$, где	а) L – отрезок AC , $A(1; 1)$, $C(2; 2)$, б) L – ломаная ABC , $A(1; 1)$, $B(2; 1)$, $C(2; 2)$

Задача 2. Вычислить интеграл

1)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz$,	где L : $ z =1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ обход против часовой стрелки
2)	$\int_L z \operatorname{Re} z dz$,	где L : $ z =1$, обход против часовой стрелки
3)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz$,	где L : $ z =1$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ обход против часовой стрелки
4)	$\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz$,	где L : $ z =1$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$
5)	$\int_L z dz$,	где L : $ z =\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4}$
6)	$\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz$,	где L : $ z =3$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ обход против часовой стрелки
7)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz$,	где L : $ z =2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$

8)	$\int_L z dz,$	где $L: z =2, \operatorname{Im} z \leq 0,$ пробегаемый от $z_1 = -2$ до $z_2 = 2$
9)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz,$	где $L: z =4$ от $z_1 = -4i$ до $z_2 = 4i$
10)	$\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz,$	где $L: z =2, \operatorname{Im} z \geq 0,$ обход против часовой стрелки
11)	$\int_L \frac{z}{\bar{z}} dz,$	где $L: z =1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
12)	$\int_L \operatorname{Im} z dz,$	где $L: z =3, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
13)	$\int_L z \operatorname{Re} z dz,$	где $L: z =1, \operatorname{Im} z \leq 0,$ обход против часовой стрелки
14)	$\int_L (z^2 + z \cdot \bar{z}) dz,$	где $L: z =2, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
15)	$\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz,$	где $L: z =1, 0 \leq \arg z \leq \pi$
16)	$\int_L z \operatorname{Re} z dz,$	где $L: z =2, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
17)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz,$	где $L: z =2, 0 \leq \arg z \leq \pi$
18)	$\int_L z \operatorname{Re} z dz,$	где $L: z =3, -\pi \leq \arg z \leq \pi$
19)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz,$	где $L: z =1,$ обход против часовой стрелки
20)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz,$	где $L: z =3, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
21)	$\int_L z \operatorname{Im} z dz,$	где $L: z =2, 0 \leq \arg z \leq \pi$
22)	$\int_L z \cdot \bar{z} dz,$	где $L: z =2$ от $z_1 = -2i$ до $z_2 = 2i$
23)	$\int_L z dz,$	где $L: z =1, \operatorname{Im} z \leq 0,$ обход против часовой стрелки
24)	$\int_L \operatorname{Im} z dz,$	где $L: z =2, 0 \leq \arg z \leq \pi$
25)	$\int_L \operatorname{Im} z dz,$	где $L: z-1 =2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

26)	$\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz,$	где $L: z =2, 0 \leq \arg z \leq 2\pi$
27)	$\int_L z \operatorname{Re} z dz,$	где $L: z =3, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
28)	$\int_L \frac{z}{ z } dz,$	где $L: z =2, 0 \leq \arg z \leq \pi$
29)	$\int_L z dz,$	где $L: z =1, -\frac{3\pi}{2} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{2}$
30)	$\int_L \frac{z}{\bar{z}} dz,$	где $L: z =4, \operatorname{Im} z \geq 0,$ обход против часовой стрелки

Задача3. Вычислить интеграл

1)	$\int_0^{1+i} (z^3 + 2z) dz$	2)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \sin z dz$
3)	$\int_{-i}^i z e^{z^2} dz$	4)	$\int_0^i (z + 5) e^z dz$
5)	$\int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz$	6)	$\int_i^{1+i} \sin(iz + z) dz$
7)	$\int_1^{1+i} (3z^3 + 2z + 1) dz$	8)	$\int_1^i z e^z dz$
9)	$\int_1^i (z + 1) \sin z dz$	10)	$\int_0^{1+i} \sin z \cdot \cos z dz$
11)	$\int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{\frac{z^3}{2}} dz$	12)	$\int_0^{\ln 2} z e^z dz$
13)	$\int_0^i (1 - i) e^{-z} dz$	14)	$\int_{-i}^i z e^{-z^2} dz$
15)	$\int_0^{2i} (z + i) e^{-z} dz$	16)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cos \frac{z}{2} dz$

