

СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.М. Гхашим, О.А. Довгаленко, Н.Б. Браславская

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Д о п у щ е н о

*УМК Института информационных технологий и управления в
технических системах в качестве методического пособия*

Севастополь
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий
и управления в технических системах СевГУ
Кафедра «Высшая математика»

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические пособие

Севастополь
СевГУ
2017

УДК.519.21.(076)
Г 981

Рецензенты:

профессор, д.т.н. Ю.Е. Обжерин; доцент, к.т.н. С.Е. Кравцова

Гхашим М.М., Довгаленко О.А., Браславская Н.Б.

Практические занятия по теории вероятностей: метод. пособие / М.М. Гхашим, О.А. Довгаленко, Н.Б. Браславская. – Севастополь: СевГУ, 2017. - 136 с.

Методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения специальностей 27.03.01 «Стандартизация и метрология» и 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок», изучающих курс «Теория вероятностей и математическая статистика».

В пособии содержится материал для практических занятий по базовым разделам теории вероятностей. Приведены основные теоретические сведения, решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения с ответами. Также методическое пособие содержит 30 вариантов индивидуального задания.

Приводится список рекомендуемой литературы.

УДК.519.21.(076)

Методическое пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Высшая математика» протокол № 2 от 22 марта 2017 г.

Допущено УМК Института информационных технологий и управления в технических системах в качестве методического пособия протокол № 1 от 22 марта 2017 г.

Издательский номер 68/17

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1. Основные понятия теории вероятностей	6
1.1. Определения	6
1.2. Элементы комбинаторики	9
Решение типовых задач	13
Задачи для самостоятельного решения	17
§2. Теоремы умножения и сложения вероятностей	23
2.1. Основные понятия	23
2.2. Теоремы о вероятности произведения и суммы событий	26
Решение типовых задач	27
Задачи для самостоятельного решения	33
2.3. Формула полной вероятности. Формула Байеса	37
Решение типовых задач	39
Задачи для самостоятельного решения	41
§3. Повторение независимых испытаний	44
Решение типовых задач	48
Задачи для самостоятельного решения	50
§4. Случайные величины	54
4.1. Основные понятия	54
4.2. Числовые характеристики случайных величин	60
Решение типовых задач	63
Задачи для самостоятельного решения	72
§5. Законы распределения случайных величин	78
5.1. Некоторые распределения непрерывных случайных величин	78
5.1.1. Равномерное распределение	78
5.1.2. Показательное (экспоненциальное) распределение	79
5.1.3. Распределение Релея	80
5.1.4. Нормальное распределение (распределение Гаусса)	81
5.2. Важнейшие дискретные распределения	83
5.2.1. Биномиальное распределение	83
5.2.2. Распределение Пуассона	84
5.2.3. Геометрическое распределение	85
Решение типовых задач	85
Задачи для самостоятельного решения	89
§6. Двумерные случайные величины	93
6.1. Понятие о системе случайных величин	93
6.2. Дискретная двумерная случайная величина и ее закон распределения	93
6.3. Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины	96
6.4. Зависимые и независимые случайные величины	98

6.5. Условные законы распределения	99
6.6 Числовые характеристики двумерной случайной величины	101
Решение типовых задач	104
Задачи для самостоятельного решения	108
Варианты индивидуального задания	112
Литература	132
Приложение А. Таблица значений функции Гаусса	133
Приложение Б. Таблица значений функции Лапласа	134

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Определения

Теория вероятностей изучает с количественной стороны закономерности случайных явлений при условии их массового характера.

***# Случайными** называют явления, которые при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта происходят каждый раз несколько по-иному.

Событием (или случайным событием) в теории вероятностей называется всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Обозначают событие, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C \dots$

Приведем несколько примеров событий:

A - появление герба при бросании монеты;

B - попадание в цель при выстреле;

C - выпадение 4 очков при бросании игральной кости;

D - появление туза при вынимании карты из колоды;

E - выигрыш по лотерейному билету.

Испытание – это совокупность условий, при которых событие произойдет или не произойдет.

Событие – это результат испытаний. В результате испытания может произойти как простое, неразложимое на отдельные исходы, событие, так и сложное событие, состоящее из нескольких составляющих результатов.

Непосредственные исходы опыта называются **элементарными событиями** и рассматриваются как неразложимые и взаимоисключающие исходы. Множество всех элементарных событий данного опыта называется пространством элементарных событий и обозначается через Ω .

Вероятность события – это численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Достоверным называют событие Ω , которое в результате опыта обязательно должно произойти:

$$P(\Omega) = 1.$$

Невозможным называется событие $\emptyset$, которое в результате опыта не может произойти:

$$P(\emptyset) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

*Здесь и в дальнейшем знак # заменяет слово «определение».

Несколько событий называются **несовместными**, если появление одного из них исключает возможность появления в данном опыте любого другого события. В противном случае события называются **совместными**.

Несколько событий образуют **полную группу событий**, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Два несовместных события A и $\bar{A}$ называются **противоположными**, если они образуют полную группу. Например:

- 1) A - попадание при выстреле,
 $\bar{A}$ - промах при выстреле;
- 2) B - выпадение герба при бросании монеты,
 $\bar{B}$ - выпадение решки;
- 3) C - безотказная работа всех элементов технической системы,
 $\bar{C}$ - отказ хотя бы одного элемента;
- 4) D - обнаружение не менее двух бракованных изделий в контрольной партии,
 $\bar{D}$ - обнаружение более двух бракованных изделий.

Несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем любое другое.

Примеры равновозможных событий:

- 1) выпадение герба и выпадение решки при бросании монеты;
- 2) появление 1, 2, 3, ..., 6 очков при бросании игральной кости;
- 3) появление карты бубновой, трефовой, пиковой масти при вынимании карты из колоды;
- 4) появление шара с № 1, 2, 3, ..., 10 при вынимании одного шара из урны, содержащей 10 пронумерованных шаров.

- # Если несколько событий:
- 1) образуют полную группу;
 - 2) несовместные;
 - 3) равновозможные,

то они называются **случаями**.

Случай называют **благоприятствующим событию A** , если появление этого случая влечет за собой появление события A .

Например, при бросании игральной кости возможны шесть случаев: появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Из них событию A - появлению четного числа очков - благоприятны три случая: 2, 4, 6 и не благоприятны остальные три.

Классическое определение вероятности. Если результат испытания можно представить в виде полной группы n равновозможных случаев и событие A может появиться только в m случаях, то **вероятностью события A** называется отношение числа m благоприятствующих событию A случаев к общему числу n всех случаев, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Ограниченность сферы применения классического определения вероятности заставляет рассматривать и другие определения, в частности, если число всевозможных исходов $n \rightarrow \infty$.

Пусть в результате испытания точка с одинаковой вероятностью обязательно может попасть в любое место некоторой области Ω . Будем считать, что событие A произойдет, если точка при этом попадает в область g , $g \subset \Omega$.

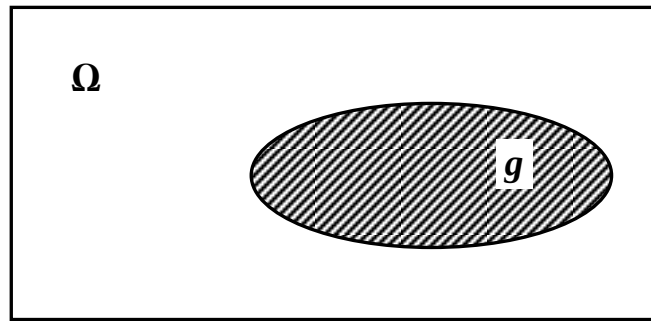


Рис. 1.1

Геометрическое определение вероятности. Вероятностью события A называется отношение площади области g к площади области Ω , т.е.

$$P(A) = \frac{S_g}{S_\Omega}. \quad (1.2)$$

Геометрическое определение вероятности события применимо и в случае, когда области Ω и g линейные или объемные.

В первом случае

$$P(A) = \frac{l_g}{l_\Omega}; \quad (1.3)$$

во втором

$$P(A) = \frac{V_g}{V_\Omega}, \quad (1.4)$$

где l – длина; V – объем соответствующей области.

Все три формулы: (1.2), (1.3), (1.4) можно записать в виде

$$P(A) = \frac{mesg}{mes\Omega}, \quad (1.5)$$

где через mes обозначена мера (S, l, V) области.

Задача 1. Точку наудачу бросили на отрезок $[0; 2]$. Какова вероятность ее попадания в отрезок $[0,5; 1,4]$?

∇ Здесь пространство элементарных исходов весь отрезок $\Omega = [0; 2]$, а множество благоприятствующих исходов $A = [0,5; 1,4]$, при этом длины этих отрезков равны $l(\Omega) = 2$ и $l(A) = 0,9$ соответственно. Поэтому

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0,9}{2} = 0,45. \quad \blacktriangle$$

Относительной частотой (или **частотой**) события A называется отношение числа m^* испытаний, в результате которых событие A произошло, к общему числу n^* проведенных испытаний, то есть

$$W(A) = \frac{m^*}{n^*}. \quad (1.6)$$

Основное отличие понятий относительной частоты и вероятности состоит в том, что частота может быть подсчитана только после проведения серии опытов, а вероятность подсчитывается независимо от того, проводились опыты или нет.

При массовых однотипных испытаниях во многих случаях наблюдается устойчивость относительной частоты события, т.е., если число проведенных опытов $n \rightarrow \infty$, то частота колеблется около некоторого постоянного числа, причем, чем больше опытов, тем ближе частота к этому числу.

Статистическое определение вероятности. Число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний (опытов), называется **статистической** вероятностью события A .

Ее обозначение $P^*(A)$. Следовательно, $W(A) \rightarrow P^*(A)$ при $n \rightarrow \infty$.

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов с практической достоверностью можно утверждать, что статистическая вероятность $P^*(A)$ будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности в отдельном опыте.

1.2. Элементы комбинаторики

Пусть имеем n различных однородных объектов любой природы. Назовем их элементами и обозначим $a, b, c, \dots$

Группы элементов, составленные по одному признаку из элементов одной природы, называются **соединениями**.

Различают три основных типа соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Соединения, содержащие m элементов из данных n , отличающиеся друг от друга или самими элементами, или их порядком расположения в соединениях, называются **размещениями из n элементов по m** .

Пример. Пусть имеем три элемента: a, b, c . Возможными размещениями из них по два элемента будут: ab, ba, bc, cb, ac, ca .

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(m-1))}_m, \quad (1.7)$$

т.е. число размещений из n элементов по m элементов, при условии, что элементы в соединениях не повторяются, равно произведению m последовательных убывающих натуральных чисел, старшее из которых равно n .

Умножим и разделим правую часть равенства (1.7) на $(n-m)!$, получим

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(m-1))(n-m) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

т.е.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.8)$$

Задача 2. Сколькими способами можно разместить 3 автомобиля на парковке из 10 мест?

∇ Т. к. автомобилей меньше, чем парковочных мест и порядок следования автомобилей имеет значение, то речь идет о размещениях без повторения (один автомобиль можно поставить только на одно место), поэтому, по формуле (1.7):

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720. \quad \blacktriangle$$

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и могут быть выбраны снова, то говорят, что это - **размещения с повторениями**. Число всех размещений из n элементов по m с повторениями обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n^m. \quad (1.9)$$

Задача 3. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены различные премии?

∇ Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций, как составом, так и их порядком. Так как каждый фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям, то одни и те же фильмы могут повторяться. Поэтому число таких комбинаций равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5:

$$n = \bar{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000. \quad \blacktriangle$$

Соединения, содержащие все n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения, называются **перестановками из n элементов**.

Пример. Пусть имеем три элемента a, b, c . Все возможные перестановки: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!, \quad (1.10)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$; $0! = 1$.

Задача 4. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

∇ Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. Их число равно

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040. \quad \blacktriangle$$

Соединения, содержащие m элементов из данных n и отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом, называются **сочетаниями из n элементов по m** .

Пример. Пусть имеем четыре элемента: a, b, c, d . Всевозможные сочетания из четырех элементов по три: abc, abd, acd, bcd .

Таким образом, сочетания отличаются друг от друга только элементами, порядок их следования роли не играет.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{m!}. \quad (1.11)$$

Учитывая формулы (1.7) и (1.11), имеем

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \quad (1.12)$$

Подставив в (1.12) A_n^m из (1.8) и P_n из (1.10), получим

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.13)$$

Рассчитаем по формуле (1.13) C_n^{n-m} :

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m,$$

т.е.

$$C_n^{n-m} = C_n^m. \quad (1.14)$$

Формулой (1.14) удобно пользоваться, если $m > \frac{n}{2}$.

Задача 5. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

∇ Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетания из 16 элементов по 2. Их число равно

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 120. \quad \blacktriangle$$

Числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил, называемых соответственно **правилами умножения и сложения**.

Правило умножения. Если объект A из совокупности объектов можно выбрать m способами и, после каждого такого выбора, объект B можно выбрать n способами, то оба объекта (A и B), в указанном порядке, можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Задача 6. Из трех классов спортивной школы нужно составить команду, взяв по одному ученику от класса. Сколько различных команд можно составить, если в одном классе 18, в другом – 20, в третьем – 22 ученика?

∇ Очевидно: $18 \cdot 20 \cdot 22 = 7920$ – число команд. ▲

Правило сложения. Если объект A из совокупности объектов можно выбрать m способами, а объект B можно выбрать n способами, то выбрать либо объект A , либо B можно $m + n$ способами.

Эти правила распространяются на случай трех и более объектов.

Задача 7. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Сколькими способами можно выбрать из коробки три одинаковых карандаша?

∇ Очевидно, что три синих карандаша можно выбрать C_5^3 способами, три красных – C_4^3 способами, а три зеленых – C_3^3 способами. По правилу сложения три одинаковых карандаша (либо синих, либо красных, либо зеленых) можно выбрать m способами, где

$$m = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = \frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{3!}{3!0!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} + \frac{4}{1!} + 1 = 15. \quad \blacktriangle$$

Решение типовых задач

1.1. В урне находится 10 шаров одинакового диаметра: 2 красных, 3 белых и 5 синих. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет белым.

∇ Пусть A – событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что $n = 10$ – число всех равновозможных исходов опыта (шары одинакового размера, и их цвет не виден при выемке). Они несовместны и образуют полную группу. Число случаев, благоприятствующих событию A , равно 3, т.е. $m = 3$.

Следовательно, по формуле (1.1) имеем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10}, \text{ т.е. } P(A) = 0,3. \quad \blacktriangle$$

1.2. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут: а) белыми; б) разного цвета.

∇ а) Обозначим A – событие, состоящее в появлении двух белых шаров. Общее число возможных случаев $n = C_{a+b}^2$. Благоприятными будут те случаи, когда два шара будут выбраны из имеющихся a белых шаров: $m = C_a^2$. Следовательно:

$$P(A) = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}.$$

б) Пусть B – событие, состоящее в том, что вынуты два шара разного цвета, порядок появления шаров не имеет значения. Общее число случаев остается прежним: $n = C_{a+b}^2$. Подсчитаем число благоприятных случаев. Объект «белый шар» можно выбрать C_a^1 способами, объект «черный шар» можно выбрать C_b^1 способами. Тогда, по правилу умножения оба объекта можно выбрать $m = C_a^1 \cdot C_b^1$ способами. Следовательно:

$$P(B) = \frac{C_a^1 \cdot C_b^1}{C_{a+b}^2}. \quad \blacktriangle$$

1.3. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наугад. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

∇ Пусть A – событие, состоящее в том, что набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому $n = 10$ – число всех равновозможных исходов опыта. Они несовместны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Следовательно, по формуле (1.1) имеем:

$$P(A) = \frac{1}{10}. \quad \blacktriangle$$

1.4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

∇ Обозначим через B событие «набраны две нужные цифры». Здесь $n = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ – общее число всех равновозможных исходов опыта. Эти исходы несовместны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход, т.е. тогда

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}. \quad \blacktriangle$$

1.5. В партии из 20 однотипных деталей 15 стандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наугад для проверки шести деталей четыре окажутся стандартными.

∇ Пусть A – событие, состоящее в том, что среди выбранных наугад для проверки шести деталей четыре окажутся стандартными. Выбрать 6 деталей из 20 можно $n = C_{20}^6$ способами. Определим число случаев, благоприятствующих событию A . Нам требуется выбрать 4 стандартные детали из 15 имеющихся стандартных, что можно сделать C_{15}^4 способами, и 2 нестандартных, которые берутся из 5 имеющихся нестандартных, что можно сделать C_5^2 способами. Следовательно, по основному правилу комбинаторики (правилу умножения) имеем: $m = C_{15}^4 \cdot C_5^2$.

Следовательно, по формуле (1.1) имеем

$$P(A) = \frac{C_{15}^4 C_5^2}{C_{20}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15} \approx 0,3521. \quad \blacktriangle$$

1.6. В составе группы из 7 самолетов находится 2 самолета-носителя атомного заряда. Места их в группе произвольны. Система ПВО сбивла 5 самолетов. Какова вероятность того, что среди этих 5 самолетов находятся оба носителя атомного заряда? Какова вероятность того, что в числе сбитых самолетов будет один самолет-носитель?

∇ Пусть событие A – среди 5 сбитых самолетов находятся 2 самолета-носителя атомного заряда. Событие B – в число сбитых самолетов попал 1 самолет-носитель. Т.к. по условию задачи сбито 5 самолетов, то каждый исход опыта представляет собой выбор 5 произвольных самолетов из данных. Т.к. мы рассматриваем группу из 5 самолетов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним самолетом, то речь идет о сочетаниях, т.е.

$$n = C_7^5 = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих событию A – в числе сбитых оба самолета-носителя. Чтобы составить группу из 5 самолетов, содержащую 2 самолета-носителя, нужно выбрать 3 самолета-неносителя из имеющихся 5 таких самолетов, что можно сделать числом способов C_5^3 , т.е.

$$m = C_5^3 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Тогда по классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{21}.$$

Подсчитаем число случаев, благоприятствующих событию B – в числе сбитых будет один самолет-носитель. Чтобы составить группу из 5 самолетов с самолетом-носителем, нужно выбрать 1 самолет-носитель числом способов C_2^1 и 4 самолета - неносителя числом способов C_5^4 . Поэтому, по основному правилу умножения

$$m = C_2^1 \cdot C_5^4 = C_2^1 \cdot C_5^1 = 2 \cdot 5 = 10.$$

Тогда

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{10}{21}.$$

▲

1.7. Имеются шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что:

а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки;

б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются шесть карточек и располагаются в порядке появления.

∇ а) Из шести данных букв можно составить $n = A_6^3 = 120$ трехбуквенных «слов» (НИЛ, ОЛЯ, ОНИ и т.д.). Слово ЛОМ при этом появиться лишь один раз, т.е. $m = 1$. Поэтому вероятность появления слова ЛОМ (событие A) равно

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}.$$

б) Шестибуквенные «слова» отличаются друг от друга лишь порядком расположения букв (НОЛМИЯ, ЯНОЛИМ, ОЛНИЯМ и т.д.). Их число равно числу перестановок из 6 букв, т.е. $n = P_6 = 6!$. Очевидно, что $m = 1$. Тогда вероятность появления слова МОЛНИЯ (событие B) равна

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

▲

1.8. В квадрат вписан круг. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в квадрат, окажется внутри круга (рис. 1.2)?

∇ Пусть радиус круга равен R , тогда сторона квадрата $2R$. Площадь круга равна πR^2 , а квадрата – $4R^2$.

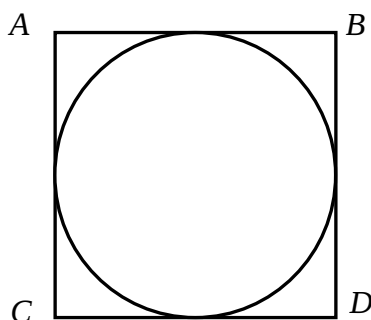


Рис. 1.2

По геометрическому определению вероятность попадания точки в квадрат равна

$$P = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785. \quad \blacktriangle$$

1.9. (Задача о встрече). Два товарища договорились встретиться в течение установленного часа в определенном месте. Пришедший первым ждет другого 15 мин, затем уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится, если каждый выбирает момент прихода в течение установленного времени?

∇ Пусть x – момент прихода первого товарища, а y – второго. Возможные значения x и y : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Так как моменты прихода равновозможные в течение установленного часа, то точка $M(x, y)$ с одинаковой вероятностью попадет в квадрат $ABCD$ (рис. 1.3).

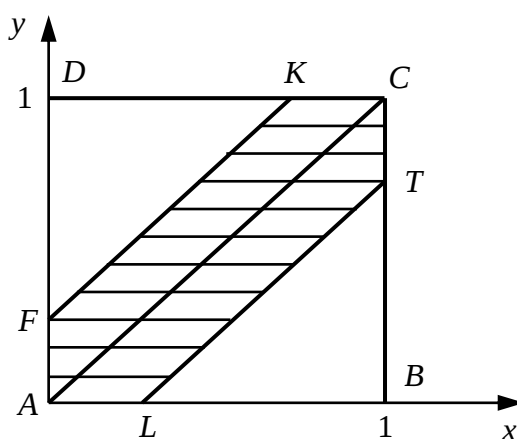


Рис. 1.3

Точки, лежащие на диагонали AC квадрата, с уравнением $y = x$ соответствуют одновременному появлению в условленном месте обоих това-

рищей. Линия FK с уравнением $y = x + \frac{1}{4}$ соответствует тому, что второй товарищ приходит на четверть часа позже первого. Линия LT с уравнением $y = x - \frac{1}{4}$ соответствует тому, что второй товарищ приходит на четверть часа раньше первого. Встреча состоится, если точка $M(x, y)$ попадет в область между линиями $y = x + \frac{1}{4}$ и $y = x - \frac{1}{4}$, т.е.

$$x - \frac{1}{4} \leq y \leq x + \frac{1}{4}.$$

Последнее неравенство определяет область g , заштрихованную на рис. 1.3.

Условия геометрической вероятности соблюдаются, поэтому можно применить формулу (1.2).

Площадь области Ω (площадь квадрата $ABCD$) равна единице. Площадь области g определяем, вычитая из площади квадрата $ABCD$ площади двух треугольников:

$$S_g = S_{ABCD} - (S_{FKD} + S_{LBT}).$$

Если A – событие, заключающееся в состоявшейся встрече, то

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{7}{16}.$$

▲

Задачи для самостоятельного решения

1.10. В ящике лежат 2 белых, 3 черных и 5 красных шаров, различающихся только цветом. Из ящика наугад выбирают один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

1.11. В каждой из 2-х урн имеются билеты с номерами от 1 до 12. Каждый из 2-х студентов вынимает по 1 билету из определенной урны. Найти вероятность того, что оба студента вытащат билеты с одинаковыми номерами.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

1.12. В ящике в 5 раз больше белых шаров, чем черных. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

1.13. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера. Все кубики перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь 3 окрашенные грани.

Ответ: $\frac{8}{125}$.

1.14. На шести одинаковых карточках написаны числа 2, 4, 7, 8, 12, 14. Наугад берутся 2 карточки. Какова вероятность того, что образованная из 2-х полученных чисел правильная дробь сократима.

Ответ: $\frac{11}{15}$.

1.15. Бросаются две монеты. Какое из двух событий является более вероятным: A – монеты лягут одинаковыми сторонами или B – монеты лягут разными сторонами?