17)	$\int_0^{\frac{\pi i}{2}} z \sin \frac{z}{2} dz$	18)	$\int_0^i \sin^2 z dz$
19)	$\int_0^i 2 \cos^2 z dz$	20)	$\int_0^{2i} z e^z dz$
21)	$\int_{1+i}^{1-i} (2z^3 + z^2) dz$	22)	$\int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz$
23)	$\int_0^{1+\pi i} z e^{-z} dz$	24)	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (z-1) \cos z dz$
25)	$\int_0^{2i} (z+5) \cos z dz$	26)	$\int_0^i (z-i) \sin z dz$
27)	$\int_0^i (z+i) e^z dz$	28)	$\int_{e^{-\frac{i\pi}{4}}}^i (iz^2 - 2ze^{z^2}) dz$
29)	$\int_{2e^{-\frac{\pi i}{3}}}^{2e^{\frac{\pi i}{3}}} (2-3z+z^2) dz$	30)	$\int_0^{2i} \cos^2 z dz$

Задача 4. Вычислить с помощью интегральной формулы Коши (контур L) обходится против часовой стрелки)

1)	a)	$\int_L \frac{dz}{z(z+i)} ;$ $L_1: z = \frac{1}{2} ; \quad L_2: z-2 =1$	б)	$\int_L \frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)} ;$ $L_1: z-i =2 ; \quad L_2: z =3$
2)	a)	$\int_L \frac{ch2z dz}{(z+1)(z-i)^2} ;$ $L_1: z-i = \frac{1}{3} ; \quad L_2: z = \frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{z dz}{z^2+9} ;$ $L_1: z+3i =1 ; \quad L_2: z =4$
3)	a)	$\int_L \frac{1-\sin z}{z^2} dz ;$ $L_1: z = \frac{1}{2} ; \quad L_2: z-2 =1$	б)	$\int_L \frac{e^z dz}{(z^2-1)} ;$ $L_1: z+1 = \frac{1}{3} ; \quad L_2: z =2$

4)	a)	$\int_L \frac{\sin z dz}{z+i};$ $L_1: z+i =1; \quad L_2: z =\frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{dz}{z(z+2)^2};$ $L_1: z+2 =\frac{1}{3}; \quad L_2: z-i =3$
5)	a)	$\int_L \frac{z^2 dz}{z-2i};$ $L_1: z =3; \quad L_2: z-1 =\frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{\cos z dz}{z^3(z-1)};$ $L_1: z =\frac{1}{3}; \quad L_2: z-1 =2$
6)	a)	$\int_L \frac{dz}{z^2+1};$ $L_1: z =\frac{1}{2}; \quad L_2: z-i =1$	б)	$\int_L \frac{e^{iz} dz}{(z-1)^2(z+2)};$ $L_1: z-1 =1; \quad L_2: z =3$
7)	a)	$\int_L \frac{\sin z dz}{(z+1)(z-2)};$ $L_1: z =\frac{1}{3}; \quad L_2: z-1 =\frac{3}{2}$	б)	$\int_L \frac{e^z dz}{z(1-z)^3};$ $L_1: z-1 =\frac{1}{2}; \quad L_2: z =2$
8)	a)	$\int_L \frac{dz}{z(z^2-1)};$ $L_1: z =\frac{1}{3}; \quad L_2: z-1 =\frac{3}{2}$	б)	$\int_L \frac{ze^z dz}{(z-2)^3};$ $L_1: z-1 =2; \quad L_2: z =1$
9)	a)	$\int_L \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)};$ $L_1: z-2i =2; \quad L_2: z =4$	б)	$\int_L \frac{(1-\sin z) dz}{z^2};$ $L_1: z =\frac{1}{2}; \quad L_2: z-2 =\frac{1}{3}$
10)	a)	$\int_L \frac{(z^2+9) dz}{z^2-4};$ $L_1: z =3; \quad L_2: z-2 =1$	б)	$\int_L \frac{e^{iz} dz}{(z^2-1)^2};$ $L_1: z-1 =\frac{1}{2}; \quad L_2: z =2$
11)	a)	$\int_L \frac{z dz}{z^2-4z+3};$ $L_1: z =\frac{3}{2}; \quad L_2: z-2 =2$	б)	$\int_L \frac{\cos z dz}{z^3};$ $L_1: z+1 =2; \quad L_2: z-3 =\frac{1}{2}$
12)	a)	$\int_L \frac{(z^2+2) dz}{z^2-1};$ $L_1: z-1 =\frac{3}{2}; \quad L_2: z =2$	б)	$\oint_L \frac{\cos z dz}{(z-i)^3};$ $L_1: z-i =1; \quad L_2: z =\frac{1}{2}$