1.16. Бросаются 2 игральных кубика. Найти вероятность того, что:

а) сумма выпавших очков меньше 10; б) выпадет одинаковое число очков на обоих кубиках; в) выпадет различное число очков.

Ответ: а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{6}$.

1.17. Из 30 вопросов студент выучил 20. Найти вероятность того, что среди 3-х наугад выбранных вопросов будет: а) два вопроса, которые студент выучил; б) все вопросы, которые студент выучил.

Ответ: а) 0,47; б) 0,28.

1.18. Из 5 букв разрезной азбуки составлено слово «лодка». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово «лодка».

Ответ: $\frac{1}{120}$.

1.19. Какова вероятность того, что два лица A и B окажутся рядом, если они рассаживаются наудачу вместе с 8 остальными: а) в ряд из 10 мест; б) за круглым 10-местным столом.

Ответ: а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{9}$.

1.20. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

Ответ: 0,0000537.

1.21. Из 6 букв разрезной азбуки составлено слово «ананас». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово «ананас».

Ответ: $\frac{1}{60}$.

1.22. Десять книг на полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся рядом.

Ответ: $\frac{1}{15}$.

1.23. Из 15 девушек и 10 юношей выделяют 5 человек для некоторой работы. Какова вероятность того, что будут выбраны: а) только юноши; б) только девушки; в) 3 девушки и 2 юноши.

Ответ: а) 0,0047 ; б) 0,057 ; в) 0,385 .

1.24. Каждый из трех пассажиров может сесть в любой из 10 вагонов электрички. Какова вероятность того, что все трое попадут: а) в первый вагон; б) в первые 5 вагонов; в) в разные вагоны; г) в один вагон.

Ответ: а) 0,001 ; б) 0,125 ; в) 0,72 ; г) 0,01 .

1.25. В ящике содержится 8 стандартных и 6 бракованных деталей. Наугад берутся 4 детали. Какова вероятность того, что: а) все 4 извлеченные детали окажутся бракованные; б) среди этих 4-х деталей бракованных окажутся 3.

Ответ: а) $\frac{15}{1001}$; б) $\frac{160}{1001}$.

1.26. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

1.27. В урне содержатся 5 красных, 6 синих и 7 зеленых шаров. Наугад из урны берут 4 шара. Какова вероятность того, что извлеченные 4 шара окажутся одного цвета?

Ответ: $\frac{11}{612}$.

1.28. В группе 12 студентов, из них 5 отличников. Наугад из 12 студентов выбирают 8. Какова вероятность того, что среди них окажется 3 отличника?

Ответ: $\frac{14}{33}$.

1.29. В финал первенства университета по боксу вышли 4 представителя 1-го факультета; 5 – 2-го факультета; 3 – 3-го факультета. Какова вероятность того, что все 3 призера окажутся: а) представителями одного и того же факультета; б) трех разных факультетов?

Ответ: а) $\frac{3}{44}$; б) $\frac{3}{11}$.

1.30. Первенство по баскетболу оспаривают 18 лучших команд страны, которые путем жеребьевки распределяются на 2 группы по 9 команд в каждой. 5 команд обычно занимают первые места. Какова вероятность попадания: а) всех лидирующих команд в одну группу; б) 2-х лидирующих команд в одну группу и 3-х – в другую?

Ответ: а) $\frac{1}{34}$; б) $\frac{12}{17}$.

1.31. Из 10 книг пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по 1 рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что две взятые наугад книги стоят 5 рублей.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

1.32. Пять студентов с пятью их подругами распределяют места за праздничным столом по жребию. Какова вероятность того, что студент К. окажется рядом со своей подругой?

Ответ: $\frac{2}{9}$.

1.33. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Ответ: $\frac{7}{9}$.

1.34. Пусть в урне имеется N шаров, из них M белых и $N - M$ черных. Из урны извлекается n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно m белых шаров.

1.35. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

Ответ: 0,41.

1.36. На отрезке $[0;5]$ случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц.

Ответ: 0,32.

1.37. Артиллерийский снаряд с радиусом поражения 2,5 м попал на участок железнодорожных путей, состоящий из большого числа параллельных линий. Ширина колеи 1,524 м, ширина междупутья 8 м. Определить вероятность непоражения железнодорожных путей.

Ответ: 0,315.

1.38. Точка M равномерно распределена в квадрате со стороной, равной единице. Найти вероятность событий: а) расстояние от точки M до фиксированной стороны квадрата не превосходит x ; б) расстояние от точки M до ближайшей стороны квадрата не превосходит x .

$$\text{Ответ: а) } \begin{cases} x, & \text{при } x < 1, \\ 1, & \text{при } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x(1-x), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

1.39. Два корабля должны прийти на базу между 10 и 11 часами. Продолжительность пребывания каждого корабля на базе равна 20 мин. Какова вероятность встречи кораблей на базе, если время прибытия каждого корабля независимо и равновозможно в течение указанного часа?

Ответ: $\frac{5}{9}$.

1.40. Противник в течение часа делает один десятиминутный налет на участок шоссе. В течение этого же часа нужно преодолеть опасный участок шоссе. Какова вероятность избежать налета, если время преодоления опасного участка 5 мин?

Ответ: 0,764.

1.41. Стержень длиной l разломан в двух наугад выбранных точках. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник.

Указание. Обозначим длину 1-го отрезка через x , 2-го – через y , тогда 3-й отрезок имеет длину $(l - x - y)$. Очевидно, что x и y должны удовлетворять неравенству $0 < x + y < l$.

Чтобы из этих трех отрезков можно было составить треугольник, необходимо, чтобы ни один из них не был больше суммы двух других:

$$\begin{cases} x+y > l-x-y, \\ x+l-x-y > y, \\ y+l-x-y > x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > \frac{l}{2}, \\ y < \frac{l}{2}, \\ x < \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Эти неравенства определяют область, заштрихованную на рис. 1.4.

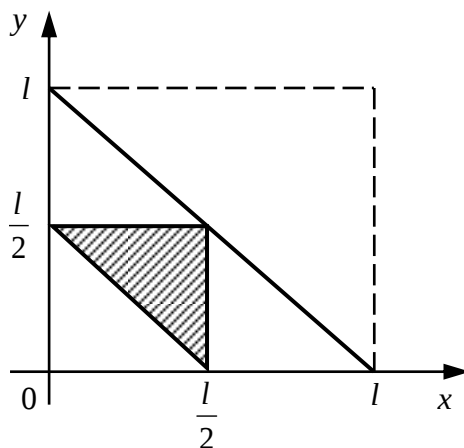


Рис. 1.4

Ответ: $\frac{1}{4}$.

§2. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ И СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Основные понятия

Произведением двух событий A и B называется событие C , состоящее в их одновременном появлении. Обозначается $C = AB$.

Очевидно, что

$$(AB) \Leftrightarrow (A \text{ и } B).$$

Аналогично определяется произведение любого конечного числа событий, т.е. **произведением нескольких событий** называют событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий.

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по одной цели. Событие A – поражение цели первым стрелком, событие B – поражение цели вторым стрелком. Тогда событие AB – поражение цели одновременно двумя стрелками.

Дадим **геометрическую интерпретацию** произведения двух событий. Если событие A есть попадание точки в область A , событие B есть попадание точки в область B , то событие AB есть попадание точки в область с двойной штриховкой.

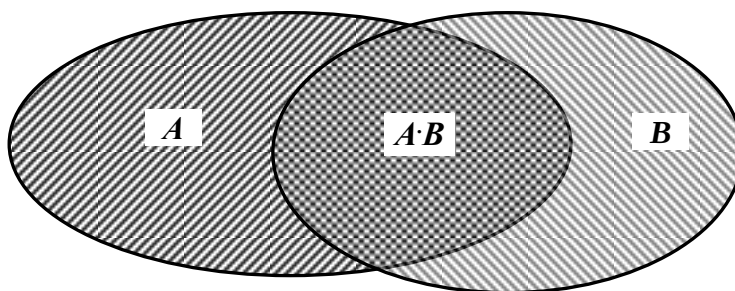


Рис. 2.1

Два события A и B называются **независимыми**, если вероятность любого из них не зависит от того, произошло другое событие или не произошло. В противном случае события называются **зависимыми**.

Рассмотрим примеры.

1) Опыт состоит в бросании двух монет, рассматриваются события: A – появление герба на первой монете; B – появление герба на второй монете. В данном случае вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет, т.е. событие A независимо от события B .

2) В урне два белых шара и один черный; два лица вынимают из урны по одному шару; рассматриваются события: A – появление белого шара у 1-го лица; B – появление белого шара у 2-го лица. Вероятность события

A до того, как известно что-либо о событии B , равна $\frac{2}{3}$. Если стало из-

вестно, что событие B произошло, то вероятность события A становится равной $\frac{1}{2}$, из чего заключаем, что событие A зависит от события B .

Вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью** и обозначается $P(A/B)$.

Вероятность события A , вычисленная без учета того, что событие B произошло или не произошло, называется **безусловной вероятностью** события и обозначается $P(A)$.

Если события A и B независимы, то их условные и безусловные вероятности равны:

$$P(A) = P(A/B) \text{ и } P(B) = P(B/A). \quad (2.1)$$

Невыполнение равенств (2.1) может служить признаком зависимости событий A и B .

Если события A и B независимы, то независимыми будут и следующие пары событий: A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Обозначается $C = A + B$.

Очевидно, что

$$(A + B) \Leftrightarrow (A \text{ или } B).$$

Аналогично определяется сумма любого конечного числа событий, т.е. **суммой нескольких событий** называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример. Производится пуск 3-х ракет по одной и той же цели. Обозначим: событие A – попадание в цель первой ракеты, событие B – попадание второй ракеты, событие C – третьей ракеты. Тогда событие $(A + B + C)$ – это поражение цели хотя бы одной ракетой.

Из определения суммы двух событий следует, что сумма противоположных событий - **достоверное** событие:

$$A + \bar{A} = U \text{ и } P(A + \bar{A}) = 1.$$

Если события A и B **несовместны**, то их сумма состоит в появлении или события A , или события B .

Примеры несовместных событий:

- 1) выпадение герба и выпадение решки при одном бросании монеты;
- 2) попадание и промах при одном выстреле;
- 3) появление 1, 2, 4 очков при бросании одной игральной кости;
- 4) получение оценки «2» и «5» одним студентом на одном и том же экзамене.

Геометрически: Если события A и B несовместны, то событие $C = A + B$ состоит в попадании случайной точки либо в область A , либо в область B (рис. 2.2).

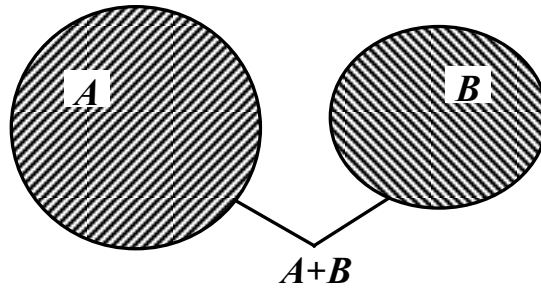


Рис. 2.2

Если же события A и B **совместны**, то их сумма состоит в попадании случайной точки либо в область A , либо в область B , либо в пересечение этих областей (рис. 2.3).

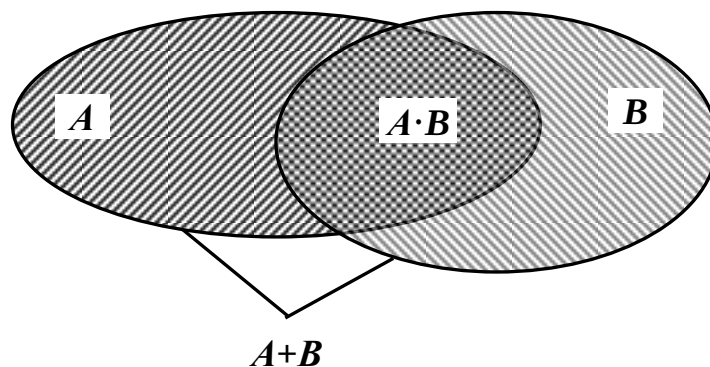


Рис. 2.3

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

- 1) $A + B = B + A$; $A \cdot B = B \cdot A$ (переместительное);
- 2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$ (распределительное);
- 3) $(A + B) + C = A + (B + C)$; $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (сочетательное);
- 4) $A + A = A$; $A \cdot A = A$;
- 5) $A + \Omega = \Omega$; $A \cdot \Omega = A$;
- 6) $A + \bar{A} = \Omega$; $A \cdot \bar{A} = \emptyset$;
- 7) $\bar{\Omega} = \emptyset$; $\bar{\bar{A}} = A$;
- 8) $A - B = A \cdot \bar{B}$;
- 9) $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$; $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ - правила де Моргана.

2.2. Теоремы о вероятности произведения и суммы событий

Теорема 2.1. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \text{ или } P(AB) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (2.2)$$

Эта теорема используется для случая **зависимых** событий A и B .

Следствие. Вероятность произведения двух **независимых** событий равна произведению их вероятностей.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.3)$$

В случае трех **зависимых** событий имеем

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB). \quad (2.4)$$

Если A, B, C – **независимые** события, то

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C). \quad (2.5)$$

Аналогично поступают в случае четырех и более событий.

Теорема 2.2. Вероятность суммы двух **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.6)$$

Согласно этой теореме

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) - P(A\bar{A}),$$

но $P(A \cdot \bar{A}) = 0$, т.к. A и $\bar{A}$ – несовместные события. Следовательно,

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Следствие 1. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (2.7)$$

Если число совместных событий $n > 2$, то теорема 2.2 имеет громоздкий вид. Например, при $n = 3$, имеем

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (2.8)$$

В связи с этим при нахождении вероятности **суммы более двух совместных событий** можно использовать следующий метод.

∇ Пусть событие A есть сумма n совместных событий:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

т.е. A – это событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_i (i = \overline{1; n})$.

Введем противоположное событие $\bar{A}$, состоящее в том, что ни одно из этих событий $A_i (i = \overline{1;n})$ не произойдет, т.е.

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n.$$

Тогда

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) ,$$

но

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

поэтому

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n). \quad (2.9)$$

Таким образом, вероятность появления хотя бы одного из нескольких совместных событий равна разности между единицей и вероятностью произведения противоположных им событий. ▲

Следствие 2. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.10)$$

Эта теорема обобщается для суммы трех и более несовместных событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C),$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (2.11)$$

Следствие 3. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (2.12)$$

Решение типовых задач

2.1. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,7. Определить: а) вероятность поражения мишени, если каждый из стрелков сделал по одному выстрелу; б) вероятность того, что в цель попадет только один из стрелков.

∇ а) Пусть событие A – попадание в цель первым стрелком, событие B – попадание вторым стрелком. По условию $P(A) = 0,8; P(B) = 0,7$. Мишень будет поражена, если в нее попадет хотя бы один стрелок. Поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

т.е.

$$P(A + B) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7 = 0,94.$$

б) Поражение цели только одним стрелком есть сумма несовместных событий $\overline{A}B + A\overline{B}$, причем A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B – независимые события.

Таким образом,

$$P(\overline{A}B + A\overline{B}) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A)P(\overline{B}).$$

Т.к. A и $\overline{A}$ – противоположные события, то

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2;$$

аналогично,

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Подставляем

$$P(\overline{A}B + A\overline{B}) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,24 + 0,14 = 0,38. \quad \blacktriangle$$

2.2. Буквенный замок имеет на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными буквами. Замок можно открыть только при определенном расположении букв относительно корпуса замка. Какова вероятность открыть замок, не зная его секрета?

∇ Пусть событие A_1 состоит в том, что буква первого диска набрана верно, A_2 – второго, A_3 – третьего, A_4 – четвертого. Т.к. каждый диск содержит 6 букв, из которых только одна верная, то

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{6}.$$

Чтобы замок открылся, должны быть набраны верно все 4 буквы, т.е. должно произойти совместное наступление событий A_1, A_2, A_3, A_4 . Значит, необходимо найти вероятность произведения этих событий $P(A_1A_2A_3A_4)$.

Т.к. события A_1, A_2, A_3, A_4 – независимы, то

$$P(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}. \quad \blacktriangle$$

2.3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

∇ Пусть событие A – попадание в цель первым стрелком, событие B – попадание вторым стрелком, событие C – третьим. По условию

$$P(A) = 0,75; P(B) = 0,8; P(C) = 0,9.$$

Событие $D = A \cdot B \cdot C$ состоит в том, что все три стрелка одновременно попадут в цель. Так как события A, B, C – независимы, то

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,75 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,54. \quad \blacktriangle$$

2.4. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

∇ Обозначим событие F – в цель попадет хотя бы один стрелок. Тогда по определению суммы событий $F = A + B + C$. События A, B, C – совместны. Здесь можно применить формулу (2.7), но она громоздка, поэтому найдем:

$P(\bar{A}) = 1 - 0,75 = 0,25$ – вероятность промаха первого стрелка,

$P(\bar{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$ – вероятность промаха второго стрелка,

$P(\bar{C}) = 1 - 0,9 = 0,1$ – вероятность промаха третьего стрелка.

События $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ – независимы, поэтому $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ – вероятность одновременного промаха всех трех стрелков – вычисляем по формуле (2.5):

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,005.$$

Но событие, противоположное событию $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком, следовательно, искомая вероятность

$$P(F) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - 0,005 = 0,995. \quad \blacktriangle$$

2.5. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для 1-го стрелка равна 0,7, а для 2-го – 0,8. Оба они делают по одному выстрелу по мишени, а затем каждый из стрелков стреляет еще раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Найти вероятность того, что в мишени ровно 2 пробоины.

∇ Пусть события: A_i, B_i – попадание в цель соответственно 1-м и 2-м стрелком при i -м выстреле ($i = 1, 2$); C – в мишени ровно 2 пробоины. Событие C произойдет, если:

-у каждого стрелка по одному попаданию с первого раза;

-у 1-го стрелка – попадание (при одном выстреле), у 2-го стрелка промах и попадание;

-у 1-го стрелка – промах и попадание, у 2-го стрелка – попадание (при одном выстреле);

-у каждого стрелка – промах и попадание после двух выстрелов.

Итак

$$C = A_1 B_1 + A_1 \bar{B}_1 B_2 + \bar{A}_1 B_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{B}_1 A_2 B_2$$

Используя теоремы сложения для несовместных и умножения для независимых событий, получим

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 B_1 + A_1 \bar{B}_1 B_2 + \bar{A}_1 B_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{B}_1 A_2 B_2) = \\ &= 0,7 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,8736. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

2.6. Какова вероятность того, что наудачу написанная дробь: а) не сократится на 2; б) не сократится ни на 2, ни на 3?

∀ а) Пусть имеем дробь $\frac{r}{s}$, и событие A состоит в том, что r – четное число.

Тогда $P(A) = \frac{1}{2}$, т.к. возможных случаев два: r – четное число и r – нечетное. Если событие B состоит в том, что s – число четное, то $P(B) = \frac{1}{2}$.

Обозначим через C событие, состоящее в том, что дробь сократится на 2, тогда C есть произведение независимых событий A и B , поэтому

$$P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}.$$

б) Аналогично найдем вероятность события D , состоящего в том, что дробь $\frac{r}{s}$ сократится на 3:

$$P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Очевидно, что вероятность того, что дробь не сократится на 2, равна

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

а вероятность того, что она не сократится на 3, равна

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Искомую вероятность того, что дробь $\frac{r}{s}$ не сократится ни на 2, ни на 3, найдем как вероятность произведения независимых событий $\bar{C}$ и $\bar{D}$:

$$P(\bar{C}\bar{D}) = P(\bar{C}) \cdot P(\bar{D}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

2.7. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

∀ Пусть событие A состоит в том, что ясная погода будет 1-го июля, B – 2-го июля. Тогда событие AB означает, что ясная погода будет и 1-го, и 2-го июля.

Из условия следует, что $P(A) = \frac{25}{31}$, т.к. общее число ясных дней в июле равно 25. Очевидно, что вероятность события B зависит от того, произошло событие A или нет, т.е. была ли 1-го июля ясная погода.

Если да, то

$$P(B/A) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}.$$

Поскольку события A и B – зависимые, то по теореме 2.1. имеем

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{25}{31} \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{31}. \quad \blacktriangle$$

2.8. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов 24. Для сдачи зачета достаточно ответить на первый вопрос, или, в случае неудачи, на дополнительный вопрос. Какова вероятность сдачи зачета?

∇ Пусть событие A – успешный ответ студента на первый вопрос, событие B – успешный ответ на второй вопрос, событие C – успешная сдача зачета. Очевидно, что $C = A + \bar{A}B$, где событие $\bar{A}B$ – получение зачета со второй попытки. События A и $\bar{A}B$ – несовместны, поэтому

$$P(C) = P(A) + P(\bar{A}B).$$

Легко рассчитать, что $P(A) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$, а события $\bar{A}$ и $\bar{A}B$ – зависимые, поэтому

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{24}{29} = \frac{24}{145}.$$

Тогда

$$P(C) = P(A) + P(\bar{A}B) = \frac{4}{5} + \frac{24}{145} = \frac{140}{145} = \frac{28}{29}. \quad \blacktriangle$$

2.9. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него будут сброшены 4 бомбы, с вероятностями попадания соответственно равными 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

∇ Пусть событие A – попадание первой бомбы, B – второй, C – третьей, D – четвертой. Тогда событие $F = A + B + C + D$ состоит в том, что мост будет разрушен (т.е. хотя бы одна бомба попадет на мост).

Если решать эту задачу по теореме о вероятности суммы четырех совместных событий, то решение будет громоздким, поэтому найдем сначала вероятность события $\bar{F}$, состоящего в том, что ни одна из бомб не упадет на мост. Очевидно, что $\bar{F} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, причем события $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ – независимы, поэтому $P(\bar{F}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) \cdot P(\bar{D})$.

Таким образом, имеем

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7;$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6;$$

$$P(\bar{C}) = 1 - 0,6 = 0,4;$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Значит,

$$P(\bar{F}) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,0504.$$

Следовательно,

$$P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - 0,0504 = 0,9496 \approx 0,95. \quad \blacktriangle$$

2.10. Из партии в 25 изделий, из которых 6 бракованных, выбирают одно за другим 3 изделия для проверки их качества. Найти вероятность того, что: а) среди выбранных изделий нет бракованных; б) одно бракованное; в) все бракованные.

∇ Рассмотрим события: A – первое изделие годное; B – второе годное; C – третье годное.

а) Событие ABC означает, что все 3 выбранные изделия годные. Т.к. события A, B, C – зависимые, то

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{17}{23} \approx 0,4213.$$

б) Среди трех выбранных деталей бракованная может появиться или первой, или второй, или третьей, т.е. событие D – среди выбранных деталей одна бракованная – можно представить как сумму несовместных событий:

$$D = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C.$$

Тогда

$$P(D) = P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C) = P(A) \cdot P(\bar{B}/A) \cdot P(\bar{C}/AB) + \\ + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) \cdot P(C/\bar{A}B) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) \cdot P(C/\bar{A}\bar{B});$$

$$P(D) = \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{6}{23} + \frac{19}{25} \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{18}{23} + \frac{6}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0,446.$$

в) Событие $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ состоит в том, что все три детали будут бракованные.