13)	a)	$\int_L \frac{e^z dz}{z^2 + 2z} ;$ $L_1: z =1 ; \quad L_2: z+2i =1$	б)	$\int_L \frac{(z+2)dz}{z^3(z-3)} ;$ $L_1: z =1 ; \quad L_2: z-2 =3$
14)	a)	$\int_L \frac{e^{iz} dz}{z^2 + 1} ;$ $L_1: z-i =1 ; \quad L_2: z =\frac{1}{3}$	б)	$\int_L \frac{zshzdz}{(z^2-1)^2} ;$ $L_1: z-1 =\frac{1}{2} ; \quad L_2: z =2$
15)	a)	$\int_L \frac{zdz}{(z-1)(z+3)} ;$ $L_1: z+2 =2 ; \quad L_2: z+1 =3$	б)	$\int_L \frac{ch^2 z dz}{(z^2-1)^2} ;$ $L_1: z =1 ; \quad L_2: z-2 =1$
16)	a)	$\int_L \frac{(z+2)dz}{(z+4)(z-1)} ;$ $L_1: z =2 ; \quad L_2: z =5$	б)	$\int_L \frac{\sin z dz}{(z+1)^3} ;$ $L_1: z =\frac{3}{2} ; \quad L_2: z-1 =1$
17)	a)	$\int_L \frac{\sin iz dz}{z^2 - 4z + 3} ;$ $L_1: z =2 ; \quad L_2: z+2 =1$	б)	$\int_L \frac{zdz}{(z+1)(z+3)^3} ;$ $L_1: z+4 =2 ; \quad L_2: z+1 =3$
18)	a)	$\int_L \frac{(1+\sin z)dz}{z(z-2)} ;$ $L_1: z =\frac{1}{3} ; \quad L_2: z-1 =2$	б)	$\int_L \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+9)} ;$ $L_1: z+1 =2 ; \quad L_2: z-2 =1$
19)	a)	$\int_L \frac{e^{iz} dz}{z^2 + 4} ;$ $L_1: z+2i =1 ; \quad L_2: z =\frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{dz}{(z+2)(z-1)^3} ;$ $L_1: z-1 =1 ; \quad L_2: z+1 =3$
20)	a)	$\int_L \frac{(z-2)dz}{(z^2+1)(z^2-1)} ;$ $L_1: z-1 =\frac{1}{2} ; \quad L_2: z-i =2$	б)	$\int_L \frac{e^z dz}{z(2-z)^3} ;$ $L_1: z-2 =1 ; \quad L_2: z+2 =1$
21)	a)	$\int_L \frac{e^z dz}{z^2 - 3z} ;$ $L_1: z =1 ; \quad L_2: z-1 =3$	б)	$\int_L \frac{(z^2+1)dz}{z^2 - 6z + 9} ;$ $L_1: z-i =5 ; \quad L_2: z =1$
22)	a)	$\int_L \frac{(z+2)dz}{z^2(z-3)} ;$	б)	$\int_L \frac{e^{iz} dz}{z^2 + 1} ;$