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) \cdot P(\bar{C}/\bar{A}\bar{B}) = \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{23} \approx 0,0087. \quad \blacktriangle$$

2.11. На полигоне по цели произведено 100 залповых выстрелов из двух орудий. В результате стрельбы имело место 40 попаданий в цель из первого орудия, 48 попаданий из второго орудия и 20 совместных попаданий. Оценить, принимая частоты событий за их вероятности, зависимы или независимы события A и B , если событие A – попадание в цель первым орудием, а B – вторым орудием.

∇ Признаком независимости двух событий является равенство их условных и безусловных вероятностей, т.е.

$$P(A) = P(A/B) \text{ и } P(B) = P(B/A).$$

Определим необходимые вероятности:

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4; \quad P(B) = \frac{48}{100} = 0,48; \quad P(AB) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Из теоремы 2.1. следует

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,48} = 0,417.$$

И так как $P(A) \neq P(A/B)$, то события A и B – зависимые. ▲

Задачи для самостоятельного решения

2.11. Наудачу выбранное изделие может оказаться первого, второго или третьего сорта. Вероятность того, что оно окажется первого сорта, равна 0,6; второго – 0,2. Найти вероятность того, что это изделие окажется третьего сорта.

Ответ: 0,2.

2.12. Из чисел 1, 2, ..., 20 наудачу выбирается число. Какова вероятность того, что это число делится на 2 или на 3?

Ответ: 0,65.

2.13. Подводная лодка выпускает ракеты с 3-х позиций с вероятностями попадания в цель: 0,5; 0,4; 0,3 соответственно. Определить вероятность того, что в цель попадут все три ракеты.

Ответ: 0,06.

2.14. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна p_1 , а вторым стрелком – p_2 . Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадет в цель, а другой не попадет?

Ответ: $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$.

2.15. Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов будет только одно попадание.

Ответ: 0,288.

2.16. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены его внимание потребует первый станок, равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют: а) какие-либо 2 станка; б) ни один станок; в) один станок.

Ответ: а) 0,425; б) 0,015; в) 0,14.

2.17. В одной партии содержится 60 предметов первого и 40 предметов второго сорта. Во второй партии – 80 предметов первого и 20 – второго сорта. Из каждой партии наудачу извлекается по одному предмету. Найти вероятность того, что: а) оба предмета окажутся первого сорта; б) один предмет первого, а другой второго сорта; в) хотя бы один предмет первого сорта; г) ни одного предмета первого сорта.

Ответ: а) 0,48; б) 0,44; в) 0,92, г) 0,08.

2.18. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2; второй – 0,3, третий – 0,4. События, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

Ответ: 0,664.

2.19. При изготовлении детали необходимо выполнить 4 независимые технологические операции. Вероятность допустить брак при выполнении первой технологической операции равна 0,004; второй – 0,008; третьей – 0,009; четвертой – 0,01. Какова вероятность изготовить годную деталь?

Ответ: 0,97.

2.20. При изготовлении одного изделия работают последовательно трое рабочих. Качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0,005; второй – 0,009; третий – 0,002.

Найти вероятность того, что изделие будет годным.

Ответ: 0,984.

2.21. Сколько надо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хоть один раз попасть в цель, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7?

Ответ: не менее двух.

2.22. В ящике находится 7 деталей первого сорта, 5 – второго сорта и 3 – третьего сорта. Из ящика последовательно вынимают 3 детали. Найти вероятность того, что первая вынутая деталь окажется первого сорта, вторая – второго и третья – третьего.

Ответ: $\frac{1}{26}$.

2.23. Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом станке, будет стандартной, равна 0,9. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,85. На первом станке изготовили одну деталь, на втором – две. Найти вероятность того, что все три детали окажутся стандартными.

Ответ: 0,65.

2.24. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Ответ: 0,126.

2.25. При выходе из строя любого из трех элементов (рис. 2.4) цепь в месте его включения разрывается. Вероятность выхода из строя элемента A_k равна p_k , где $k = 1, 2, 3$. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность наличия тока в цепи.

Ответ: $(1 - p_3)(1 - p_1 p_2)$.

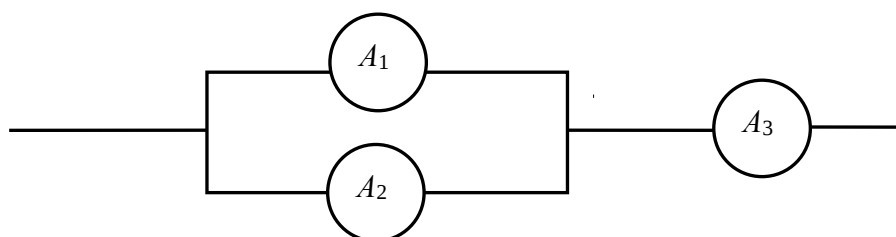


Рис. 2.4

2.26. На воздушную цель независимо наводятся 2 истребителя. Вероятность успешного наведения одного истребителя равна 0,48; двух истребителей – 0,36. Определить вероятность того, что на воздушную цель будет наведен хотя бы один истребитель.

Ответ: 0,87.

2.27. Три самолета обнаружили цель и, независимо друг от друга, выпустили по одной ракете. Вероятности поражения цели ракетами первого, второго и третьего самолетов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,7. Определить вероятность поражения цели.

Ответ: 0,964.

2.28. Электрическая цепь состоит из двух последовательно соединенных элементов. Различные элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга. Вероятности выхода из строя этих элементов соответственно равны 0,1 и 0,2. Определить вероятность перерыва питания.

Ответ: 0,28.

2.29. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,1; 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Ответ: 0,388.

2.30. Отдел технического контроля проверяет изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие соответствует стандарту, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно.

Ответ: 0,18.

2.31. В ящике имеются 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает одну за другой 4 детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся окрашенными.

Ответ: $\frac{1}{14}$.

2.32. Из колоды в 36 карт наудачу одна за другой вынимаются 2 карты. Найти вероятность того, что: а) вынуты 2 туза; б) вынуты 2 карты пиковой масти; в) вынуты 2 карты одинаковой масти.

Ответ: а) $\frac{1}{105}$; б) $\frac{2}{35}$; в) $\frac{8}{35}$.

2.33. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Ответ: 0,5.

2.34. Прибор состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность того, что элемент не выйдет из строя в течение периода работы прибора, для первого, второго, третьего и четвертого элементов равна соответственно 0,7; 0,9; 0,6; 0,8. Вычислить вероятность таких событий: а) все 4 элемента не выйдут из строя в течение периода работы прибора; б) хотя бы один элемент прибора не выйдет из строя.

Ответ: а) 0,3; б) 0,9976.

2.35. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Ответ: 0,8.

2.36. Какова должна быть вероятность попадания при каждом из 10-ти независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 имело место хотя бы одно попадание?

Ответ: $p \geq 1 - \sqrt[10]{0,1}$.

2.37. Вероятность поражения мишени при одном выстреле первым стрелком равна 0,6; вторым – 0,7; третьим – 0,8. найти вероятность того,

что: а) один из стрелков поразит мишень; б) два стрелка поразят мишень; в) хотя бы один из стрелков поразит мишень.

Ответ: а) 0,188; б) 0,452; в) 0,976.

2.38. Двадцать пять экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 40 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на дополнительный вопрос из другого билета.

Ответ: 0,902.

2.39. Если самолет пролетает через район Д в северо-западном направлении, то он подвергается обстрелу ПВО противника с вероятностью 0,6 и сбивается с вероятностью 0,4. Если же он пролетает в юго-западном направлении, то подвергается обстрелу с вероятностью 0,4 и сбивается с вероятностью 0,7. Выбрать направление полета через район Д, исходя из условия наибольшей вероятности преодоления ПВО.

Ответ: северо-западное направление с вероятностью преодоления ПВО 0,76.

2.3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если известно, что событие A может произойти только с одним из событий (**гипотез**) $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, то событие A можно представить как сумму событий $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$, т.е.

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n.$$

Вероятность события A можно определить по формуле

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i). \quad (2.13)$$

Эта формула называется **формулой полной вероятности**.

Условная вероятность события H_k , $k = \overline{1; n}$, вычисленная при условии, что событие A уже произошло, определяется по **формуле Байеса**:

$$P(H_k/A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}, \quad k = \overline{1; n}. \quad (2.14)$$

Вероятности $P(H_k / A)$, вычисленные по формуле Бейеса, называют **вероятностями гипотез**.

Таким образом, вероятность гипотезы после испытания (**апостериорная вероятность**) равна дроби, у которой числитель есть произведение вероятности гипотезы до опыта (**априорной вероятности**) и условной вероятности события, которое произошло в результате опыта, а знаменатель есть полная вероятность этого события.

Формула полной вероятности и формула Бейеса используются в задачах, которые укладываются в так называемую «схему урн».

Рассмотрим эту схему при $n = 3$ (число урн).

Задача 1. Пусть имеются три одинаковые на вид урны с шарами: в первой урне 2 белых шара и 3 черных, во второй – 4 белых и 1 черный, в третьей – 3 белых шара. Наугад выбирается одна из урн, а, затем, из этой урны извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

∇ Пусть событие A – появление белого шара. Выдвигаем три гипотезы: H_1 – выбрана первая урна; H_2 – выбрана вторая урна; H_3 – выбрана третья урна. Эти гипотезы равновозможные:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события A при наступлении гипотез:

$$P(A / H_1) = \frac{2}{5}; \quad P(A / H_2) = \frac{4}{5}; \quad P(A / H_3) = 1.$$

Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3);$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + 1 \right) = \frac{11}{15}. \quad \blacktriangle$$

Задача 2. Имеются те же три урны. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Этот шар оказался белым. Найти послеопытную (апостериорную) вероятность того, что шар вынут из первой урны.

∇ Найдем вероятность того, что шар вынут из первой урны, по формуле Бейеса

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)}.$$

В предыдущей задаче нашли, что $P(A) = \frac{11}{15}$, тогда имеем

$$P(H_1 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{11} = \frac{2}{11}. \quad \blacktriangle$$

Замечание. При решении задач по формулам полной вероятности и Бейеса гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ несовместны и образуют полную группу событий. Важно проверить, что сумма вероятностей этих гипотез равна единице:

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1.$$

Решение типовых задач

2.40. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном.

Нормальный режим наблюдается в 60 % случаев работы прибора, форсированный – в 30 % и недогруженный – в 10 %. Надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение заданного времени t) для нормального режима равна 0,8; для форсированного – 0,5; для недогруженного – 0,9. Найти полную (с учетом случайных условий) надежность прибора.

∇ Сформулируем три гипотезы:

H_1 – нормальный режим;

H_2 – форсированный режим;

H_3 – недогруженный режим.

Пусть событие A – безотказная работа прибора. При введенных обозначениях данные задачи можно записать так

$$\begin{array}{ll} P(H_1) = 0,6; & P(A/H_1) = 0,8; \\ P(H_2) = 0,3; & P(A/H_2) = 0,5; \\ P(H_3) = 0,1; & P(A/H_3) = 0,9. \end{array}$$

Тогда, по формуле полной вероятности

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,72.$$

▲

2.41. Имеется три одинаковых ящика. В первом ящике находятся 6 стандартных и 4 бракованных детали, во втором – 8 стандартных и 2 бракованных, в третьем – 5 стандартных и 5 бракованных. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика наудачу взятые 3 детали окажутся стандартными.

∇ Имеем 3 гипотезы:

H_1 – выбор первого ящика;

H_2 – выбор второго ящика;

H_3 – выбор третьего ящика.

Т.к. гипотезы по условию равновозможные, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Пусть событие A состоит в том, что три детали, выбранные из определенного ящика, окажутся стандартными. Т.к. в первом ящике содержится 10 деталей, то 3 детали можно выбрать числом способов $n = C_{10}^3$, из этих способов событию A благоприятствуют m способов, где $m = C_6^3$.

По классическому определению вероятности

$$P(A/H_1) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}.$$

Аналогично находим для второго ящика: $n = C_{10}^3$, $m = C_8^3$;

$$P(A/H_2) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{15}.$$

Для третьего ящика:

$$P(A/H_3) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{12}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A/H_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} + \frac{7}{15} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{43}{60} = \frac{43}{180}. \quad \blacktriangle$$

2.42. В условии предыдущей задачи, считая известным, что выбранные три детали оказались стандартными, найти вероятность того, что они были взяты из второго ящика.

∇ Можем воспользоваться формулой Байеса

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{15}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{43}{60}} = \frac{7}{15} \cdot \frac{60}{43} = \frac{28}{43}. \quad \blacktriangle$$

2.43. Стрельба подводной лодки по береговому объекту может произойти с одной из трех позиций, вероятности выхода на которые равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Вероятности поражения цели с данных позиций равны соответственно 1; 0,75 и 0,4. Произведена стрельба, в результате которой цель поражена. С какой позиции вероятнее всего произведена стрельба?

∇ Пусть событие A – поражение цели. Событие A может произойти только с одной из трех гипотез:

H_1 – выход на первую позицию;

H_2 – выход на вторую позицию;

H_3 – выход на третью позицию.

Найдем вероятность каждой гипотезы по формуле Байеса. Для этого найдем предварительно полную вероятность события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A/H_i) = 0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,625.$$

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 1}{0,625} = 0,32;$$

$$P(H_2 / A) = \frac{0,3 \cdot 0,75}{0,625} \approx 0,36;$$

$$P(H_3 / A) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,625} \approx 0,32.$$

Мы видим, что наибольшей является вторая дробь, т.е. вероятнее всего, что стрельба производилась со второй позиции. ▲

Задачи для самостоятельной работы

2.44. Пластмассовые изготавливаются на трех прессах. I-й пресс вырабатывает 50% всех болванок, II-ой – 30 % и III-ий – 20 %. При этом: из болванок с I-го пресса в среднем 0,025 нестандартных, со II-го – 0,02, с III-го – 0,015. Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада болванка соответствует стандарту.

Ответ: 0,9785.

2.45. По условию предыдущей задачи вычислить вероятность того, что соответствующая стандарту болванка изготовлена: а) на I-ом; б) на II-ом; в) на III-ем прессе.

Ответ: а) $\frac{4875}{9785}$; б) $\frac{2940}{9785}$; в) $\frac{1970}{9785}$.

2.46. Микросхема, поставленная в телевизор, может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,3$. Вероятности того, что микросхема проработает определенное количество часов, для этих партий равны, соответственно, 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что микросхема проработает определенное количество часов.

Ответ: 0,23.

2.47. Подводная лодка может выпустить ракету с одной из трех позиций, причем с первой и третьей позиций с одинаковыми вероятностями $p_1 = p_3 = 0,25$, а со второй – с вероятностью $p_2 = 0,5$. Вероятности попадания в цель с этих позиций равны 0,1; 0,2; 0,4 соответственно. Определить вероятность попадания ракеты в цель.

Ответ: 0,225.

2.48. На склад поступили изделия, из которых 30 % изготовлено первой бригадой, 20 % – второй и 50 % – третьей. Вероятность того, что изделие первой бригады будет изделием 1-го сорта, равна 0,9; для второй и

третьей бригад соответственно 0,75 и 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется изделием 1-го сорта.

Ответ: 0,82.

2.49. Эсминец может пройти вдоль пролива шириной 3 км в любом месте. Вероятность подрыва на mine в левой части заграждения шириной 1 км равна 0,2, а на остальной части – 0,6. Найти вероятность того, что эсминец благополучно пройдет пролив.

Ответ: 0,533.

2.50. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7.

Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Ответ: 0,85.

2.51. Два автомата производят одинаковые детали, которые сбрасываются на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Ответ: 0,588.

2.52. На фабрике, изготавливающей болты первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет, соответственно, 5%, 4% и 2%. Какова вероятность того, что: а) случайно выбранный болт оказался дефективным; б) дефективный болт произведен не третьей машиной?

Ответ: а) 0,0345; б) 0,77.

2.53. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1; 0,75 и 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежит индикатор?

Ответ: ко второму типу.

2.54. Из 10 стрелков 4 попадают в мишень при одном выстреле с вероятностью 0,95; 5 – с вероятностью 0,85 и один с вероятностью 0,7.

Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел и попал в мишень. Какова вероятность того, что этот стрелок принадлежит к первой группе?

Ответ: 0,43.

2.55. На трех заводах производятся радиодетали. Производительность первого завода в 5 раз больше, чем второго, а производительность третьего в 6 раз меньше, чем первого. Вероятности того, что деталь будет стандартной, для первого, второго и третьего заводов составляют 0,9; 0,95 и 0,89 соответственно. Выбранная наугад деталь оказалась стандартной. Какова вероятность, что ее производил второй завод?

Ответ: 0,15.

2.56. Из 40 экзаменационных билетов студент выучил только 30. Каким ему выгоднее зайти на экзамен, первым или вторым?

Ответ: все равно.

2.57. Известно, что 90 % изделий, выпускаемых данным предприятием, отвечает стандарту. Контроль проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,96 и нестандартную с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что: а) взятое наудачу изделие пройдет контроль; б) изделие, прошедшее контроль качества, отвечает стандарту.

Ответ: а) 0,87; б) 0,993.

§3. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

На практике часто встречаются задачи, в которых один и тот же опыт (испытание) повторяется многократно.

В результате каждого испытания может появиться или не появиться событие A , при этом нас интересует не результат отдельного опыта, а общее число появлений события A в серии опытов.

Несколько испытаний называются **независимыми относительно события A** (просто **независимыми**), если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Примерами независимых испытаний могут служить: несколько подбрасываний игральной кости или монеты, многократная стрельба по мишени без поправок на ошибку, проверки «счастливого билетика», выпадение номеров билетов, вынимаемых студентом на различных экзаменах и т.п.

В этом разделе мы рассмотрим независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления интересующего нас события одинакова.

Теорема 3.1. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , а вероятность не появления – q , то вероятность $P_{n,m}$ того, что событие A произойдет m раз, определяется формулой Бернулли

$$P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (3.1)$$

где C_n^m – число сочетаний, $p + q = 1$.

Формула (3.1) называется **формулой Бернулли**. Ее можно переписать в виде

$$P_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Подсчитаем вероятность не появления события A ни в одном из n независимых испытаний, т.е., когда $m = 0$:

$$P_{n,0} = C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot q^n = q^n. \quad (3.2)$$

Из этого следует, что вероятность r_n наступления события A **хотя бы один раз** в n независимых испытаниях определяется формулой

$$r_n = 1 - P_{n,0} = 1 - q^n = 1 - (1-p)^n, \quad (3.3)$$

где p – вероятность наступления события A в каждом опыте.

Задача 1. В принятой партии хлопка число длинных волокон составляет $\frac{3}{4}$ их общего числа. Какова вероятность того, что в пучке хлопка из трех волокон окажутся два длинных волокна?

∇ Здесь имеем: $n = 3$, $m = 2$; $p = \frac{3}{4}$ и $q = \frac{1}{4}$. Значит, по формуле (3.1.) имеем

$$P_{2,3} = C_3^2 p^2 q^{3-2} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \approx 0,423. \quad \blacktriangle$$

Применение формулы Бернулли при больших значениях n связано с громоздкими вычислениями. В таких случаях пользуются различными приближенными формулами, обеспечивающими достаточную точность.

Если вероятность появления события A достаточно мала, а число испытаний n достаточно велико (ориентировочно $n \geq 50$, $pn \leq 10$), то $P_{n,m}$ с большой степенью точности можно находить по формуле

$$P_{n,m} \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (3.4)$$

где $a = np$.

Выражение (3.4) называется **асимптотической формулой Пуассона** и используется в задачах, где рассматриваются редкие события (например, выигрыш автомобиля по лотерейному билету).

Задача 2. Вероятность отказа элемента в схеме в течение суток равна 0,01. В схеме имеется 500 одинаковых элементов. Какова вероятность того, что в течение суток откажут 3 элемента?

∇ По условию задачи событие A – отказ элемента в течение суток. Тогда $P(A) = p = 0,01$; $a = np = 0,01 \cdot 500 = 5$; $m = 3$. Применим формулу Пуассона (3.4):

$$P_{500,3} \approx \frac{5^3 \cdot e^{-5}}{3!} \approx \frac{125}{6} \cdot 0,00674 \approx 0,14037. \quad \blacktriangle$$

Примечание. Искомая вероятность, вычисленная по точной формуле Бернулли, составляет

$$P_{500,3} = \frac{500!}{3! \cdot 497!} \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{497} = 0,14022.$$

Относительная погрешность решения по приближенной формуле Пуассона составляет 0,1 %.

Теорема 3.2. (Локальная теорема Муавра – Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_{n,m}$ того, что в n испытаниях событие A появится m раз может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (3.5)$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Равенство (3.5) тем точнее, чем больше n .

Для удобства практического применения локальной теоремы Муавра–Лапласа вводят в рассмотрение **функцию Гаусса**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.6)$$

Функция $\varphi(x)$ – четная ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), при $x > 4$ можно считать, что $\varphi(x) = 0$. Таблица значений функции Гаусса имеется в приложении А данного пособия.

Тогда равенство (3.5) примет вид

$$P_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \quad (3.7)$$

В тех случаях, когда требуется определить вероятность того, что в n испытаниях событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз (например, нужно найти вероятность того, что в партии из 1000 деталей окажется от 2 до 5 бракованных деталей), т.е. $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$, используют следующую теорему.

Теорема 3.3. (интегральная теорема Муавра – Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n испытаниях число появлений события A будет заключено между числами k_1 и k_2 может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (3.8)$$

где $a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Вычисления по формуле (3.8) связаны с затруднениями, т.к. интеграл $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ является неберущимся. Поэтому вводится **функция Лапласа**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.9)$$

С помощью функции Лапласа равенство (3.8) можно представить в виде

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (3.10)$$

Для функции Лапласа $\Phi(x)$ составлены таблицы. При пользовании таблицами необходимо учитывать следующие свойства этой функции:

1°. Функция $\Phi(x)$ – нечетная, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2°. При возрастании x от 0 до ∞ значения $\Phi(x)$ возрастают от 0 до 0,5. При $x > 4$ можно считать, что $\Phi(x) = 0,5$.

Для определения вероятности $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$ следует вычислить a и b , затем по таблице найти $\Phi(a)$, $\Phi(b)$ и подставить в (3.10).

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , то **наивероятнейшее число** m_0 наступлений события A находится из условия

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \quad (3.11)$$

Задача 3. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) не менее 480; в) наивероятнейшее число предприятий.

∇ а) По условию $p = 0,5$. Так $n = 1000$ достаточно велико (условие $npq = 1000 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5) = 250 \geq 50$ выполнено), то применяем локальную формулу Муавра-Лапласа. Вначале вычислим

$$x = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265,$$

затем по формуле (3.7)

$$P_{480,1000} \approx \frac{\varphi(-1,265)}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{\varphi(1,265)}{\sqrt{250}} = \frac{0,1792}{\sqrt{250}} = 0,0113.$$

б) Необходимо найти

$$P_{1000}(m \geq 480) = P_{1000}(480 \leq m \leq 1000).$$

Применяем интегральную формулу Муавра-Лапласа (3.10), предварительно найдя

$$a = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265, \quad b = \frac{1000 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 31,6.$$

Теперь

$$P_{1000}(480 \leq m \leq 1000) \approx \frac{1}{2} (\Phi(31,6) - \Phi(-1,265)) = \\ = \frac{1}{2} (\Phi(31,6) + \Phi(1,265)) \approx \frac{1}{2} (1 + 0,7941) \approx 0,897.$$

в) По формуле (3.11) наивероятнейшее число предприятий, имеющих финансовые нарушения

$$1000 \cdot 0,5 - 0,5 \leq m_0 \leq 1000 \cdot 0,5 + 0,5, \\ 499,5 \leq m_0 \leq 500,5.$$

Т.к. число m_0 - целое, то $m_0 = 500$.