		$L_1: z+i =2; \quad L_2: z-1 =3$		$L_1: z-i =1; \quad L_2: z =1$
23)	a)	$\int_L \frac{\sin z dz}{z^3 + 16z};$ $L_1: z+1+i =2; \quad L_2: z-2 =\frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{(z+3)dz}{(z-1)^2(z+2)};$ $L_1: z-1 =1; \quad L_2: z+1 =3$
24)	a)	$\int_L \frac{z dz}{z^3 - 1};$ $L_1: z-i =2; \quad L_2: z+1 =\frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{(2z - e^z)dz}{z^2(z-3)};$ $L_1: z+1 =2; \quad L_2: z-2 =3$
25)	a)	$\int_L \frac{chz dz}{(z+1)(z-1)};$ $L_1: z-1 =\frac{1}{2}; \quad L_2: z =2$	б)	$\int_L \frac{(z+i)dz}{z^2(z-2)};$ $L_1: z =\frac{1}{3}; \quad L_2: z =5$
26)	a)	$\int_L \frac{\sin z dz}{z^2 + 4};$ $L_1: z-i =2; \quad L_2: z =\frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{(z+4)dz}{(z-3)^2(z+2)};$ $L_1: z+2 =2; \quad L_2: z =4$
27)	a)	$\int_L \frac{\sin z dz}{z^2 + 9};$ $L_1: z-i =3; \quad L_2: z =\frac{1}{2}$	б)	$\int_L \frac{(z+2)dz}{(z-1)^2(z+3)};$ $L_1: z-2 =2; \quad L_2: z =4$
28)	a)	$\int_L \frac{z dz}{z^2 - 5z + 6};$ $L_1: z-3 =\frac{1}{2}; \quad L_2: z-2 =2$	б)	$\int_L \frac{(z+1)dz}{(z^2+9)^2};$ $L_1: z-1+i =3; \quad L_2: z =1$
29)	a)	$\int_L \frac{(z+1)dz}{(z^2+4)(z-3)};$ $L_1: z-2i =2; \quad L_2: z =1$	б)	$\int_L \frac{che^{i\pi z} dz}{z^3 - 4z^2};$ $L_1: z =1; \quad L_2: z-2 =3$
30)	a)	$\int_L \frac{zshz dz}{(z-1)(z-2)};$ $L_1: z =\frac{3}{2}; \quad L_2: z-1 =2$	б)	$\int_L \frac{(z-1)dz}{4z^3 + 4z^2 + z};$ $L_1: z+1 =\frac{3}{4}; \quad L_2: z+i =\frac{1}{2}$

Задача 5. Вычислить интегралы с помощью вычетов

1)	a)	$\int_{ z =1} z^4 \cos \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =2} \frac{\sin z dz}{z^2 \left(z + \frac{\pi}{2}\right)^2}$	В)	$\int_{ z =\frac{3}{2}} \frac{ch 2z dz}{z^2(z+1)}$
2)	a)	$\int_{ z =2} \sin \frac{1}{z-1} dz$	б)	$\int_{ z =1} \frac{sh^2 z dz}{z^3}$	В)	$\int_{ z =2} \frac{z dz}{\cos z}$
3)	a)	$\int_{ z =3} \frac{\frac{1}{e^z} + 1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =1} \frac{\cos z dz}{z^3}$	В)	$\int_{ z+2 =3} \frac{tgz dz}{z(z+2)}$
4)	a)	$\int_{ z =\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}} dz$	б)	$\int_{ z =\frac{1}{2}} \frac{(1-\sin z) dz}{z^2}$	В)	$\int_{ z =2} \frac{tgz dz}{z(z-1)^3}$
5)	a)	$\int_{ z =3} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz$	б)	$\int_{ z-3 =6} \frac{z dz}{(z-2)^3(z+4)}$	В)	$\int_{ z-1 =1} \frac{z dz}{\cos z}$
6)	a)	$\int_{ z =2} z^2 \sin \frac{1}{z^2} dz$	б)	$\int_{ z-1 =\frac{1}{2}} \frac{e^{iz} dz}{(z^2-1)^2}$	В)	$\int_{ z-1 =3} \frac{(1+\cos z) dz}{(z-\pi)(z-1)}$
7)	a)	$\int_{ z =1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$	б)	$\int_{ z =2} \frac{z shz dz}{(z^2-1)^2}$	В)	$\int_{ z =4} \frac{z dz}{\sin z}$
8)	a)	$\int_{ z =1} \frac{(z^2 e^{z^2} - 1) dz}{z}$	б)	$\int_{ z-1 =1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4} dz}{(z-1)^2(z-3)}$	В)	$\int_{ z+2 =3} \frac{(1-\cos z) dz}{z^2(z+3)}$
9)	a)	$\int_{ z =1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =3} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)}$	В)	$\int_{ z-2 =1} \frac{tgz dz}{z-2}$
10)	a)	$\int_{ z =1} z^4 e^{\frac{2}{z}} dz$	б)	$\int_{ z =2} \frac{z \sin z dz}{(z-1)^3}$	В)	$\int_{ z =4} \frac{(1+\cos z) dz}{(z-\pi)z}$
11)	a)	$\int_{ z =1} \cos^2 \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z+2 =1} \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$	В)	$\int_{ z+1 =3} \frac{\sin z dz}{z^2 \left(z + \frac{\pi}{2}\right)^3}$
12)	a)	$\int_{ z =2} e^{\frac{1}{z+2}} dz$	б)	$\int_{ z =2} \frac{\sin z dz}{z^2(z-1)^2}$	В)	$\int_{ z-1 =1} \frac{\cos z dz}{z-\pi}$

13)	a)	$\int_{ z =1} z^4 \sin \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =2} \frac{e^{iz} dz}{(z-1)^3}$	В)	$\int_{ z =1} \frac{\sin^2 z dz}{z \cos z}$
14)	a)	$\int_{ z =\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}} dz$	б)	$\int_{ z-1 =2} \frac{ch2z dz}{z^2(z-2)}$	В)	$\int_{ z =2} \frac{\sin z dz}{z^5 - z^3}$
15)	a)	$\int_{ z =2} \sin \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =1} \frac{tgz dz}{z^2 \left(z + \frac{\pi}{4} \right)}$	В)	$\int_{ z-1 =1} \frac{\cos z dz}{(z^2 - 1)^2}$
16)	a)	$\int_{ z =2} z^3 \cos \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =3} \frac{z \sin z dz}{(z-1)^3}$	В)	$\int_{ z+1 =2} \frac{tgz dz}{z(z+2)^3}$
17)	a)	$\int_{ z =2} e^{\frac{1}{z+1}} dz$	б)	$\int_{ z =2} \frac{zshz dz}{(z^2 - 1)^2}$	В)	$\int_{ z =4} \frac{z dz}{\sin z}$
18)	a)	$\int_{ z-1 =1} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1} dz$	б)	$\int_{ z-1 =\frac{1}{2}} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 - 1)^2}$	В)	$\int_{ z-\frac{3}{2} =2} \frac{z(\sin z + 2) dz}{\sin z}$
19)	a)	$\int_{ z =2} z e^{\frac{1}{z-1}} dz$	б)	$\int_{ z =\frac{1}{3}} \frac{(1 - \sin z) dz}{z^2}$	В)	$\int_{ z =1} \frac{tgz dz}{\left(z + \frac{\pi}{4} \right)^2 z^2}$
20)	a)	$\int_{ z =1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =2} \frac{e^{iz} dz}{(z-1)^3}$	В)	$\int_{ z-1 =2} \frac{z(z+\pi) dz}{\sin 2z}$
21)	a)	$\int_{ z =1} z^4 \sin \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z+2 =1} \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$	В)	$\int_{ z =2} \frac{(1 - \cos z) dz}{z^2(z-1)}$
22)	a)	$\int_{ z =2} (z-1) \cos \frac{1}{(z-1)^2} dz$	б)	$\int_{ z =3} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)}$	В)	$\int_{ z-1 =3} \frac{ze^z dz}{\sin z}$
23)	a)	$\int_{ z =1} z \sin \frac{1}{z^2} dz$	б)	$\int_{ z =3} \frac{e^z dz}{z^3(z+2)}$	В)	$\int_{ z-\frac{3}{2} =1} \frac{z(z+\pi) dz}{\sin 3z \cdot (z-\pi)}$
24)	a)	$\int_{ z =1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z =\frac{3}{2}} \frac{ch2z dz}{(z-1)z^2}$	В)	$\int_{ z-i =\frac{3}{2}} \frac{e^z dz}{\sin z}$
25)	a)	$\int_{ z =1} z^3 \cdot e^{\frac{1}{z^2}} dz$	б)	$\int_{ z-1 =1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4} dz}{(z-1)^2(z-3)}$	В)	$\int_{ z-\frac{1}{2} =1} \frac{iz(z-i) dz}{\sin \pi z}$