Теперь по (3.5) определим $x = \frac{500 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0$ и

$$P_{500,1000} \approx \frac{\varphi(0)}{\sqrt{250}} = \frac{0,3989}{\sqrt{250}} = 0,0252.$$

▲

Решение типовых задач

3.1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три из шести? (Ничьи во внимание не принимаются).

∇ Пусть событие A – победа первого игрока в одной партии:

$$P(A) = p = \frac{1}{2}.$$

Вероятность победы второго игрока равна $q = \frac{1}{2}$, т.к. шахматисты равносильны. Вероятность выиграть две партии из четырех находим по формуле Бернулли:

$$P_{4,2} = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

Аналогично находим вероятность выигрыша трех партий из шести:

$$P_{6,3} = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{5}{16}.$$

Т.к. $\frac{3}{8} = \frac{6}{16} > \frac{5}{16}$, то вероятность выиграть две партии из четырех больше, чем три из шести. ▲

3.2. Завод «Золотая балка» отправил в Москву 1500 бутылок вина «Каберне». Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более 4-х бутылок (событие A).

∇ Искомая вероятность равна

$$P(A) = P_{1500,0} + P_{1500,1} + P_{1500,2} + P_{1500,3} + P_{1500,4}.$$

Т.к. $n=1500$, $p=0,002$, то $a=np=3$. Вероятность события A найдем используя формулу Пуассона (3.4):

$$P(A) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} \approx 0,815. \quad \blacktriangle$$

3.4. Стрелок стреляет по мишени 240 раз. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти: а) наиболее вероятное число попаданий; б) вероятность того, что стрелок попадет 160 раз; в) вероятность того, что число попаданий будет заключено между числами 150 и 170.

∇ а) Наиболее вероятное число попаданий находим из условия (3.11)

$$240 \cdot 0,7 - 0,3 \leq m_0 \leq 240 \cdot 0,7 + 0,7, \\ 167,7 \leq m_0 \leq 168,7.$$

Последнему неравенству удовлетворяет единственное целое число $m_0 = 168$. Это и есть наиболее вероятное число попаданий при 240 выстрелах.

б) Вероятность того, что стрелок попадет 160 раз из 240, найдем по локальной теореме Муавра – Лапласа (по формуле (3.7)):

$$P_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{160 - 240 \cdot 0,7}{\sqrt{240 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = -1,13.$$

Т.к. функция $\varphi(x)$ – четная, то по таблице (см. приложение А)

$$\varphi(-1,13) = \varphi(1,13) \approx 0,2107.$$

Тогда

$$P_{240,160} \approx \frac{1}{\sqrt{240 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \cdot 0,2107 = \frac{1}{\sqrt{50,4}} \cdot 0,2107 \approx 0,03.$$

в) Вероятность того, что число попаданий будет заключено между числами 150 и 170, найдем по интегральной теореме Муавра – Лапласа (используем формулу (3.10))

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $k_1 = 150$, $k_2 = 170$.

Найдем

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{150 - 240 \cdot 0,7}{\sqrt{240 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-18}{7,1} \approx -2,54; \\ b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{170 - 168}{7,1} \approx 0,28.$$

По таблице (см. приложение Б) находим

$$\Phi(a) = \Phi(-2,54) = -\Phi(2,54) = -0,4945;$$

$$\Phi(b) = \Phi(0,28) = 0,1103.$$

Тогда

$$P_{240}(150 \leq m \leq 170) = 0,1103 + 0,4945 \approx 0,6. \quad \blacktriangle$$

3.5. Корабль выходит из строя, если получит не менее пяти попаданий в надводную часть или два попадания в подводную часть. Определить вероятность выхода из строя корабля при пяти попаданиях, если вероятности попадания в надводную и подводную части при попадании в корабль относятся как семь к трем.

∇ Пусть событие A – попадание снаряда в надводную часть, $\bar{A}$ – в подводную. Тогда

$$P(A) = p = \frac{7}{10}, \quad q = \frac{3}{10},$$

т.к. по условию вероятности попадания в надводную и подводную части относятся как 7:3.

При пяти попаданиях в корабль возможны следующие случаи распределения попаданий:

Надводная часть	5	4	3	2	1	0
Выход корабля из строя	+	–	+	+	+	+

Т.к. корабль выходит из строя при всех случаях, кроме второго, то найдем вероятность невыхода корабля из строя и вычтем ее из единицы. По формуле Бернулли:

$$P_{5,4} = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3 \approx 0,36.$$

Тогда вероятность выхода корабля из строя равна

$$1 - 0,36 = 0,64. \quad \blacktriangle$$

Задачи для самостоятельного решения

3.6. В партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что из трех взятых изделий окажется: 1) 2 изделия высшего сорта; 2) хотя бы одно изделие высшего сорта?

Ответ: 1) 0,384; 2) 0,992.

3.7. По цели в одинаковых условиях производится 5 выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Определить вероятность: 1) трех попаданий в цель; 2) не менее трех попаданий.

Ответ: 1) 0,23; 2) 0,317.

3.8. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие окажется стандартным, равна 0,99. Найти вероятность того, что из трех изделий окажется: 1) три стандартных; 2) два стандартных; 3) одно стандартное.

Ответ: 1) 0,97; 2) 0,029; 3) 0,0003.

3.9. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: 1) два мальчика; 2) не более двух мальчиков. Принять вероятность рождения мальчика равной 0,51.

Ответ: 1) 0,31; 2) 0,48.

3.10. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: 1) наивероятнейшее число отказавших элементов; 2) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; 3) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы 4 элемента.

Ответ: 1) $m_0 = 1$; 2) 0,41; 3) 0,0067.

3.11. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов 50 окажутся бракованными?

Ответ: 0, 0165.

3.12. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Ответ: 0,0782.

3.13. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий:

- 1) будет повреждено: а) 3; б) по крайней мере 3;
- 2) не будет повреждено: а) 9997; б) хотя бы 9997.

Ответ: 1. а) 0,1804; б) 0,3233;

2. а) 0,1804; б) 0,8572.

3.13. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что будет иметь место 100 попаданий из 320 выстрелов.

Ответ: 0,00028.

3.14. Доля первого сорта некоторой массовой продукции в среднем составляет 20 %. Наудачу берут 625 экземпляров этой продукции. Какова

вероятность того, что число экземпляров продукции первого сорта окажется равным: 1) 100 шт.; 2) от 100 до 150 шт.

Ответ: 1) 0,00175; 2) 0,9876.

3.15. Электростанция обслуживает сеть из 10 000 ламп, вероятность включения каждой из которых равна 0,6. Определить вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет лежать между 5900 и 6100.

Ответ: 0,9580.

3.16. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что цель будет поражена от 200 до 250 раз в серии из 600 выстрелов.

Ответ: 0,7963.

3.17. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что мишень будет поражена при 200 выстрелах не менее 110, но не более 130 раз.

Ответ: 0,8502.

3.18. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

Ответ: 0,1173.

3.19. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,05. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наивероятнейшее число нестандартных деталей в ней было равно 55.

Ответ: $1099 \leq n < 1119$.

3.20. В урне содержится 6 черных и 4 белых шара. Шары извлекают по одному с возвратом. Произвели 6 извлечений. Вычислить вероятность следующих событий: 1) черный шар появится 5 раз; 2) от 4 до 6 раз; 3) вычислить вероятность наивероятнейшего числа появлений черного шара.

Ответ: 1) 0,187; 2) 0,545; 3) 0,311.

3.21. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p .

Докажите, что вероятность одного или двух попаданий равна $3p(1-p)$.

3.22. Из 10 билетов выигрышными являются 4. Наудачу берут 4 билета. Вычислить вероятность следующих событий: 1) среди четырех билетов выигрышных окажется 2 или 3; 2) все билеты окажутся выигрышными.

Ответ: 1) 0,5; 2) 0,0256.

3.23. Вероятность выигрыша по лотерейному билету постоянная и равна 0,01. Вычислить вероятность следующих событий: а) из четырех лотерейных билетов выигрыш выпадет на два билета; б) из четырех лотерейных билетов выигрыш выпадет на число билетов, не превышающее двух.

Ответ: а) 0,0006; б) 0,9999.

3.24. Для поражения цели необходимо не менее трех попаданий. Определить вероятность поражения цели, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3 и произведено: а) пять выстрелов; б) семь выстрелов.

Ответ: а) 0,163; б) 0,353.

§4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Основные понятия

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать одно и только одно из возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Тот факт, что она принимает определенное значение, является **случайным событием**.

Случайные величины (сокращенно с.в.) обозначаются заглавными латинскими буквами $X, Y, \dots$, а их возможные значения, соответственно, малыми буквами $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$.

Рассмотрим случайные величины двух типов: **дискретные** и **непрерывные**. Дискретная с.в. принимает отдельные, изолированные друг от друга значения, а возможные значения непрерывной с.в. заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Примеры дискретных с.в.:

1) X – число отличных оценок на экзамене в классе. Возможные значения: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

2) Y – число бракованных изделий в партии из 100 штук. Возможные значения: $y_0 = 0, y_1 = 1, \dots, y_{100} = 100$.

Примеры непрерывных с.в.:

1) X – время работы прибора. Возможные значения принадлежат промежутку $[0; \tau)$.

2) Y – дальность полета снаряда. Возможные значения принадлежат промежутку $[0; l]$.

Таким образом, число возможных значений любой непрерывной с.в. всегда бесконечно.

Так как различные значения с.в. встречаются неодинаково часто, то для характеристики с.в. следует указывать и вероятности ее возможных значений.

Соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется **законом распределения случайной величины**.

Простейшей формой закона распределения дискретной с.в. является **ряд распределения**, т.е. таблица, в которой перечислены все возможные значения с.в. и их вероятности.

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

То, что случайная величина X примет одно из значений $x_i, i = \overline{1; n}$ есть событие достоверное и, потому, должно выполняться условие $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Число возможных значений дискретной с.в. может быть бесконечным, счетным. В этом случае числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ должен быть сходящимся с суммой, равной единице.

Закон распределения дискретной с.в. можно задать графически в виде ломаной, соединяющей точки с координатами $(x_i; p_i), i = \overline{1; n}$. Эта ломаная называется **многоугольником распределения вероятностей**.

График или многоугольник распределения вероятностей изображается следующим образом (см. рис. 4.1)

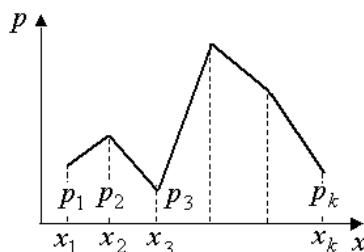


Рис. 4.1

Задача 1. По мишени ведутся выстрелы до первого попадания или до израсходования всех имеющихся патронов. Составить ряд распределения с.в. X — числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при отдельном выстреле постоянна $p = 0,3$, а число всех патронов $n = 4$.

∇ Здесь с.в. X принимает значения: $x_1 = 1$ при попадании с первого выстрела, $x_2 = 2$ — при попадании после одного промаха, $x_3 = 3$ — при попадании после двух промахов и $x_4 = 4$ — при попадании после трех промахов или при четырех промахах.

Вероятности того, что с.в. будет принимать указанные значения, таковы (q — это вероятность промаха и $q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$):

$$p_1 = P(X = 1) = p = 0,3;$$

$$p_2 = P(X = 2) = q \cdot p = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21;$$

$$p_3 = P(X = 3) = q^2 \cdot p = 0,49 \cdot 0,3 = 0,147;$$

$$p_4 = P(X = 4) = q^3 \cdot p + q^4 = q^3(p + q) = 0,7^3 = 0,343.$$

Отсюда получим искомую таблицу распределения:

X	1	2	3	4
p	0,3	0,21	0,147	0,343

Условие $\sum_{i=1}^n p_i = 0,3 + 0,21 + 0,147 + 0,343 = 1$ выполнено. ▲

Т.к. для непрерывной с.в. нельзя перечислить все ее возможные значения, то ее закон распределения не может быть задан в виде ряда распределения.

Для характеристики поведения непрерывной с.в. целесообразно использовать вероятность того, что с.в. X примет значение, меньшее некоторого числа x , а не вероятность того, что она примет значение, равное x . С точки зрения практики нас мало интересует событие, состоящее, например, в том, что прибор проработает ровно 1000 часов, т.е. $X = 1000$. Более важным является событие вида $X < 1000$ (или $X > 1000$).

Универсальным способом задания закона распределения вероятностей, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является функция распределения случайной величины.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что эта случайная величина примет значение, меньшее x , т. е.

$$F(x) = P(X < x). \quad (4.1)$$

Для дискретной с.в. функция распределения имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i). \quad (4.2)$$

Функцию $F(x)$ называют также **интегральной функцией распределения**.

Геометрически равенство (4.1) можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что с.в. X примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x , т.е. случайная точка X попадет в интервал $(-\infty; x)$, (рис. 4.2).

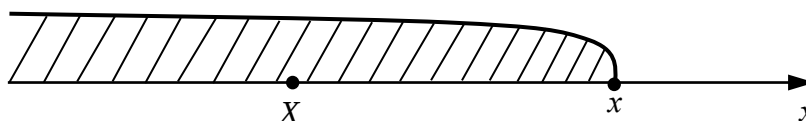


Рис. 4.2

Основные свойства функции распределения

1° Область изменения функции распределения совпадает с интервалом значений вероятности:

$$F(x) = P(X < x), 0 \leq F(x) \leq 1.$$

2° $F(x)$ – неубывающая функция.

3° Предельные значения функции распределения:

$$F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1.$$

4° Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a; F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

График интегральной функции распределения, называемый **интегральной кривой**, расположен между прямыми $y = 0$ и $y = 1$.

График функции распределения дискретной случайной величины может иметь разрывы первого рода.

Задача 2. Составить функцию распределения для дискретной с.в. X — числа появлений события A при четырех независимых испытаниях, если в каждом испытании $p = \frac{1}{3}$.

∇ Определив по формуле Бернулли значение вероятностей при $x_i = 0, 1, 2, 3, 4$, составим ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

По данным этой таблицы определяем, что

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{16}{81}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ \frac{48}{81}, & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ \frac{72}{81}, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ \frac{80}{81}, & \text{при } 3 < x \leq 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Функция $F(x)$ для дискретной случайной величины является кусочно-постоянной с точками разрыва при всех $X = x_i$. График функции распределения для рассмотренного примера наглядно отображает ступенчатый характер функции распределения дискретной случайной величины (рис. 4.3).

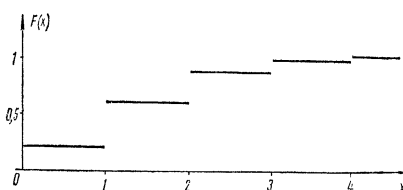


Рис. 4.3



Непрерывная случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения.

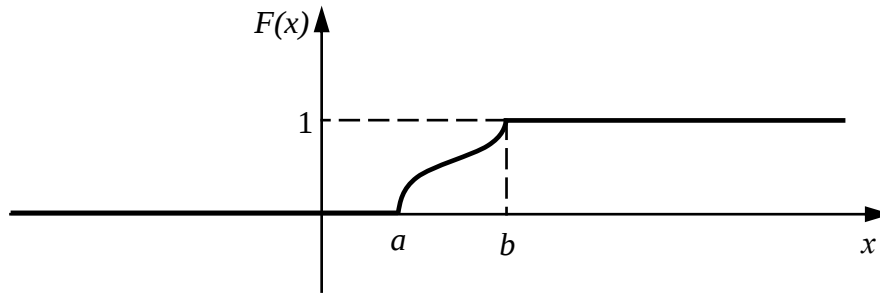


Рис. 4.4

На рис. 4.4 изображен график функции распределения непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат интервалу $(a; b)$.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[a; b)$ может быть выражена с помощью функции распределения так:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что

$$P(x \leq X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F.$$

Тогда

$$\frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Левая часть последнего равенства – это средняя плотность распределения вероятностей на интервале $(x; x + \Delta x)$.

Плотностью $f(x)$ распределения вероятностей непрерывной случайной величины (плотностью распределения, плотностью вероятностей или просто плотностью) в точке x называется предел средней плотности на участке $(x; x + \Delta x)$ при условии, что $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x},$$

или

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Иначе говоря, плотность распределения вероятностей – производная функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \quad (4.4)$$

Смысл $f(x)$ состоит в том, что она указывает на то, как часто появляется с.в. X в некоторой окрестности точки x при повторении испытаний.

Функцию $f(x)$ называют также **дифференциальной функцией распределения**; она является одной из форм закона распределения случайной величины и определена только для непрерывных случайных величин.

График функции $y = f(x)$ называется **кривой распределения**.

Вероятность попадания с.в. в заданный интервал $(a; b)$ выражается через плотность распределения так:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (4.5)$$

Геометрически эта вероятность численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 4.5).

Тогда площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции равна единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (4.6)$$

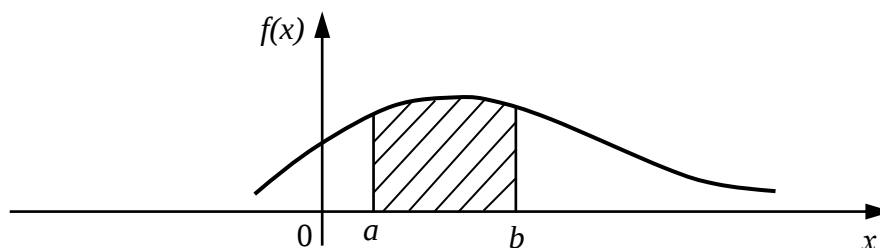


Рис. 4.5

Равенство (4.6) называется *условием нормировки*: несобственный интеграл от плотности вероятности непрерывной с.в. в бесконечных пределах интегрирования равен единице.

Функцию распределения $F(x)$ можно выразить через плотность распределения следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (4.7)$$

Задача 3. Пусть с.в. имеет плотность распределения

$$f(x) = |x|e^{-x^2}.$$

Чему равна вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(0, 1)$?

∇ Искомая вероятность $P(0 < X < 1)$ может быть найдена с помощью формулы (4.5). В нашем случае:

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1) &= \int_0^1 |x|e^{-x^2} dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 0,3679) = \frac{1}{2} \cdot 0,6321 \approx 0,316. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Отметим, что плотность распределения $f(x) \geq 0$, т.к. $F(x)$ – неубывающая функция.

4.2. Числовые характеристики случайных величин

Любой закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако, при решении многих практических задач достаточно знать лишь несколько числовых параметров, характеризующих отдельные черты распределения. Такие параметры, выражающие в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называются **числовыми характеристиками** случайной величины.

Важнейшими среди них являются характеристики положения: математическое ожидание (центр распределения с.в.), мода, медиана; характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение значений с.в. от ее центра), среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X , называется число, равное сумме произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности.

Обозначение математического ожидания: $M(X)$, m_x , a .

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (4.8)$$

Если дискретная случайная величина принимает счетное число значений, то ее математическое ожидание определяется как сумма ряда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \quad (4.9)$$

Математическое ожидание указывает среднее значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины. Его называют центром распределения или рассеяния возможных значений с.в.

Механический смысл математического ожидания: если на оси OX расположены точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ с массами $p_1, p_2, \dots, p_n$, причем $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то $M(X)$ – абсцисса центра тяжести данной системы материальных точек.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (4.10)$$

где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X и указанный несобственный интеграл сходится.

Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу $(\alpha; \beta)$, то ее математическое ожидание выражается интегралом

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx. \quad (4.11)$$

Из определений математического ожидания следует, что его размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Суммой $X + Y$ случайных величин называется случайная величина, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y .

Произведение XY независимых с.в. – это случайная величина, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y .

Случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Основные свойства математического ожидания

1° Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(c) = c.$$

2° Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(cX) = cM(X),$$

при этом cX – это случайная величина, принимающая значения $cx_1, cx_2, \dots, cx_n$ с той же вероятностью, как и величина X значения $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3° Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

4° Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

5° Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю, т.е.

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M((X - a)^2), \quad (4.12)$$

где $a = M(X)$ – математическое ожидание.

Дисперсия характеризует степень рассеяния случайной величины относительно ее центра, т.е. математического ожидания.

Из определения дисперсии и математического ожидания следуют формулы для вычисления дисперсии:

1) для дискретной случайной величины

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \cdot p_i, \quad (4.13)$$

или

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^2 \cdot p_i, \quad (4.14)$$

если возможные значения с.в. X – счетное число;

2) для непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot f(x) dx. \quad (4.15)$$

Если случайная величина задана в интервале $(\alpha; \beta)$, то

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - a)^2 \cdot f(x) dx. \quad (4.16)$$

Здесь $a = M(X)$, $f(x)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины.

На практике часто пользуются формулой

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - a^2, \quad (4.17)$$

т.е. дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата этой случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

Соответственно для непрерывной случайной величины $X \in (-\infty; +\infty)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - a^2. \quad (4.18)$$

Для непрерывной случайной величины $X \in (\alpha; \beta)$

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \cdot f(x) dx - a^2. \quad (4.19)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата размерности случайной величины. Для наглядности характеристики рассеяния удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины – корнем квадратным из дисперсии.

Корень квадратный из дисперсии называется **средним квадратическим отклонением** и обозначается

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4.20)$$

Основные свойства дисперсии

1° Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(c) = 0.$$

2° Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(cX) = c^2 D(X).$$

3° Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

На свойствах математического ожидания и дисперсии основана теорема о математическом ожидании и дисперсии числа появления события A в n независимых испытаниях.

Теорема 4.1. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , то математическое ожидание и дисперсия числа появлений события A в этих n испытаниях определяется формулами:

$$M(X) = np, \quad (4.21)$$

$$D(X) = npq, \quad (4.22)$$

где $q = 1 - p$.

Решение типовых задач

4.1. Производится последовательное испытание 5 приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается, только если предыдущий надежен. Найти закон распределения числа испытаний приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

∇ Для составления закона распределения случайной величины надо найти ее возможные значения и их вероятности.

Случайная величина X – число испытаний приборов. Ее возможные значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$. Это дискретная случайная величина. Найдем вероятности возможных значений. Случайная величина X примет значение $x_1 = 1$, если первый прибор отказал.

Вероятность этого события $p_1 = 1 - 0,9 = 0,1$. Случайная величина X примет значение $x_2 = 2$, если первый прибор надежен, а второй нет.

Тогда $p_2 = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$. Аналогично, $p_3 = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,081$, $p_4 = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,0729$.

Пять приборов будут испытываться только в том случае, если первые четыре оказались надежными, т.е. $p_5 = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,6561$.

Запишем ряд распределения случайной величины X .

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561



4.2. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 1 шар. Найти ряд распределения, функцию распределения числа вынутых белых шаров и построить интегральную кривую распределения случайной величины.

∇ Случайная величина X – число вынутых белых шаров может принимать возможные значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. $x_0 = 0$, если вынутый шар окажется черным, $x_1 = 1$ – если белым. Найдем вероятности этих возможных значений. Т.к. всего в урне 30 шаров, то

$$p_0 = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \quad p_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Ряд распределения имеет вид

X	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

По определению функция распределения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Поэтому, если $x \leq 0$, то $P(X < x) = 0$, т.е. $F(x) = 0$.

Если $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = \frac{5}{6}$.

Аналогично, при $x > 1$, случайная величина может принимать только значение $X = 0$ или $X = 1$, т.е.

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{5}{6}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Построим интегральную кривую, т.е. график функции $F(x)$ (рис. 4.6).

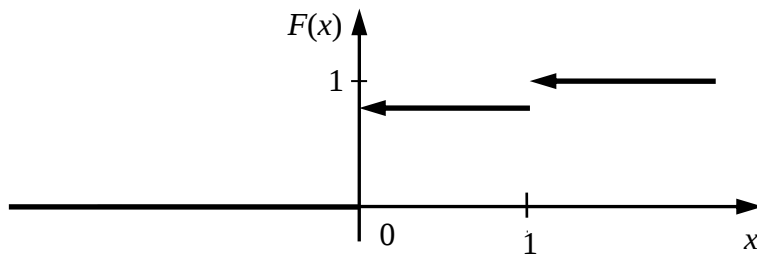


Рис. 4.6

Функция $F(x)$ разрывна, т.к. случайная величина X – дискретная. ▲

4.3. Может ли являться функцией распределения следующая функция:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ (x+2)^2, & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

∇ Построим график функции (рис. 4.7).

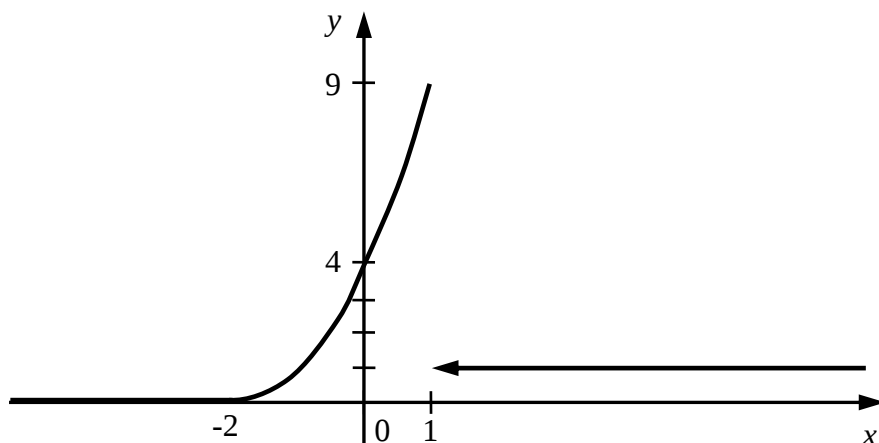


Рис. 4.7

Из графика видно, что среди значений функции есть значения, большие 1, чего быть не может, т.к. значения $F(x)$ есть вероятности некоторых событий. Следовательно, данная функция не может являться функцией распределения. ▲

4.4. Дана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ k(x+2)^2, & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

При каких значениях k эта функция может быть функцией распределения?

∇ На отрезке $[-2;1]$ функция $y = k(x+2)^2$ является возрастающей, поэтому наибольшее значение она примет при $x=1$: $F(1) = 9k$.

Т.к. $F(x)$ – это вероятность события, то $0 \leq 9k \leq 1$; $0 \leq k \leq \frac{1}{9}$. ▲

4.5. Случайная величина X имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ \frac{1}{9}(x+2)^2, & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Требуется:

- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
- найти вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-1;1]$.

∇ а) Для нахождения плотности распределения воспользуемся тем, что $f(x) = F'(x)$, получим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ \frac{2}{9}(x+2), & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

б) Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ имеют следующий вид (рис. 4.8):

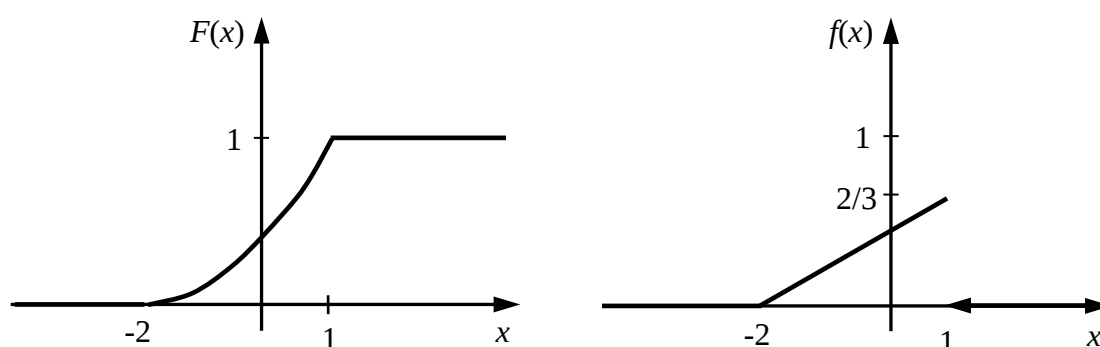


Рис. 4.8

в) Событие $-1 \leq X \leq 1$ можно представить в виде суммы событий $-1 \leq X < 1$ и $X = 1$:

$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(-1 \leq X < 1) + P(X = 1),$$

т.к. функция $F(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, то $P(X = 1) = 0$. Поэтому

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Этот же результат можно получить с помощью функции $f(x)$:

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{9}(x+2) dx = \frac{1}{9}(x+2)^2 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{9}(1+2)^2 - \frac{1}{9}(-1+2)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \quad \blacktriangle$$

4.6. Случайная величина X имеет следующую плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2; \\ \frac{a}{x^3}, & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Определить:

а) коэффициент a ;

б) функцию распределения $F(x)$.

∇ а) Т.к. функция $f(x)$ может принимать только неотрицательные значения, то $a > 0$. Воспользуемся также тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Т.к. функция $f(x) = 0$ при $x < 2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} f(x) dx = 0 + \int_2^{\infty} \frac{a}{x^3} dx = a \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right) \Big|_2^{\infty} = -\frac{a}{2x^2} \Big|_2^{\infty} = \frac{a}{8}.$$

Следовательно, $\frac{a}{8} = 1$, $a = 8$.

б) Т.к.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

То

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^2 0 \cdot dx + \int_2^x \frac{8}{x^3} dx = -\frac{8}{2x^2} \Big|_2^x = -4 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{4}{x^2}.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2; \\ 1 - \frac{4}{x^2}, & \text{при } x \geq 2. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

4.7. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1; \\ x - 0,5, & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Что вероятнее: попадание случайной величины в интервал $(1,5; 1,8)$ или $(1,8; 2,5)$?

∇ Находим вероятность попадания случайной величины в заданные интервалы:

$$\begin{aligned} P(1,5 \leq X \leq 1,8) &= \int_{1,5}^{1,8} f(x) dx = \int_{1,5}^{1,8} (x - 0,5) dx = \frac{(x - 0,5)^2}{2} \Big|_{1,5}^{1,8} = \frac{1,3^2}{2} - \frac{1}{2} = \\ &= 0,845 - 0,5 = 0,345; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1,8 \leq X \leq 2,5) &= \int_{1,8}^{2,5} f(x) dx = \int_{1,8}^2 f(x) dx + \int_2^{2,5} f(x) dx = \int_{1,8}^2 (x - 0,5) dx + \int_2^{2,5} 0 \cdot dx = \\ &= \frac{(x - 0,5)^2}{2} \Big|_{1,8}^2 + 0 = \frac{(2 - 0,5)^2}{2} - \frac{(1,8 - 0,5)^2}{2} = \frac{1,5^2}{2} - \frac{1,3^2}{2} = \\ &= \frac{2,25}{2} - \frac{1,69}{2} = \frac{0,56}{2} = 0,28. \end{aligned}$$

Вывод: вероятнее, что случайная величина попадет в интервал $(1,5; 1,8)$. ▲

4.8. Подводная лодка выпускает три ракеты (делая 3 выстрела) по одной цели. Вероятность попадания ракеты в цель при каждом выстреле равна 0,8. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение числа попаданий.

∇ Пусть случайная величина X – число попаданий в цель. Ее возможные значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности возможных значений этой дискретной случайной величины по формуле Бернулли:

$$P_{n,m} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $p = 0,8$; $q = 0,2$; $n = 3$;

$$p_0 = P_{3,0} = C_3^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^3 = 0,008;$$

$$p_1 = P_{3,1} = C_3^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^2 = 0,096;$$

$$p_2 = P_{3,2} = C_3^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^1 = 0,384;$$

$$p_3 = P_{3,3} = 0,8^3 = 0,512.$$

Ряд распределения имеет вид

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=0}^3 x_i p_i = 0 \cdot 0,008 + 1 \cdot 0,096 + 2 \cdot 0,384 + 3 \cdot 0,512 = \\ = 0,096 + 0,768 + 1,536 = 2,4.$$

Дисперсию вычислим по формуле (4.11)

$$D(X) = M((X - a)^2),$$

где $a = M(X) = 2,4$.

$$D(X) = 2,4^2 \cdot 0,008 + 1,4^2 \cdot 0,096 + 0,4^2 \cdot 0,384 + 0,6^2 \cdot 0,512 = 0,48.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,48} \approx 0,69.$$

Ответ: $M(X) = 2,4$; $D(X) = 0,48$; $\sigma(X) = 0,69$. ▲

4.9. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X по известной функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -2; \\ \frac{1}{9}(x+2)^2, & \text{при } -2 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

∇ Плотность распределения вероятностей случайной величины имеет вид (см. задачу 4.5):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x+2), & \text{при } x \in [-2; 1]; \\ 0, & \text{при } x \notin [-2; 1]. \end{cases}$$

Согласно формуле (4.9)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx,$$

находим

$$M(X) = \int_{-\infty}^{-2} x \cdot 0 dx + \frac{2}{9} \int_{-2}^1 x(x+2) dx + \int_1^{\infty} x \cdot 0 dx = \frac{2}{9} \int_{-2}^1 x(x+2) dx = \frac{2}{9} \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = 0.$$

Далее

$$D(X) = M((X - a)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 \cdot dx + \frac{2}{9} \int_{-2}^1 x^2(x+2) dx + \int_1^{\infty} 0 \cdot dx =$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71.$$

Ответ: $M(X) = 0$; $D(X) = \frac{1}{2}$; $\sigma(X) = 0,71$. ▲

4.10. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $P(x_1) = p_1 = 0,5$, математическое ожидание $M(X) = 3,5$ и дисперсия $D(X) = 0,25$. Найти закон распределения этой случайной величины.

∇ Т.к. $P(x_1) = 0,5$, то $P(x_2) = 1 - 0,5 = 0,5$. Имеем закон распределения:

X	x_1	x_2
P	0,5	0,5

Осталось найти x_1 и x_2 . Т.к. $M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2$, то $0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 = 3,5$. Кроме того, воспользуемся формулой (4.16)

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Имеем $0,25 = M(X^2) - 3,5^2$; $M(X^2) = 12,25 + 0,25 = 12,5$.

Закон распределения X^2 таков:

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,5	0,5

Следовательно, $0,5 \cdot x_1^2 + 0,5 \cdot x_2^2 = 12,5$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,5x_2 = 3,5; \\ 0,5x_1^2 + 0,5x_2^2 = 12,5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 7; \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 7 - x_1; \\ 2x_1^2 - 14x_1 + 24 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 7 - x_1; \\ x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x_1 = 3$ или $x_1 = 4$. Тогда с учетом первого уравнения получаем два решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 4, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1 = 4; \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Т.к. по условию $x_1 < x_2$, то получаем искомый ряд распределения:

X	3	4
P	0,5	0,5



4.11. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2, & \text{при } x \in [0; 2] ; \\ 0, & \text{при } x \notin [0; 2] . \end{cases}$$

Необходимо: 1) определить константу C ; 2) построить функцию распределения $F(x)$; 3) вычислить вероятность $P(-1 \leq X \leq 1)$.

∇ 1) Константа C находится из условия $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. В результате имеем:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^2 Cx^2 dx = C \frac{x^3}{2} = \frac{8C}{3}.$$

Откуда $C = \frac{3}{8}$.

2) Чтобы построить функцию распределения $F(x)$, отметим, что интервал $[0, 2]$ делит числовую ось на три части: $(-\infty, 0), [0, 2], (2, +\infty)$. Рассмотрим каждый из этих интервалов. В первом случае (когда $x < 0$) вероятность события $(X < x)$ вычисляется так:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0,$$

так как плотность $f(x)$ на полуоси $(-\infty, 0)$ равна нулю. Во втором случае

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \frac{3}{8} \int_0^x x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{8}.$$

Наконец, в последнем случае, когда $x > 2$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \frac{3}{8} \int_0^2 x^2 dx + \int_2^x 0 \cdot dx = 0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + 0 = 1,$$

так как плотность $f(x)$ обращается в нуль на полуоси $(2, +\infty)$.

Итак, получена функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \frac{x^3}{8}, & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3) Зная функцию распределения, найдем

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}.$$



Задачи для самостоятельного решения

4.12. В команде 16 спортсменов, из которых 6 – перворазрядники. Наудачу выбирают двух спортсменов. Составьте закон распределения числа перворазрядников среди выбранных.

4.13. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составьте закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

4.14. Случайная величина X принимает значения 7; – 2; 1; – 5; 3 с равными вероятностями. Найти $M(X)$.

Ответ: 0,8.

4.15. Случайная величина X имеет закон распределения

X	2	3	4	5
P	0,3	0,1	0,5	0,1

Найдите $M(2x + 5)$ и $D(2x + 5)$.

Ответ: 11,8; 4,16.

4.16. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X , заданной законами распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

Ответ: а) 8,545; 2,923; б) 249; 15,8.

4.17. Закон распределения дискретной случайной величины X задан в табличной форме:

X	-3	2	3	5	8	12	18	20	25
P	2a	0,1	2a	0,1	3a	0,1	4a	0,1	5a

Найти a . Построить функцию распределения $F(x)$ и начертить ее график. Вычислить $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Ответ: $a = \frac{3}{80}$; $M(X) = 12,19$; $D(X) = 83,1$; $\sigma(X) = 9,12$.

4.18. Число очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух стрелков, имеет соответственно закон распределения:

X	8	9	10
P	0,4	0,1	0,5

Ка-
из стрел-

X	8	9	10
P	0,1	0,6	0,3

кой
ков

стреляет лучше?

Ответ: второй.

4.19. Имеется 5 урн. В каждой из них содержится по 7 красных и 3 синих шара. Из каждой урны наудачу берут по одному шару. Требуется: 1) построить ряд распределения вероятностей дискретной случайной величины X – появление числа красных шаров среди пяти извлеченных; 2) вычислить $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Ответ: 1)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0024	0,0283	0,1323	0,3087	0,3602	0,1681

2) $M(X) = 3,5$; $D(X) = 1,049$; $\sigma(X) = 1,024$.

4.20. Стрелок, имея три патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,7. Найдите закон распределения с.в. X – числа произведенных выстрелов.

Ответ:

x_i	1	2	3
p_i	0,7	0,21	0,09

4.21. В партии из шести деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

Ответ:

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

4.22. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ k(3x - x^2), & \text{если } 0 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент k , построить график плотности распределения $y = f(x)$, найти вероятность попадания X в промежуток $(1; 2)$.

Ответ: $k = \frac{2}{9}$, $P(1 < X < 2) = \frac{13}{27}$.

4.23. Функция распределения непрерывной с.в. X задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ kx^2, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент k ; 2) плотность распределения $f(x)$; 3) вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(0,25; 0,5)$.

Ответ: 1) $k = 1$; 3) $P(0,25 < X < 0,5) = 0,1875$.

4.24. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{при } -1 < x \leq \frac{1}{3}; \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Ответ: 0,25.

4.25. Случайная величина X на всей оси OX задана интегральной функцией $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0; 1)$.

Ответ: 0,25.

4.26. Дана интегральная функция непрерывной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию $f(x)$.

4.27. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2; \\ 0,5x - 1, & \text{при } 2 < x \leq 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) меньше 0,2; б) меньше трех; в) не меньше трех; г) не меньше пяти.

Ответ: а) 0; б) 0,5; в) 0,5; г) 0.

4.28. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1; \\ x - \frac{1}{2}, & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$.

4.29. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , заданной законом распределения

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Ответ: $M(X) = 0,535$; $D(X) = 0,0128$.

4.30. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 3X + 4Y$, если известно, что $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

Ответ: 30.

4.31. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{1}{2}x$ в интервале $(0,2)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. найти математическое ожидание величины X .

Ответ: $\frac{4}{3}$.

4.32. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди отобранных.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

4.33. Случайная величина X задана дифференциальной функцией (распределение Лапласа) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти математическое ожидание величины X .

Ответ: 1.

4.34. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , заданной интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x}{4}, & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Ответ: 2; $\frac{4}{3}$.

4.35. Найти дисперсию случайной величины X , заданной интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{при } -2 < x \leq 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

4.36. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель 0,4; 0,3; 0,6, соответственно. Найдите среднее число попаданий.

Ответ: 1,3.

4.37. Найдите математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадают при бросании двух игральных костей.

Ответ: 7.

4.38. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений событий A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2.

Ответ: 0,8.

4.39. Найти дисперсию случайной величины X – числа попаданий при двух независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и $M(X) = 1,2$.

Ответ: 0,48.

4.40. Игральная кость бросается 15 раз. Сколько раз, в среднем, может выпасть 4 очка?

Ответ: 2,5.

4.41. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найдите эту вероятность, если дисперсия числа появления события A в трех независимых испытаниях равна 0,63.

Ответ: 0,7 или 0,3.

4.42. Устройство состоит из 4 элементов. Вероятность отказа любого элемента за время опыта равна 0,2. Найти математическое ожидание числа опытов, в каждом из которых откажет ровно один элемент, если производится 100 независимых опытов.

Ответ: 40,96.

4.43. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = p(x_1) = 0,7$; математическое ожидание $M(X) = 3,3$ и дисперсия $D(X) = 0,21$. Найти закон распределения этой случайной величины.

Ответ:

X	3	4
P	0,7	0,3

4.44. Круглая мишень разделена на 8 равных секторов, пронумерованных числами 1,2,3,4,5,6,7,8. Мишень вращается вокруг центра. Стрелок производит выстрел по мишени. При попадании в k -й сектор получает k рублей ($k = 1, 2, \dots, 8$). При достаточно большой скорости вращения мишени попадания в различные секторы равновозможны. Можно ли считать игру выгодной для стрелка, если право одного выстрела стоит 5 рублей?

Ответ: нет.

§5. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

5.1. Некоторые распределения непрерывных случайных величин

5.1.1. Равномерное распределение

Говорят, что случайная величина X имеет **равномерное распределение на отрезке $[a; b]$** , если ее плотность $f(x)$ на этом отрезке постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ее график имеет вид

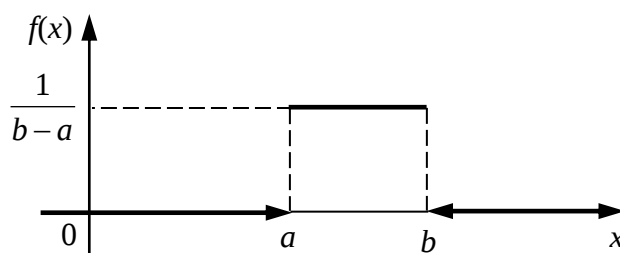


Рис. 5.1

Тот факт, что случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a; b]$, записывают так:

$$X \sim R[a; b].$$

К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, относятся те случайные величины, о которых известно, что все их значения лежат внутри некоторого промежутка $(a; b)$ и при этом одинаково возможны. Например, время ожидания транспорта; ошибка, получающаяся от округления результата измерения до ближайшего целого числа (она равномерно распределена на отрезке $[-0,5; 0,5]$) и т.д.

Функция распределения $F(x)$ для равномерного распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (5.2)$$

Ее график:

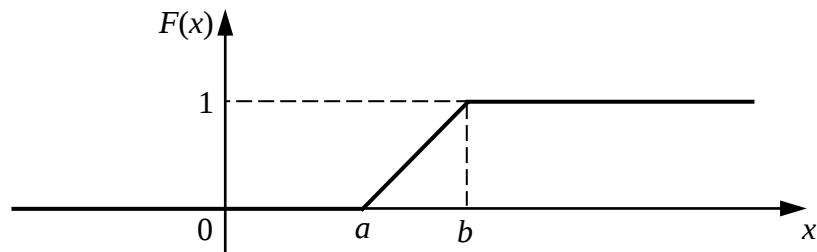


Рис. 5.2

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (5.3)$$

Задача 1. Случайная величина $X \sim R(a; b)$. Найти вероятность попадания с.в. X в интервал $(\alpha; \beta)$, целиком принадлежащий интервалу $(a; b)$.

∇ Согласно формуле (4.5), имеем

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Геометрически эта вероятность представляет собой площадь прямоугольника, заштрихованного на рис. 5.3.

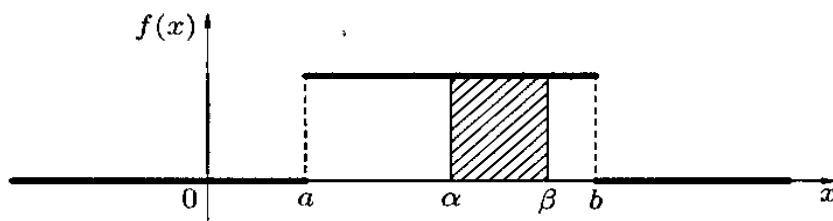


Рис. 5.3



5.1.2. Показательное (экспоненциальное) распределение

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет **показательное распределение**, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

где $\lambda > 0$ – параметр данного распределения.

Интегральная функция показательного распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Графики плотности и функции распределения имеют вид

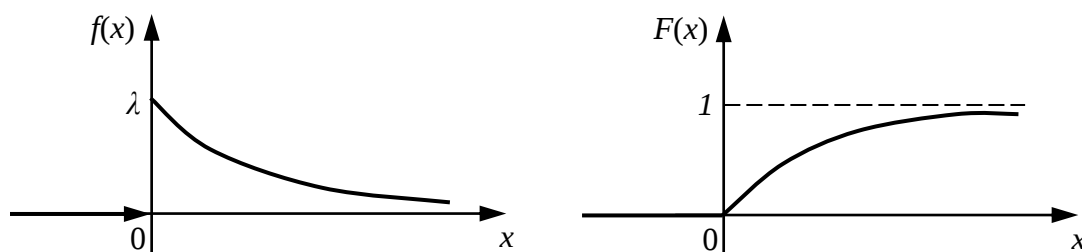


Рис. 5.4

Важнейшие числовые характеристики этого распределения определяются равенствами:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.6)$$

Равенство математического ожидания и среднего квадратического отклонения – характерная черта показательного распределения.

Вероятность попадания в интервал $(a; b)$ случайной величины X , распределенной по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0),$$

находят по формуле

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \quad (5.7)$$

Показательное распределение широко применяется в теории надежности, одним из основных понятий которой является функция надежности $R(t)$ – вероятность безотказной работы элемента за время t .

5.1.3. Распределение Релея

Это распределение применяется в радиотехнике, электротехнике и др.

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет **распределение Релея**, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad \text{при } x \geq 0, \quad (5.8)$$

где $a > 0$ – параметр распределения.

Интегральная функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}. \quad (5.9)$$

Математическое ожидание и дисперсия выражаются через параметр a и имеют вид

$$M(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad D(X) = 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.10)$$

5.1.4. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Если случайная величина X – результат суммирования множества случайных величин с произвольными законами распределения, причем каждая из них играет примерно одинаковую роль в сумме, то закон распределения случайной величины X близок к закону распределения, называемому нормальным или распределением Гаусса.