26)	a)	$\int_{ z =1} \sin^2 \frac{1}{z} dz$	б)	$\int_{ z-3 =6} \frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$	в)	$\int_{ z =4} \frac{(1+\cos z)dz}{(z-\pi)z^2}$
27)	a)	$\int_{ z =2} z e^{\frac{2}{z}} dz$	б)	$\int_{ z =1} \frac{sh^2 z dz}{z^3}$	в)	$\int_{ z+1 =3} \frac{\sin z dz}{z^2 \left(z + \frac{\pi}{2}\right)^3}$
28)	a)	$\int_{ z =1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$	б)	$\int_{ z =1} \frac{\cos z dz}{z^3}$	в)	$\int_{ z =2} \frac{\sin z dz}{z(z-1)^2}$
29)	a)	$\int_{ z =2} (z+1) \cos \frac{1}{z+1} dz$	б)	$\int_{ z-1-i =2} \frac{dz}{z^3 + z}$	в)	$\int_{\left z-\frac{1}{4}\right =\frac{1}{3}} \frac{z(z+1)^2 dz}{\sin 2\pi z}$
30)	a)	$\int_{ z =3} (z-2)^2 \sin \frac{1}{z-2} dz$	б)	$\int_{ z-i =3} \frac{\cos z dz}{(z^2+1)^2}$	в)	$\int_{ z-i =3} \frac{(e^{z^2}-1)dz}{z^3 - iz^2}$

Задача 6. Вычислить интеграл

1)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$	16)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)}$
2)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+25)^2}$	17)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$
3)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2+4)^2}$	18)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+16)^2}$
4)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$	19)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$
5)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)^2}$	20)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+6x^2+25}$
6)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$	21)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+6x+10)^3}$
7)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+10)dx}{(x^2+4)^2}$	22)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$
8)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}$	23)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+5)dx}{x^4+5x^2+6}$

9)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2}$	24)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3)dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}$
10)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 16)}$	25)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$
11)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$	26)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2}$
12)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$	27)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}$
13)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 16)^2}$	28)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 2x + 10)^2}$
14)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 4)dx}{(x^2 + 9)^2}$	29)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)^2}$
15)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$	30)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

Библиографический список

1. Карасев И.П. Теория функций комплексного переменного / И.П.Карасев.- М.: Физматлит, 2006.- 216 с.
2. Шведенко С.В. Начала анализа функций комплексной переменной/ С.В.Шведенко.- М.: МИФИ, 2008.-356 с.
3. Чудесенко В.Ф, Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты)/ В.Ф.Чудесенко.- Москва: Изд-во Лань, 2010.-192 с.