Говорят, что случайная величина X имеет **нормальное распределение** (распределена по нормальному закону (или по закону Гаусса)), если ее плотность имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.11)$$

где величины a и $\sigma > 0$ называются *параметрами нормального распределения*.

График функции $f(x)$ называется *кривой Гаусса* (или *нормальной кривой*).

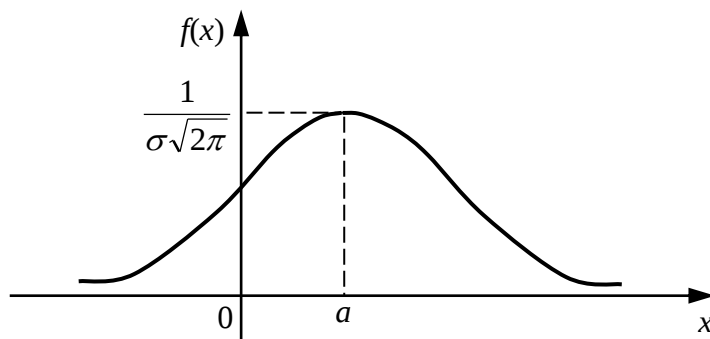


Рис. 5.5

Формула (5.11) замечательна во многих смыслах. Во-первых, эта формула содержит две исключительно важных константы – число π (пи) и число Непера e . Во-вторых, параметр a – математическое ожидание случайной величины, параметр σ – среднее квадратическое отклонение. В третьих, при любых допустимых значениях параметров a и σ площадь криволинейной трапеции, ограниченной нормальной кривой $y = f(x)$, равна единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Тот факт, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ , кратко записывается так: $X \sim N(a; \sigma)$, где $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$, откуда $D(X) = \sigma^2$.

Вероятность попадания нормальной случайной величины X на участок от α до β можно вычислить по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (5.12)$$

Как известно, $\int e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ не выражается через элементарные функции, но его можно выразить через специальную функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (5.13)$$

называемую **функцией Лапласа** (или «интегралом вероятностей»), для которой составлены таблицы (приложение Б в конце учебника).

С помощью этой функции вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на участок от α до β выражается простой формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (5.14)$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (нечетная функция);
- 3) $\Phi(+\infty) = 0,5$ (и, значит, $\Phi(-\infty) = -0,5$).

Задача 2. С.в. X , распределенная по нормальному закону, представляет собой ошибку измерения некоторого расстояния. При измерении допускается систематическая ошибка в сторону завышения на 1,2 м; с.к.о. ошибки измерения равно 0,8 м. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 м.

✓ Согласно условию, $X \sim N(1,2; 0,8)$. Нужно найти вероятность попадания этой с.в. в интервал $\alpha = -1,6$ до $\beta = 1,6$. По формуле (5.14) имеем:

$$P(-1,6 < X < 1,6) = \Phi\left(\frac{1,6-1,2}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{-1,6-1,2}{0,8}\right) = \Phi(0,5) - \Phi(-3,5).$$

Пользуясь таблицей (приложение Б), найдем:

$$\Phi(0,5) = 0,19146; \quad \Phi(-3,5) = -0,49977,$$

откуда

$$P(-1,6 < X < 1,6) = 0,1915 + 0,4998 = 0,6913.$$

▲

Наиболее просто выражается через функцию Лапласа вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на участок длиной 2ε , симметричный относительно центра рассеивания a . А именно,

$$P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (5.15)$$

В частности, $P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0,9973$, т.е. практически достоверно, что нормально распределенная случайная величина X принимает свои значения в промежутке $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. Это утверждение называется «правилом трех сигм».

Через функцию Лапласа выражается и функция распределения $F(x)$ нормального распределения случайной величины X

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right). \quad (5.16)$$

Задача 3. Найти ту же вероятность, что и в предыдущей задаче, но при условии, что систематической ошибки нет.

∇ По формуле (5.15), полагая $\varepsilon = 1,6$, найдем:

$$P(|X| < 1,6) = 2\Phi\left(\frac{1,6}{0,8}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,47725 = 0,9545.$$

▲

5.2. Важнейшие дискретные распределения

5.2.1. Биномиальное распределение

Говорят, что дискретная случайная величина имеет **биномиальное распределение** (или распределена по биномиальному закону), если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$ с соответствующими вероятностями, которые вычисляются по формуле Бернулли:

$$P_m = P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad (5.17)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Биномиальный закон распределения ДСВ задаётся таблицей:

X	0	1	2	...	$n-1$	n
P	q^n	$C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	...	$C_n^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q$	p^n

Постоянные параметры n и p называют параметрами распределения.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , имеющей биномиальное распределение, находятся по формулам

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq. \quad (5.18)$$

Из формулы Бернулли следует, что случайная величина X – число появлений события A в серии из n независимых испытаний ($P(A) = p$) – распределена по биномиальному закону.

5.2.2. Распределение Пуассона

Говорят, что дискретная случайная величина имеет **распределение Пуассона** (или распределена по закону Пуассона), если она принимает счетное число значений $0, 1, 2, \dots, m, \dots$ с соответствующими вероятностями

$$P_m = P(X = m) = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \quad (5.19)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ и $a = np > 0$ – параметр.

Ряд распределения с. в. X , имеющей распределение Пуассона, задается таблицей:

X	0	1	2	...	m	...
P	e^{-a}	$a \cdot e^{-a}$	$\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2!}$	...	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	...

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , имеющей распределение Пуассона, находятся по формулам

$$M(X) = a, \quad D(X) = a. \quad (5.20)$$

Распределение Пуассона приближенно заменяет биномиальное распределение в случае, когда число отказов велико, а вероятность события A в каждом из них мала.

С этим связано еще одно название распределения Пуассона – **закон редких событий**.

Задача 4. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух электроэлементов за год?

∇ Считая случайное число X отказавших элементов подчиняющимся закону Пуассона

$$P(X = m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad \text{где } a = np = 1000 \cdot 0,001 = 1,$$

получим:

1) вероятность отказа ровно двух элементов

$$P(X = 2) = P_2 = \frac{a^2}{2!} e^{-a} = \frac{1}{2e} = 0,184;$$

2) вероятность отказа не менее двух элементов

$$P(X \geq 2) = \sum_{m=2}^{\infty} P_m = 1 - P_0 - P_1 = 1 - e^{-a}(1 + a) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264. \quad \blacktriangle$$

5.2.3. Геометрическое распределение

Говорят, что дискретная случайная величина X имеет **геометрическое распределение**, если она принимает счетное число значений: $1, 2, \dots, m, \dots$ с соответствующими вероятностями

$$P_m = P(X = m) = q^{m-1} \cdot p, \quad (5.21)$$

где $m=1, 2, 3, \dots$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Ряд распределения с. в. X , имеющей геометрическое распределение, задаётся таблицей:

X	1	2	3	...
P	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	...

Для случайной величины X , имеющей геометрическое распределение

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}. \quad (5.22)$$

Случайную величину, распределенную по геометрическому закону можно интерпретировать как число m отказов (испытаний), приведенных по схеме Бернулли до первого положительного исхода.

Решение типовых задач

5.1. Случайная величина T – время работы некоторого элемента, имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что элемент проработает не менее 800 часов, если среднее время его работы 400 часов.

∇ $M(T) = 400$, значит (формула (5.6)), $\lambda = \frac{1}{400}$. Искомая вероятность

$$P(T \geq 800) = 1 - P(T < 800) = 1 - F(800) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{800}{400}}\right) = e^{-2} \approx 0,135.$$

Здесь $F(800)$ найдена по формуле (5.5). $\blacktriangle$

5.2. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a; b]$, т.е. $X \sim R[a; b]$. Найти вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[\alpha; \beta]$, целиком содержащейся внутри отрезка $[a; b]$.

∇ Воспользуемся известной формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

где плотность вероятности случайной величины $X \sim R[a; b]$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(X \in [\alpha; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot x \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}, \text{ т.е.}$$

$$P(X \in [\alpha; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}. \quad \blacktriangle$$

5.3. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{при } x \geq 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X попадает в интервал $(0,3; 1)$.

∇ Воспользуемся формулой (4.6.)

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Учитывая, что

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0,$$

получим

$$F(a) = 1 - e^{-\lambda a}, F(b) = 1 - e^{-\lambda b}.$$

Тогда

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

По условию $\lambda = 2$, поэтому

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-2 \cdot 0,3} - e^{-2 \cdot 1} = e^{-0,6} - e^{-2} \approx 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41. \quad \blacktriangle$$

5.4. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10; 50)$.

∇ Воспользуемся формулой 5.14. По условию $\alpha = 10, \beta = 50, \sigma = 10$, а $= 30$, следовательно,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице приложения Б находим $\Phi(2) = 0,4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544. \quad \blacktriangle$$

5.5. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10; 20)$ равна $0,3$. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0; 10)$?

∇ Так как нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a = 10$, то площади, ограниченные сверху нормальной кривой и снизу – интервалами $(0; 10)$ и $(10; 20)$, равны между собой. Поскольку эти площади численно равны вероятностям попадания X в соответствующий интервал, то

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,3. \quad \blacktriangle$$

5.6. Определить закон распределения случайной величины X , если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = A \cdot e^{-x^2 + 2x + 1}.$$

Найти: а) $M(X)$; б) $\sigma(X)$; в) значение коэффициента A ; г) $M(X^2)$; д) $P(1 < X < 3)$.

∇ Сравним данную функцию

$$f(x) = A \cdot e^{-x^2 + 2x + 1} = A \cdot e^{-(x-1)^2 + 2} = A \cdot e^2 \cdot e^{-(x-1)^2} = A \cdot e^2 \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

нормального распределения, заключаем, что случайная величина X имеет нормальное распределение.

а) Очевидно, $M(X) = 1$.

б) $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

в) Значение коэффициента A найдем из равенства

$$A \cdot e^2 = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}},$$

где $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$.

Отсюда

$$A = \frac{1}{e^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{1}{e^2 \cdot \sqrt{\pi}}.$$

Следовательно, плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{e^2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^2 \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}},$$

т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}.$$

Ясно, что $X \sim N\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

г) $M(X^2)$ найдем, используя формулу $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. В нашем случае $M(X) = 1$, $D(X) = (\sigma(X))^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$M(X^2) = D(X) + (M(X))^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

д) Используя формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

находим, что

$$P(1 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{1-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \Phi(2,82) - \Phi(0) = 0,4976 - 0 = 0,4976.$$

Значение $\Phi(2,82)$ найдено по таблице приложения Б. ▲

5.7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Какова вероятность того, что число попаданий при 200 выстрелах составит не менее 5 и не более 10?

∇ Вероятность $p=0,01$ очень мала, а число выстрелов (опытов) достаточно велико. Поэтому, искомую вероятность будем находить, используя формулу Пуассона. Случайная величина X – число попаданий. Требуется найти $P(5 \leq X \leq 10)$. По теореме сложения вероятностей

$$P(5 \leq X \leq 10) = P(X = 5) + P(X = 6) + \dots + P(X = 10).$$

Имеем

$$a = np = 200 \cdot 0,01 = 2, \quad e^{-a} = e^{-2} \approx 0,135,$$

$$P(5 \leq X \leq 10) = 0,135 \left(\frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{9!} + \frac{2^{10}}{10!} \right) \approx 0,053. \quad \blacktriangle$$

5.8. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

∇ Дискретная случайная величина X – число отказавших элементов в одном опыте – имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2 = 1$ (отказал один элемент), $x_3 = 2$ (отказали два элемента) и $x_4 = 3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, $n = 3, p = 0,1$ (следовательно, $q = 1 - 0,1 = 0,9$), получим

$$P_{3,0} = q^3 = 0,9^3 = 0,729; \quad P_{3,1} = C_3^1 p q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243;$$

$$P_{3,2} = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027; \quad P_{3,3} = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$$

Контроль: $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$.

Запишем искомый биномиальный ряд закон распределения X :

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

▲

5.9. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле для данного стрелка равна 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа выстрелов до первого попадания.

∇ Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0,1$. По формулам (5.22)

$$M(X) = \frac{1}{0,1} = 10, \quad D(X) = \frac{0,9}{(0,1)^2} = 90. \quad \blacktriangle$$

Задачи для самостоятельного решения

5.10. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0,25A, & x \in [0; 4], \\ 0, & x \notin [0; 4]. \end{cases}$$

Найти: A , $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X \in [0, 1])$.

Указания:

1. Коэффициент A можно найти, используя следующее свойство плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0; 4]$.

3. $P(X \in [0; 1])$ можно найти, используя результат задачи 5.2.

Ответ: $A = 1$; $M(X) = 2$; $D(X) = \frac{4}{3}$; $\sigma(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $P(X \in [0; 1]) = 0,275$.

5.11. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12; 14)$.

Ответ: 0,1359.

5.12. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус меньше 3 мин.

Ответ: $P(2 < X < 5) = 0,6$.

5.13. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 5e^{-5x} \text{ при } x \geq 0; \quad f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию случайной величины X .

Ответ: $M(X) = \sigma(X) = 0,2$; $D(X) = 0,04$.

5.14. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X попадает в интервал $(0,13; 0,7)$.

Ответ: 0,555.

5.15. Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25 мм.

Ответ: $P(|X - a| < 25) = 0,7888$.

5.16. Первый игрок бросает 3, а второй 2 одинаковых монеты. Выигрывает и получает всё 5 монет тот, у которого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до получения определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

Ответ: Для первого $\frac{7}{11}$, для второго $-\frac{7}{11}$, то есть игра проигрышная для второго игрока).

5.17. Плотность вероятности случайной величины X задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Определить $M(X)$ и $D(X)$.

Ответ: $M(X) = D(X) = m + 1$.

5.18. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x \geq x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases} \quad (x_0 > 0).$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Ответ: $M(X) = \frac{3}{2}x_0$; $D(X) = \frac{3}{2}x_0^2$.

5.19. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за время 30 сек, в течение которых телефонистка отлучилась, не будет ни одного вызова?

Ответ: $p = e^{-0,5} \approx 0,61$.

5.20. Определить срединную ошибку прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ± 20 м.

Ответ: $\varepsilon = 10,5$ м.

5.21. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднюю квадратическую ошибку 75 м, Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м?

Ответ: $p = 0.053$.

5.22. Срединная ошибка измерения дальности радиолокатором равна 25 м, а систематическая ошибка отсутствует. Определить: а) дисперсию ошибок измерения дальности; б) вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине не превосходящей 20 м.

Ответ: а) 1372 м^2 ; б) 0,4105).

5.23. Нормально распределенная случайная величина X имеет нулевое математическое ожидание. Определить среднее квадратическое отклонение σ , при котором вероятность $P(a < X < b)$ была бы наибольшей ($0 < a < b$).

Ответ: $\sigma = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2 \ln \frac{b}{a}}}$.

§6. Двумерные случайные величины

6.1. Понятие о системе случайных величин

В предыдущих главах мы рассматривали одномерные случайные величины, обозначая их возможные значения точками на числовой прямой.

В задачах теории вероятностей встречаются так называемые многомерные случайные величины, в частности, двумерные, возможные значения которых определяются парами случайных величин и изображаются на плоскости *случайными векторами* или *случайными точками* (рис. 6.1 и 6.2). Примером двумерной случайной величины может служить точка попадания снаряда при стрельбе из орудия по некоторой плоской области. Эта точка характеризуется ее координатами, т.е. парой случайных величин X и Y .

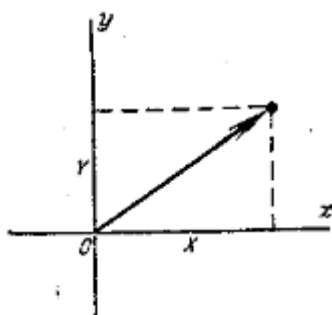


Рис. 6.1

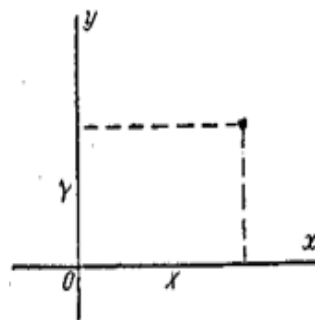


Рис. 6.2

Упорядоченная пара (X, Y) двух случайных величин X и Y называется **двумерной случайной величиной** (X, Y) или **системой двух случайных одномерных величин** X и Y .

Случайные величины X и Y рассматриваются одновременно и могут быть взаимно зависимыми, а каждая из них называется составляющей (компонентой) двумерной случайной величины (X, Y) .

Системы случайных величин могут быть *дискретными*, *непрерывными* и *смешанными*, в зависимости от типа случайных величин, образующих систему. В первом случае компоненты этих случайных систем дискретны, во втором - непрерывны, в третьем - разных типов.

6.2. Дискретная двумерная случайная величина и ее закон распределения

Множество возможных значений дискретной случайной величины, так же, как и одномерной, конечное или счетное. Для полной характеристики дискретной двумерной случайной величины достаточно указать множество ее возможных значений и их вероятности.

Множество всех возможных значений дискретной двумерной случайной величины с их вероятностями называется **законом распределения этой случайной величины**.

Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) считается заданной, если известен ее закон распределения

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Этот закон можно записать в виде таблицы с двойным входом:

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1j}		p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2j}		p_{2n}	p_2
$\dots$							
x_i	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij}		p_{in}	p_i
$\dots$							
x_m	p_{m1}	p_{m2}		p_{mj}		p_{mn}	p_m
Σ	q_1	q_2		q_j		q_n	1

Из таблицы видно, что двумерная случайная величина (X, Y) принимает значения (x_i, y_j) с вероятностями p_{ij} , $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$. Очевидно, что события $(X = x_i, Y = y_j)$ образуют полную систему событий, поэтому сумма всех вероятностей p_{ij} , $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, указанных в таблице, равна 1, т.е.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} = 1. \quad (6.1)$$

Далее по теореме сложения имеем:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^n p_{ij} = p_i, \quad (6.2)$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij} = q_j. \quad (6.3)$$

Задача 1. Двумерная случайная величина задана законом распределения

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	1	2	3
-2	0,06	0,12	0,02
0	0,09	0,18	0,03
1	0,15	0,30	0,05

Найти закон распределения составляющих X и Y .

∇ По формулам (6.2) и (6.3) найдем

$$P(X = -2) = 0,06 + 0,12 + 0,02 = 0,2;$$

$$P(Y = 1) = 0,06 + 0,09 + 0,15 = 0,3;$$

$$P(X = 0) = 0,09 + 0,18 + 0,03 = 0,3;$$

$$P(Y = 2) = 0,12 + 0,18 + 0,30 = 0,6;$$

$$P(X = 1) = 0,15 + 0,30 + 0,05 = 0,5;$$

$$P(Y = 3) = 0,02 + 0,03 + 0,05 = 0,1.$$

Итак, законы распределений X и Y задаются таблицами:

X	-2	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Y	1	2	3
P	0,3	0,6	0,1

Очевидно, что $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$ и $\sum_{j=1}^3 q_j = 1$. ▲

Функцией распределения $F(x, y)$ **двумерной случайной величины** называют вероятность совместного выполнения двух неравенств $(X < x, Y < y)$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрический смысл последнего равенства: функция $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (или случайный вектор) (X, Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y) так, что точка (X, Y) будет лежать ниже и левее упомянутой вершины (рис 6.3).

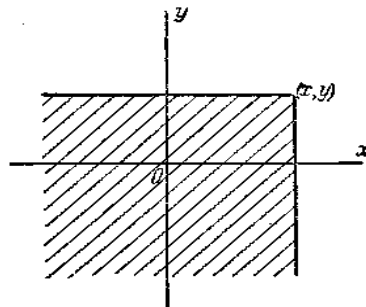


Рис. 6.3

Функция распределения двумерной дискретной с.в. (X, Y) находится суммированием всех вероятностей p_{ij} , для которых $x_i < x, y_j < y$, т.е.

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}. \quad (6.4)$$

Свойства функции распределения $F(x, y)$

1°. $0 \leq F(x, y) \leq 1$;

2°. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$, если $y_1 < y_2$, то $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$;

3°. $F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$;

4°. $F(+\infty, +\infty) = 1$; $F(-\infty, -\infty) = 0$;

5°. $F(x, +\infty) = P(X < x) = F_1(x) = F_X(x)$;

$$F(+\infty, y) = P(Y < y) = F_2(y) = F_Y(y).$$

Пусть требуется найти вероятность попадания случайной точки (вектора) (X, Y) в прямоугольник $D: [\alpha_1 \leq X \leq \beta_1, \alpha_2 \leq Y \leq \beta_2]$. Эта вероятность равна вероятности попадания в прямоугольник $[\beta_1, \beta_2]$ минус вероятность попадания в прямоугольник $[\alpha_1, \beta_2]$, минус вероятность попадания в прямоугольник $[\beta_1, \alpha_2]$, плюс вероятность попадания в прямоугольник $[\alpha_1, \alpha_2]$ (так как мы дважды вычли вероятность попадания в последний прямоугольник). Отсюда получаем формулу, выражающую вероятность попадания в прямоугольник D через функцию распределения:

$$P(\alpha_1 \leq X \leq \beta_1, \alpha_2 \leq Y \leq \beta_2) = F(\beta_1, \beta_2) - F(\alpha_1, \beta_2) - F(\beta_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, \alpha_2). \quad (6.5)$$

6.3. Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины

Плотностью распределения $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют предел отношения вероятности попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами Δx и Δy , примыкающий к точке (x, y) , к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю.

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x; y \leq Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$

Используя формулу (6.5), можно получить формулу для плотности распределения двумерной случайной величины (X, Y) , полагая $D: [x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y]$. Тогда

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x; y \leq Y \leq y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x; y \leq Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y}. \end{aligned}$$

Этот предел дает вторую смешанную частную производную функции $F(x, y)$ по x и y , т.е.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$

Функцию $f(x,y)$ можно изобразить некоторой поверхностью называемой *поверхностью распределения* (рис. 6.4).

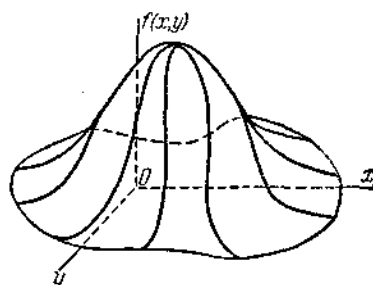


Рис. 6.4

Функцию распределения $F(x,y)$ непрерывной случайной величины можно выразить через плотность:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy. \quad (6.6)$$

Выражение $f(x,y) dx dy$ называется *элементом вероятности* двумерной случайной величины (X,Y) .

Свойства плотности распределения $f(x,y)$

1°. Плотность – неотрицательная функция:

$$f(x,y) \geq 0;$$

2°. Вероятность попадания в любую точку плоскости (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1;$$

3°. Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по области D , т.е.

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y) dx dy.$$

4°. Функция распределения двумерной с.в. может быть выражена через плотность распределения по формуле:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) du dv. \quad (6.7)$$

5°. Плотность распределения одномерных составляющих X и Y могут быть найдены по формулам:

$$f_1(x) = f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy, \quad f_2(y) = f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx.$$

Из свойства 3° следует формула для вычисления вероятности попадания двумерной случайной величины (X,Y) в прямоугольник $D: [\alpha_1 \leq X \leq \beta_1, \alpha_2 \leq Y \leq \beta_2]$:

$$P(\alpha_1 \leq X \leq \beta_1, \alpha_2 \leq Y \leq \beta_2) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x, y) dx dy. \quad (6.8)$$

Задача 2. Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) задана формулой

$$F(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Найти: 1) вероятность того, что в результате испытания составляющие X и Y двумерной случайной величины (X, Y) примут значения, соответственно $X < 2$ и $Y < 3$; 2) плотность вероятности $f(x, y)$.

$$\nabla \quad 1) \quad F(2, 3) = P(X < 2, Y < 3) = (1 - e^{-2})(1 - e^{-3}) \approx 0,79.$$

$$2) \quad F'_x(x, y) = e^{-x}(1 - e^{-y}); \quad F''_{xy}(x, y) = e^{-x} \cdot e^{-y}, \text{ т.е.}$$

$$f(x, y) = e^{-x} \cdot e^{-y}, \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

▲

6.4. Зависимые и независимые случайные величины

Зная законы распределения случайных величин X и Y , входящих в систему, можно найти закон распределения системы (X, Y) только в том случае, если случайные величины X и Y — независимы.

Случайные величины X и Y называются **независимыми**, если независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ при любых x и y .

Сформулируем условие независимости случайных величин.

Теорема 6.1. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y). \quad (6.9)$$

Действительно, если случайные величины X и Y независимы, то события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы. Следовательно,

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y), \text{ т.е.}$$

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Если же имеет место равенство (6.9), то

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y),$$

а это и означает, что случайные величины независимы.

Теорема 6.2. Непрерывные случайные величины X и Y являются независимыми, если плотность непрерывного вектора (X, Y) равна произведению плотностей распределения компонент, т.е.

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y).$$

В задаче 2 функция распределения двумерной случайной величины (X, Y) равна

$$F(x, y) = \underbrace{(1 - e^{-x})}_{F_x(x)} \underbrace{(1 - e^{-y})}_{F_y(y)} = F_x(x) \cdot F_y(y), \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

А плотность распределения

$$f(x, y) = e^{-x} \cdot e^{-y} = f_x(x) \cdot f_y(y).$$

Каждое из этих равенств показывает, что случайные величины X и Y независимы.

6.5. Условные законы распределения

Если случайные величины X и Y , образующие систему (X, Y) зависимы между собой, то для характеристики их зависимости, вводится понятие условных законов распределения случайных величин.

Условным законом распределения одной из случайных величин, входящих в систему (X, Y) , называется ее закон распределения, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение (или попала в определенный интервал).

Условной функцией распределения случайной величины X , при условии A , называют условную вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем x , если условие A имело место. Обозначается:

$$P(X | A) = P(X < x | A).$$

Ряд распределения случайной величины X , вычисленный при условии, что другая случайная величина Y приняла определенное значение y_j , называют **условным законом распределения** случайной компоненты X дискретного случайного вектора (X, Y) .

При этом, условная вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i , при условии, что $Y = y_j$, определяется равенством

$$P(x_i | y_j) = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^m p_{ij}},$$

где p_{ij} , $(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ -закон распределения системы (X, Y) .

Аналогично определяются условный закон распределения и условная вероятность случайной величины Y , при условии $X = x_i$:

$$P(y_j | x_i) = P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}.$$

Задача 3. По условию задачи 1 найти условное распределение случайной величины X , при условии, что случайная величина Y приняла значение равное 2.

$X \backslash Y$	1	2	3
-2	0,06	0,12	0,02
0	0,09	0,18	0,03
1	0,15	0,30	0,05

∇ Выберем значения p_{i2} из столбца таблицы, соответствующего значению $Y = 2$ и разделим их на 0,6.

$$P(x_1 | y_2) = P(X = -2 | Y = 2) = \frac{0,12}{0,6} = 0,2;$$

$$P(x_2 | y_2) = P(X = 0 | Y = 2) = \frac{0,18}{0,6} = 0,3;$$

$$P(x_3 | y_2) = P(X = 1 | Y = 2) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$$

Получаем условный закон распределения с.в. X , при условии, что $Y = 2$:

X	-2	0	1
$P_{Y=2}$	0,2	0,3	0,5

▲

Условная плотность распределения одной из компонент непрерывной случайной величины, вычисленная при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, определяется одной из формул:

$$f_X(x | y_0) = \frac{f(x, y_0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_0) dx}; \quad (6.10)$$

$$f_Y(y | x_0) = \frac{f(x_0, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y) dy}. \quad (6.11)$$

Задача 4. Найти условные плотности распределения компонент X и Y непрерывного вектора (X, Y) с плотностью распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

∇ По формулам (6.10) и (6.11) найдем интегралы, стоящие в знаменателе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_0) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{1-y_0^2}}^{+\sqrt{1-y_0^2}} dx, & \text{если } |y_0| \leq 1 \\ 0, & \text{если } |y_0| > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{1-y_0^2}, & \text{если } |y_0| \leq 1 \\ 0, & \text{если } |y_0| > 1 \end{cases}.$$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x_0^2}, & \text{если } |x_0| \leq 1 \\ 0, & \text{если } |x_0| > 1 \end{cases}.$$

Итак, получим:

$$f_X(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_0) dx} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y_0^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > 1 \end{cases};$$

$$f_Y(y|x_0) = \frac{f(x_0, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y) dy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x_0^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

6.6. Числовые характеристики двумерной случайной величины.

Для системы случайных величин также вводятся числовые характеристики, подобные тем, какие были для одной случайной величины.

Математическим ожиданием системы с.в. (X, Y) называется совокупность двух математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$ дискретных случайных величин X и Y , определяемых равенствами:

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij}, \quad M(Y) = m_y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij}. \quad (6.12)$$

Если (X, Y) - непрерывная система с плотностью распределения $f(x, y)$, тогда

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy. \quad (6.13)$$

Математическое ожидание произведения двух независимых с.в. равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Дисперсией двумерной с.в. (X, Y) называется совокупность двух дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$, определяемых равенствами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - m_x)^2 p_{ij}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_j - m_y)^2 p_{ij}. \quad (6.14)$$

Если (X, Y) - непрерывная система с.в., то:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x, y) dx dy, \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 \cdot f(x, y) dx dy. \quad (6.15)$$

Ковариацией (корреляционным моментом, моментом связи) дискретных с.в. X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих с.в. от их математических ожиданий и обозначается через K_{XY} или $\text{cov}(X, Y)$.

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}. \quad (6.16)$$

Для непрерывной системы (X, Y) ковариация вычисляется по формуле:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) \cdot (y - m_y) f(x, y) dx dy. \quad (6.17)$$

Используя свойства математического ожидания, можно доказать, что

$$K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y). \quad (6.18)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} K_{XY} &= M((X - m_x)(Y - m_y)) = M(XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y) = M(XY) - m_y M(X) - \\ &\quad - m_x M(Y) + m_x m_y = M(XY) - m_x m_y - m_x m_y + m_x m_y = M(XY) - M(X) \cdot M(Y). \end{aligned}$$

Для непрерывного случая получим:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y) dx dy - m_x m_y. \quad (6.19)$$

Ковариация с.в. X и Y описывает связь между ними. Размерность ковариации равна произведению размерностей с.в.

Свойства ковариации K_{XY}

1°. Симметричность: $K_{XY} = K_{YX}$.

2°. Дисперсия с.в. есть ковариация ее с самой собой:

$$K_{XX} = D(X), \quad K_{YY} = D(Y).$$

3°. Если случайные величины X и Y независимы, то их ковариация равна нулю: $K_{XY} = 0$.

4°. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K_{XY}$

5°. Постоянный множитель можно выносить за знак ковариации:

$$K_{cX, Y} = cK_{XY} = K_{X, cY}.$$

6°. Ковариация не изменится, если к одной из с.в. (или к обеим сразу) прибавить постоянную, т.е.

$$K_{c+X,Y} = K_{XY} = K_{X,c+Y} = K_{c+X,c+Y}.$$

7°. Ковариация двух с.в. по абсолютной величине не превосходит их с.к.о.:

$$|K_{XY}| \leq \sigma_x \sigma_y.$$

Случайные величины X и Y называются **коррелированными**, если $K_{XY} \neq 0$, в противном случае ($K_{XY} = 0$) – **некоррелированными**.

Из свойства 3° и последнего определения следует, что, если с.в. X и Y коррелированные, то они являются зависимыми. Однако, из некоррелированности X и Y не следует их независимость. Признаком наличия зависимости между с.в. является отличие от нуля ковариации. Но, если ковариация будет мала, то это не даст хорошую оценку связи между с.в.

В качестве числовой характеристики зависимости между с.в. X и Y берут безразмерную величину- коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции двух с.в. X и Y называется отношение их ковариации к произведению их с.к.о.:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}. \quad (6.20)$$

Свойства коэффициента корреляции r_{XY}

- 1°. $|r_{XY}| \leq 1$;
- 2°. Если с.в. X и Y независимы, то $r_{XY} = 0$, если же $r_{XY} = 0$, то о зависимости или независимости с.в. X и Y ничего сказать нельзя;
- 3°. Если $r_{XY} \neq 0$, то с.в. X и Y зависимые;
- 4°. Если $|r_{XY}| = 1$, то с.в. X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Покажем на примере, что некоррелированные с.в. X и Y могут быть зависимыми. В задаче 4 плотность распределения двумерной системы (X, Y) выражается формулой:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

А плотности распределения компонент X и Y :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & \text{если } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |y| > 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что

$$f(x, y) \neq f_x(x) \cdot f_y(y),$$

значит, с.в. X и Y зависимые.

$$m_x = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx = 0,$$

аналогично, $m_y = 0$. Вычислим ковариацию по формуле (6.19):

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y) dx dy - m_x m_y = \frac{1}{2\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Т.к. $K_{XY} = 0$, то с.в. X и Y - некоррелированные.

Используя свойства математического ожидания и дисперсии можно доказать, что, если с.в. X и Y связаны линейной зависимостью, т.е.

$Y = aX + b$, где $a \neq 0$, то

$$|r_{XY}| = 1,$$

причем,

$$r_{XY} = \begin{cases} 1, & \text{при } a > 0, \\ -1, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Решение типовых задач

6.1. В урне 2 белых, 1 черный и 1 красный шар. Из нее наудачу извлекают 2 шара. Составить закон распределения двумерной системы (X, Y) и законы распределения компонент X и Y , если с.в. X — это число белых, а с.в. Y — число черных шаров в выборке. Найти $F_1(x)$, $F_2(y)$, $F(x, y)$.

∇ С.в. X может принимать значения 0, 1, 2, а с.в. Y — значения 0, 1. Найдем соответствующие вероятности:

$$\begin{aligned} p_{11} &= P(X=0; Y=0) = 0; & p_{22} &= P(X=1; Y=1) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_4^2} = \frac{1}{3}; \\ p_{12} &= P(X=0; Y=1) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_4^2} = \frac{1}{6}; & p_{31} &= P(X=2; Y=0) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}; \\ p_{21} &= P(X=1; Y=0) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_4^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; & p_{32} &= P(X=2; Y=1) = 0. \end{aligned}$$

Ряд распределения системы (X, Y) имеет вид:

X \ Y	0	1	p_i
	0	1	
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
q_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Законы распределения составляющих X и Y имеет вид:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Используя свойство 5°, получим, что

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = P(X < x), \text{ и } F_Y(y) = F(+\infty, y) = P(Y < y).$$

Тогда, функции распределения компонент X и Y :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{6}, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{5}{6}, & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2, \end{cases}; \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } 0 < y \leq 1, \\ 1, & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Используя формулу (6.4), находим функцию распределения $F(x, y)$:

$Y \backslash X$	$y \leq 0$	$0 < y \leq 1$	$y > 1$
$x \leq 0$	0	0	0
$0 < x \leq 1$	0	0	$\frac{1}{6}$
$1 < x \leq 2$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
$x > 2$	0	$\frac{1}{2}$	1



6.2. Непрерывная двумерная с.в. (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)(1+y^2)}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Составить функцию распределения $F(x, y)$.

∇ По формуле (6.7)

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{\pi(1+u^2)(1+v^2)} du dv = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} u \Big|_{-\infty}^x \cdot \operatorname{arctg} v \Big|_{-\infty}^y =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{arctg} y}{\pi} + \frac{1}{2} \right).$$

▲

6.3. Найти плотность распределения двумерного случайного вектора (X, Y) , если известна функция распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-3x-2y}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

∇ Известно, что

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y),$$

поэтому

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-3x-2y}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

▲

6.4. Непрерывная двумерная с.в. (X, Y) равномерно распределена (т.е. $f(x, y) = c$) внутри треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(4,0)$. Найти: 1) совместную плотность $f(x, y)$; 2) $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; 3) вероятность события $A = (0 < X < 1; 1 < Y < 3)$.

∇ 1) Из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1,$$

Следует, что

$$\int_0^4 dx \int_0^{4-x} c dy = c \int_0^4 (4-x) dx = c \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 8c = 1.$$

Т.е. $c = \frac{1}{8}$. Следовательно,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 4, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$2) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{4-x} \frac{1}{8} dy = \frac{1}{8} \Big|_0^{4-x} = \frac{4-x}{8}, \quad x \in (0, 4),$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{4-y}{8}, \quad y \in (0, 4).$$

3) По формуле (6.8):

$$P(\alpha_1 \leq X \leq \beta_1, \alpha_2 \leq Y \leq \beta_2) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x, y) dx dy,$$

значит,

$$P(0 \leq X \leq 1, 1 \leq Y \leq 3) = \frac{1}{8} \cdot \int_0^1 dx \int_1^3 dy = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 2 = 0,25.$$

▲

6.5. Дана двумерная функция распределения

$$F(x, y) = 2 \sin x \cdot \sin y; \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{3}$.

∇ Согласно формуле (6.5):

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq Y \leq \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 2 \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

▲

6.6. Закон распределения двумерной с.в. задан таблицей:

X \ Y	1	3	3
0,1	0,12	0,08	0,40
0,2	0,16	0,10	0,14

Определить, зависимы ли компоненты X и Y . Найти r_{XY} .

∇ Находим законы распределения составляющих X и Y :

X	0,1	0,2
p_i	0,6	0,4

Y	1	2	3
q_j	0,28	0,18	0,54

Проверим выполнение

условия

$p_{ij} = p_i \cdot q_j$ для всех пар индексов $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$:

$$p_1 = 0,6; \quad q_1 = 0,28; \quad p_{11} = 0,12,$$

$$p_1 \cdot q_1 = 0,6 \cdot 0,28 = 0,168 \neq p_{11}.$$

Условие не выполняется, значит, с.в. X и Y - зависимые.

По таблицам распределения компонент X и Y вычислим математические ожидания:

$$M(X) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,06 + 0,08 = 0,14,$$

$M(Y) = 1 \cdot 0,28 + 2 \cdot 0,18 + 3 \cdot 0,54 = 0,28 + 0,36 + 1,62 = 2,26$. (Заметим, что вычисление математических ожиданий можно было бы осуществить и по формулам (6.12)).

Находим дисперсии составляющих:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = (0,1)^2 \cdot 0,6 + (0,2)^2 \cdot 0,4 - (0,14)^2 = 0,022 - 0,0196 = 0,0024,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 1^2 \cdot 0,28 + 2^2 \cdot 0,18 + 3^2 \cdot 0,54 - (2,26)^2 = 5,86 - 5,1076 = 0,7524.$$

Значит,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,0024} \approx 0,0490, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,7524} \approx 0,8674.$$

Чтобы вычислить корреляционный момент K_{XY} по формуле (6.18), необходимо найти $M(XY)$:

$$M(XY) = 0,1 \cdot 1 \cdot 0,12 + 0,1 \cdot 2 \cdot 0,08 + 0,1 \cdot 3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 1 \cdot 0,16 + 0,2 \cdot 2 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 3 \cdot 0,14 = \\ = 0,012 + 0,016 + 0,12 + 0,032 + 0,04 + 0,084 = 0,304.$$

$$\text{Теперь } K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = 0,304 - 0,14 \cdot 2,26 = -0,0124 \neq 0.$$

Находим коэффициент корреляции (формула (6.20)):

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0,0124}{0,049 \cdot 0,8674} \approx -0,292. \quad \blacktriangle$$

6.7. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2 - 3\sin x$, если плотность вероятности случайной величины X есть $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

∇ По формуле (6.13)

$$M(Y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3\sin x) \frac{1}{2} \cos x dx = 2, \quad M(Y^2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3\sin x)^2 \frac{1}{2} \cos x dx = 7.$$

Дисперсия

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 7 - 2^2 = 3.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.8. Закон распределения двумерной с.в. (X, Y) задан таблицей

$X \backslash Y$	-1	1
0	0,1	0,06
1	0,3	0,18
2	0,2	0,16

Найти: 1) одномерные законы распределения компонент X и Y ; 2) вероятность $P(X \geq Y)$; 3) функцию распределения $F(x, y)$.

Ответ: 2) $P(X \geq Y) = 0,94$.

6.9. Известна функция распределения $F(x, y)$ двумерной дискретной с.в. (X, Y) .

$X \backslash Y$	$y \leq 0$	$0 < y \leq 1$	$1 < y \leq 2$	$y > 3$
$x \leq 0$	0	0	0	0
$0 < x \leq 1$	0	0,5	0,5	0,5
$1 < x \leq 2$	0	0,5	0,75	0,75
$2 \leq x \leq 3$	0	0,5	0,75	0,875
$x > 3$	0	0,5	0,75	1

Составить функции распределения $F_x(x)$ и $F_y(y)$ компонент X и Y , а затем построить законы их распределения.

6.10. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго- 0,6. Оба стрелка независимо друг от друга делают по два выстрела в цель. Пусть с.в. X - это число попаданий 1-го стрелка, а с.в. Y - второго. Найти: 1) закон распределения с.в. X и Y ; 2) совместный закон распределения системы с.в. (X, Y) ; 3) функцию распределения системы $F(x, y)$.

6.11. Монета бросается до первого выпадения герба, но не более 3 раз. С.в. X - число выпадений решки, Y - число подбрасываний. Описать закон распределения случайного вектора (X, Y) . Найти одномерные законы распределения компонент X и Y . Вычислить вероятность $P(X < Y)$.

Ответ: $P(X < Y) = 0,875$.

6.12. Является ли функция $F(x, y) = xy$, где $x, y \in [0, 1]$, функцией распределения некоторого случайного вектора (X, Y) ? Ответ обосновать.

6.13. Найти вероятность того, что случайно брошенная точка с координатами (X, Y) попадет в область D , определенную неравенствами $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$, если функция распределения координат этой точки равна

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + 2^{-x^2 - 2y^2} - 2^{-x^2} - 2^{-2y^2}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ответ: $P \approx 0,1077$.

6.14. Известна функция плотности двумерного случайного вектора (X, Y) (рис. 6.5):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}, & \text{если } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \\ 0, & \text{если } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1. \end{cases}$$

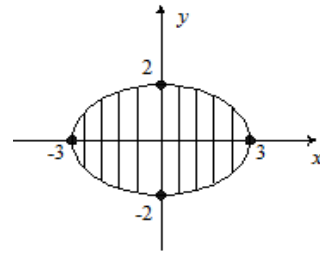


Рис. 6.5

Найти плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ компонент X и Y .

6.15. Плотность совместного распределения с.в. задана формулой:

$$f(x, y) = \begin{cases} a(1 - xy^3), & \text{при } |x| \leq 1, |y| \leq 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти постоянную a и коэффициент корреляции.

Ответ: $a = \frac{1}{4}$; $r_{XY} \approx -\frac{1}{5}$.

6.16. Двумерная с.в. (X, Y) задана законом распределения

Y	1	2	3	4
X				
1	0,07	0,04	0,11	0,11
2	0,08	0,11	0,06	0,08
3	0,09	0,13	0,10	0,02

Проверить, зависимы ли с.в. X и Y . Найти K_{XY} .

Ответ: $K_{XY} = -0,2145$.

6.17. Закон распределения дискретной двумерной с.в. задан таблицей:

Y	-1	0	1
X			
0	0,15	0,40	0,05
1	0,20	0,10	0,10

Найти коэффициент корреляции r_{XY} .

Ответ: $r_{XY} \approx -0,06$.

6.18. Непрерывная двумерная с.в. (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x+y), & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Зависимы ли с.в. X и Y ? Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. X и Y .

Ответ: $M(X) = M(Y) = \frac{7}{12}$; $D(X) = D(Y) = \frac{11}{144}$.

6.19. Случайный вектор (X, Y) имеет функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + 2^{-x-y} - 2^{-x} - 2^{-y}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти: 1) двумерную плотность распределения; 2) вероятность попадания случайной точки с координатами (X, Y) в треугольник с вершинами $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(2,8)$.

Ответ: $P \approx 0,0208$.

6.20. Закон распределения двумерной с.в. (X, Y) задан таблицей

Y	1	2	3
X			
1	0,10	0,10	0,10
2	0,05	0,05	0,05
3	0,10	0,10	0,10

Определить, зависимы ли компоненты X и Y . Ответ обосновать.

6.21. Система двух непрерывных с.в. (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & \text{при } -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: 1) константу C ; 2) определить зависимы или независимы X и Y ; 3) составить функцию распределения $F(x, y)$.

Ответ: 1) $C = \frac{1}{6}$; 2) независимы.

6.22. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону

$$f(x, y) = \frac{A}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}.$$

Найти: а) коэффициент A ; б) вероятность попадания системы с.в. (X, Y) в пределы квадрата, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину 2; в) установить, являются ли величины X и Y зависимыми и найти $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

Варианты индивидуального задания

Вариант № 1

1. В барабане револьвера 7 гнезд. Из них в 5 заложены патроны. Барабан приводится во вращение, после чего нажимается спусковой крючок. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, оба раза выстрел произойдет.

2. В электрическую цепь включены последовательно два предохранителя. Вероятность выхода из строя 1-го предохранителя равна 0,6, а 2-го – 0,2. Определить вероятность прекращения питания в результате выхода из строя хотя бы одного из предохранителей.

3. На фабрике, изготавливающей болты, 1-я машина производит 25 % всех изделий, 2-я – 35 %, 3-я – 40 %. Брак в их продукции составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 %. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным?

4. Производится 5 независимых выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Построить ряд распределения случайной величины X – числа поражений мишени. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

5. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{9}, & -2 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X . Построить графики функции и плотности распределения.

Вариант № 2

1. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

2. В связке 5 различных ключей, среди которых один соответствует замку в двери. Делается попытка открыть дверь наудачу, неподходящий ключ больше не используется. Найти вероятность того, что: а) дверь будет открыта с первого раза; б) будет сделано не более двух попыток.

3. По данным переписи 1951 года, в Англии и Уэльсе среди отцов, имеющих сыновей, оказалось 13 % темноглазых и 87 % светлоглазых. У темноглазых отцов оказалось 39 % темноглазых и 61 % светлоглазых сыновей. У светлоглазых отцов оказалось 10 % темноглазых и 90 % светлоглазых сыновей. Какова вероятность того, что наугад выбранные среди этого населения отец и сын имеют глаза одинакового цвета?

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{49}, & \text{при } 0 < x \leq 7, \\ 1, & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

5. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей

$X \backslash Y$	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

Найти: 1) законы распределения одномерных случайных величин X и Y ; 2) условные законы распределения случайной величины X при условии $Y = 2$ и случайной величины Y при условии $X = 1$.

Вариант № 3

1. В ящике лежат 5 белых и 10 черных шаров, различающихся только цветом. Наугад вынута 3 шара. Найти вероятность того, что, по крайней мере, один шар окажется белым.

2. В лотерее 1000 билетов, половина из которых выигрышные. Найти вероятность того, что из двух извлеченных билетов, хотя бы один выигрышный.

3. Рабочий обслуживает 12 одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придется регулировать 4 станка?

4. Плотность распределения случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2}$$

Найти значение величины A и функцию распределения $F(x)$.

5. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус меньше 3 мин.

Вариант № 4

1. В лифт 7-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах (предполагается, что каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго).

2. Вероятность попадания в цель при каждом орудийном выстреле равна 0,2. Найти вероятность поражения цели, если в 2 % случаев орудие отказывает, и выстрела не происходит.

3. У сборщика имеется 80 деталей, 36 из которых изготовлены в 1-ом цехе, 24 – во втором и 20 – в третьем. Вероятность того, что деталь, изготовленная в 1-м цехе, стандартна, равна 0,8; для 2-го цеха – 0,6; для 3-го – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь стандартна.

4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение с. в. X , если закон ее распределения задан таблицей:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

5. Даны плотности вероятности независимых составляющих двумерной случайной величины (X, Y) :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 5e^{-5x} & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ 2e^{-2y} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Найти: 1) выражение совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины; 2) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y ; 3) коррелированы или некоррелированы эти случайные величины.

Вариант № 5

1. На складе имеется 15 телевизоров, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наугад телевизоров, окажутся три телевизора Львовского завода.

2. В электрическую цепь включены последовательно четыре сопротивления, которые могут выйти из строя независимо друг от друга. Вероятность того, что перегорит первое сопротивление, равна 0,1; второе – 0,2; третье – 0,15; четвертое – 0,3. Определить вероятность того, что цепь выйдет из строя.

3. В тире имеется 5 ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наугад.

4. Дана дифференциальная функция непрерывной с.в. X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$ и построить ее график.

5. В урне 2 белых, 2 черных и 2 красных шара. Из нее наудачу извлекают 2 шара. Составить закон распределения двумерной системы (X, Y) и законы распределения компонент X и Y , если с.в. X — это число черных, а с.в. Y — число красных шаров в выборке. Найти $F_1(x)$, $F_2(y)$, $F(x, y)$.

Вариант № 6

1. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят в должном порядке (справа налево или слева направо).

2. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти?

3. У рыбака есть три излюбленных места рыбалки, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность клева на 1-м месте равна $\frac{1}{3}$, на 2-м — $\frac{1}{2}$, на 3-м — $\frac{1}{4}$. Рыбак забросил удочку в наугад выбранном месте, и рыбка клюнула. Найти вероятность того, что он удил на 1-м месте.

4. Охотник, имея два патрона, стреляет по дичи до первого попадания. Найти дисперсию числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

5. Задан совместный ряд распределения случайных величин X и Y .

$X \backslash Y$	1	2	3
3	0,1	0,3	0,2
2	0,2	0,1	0,1

Требуется найти: 1) безусловный ряд распределения каждой случайной величины; 2) условный ряд распределения случайной величины X , при условии $X = M$; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционный момент и коэффициент корреляции системы (X, Y) .

Вариант № 7

1. В группе 12 студентов, 8 из которых – отличники. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

2. Стрелок ведет огонь по цели, движущейся на него. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4 и увеличивается на 0,1 при каждом последующем выстреле. Какова вероятность получить два попадания при трех независимых выстрелах?

3. Турист может купить билет в одной из трех касс вокзала. Вероятность того, что он направится к 1-й кассе – $\frac{1}{2}$, ко 2-й – $\frac{1}{3}$, к 3-й – $\frac{1}{6}$. Вероятности того, что билетов в кассах уже нет, такие: в 1-й кассе – $\frac{1}{5}$, во 2-й – $\frac{1}{6}$, в 3-й – $\frac{1}{8}$. Турист билет купил. Какова вероятность того, что он купил билет в 1-й кассе?

4. В ящике 8 деталей, из которых 3 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Построить ряд распределения случайной величины X – числа окрашенных деталей среди взятых.

5. Известна функция плотности двумерного случайного вектора (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}, & \text{если } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \\ 0, & \text{если } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} > 1. \end{cases}$$

Найти плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ компонент X и Y .

Вариант № 8

1. Из 80 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, курсант подготовил 70. Какова вероятность того, что вынутый курсантом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найти вероятность поражения цели, т.е. того, что будет хотя бы одно попадание.

3. В сосуд, содержащий 3 шара, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание. Построить график плотности вероятности случайной величины X .

5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, для второго- 0,7. Оба стрелка независимо друг от друга делают по два выстрела в цель. Пусть с.в. X - это число попаданий 1-го стрелка, а с.в. Y - второго. Найти: 1) закон распределения с.в. X и Y ; 2) совместный закон распределения системы с.в. (X, Y) ; 3) функцию распределения системы $F(x, y)$.

Вариант № 9

1. 12 мест стоянки автомобилей расположены в один ряд. На стоянке случайным образом размещены 8 автомобилей. Какова вероятность того, что 4 пустых места следуют одно за другим?

2. Шестеро охотников увидели волка и одновременно выстрелили в него. Считая, что каждый из охотников на таком расстоянии обычно убивает волка в каждом случае из трех, определить вероятность того, что волк будет убит.

3. В некотором производстве вероятность для отдельной детали оказаться бракованной, равна 0,005. Какова вероятность того, что в партии из 10 000 изделий бракованных окажется ровно 40?

4. Дана дифференциальная функция непрерывной с. в. X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти $F(x)$, построить графики дифференциальной и интегральной функций.

5. Задан совместный ряд распределения случайных величин X и Y .

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0,1	0,3	0,2
-1	0,2	0,1	0,1

Требуется найти: 1) безусловный ряд распределения каждой случайной величины; 2) условный ряд распределения случайной величины X , при условии $X = M$; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционный момент и коэффициент корреляции системы (X, Y) .

Вариант № 10

1. В автобусе 5 пассажиров. Найти вероятность того, что на каждой из оставшихся 5 остановок будет сходить по одному человеку (предполагается, что каждый из пассажиров с равной вероятностью может выйти на любой из остановок).

2. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает наугад. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем три раза.

3. На фабрике, изготавливающей болты, 1-я машина производит 25 %, 2-я – 35 %, 3-я – 40 % всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 %. Какова вероятность, что случайно выбранный болт произведен третьей машиной, если он оказался дефектным?

4. Охотник, имея 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания. Составить закон распределения числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

5. Задан совместный ряд распределения случайных величин X и Y .

$X \backslash Y$	1	2	3
-2	0,1	0,3	0,2
1	0,2	0,1	0,1

Требуется найти: 1) безусловный ряд распределения каждой случайной величины; 2) условный ряд распределения случайной величины X , при условии $X = M$; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционный момент и коэффициент корреляции системы (X, Y) .

Вариант № 11

1. Производится выстрел в быстро вращающийся диск, разделенный на 20 равных секторов, попеременно окрашенных в черный и белый цвета. Какова вероятность, что пуля попадет в один из белых секторов?

2. Для участия в олимпиаде по математике прибыла команда в составе 12 студентов, 5 из них отличники. На первый тур по жребию из команды отбирают троих человек. Какова вероятность того, что все выбранные участники окажутся отличниками учебы?

3. Прибор состоит из 6 элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время t равна 0,6. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время t прибор будет работать безотказно?

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 3x^2 + 2x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Требуется найти: а) плотность вероятности; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

5. Задан совместный ряд распределения случайных величин X и Y .

$X \backslash Y$	1	3	5
2	0,20	0,23	0,17
1	0,12	0,15	0,13

Требуется найти: 1) безусловный ряд распределения каждой случайной величины; 2) условный ряд распределения случайной величины X , при условии $X = 2$; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционный момент и коэффициент корреляции системы (X, Y) .

Вариант № 12

1. В течение промежутка времени от 10 час до 10 час 30 мин должен последовать телефонный звонок. Какова вероятность, что звонок последует в первые 10 мин указанного промежутка времени (момент звонка случаен).

2. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,9; вторым – 0,8; третьим – 0,7. Выстрелили трое. Какова вероятность того, что в цель попадет только один из стрелков?

3. Контрольная работа состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос приведено 5 ответов, один из которых правильный. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан не менее, чем на 3 вопроса?

4. Стрелок, имея 4 патрона, стреляет до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить закон распределения случайной величины X – числа использованных патронов. Найти $M(X)$.

5. Найти вероятность того, что случайно брошенная точка с координатами (X, Y) попадет в область D , определенную неравенствами $1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3$, если функция распределения координат этой точки равна

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + 2^{-x^2-2y^2} - 2^{-x^2} - 2^{-2y^2}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вариант № 13

1. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. Для выполнения некоторой работы наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

2. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны, соответственно, 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.

3. Микросхема может принадлежать к одной из 3-х партий с вероятностями $P_1 = 0,25$; $P_2 = 0,5$; $P_3 = 0,25$. Вероятности того, что микросхема проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что микросхема проработает заданное число часов.

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Производится три выстрела. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – числа непопаданий в цель. Найти $M(X)$.

5. Закон распределения дискретной двумерной с.в. задан таблицей:

$Y \backslash X$	-1	0	1
2	0,25	0,40	0,05
-1	0,10	0,15	0,05

Найти коэффициент корреляции r_{XY} .

Вариант № 14

1. Из 30 вопросов студент выучил 20. Найти вероятность того, что среди 3-х наугад выбранных вопросов будут 2 вопроса, которые студент выучил.

2. В первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных. Во второй урне, соответственно, 10, 8, 6. Из обеих урн наудачу извлекли по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

3. Вероятность того, что стрелок попадает в цель при одном выстреле, равна 0,7. Производится 5 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что в мишени окажется хотя бы одна пробоина?

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{5}x, & \text{при } 0 \leq x \leq 5, \\ 1, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Требуется найти: а) плотность вероятности; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

5. Найти совместную плотность двумерной случайной величины (X, Y) и вероятность ее попадания в область D – прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, если известна ее функция распределения:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & , \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Вариант № 15

1. В партии из 20 однотипных деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наугад для проверки 5 деталей, 2 окажутся нестандартными.

2. Слово «папах» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются и из них извлекаются по очереди и раскладываются в ряд какие-то четыре. Какова вероятность получить таким путем слово «папа».

3. В квартире 4 электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна $\frac{5}{6}$. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не менее половины лампочек?

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{3}{4}\pi, \\ \frac{x^2}{49}, & \text{при } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi, \\ 1, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

5. Закон распределения дискретной двумерной с.в. задан таблицей:

Y \ X	-1	0	1
0	0,15	0,40	0,05
1	0,20	0,10	0,10

Найти коэффициент корреляции r_{XY} .

Вариант № 16

1. В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди них окажется только одно окрашенное изделие.

2. Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания для них равны соответственно: 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

3. Имеются три урны: в 1-й из них 4 белых и 3 черных; во 2-й – 5 белых и 2 черных, в 3-й – 3 белых шара. Из наугад выбранной урны извлекли белый шар. Найти вероятность того, что шар извлечен из 3-й урны.

4. Составить функцию распределения для дискретной случайной величины X – числа появлений события A при двух независимых испытаниях, если в каждом испытании $p = \frac{1}{3}$.

5. Совместная плотность двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + xy + y^2) & , \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & , \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: 1) постоянную C ; 2) плотности вероятности одномерных составляющих; 3) их условные плотности; 4) числовые характеристики $M(X), M(Y), D(X), D(Y), K_{XY}$.

Вариант № 17

1. Из 10 приборов 4 новых. Наугад взято 3 прибора. Какова вероятность, что среди них 2 новых?

2. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8, а вторым стрелком – 0,7. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадет в цель, а другой нет?

3. Имеются три одинаковые на вид урны. В 1-й урне 15 белых шаров, во 2-й – 10 белых и 5 черных шаров, в 3-й – 15 черных шаров. Из выбранной наугад урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из 1-й урны.

4. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если ее закон распределения имеет вид:

X	0	1	3	4
P	0,2	?	0,3	0,4

Чему равно среднее квадратическое отклонение с. в. X ?

5. Система двух непрерывных с.в. (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & \text{при } -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: 1) константу C ; 2) определить зависимы или независимы X и Y ; 3) составить функцию распределения $F(x, y)$.

Вариант № 18

1. Десять студентов условились ехать в определенном электропоезде, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 10 вагонов? (Предполагается, что все возможности в распределении студентов по вагонам равновероятны).

2. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара. Найти вероятность, что оба шара белые.

3. Нормальный режим прибора наблюдается в 80 % всех случаев работы прибора; ненормальный – в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t .

4. Стрелок делает по мишени 3 выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$.

5. Случайный вектор (X, Y) имеет функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + 2^{-x-y} - 2^{-x} - 2^{-y}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти: 1) двумерную плотность распределения; 2) вероятность попадания случайной точки с координатами (X, Y) в треугольник с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(2, 8)$.

Вариант № 19

1. В группе 6 юношей и 18 девушек. По жребию разыгрывается один билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

2. Процент отсева среди студентов-первокурсников составляет 10 %. Найти вероятность того, что из 900 будет отчислено от 80 до 110 студентов?

3. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Требуется найти: а) плотность вероятности; б) $M(X)$; в) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

5. Двумерная с.в. (X, Y) задана законом распределения

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0,07	0,04	0,11	0,11
2	0,08	0,11	0,06	0,08
3	0,09	0,13	0,10	0,02

Проверить, зависимы ли с.в. X и Y . Найти K_{xy} .

Вариант № 20

1. 8 различных книг расставляются наугад на одной полке. Определить вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

2. В ящике находится 7 деталей 1-го сорта, 5 – 2-го сорта, 3 – 3-го сорта. Из ящика последовательно вынимают три детали. Какова вероятность того, что первая деталь окажется первого сорта, вторая – второго сорта и третья – третьего сорта?

3. Первый завод поставляет $\frac{2}{3}$ всех изделий, поступающих на производство, второй – $\frac{1}{3}$. Вероятность безотказной работы (надежность) прибора, изготовленного первым заводом, равна 0,93; вторым – 0,96. Определить надежность прибора, поступившего на производство.

4. Два стрелка делают по выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5; вторым – 0,4. Построить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой с.в.

5. Задана совместная плотность двумерной случайной величины (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Найти функцию распределения $F(x, y)$.

Вариант № 21

1. На контроль поступила партия из 200 деталей, среди которых 5 бракованных. Найти вероятность того, что из 2-х взятых наугад деталей обе окажутся стандартными.

2. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,9, а вторым стрелком – 0,8. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком, если стрелки сделали по одному выстрелу.

3. Два автомата производят одинаковые детали. Производительность 1-го автомата вдвое больше производительности 2-го. Первый автомат производит 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Наудачу взятая деталь оказалась отличного качества. Найти вероятности того, что эта деталь произведена первым автоматом.

4. Игральную кость бросают 3 раза. Построить ряд распределения случайной величины X – числа выпадений шестерки. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

5. Плотность совместного распределения с.в. X и Y задана формулой:

$$f(x, y) = \begin{cases} a(1 - xy^3), & \text{при } |x| \leq 1, |y| \leq 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти постоянную a и коэффициент корреляции.

Вариант № 22

1. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 выбранных наугад билета окажутся выигрышными.

2. Вероятность того, что в течение рабочей смены первый станок не потребует ремонта, равна 0,5, для второго станка такая вероятность равна 0,6, а для третьего – 0,8. Найти вероятности таких событий: а) A – ни один из станков не потребует ремонта; б) B – первый потребует ремонта, а второй и третий – нет.

3. На самолете имеется 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого из них в полете равна p . Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

4. Дана дифференциальная функция распределения случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$ и построить ее график.

5. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена с постоянной

совместной плотностью внутри квадрата $OABC$, где $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$. Найти выражение совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины (X,Y) .

Вариант № 23

1. В ящике вперемешку лежат 12 изделий одного типа двух различных цветов: 7 штук синего и 5 – красного. Наугад выбрано 7 изделий. Какова вероятность того, что среди них 3 красных изделия?

2. Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем 5 книг стоят по 4 руб. каждая, 3 книги – по 2 руб. и 2 книги – по 1 руб. Найти вероятность того, что взятая наудачу книга стоит не дороже двух рублей.

3. В первой урне – 6 белых шаров и 4 черных; во второй – 8 белых и 6 черных. Из первой урны во вторую перекалывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белым?

4. Стрелок, имея три патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,7. Найти закон распределения случайной величины X – числа произведенных выстрелов; найти $M(X)$.

5. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{(x+3)^2}{25}, & -3 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X . Построить графики функции и плотности распределения.

Вариант № 24

1. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность того, что среди трех выбранных наугад вопросов студент знает: а) все вопросы; б) два вопроса.

2. Производится 4 независимых выстрела. Вероятность поражения цели при каждом из выстрелов равна 0,4. Какова вероятность того, что первые два выстрела будут попаданиями, а последующие два – промахами?

3. Вероятность того, что к бензоколонке подъедет грузовая автомашина, равна $\frac{3}{5}$, а легковая – $\frac{2}{5}$. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность, что это – грузовая машина.

4. Число α -частиц, достигающих счетчика в некотором опыте, является случайной величиной X , распределенной по следующему закону:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,151	0,097	0,054	0,026	0,011	0,07

Найти: а) математическое ожидание с.в. X ; б) вероятность того, что число частиц, достигших счетчика, не меньше 4.

5. Непрерывная случайная величина X распределена в интервале $(0;1)$ по закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \in [0;1] \\ 0 & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X^2$.

Вариант № 25

1. Для проведения соревнований 10 команд, среди которых 3 лидера, спортсмены распределяются путем жеребьевки на 2 группы по 5 команд в каждой. Какова вероятность того, что 2 лидера попадут в одну группу, а один – в другую?

2. Известно, что при каждом измерении равновероятны как положительная, так и отрицательная ошибки. Какова вероятность того, что при трех независимых измерениях все ошибки будут положительными?

3. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 черных и по 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?

4. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{k}, & \text{при } 0 < x \leq k, \\ 0, & \text{при } x > k \ (k > 0). \end{cases}$$

Найти: а) параметр k ; б) функцию распределения вероятности $F(x)$; в) вероятность $P(1 < X < 2)$.

5. Закон распределения двумерной с.в. (X, Y) задан таблицей

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,10	0,10	0,10
2	0,05	0,05	0,05
3	0,10	0,10	0,10

Определить, зависимы ли компоненты X и Y . Ответ обосновать.

Вариант № 26

1. В лифт 7-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах (предполагается, что каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго).

2. Вероятность того, что курсант сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,85; третий – 0,8. Какова вероятность того, что курсант сдаст не менее двух экзаменов?

3. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

4. Случайная величина X распределена по закону:

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найти: а) $P(2 \leq X < 5)$; б) $M(X)$ и $D(X)$.

5. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-0,1x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Найти: а) коэффициент A ; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание и дисперсию; г) вероятность того, что в результате испытания случайная величина X попадает в интервал $(-1; 1)$.

Вариант № 27

1. 10 различных книг расставлены на полке наудачу. Какова вероятность того, что при этом 3 определенные книги окажутся поставленными вместе.

2. Экзаменационные работы зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

3. В пирамиде 4 винтовки с оптическим прицелом и 6 винтовок без оптического прицела. Вероятность поражения цели при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом?

4. На факультете успеваемость составляет 90 %. Наудачу выбираются 40 студентов. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного числа успевающих курсантов, оказавшихся в выбранной группе.

5. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X . Найти параметр γ , математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения случайной величины X , вероятность выполнения неравенства $-1 < X < 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma+1}, & x \in [-1, 2], \\ 0, & x \notin [-1, 2]. \end{cases}$$

Вариант № 28

1. На сборку поступило 3000 деталей с первого автомата и 2000 со второго. Первый автомат дает 0,2 % брака, а второй – 0,3 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали.

2. В урне 12 шаров белого цвета и 8 – черного. Какова вероятность того, что при извлечении из урны сразу трех шаров все они окажутся белого цвета.

3. Стрельба производится по двум мишеням типа A , четырем – типа B и четырем – типа C . Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,3, типа B – 0,2, типа C – 0,4.

Найти вероятность поражения цели при одном выстреле, если мишень выбирается наугад.

4. Монета бросается 3 раза. Для случайного числа появления герба найти: а) интегральную функцию распределения вероятности; б) математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону

$$f(x, y) = \frac{A}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}.$$

Найти: а) коэффициент A ; б) вероятность попадания системы с.в. (X, Y) в пределы квадрата, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину 2; в) установить, являются ли величины X и Y зависимыми и найти $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

Вариант № 29

1. В лотерее разыгрываются 100 билетов. Выигрыш выпал на 20 билетов. Некто приобрел 5 билетов. Найти вероятность того, что выигрыш выпадет на все 5 билетов.

2. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

3. Стрельба ведется по пяти мишеням типа A , трем – типа B , двум – типа C . Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4, типа B – 0,1, типа C – 0,15. Выстрел в одну из мишеней дал попадание. Найти вероятность того, что поражена мишень типа A .

4. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{3}{2}, \\ 2x - 3, & \text{при } \frac{3}{2} < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) $f(x)$; б) $P(1,75 < X < 2)$; в) $M(X)$.

5. Монета бросается до первого выпадения герба, но не более 2 раз. С.в. X – число выпадений решки, Y – число подбрасываний. Описать закон распределения случайного вектора (X, Y) . Найти одномерные законы распределения компонент. X и Y . Вычислить вероятность $P(X < Y)$.

Вариант № 30

1. Некто забыл номер нужного ему телефона. Помня только, что все 5 цифр различны, набирает номер наудачу. Какова вероятность того, что нужный номер будет угадан?

2. Вероятность того, что в течение рабочей смены 1-й станок не потребует ремонта, равна 0,5; 2-й – 0,6; 3-й – 0,8. Найти вероятность следующих событий: а) A – ни один из станков не потребует ремонта; б) B – первый потребует, а второй и третий – нет.

3. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более 3-х раз?

4. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\sin x}{2}, & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Построить функцию распределения $F(x)$. Найти $P(1 < X < 2)$.

5. Закон распределения двумерной с.в. (X, Y) задан таблицей

$Y \backslash X$	-1	1
0	0,1	0,06
1	0,3	0,18
2	0,2	0,16

Найти: 1) одномерные законы распределения компонент X и Y ; 2) вероятность $P(X \geq Y)$; 3) функцию распределения $F(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1999. – 400 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2000. – 479 с.
3. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис – пресс, 2004. – 592 с.
4. Ледяев С.Ф. Лекции и практические занятия по теории вероятностей и математической статистике / С.Ф. Ледяев. – Севастополь: СТУАЭиП, 2006. – 119 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288 с.
6. Крицкий О.Л., Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов / Михальчук А.А., Трифонов А.Ю., Шинкеев М.Л.- Томск: Изд-во ТПУ, 2010.-212с.
7. Семенов В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / В.А.Семенов. – СПб.: Питер, 2013. -192 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3387	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2903	0,2780	0,2757	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1876	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1623	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0983	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0737	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0519	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0388	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0015	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000

Продолжение табл.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

**Мохаммад Мохаммад Гхашим
Ольга Александровна Довгаленко
Надежда Борисовна Браславская**

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**