

УДК 517.11

В.Б. Лаврушина; В.Г. Новоселов, проф., канд. физ.-мат. наук;

Т.В. Пластун

Севастопольский национальный технический университет

99053, Стрелецкая балка, Студгородок, СевНТУ, Севастополь

E-mail: kvt@sevgtu.sevastopol.ua

АДАПТАЦИЯ АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО НАБОРА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

Предлагается алгоритм нахождения ортогонального набора, применяемый для доказательства тождественности утверждений логики высказываний, распространить на логику предикатов. Приводится формулировка метода, структуры данных и пример. Особое внимание обращено на процедуру унификации.

Автоматическое доказательство теорем [1] – важная область исследований по искусственному интеллекту. Оно довольно широко применяется: в вопросно-ответных системах (доказательство выводимости формулы ответа из системы формул, представляющих утверждения), в задаче анализа программ, в проблеме преобразования состояний (возможно ли преобразование начального состояния в желаемое).

Для решения задачи доказательства утверждений [1] в алгебре предикатов в основном пользуются методом резолюций или его стратегиями. Однако применение правила резолюций может вызвать порождение большого числа лишних дизъюнктов, результатом чего является громоздкость этого метода, и следовательно, большие затраты времени даже с учётом возможностей современных ЭВМ. Стратегии же могут облегчить задачу лишь в некоторых конкретных случаях.

Для доказательства тождеств в системе уравнений логики предикатов предлагается использовать метод поиска ортогонального набора [2]. Он был создан для доказательства тождественности утверждений в логике высказываний.

1. Формальное описание доказываемой совокупности утверждений

Любая теорема состоит из множества утверждений U_i ($1 \leq i \leq n$), считае-
мых истинными, и следствия B , которое необходимо доказать, исходя из истинности посылок. Переходя к формальной записи теоремы, мы представляем утверждения на естественном языке U_i формулами A_i логики предикатов, а следствие B – формулой W .

В исчислении предикатов теорему запишем в виде

$$F = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow W. \quad (1)$$

Необходимо доказать, что F общезначима (истинна на всех интерпретациях).

Преобразуем формулу, используя тождество

(2)

$$A \rightarrow W = \sim A \vee W \quad (2)$$

и преобразования де Моргана

$$F = \sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \vee W = \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \dots \vee \sim A_n \vee W. \quad (3)$$

Каждое из утверждений $\sim A_i$ и W логично представить в ДНФ:

$$\sim A_i = \bigvee_j k_j, \quad (k_j - \text{конъюнкции предикатов или их инверсий}). \quad \text{Выражение (2)}$$

будет тоже представлено единой ДНФ:

$$F = \bigvee_i \bigvee_j k_j. \quad (4)$$

К уравнению (4) можно применять алгоритм ортогонального набора. Но поскольку рассматривается логика первого порядка, то следовательно, все $\sim A_k$ и W не являются выражениями над высказываниями. В чистом виде алгоритм поиска ортогонального набора к конъюнкциям предикатов применять нельзя. Необходимо использовать унификации и подстановки (определим это после изложения алгоритма).

2. Структура данных исходного описания утверждений и пример

Для представления формулы (4) используем интервальную ДНФ и, учитывая, что k_j состоят из предикатов, сопоставим им два компонента, именуемых далее как *таблица интервального представления* и *таблица предметных переменных* [2]. Число строк в таблицах соответствует числу конъюнкций в (4), а число столбцов – количеству различных предикатов в конъюнкциях.

Таблица интервального представления заполняется следующим образом:

- Если в i -ую конъюнкцию входит j -ый предикат без инверсии, то в ячейке $[i, j]$ таблицы ставится '1';
- Если в i -ую конъюнкцию j -ый предикат входит с инверсией, то в ячейке $[i, j]$ таблицы ставится '0';
- Если в i -ую конъюнкцию не входит j -ый атом, то ячейка $[i, j]$ таблицы остается пустой.

Таблица предметных переменных заполняется по правилу: если предикат входит в i -ую конъюнкцию, то в соответствующей ячейке записывается терм, который является аргументом данного предиката.

Рассмотрим пример. Пусть имеются следующие утверждения:

U_1 : Каждый, кто пьет на ночь много кофе, либо не спит всю ночь, либо принимает снотворное.

U_2 : Если кто-то не спит всю ночь, то он обязательно идет смотреть на звёзды.

U_3 : Каждый, кто смотрит на звезды, – романтик в душе.

U_4 : Александр пьет на ночь много кофе.

U_5 : Александр не принимает снотворное.

Доказать, что Александр романтик в душе.

Пусть $P(x)$ означает, что x пьет на ночь много кофе; $Q(x)$ значит, что x спит всю ночь; $R(x)$ означает, что x принимает снотворное; $T(x)$ говорит о том, что x ходит смотреть на звезды; $E(x)$ предполагает, что x романтик в душе. Обозначим константу “Александр” как c . Запишем утверждения в виде формул логики предикатов:

$$A_1: \forall x (P(x) \rightarrow \sim Q(x) \vee R(x)),$$

$$A_2: \forall x (\sim Q(x) \rightarrow T(x)),$$

$$A_3: \forall x (T(x) \rightarrow E(x)),$$

$$A_4: P(c),$$

$$A_5: \sim R(c),$$

$$W: E(c) - \text{следует доказать.}$$

Избавимся от импликаций:

$$A_1: \forall x (\sim P(x) \vee \sim Q(x) \vee R(x)),$$

$$A_2: \forall x (Q(x) \vee T(x)),$$

$$A_3: \forall x (\sim T(x) \vee E(x)),$$

$$A_4: P(c),$$

$$A_5: \sim R(c),$$

$$\sim W: \sim E(c).$$

Проинвертируем каждую формулу и преобразуем в форму, аналогичную скелемвской [1] стандартной форме:

$$\sim A_1: \exists x \sim (\sim P(x) \vee \sim Q(x) \vee R(x)) = \sim (\sim P(c1) \vee \sim Q(c1) \vee R(c1)) = P(c1) \wedge Q(c1) \wedge \sim R(c1),$$

$$\sim A_2: \exists x \sim (Q(x) \vee T(x)) = \sim (Q(c2) \vee T(c2)) = \sim Q(c2) \wedge \sim T(c2),$$

$$\sim A_3: \exists x \sim (\sim T(x) \vee E(x)) = \sim (\sim T(c3) \vee E(c3)) = T(c3) \wedge \sim E(c3),$$

$$\sim A_4: \sim P(c),$$

$$\sim A_5: R(c),$$

$$W: E(c).$$

В кодированном виде эти данные представляются таблицами 1, а и б.

Таблица 1 – Кодированное представление системы

	P	Q	R	T	E
1	1	1	0		
2		0		0	
3				1	0
4	0				
5			1		
6					1

	P	Q	R	T	E
1	c1	c1	c1		
2		c2		c2	
3				c3	c3
4	c				
5			c		
6					c

3. Формулировка алгоритма поиска ортогонального набора

Для сокращения процесса решения применяются следующие правила [2]:

Правило 1. Если в некоторой строке таблицы только пустые ячейки (нет нулей и единиц), то ортогонального набора найти нельзя. Решений нет.

Правило 2. Если некоторая строка состоит из единственного нуля (или единственной единицы), а остальные ячейки пусты, то в соответствующем ортогональном наборе необходимо присвоить инверсное значение этого предиката.

Правило 3. Если в некотором столбце только пустые ячейки и нет нулей и единиц, то по этому предикату нельзя сделать ни один интервал ортогональным. Значение его в ортогональном наборе безразлично.

Правило 4. Если в некотором столбце только пустые ячейки и нули либо пустые ячейки и единицы, то по этому предикату набор инвертируется.

Правило 5. Все строки и столбцы, к которым были применены правила 2-4, вычеркиваются из таблицы. Кроме того, удаляются строки, ортогональные строящемуся набору, если в таблице предметных переменных по выбранному предикату находится унифицируемое значение переменной. Более подробно этот процесс рассматривается ниже.

Правило 6. Если после вычеркиваний остался всего один столбец с нулями и единицами, то ортогонального набора найти нельзя. Решений нет.

Правило 7. Правила 1-6 необходимо применять до тех пор, пока это приводит к упрощению матрицы интервального представления. Если очередное применение таблицы не упростило, то производится ветвление решений по одному из столбцов, т.е. по одному из предикатов. Процесс решения разбивается на две ветви (по единичному и нулевому значению выбранного предиката). В каждой из них остаются только те интервалы, которые не ортогональны выбранному значению предиката, либо ортогональные интервалы, в которых для данного предиката предметная переменная не допускает унификации.

Преобразование таблицы интервального представления по правилам 1-7 производится только в том случае, если в соответствующем столбце таблицы предметных переменных термы допускают унификацию.

Понятие унификации определено в методе резолюций [1] как минимальное доопределение области задания предметных переменных участвующих в резолюции дизъюнктов с тем, чтобы совместить их области определения и однозначно получить её для резольвенты. Там же сформулирован и алгоритм унификации.

В нашем случае каждый элементарный дизъюнкт превращается в элементарную конъюнкцию предикатов с той же областью определения предметных переменных. Находя ортогональный интервал для некоторой совокупности конъюнкций, необходимо задать его область определения, включа-

ющую области всех вычеркиваемых интервалов. Число различных комбинаций областей определения невелико (вся область определения $(x, y, \dots)$, скулемовские функции $(f_1(x), f_2(x) \dots)$ и скулемовские константы $(C_1, C_2 \dots)$).

Если в строке, выбранной правилами 1-7, предикат имеет область определения x , то она унифицируема со всеми областями определения $(f_j(x)$ или C_j).

Если значение предметной переменной равно C_j (или $f_j(x)$), но в столбце по данному предикату есть значение x , то для того, чтобы использовать полностью область определения данного предиката, можно от выбранной строки перейти к той, где содержится значение x , и таким образом, свести к предыдущему случаю.

Если значение предметной переменной равно C_j (или $f_j(x)$), но в столбце нет x , то можно учитывать только строки с C_j (или $f_j(x)$) и никакие подстановки невозможны. Это обосновывается максимальным использованием области определения утверждений и выделенного предиката для опровержения истинности системы.

4. Решение примера

Преобразования для примера, приведенного в таблице 1, выглядят следующим образом. По правилу 2 выделяется столбец E и строка 6. Поскольку нет других интервалов, пересекающихся с данным, то можно вычеркнуть строку 6 и столбец E с присвоением $E=0$ в ортогональном наборе σ и значением предметной переменной c , строку 5 и столбец R (унифицируем до c) с присвоением $R=0$, строку 4 и столбец P (унифицируем до c) ($P=0$), строка 3 и столбец T (унифицируем до $c3$) с присвоением $T=0$.

Представленные вычисления зафиксированы в таблице 2, а, б.

После вычеркиваний остался единственный столбец Q с 0 и 1. Правило 6 гласит, что в этом случае решений нет. Иными словами, нельзя найти набора, на котором исходное утверждение F было бы ложно. Следовательно, F тождественно истинно, т.е. наш Александр действительно романтик в душе.

Таблица 2 – Структура данных в процессе поиска ортогонального набора

а) Таблица интервального представления б) Таблица предметных переменных

	P:	Q	R:	T:	E:
1	1	1	0		
2		0		0	
3				1	0
4	0				
5			1		
6					1

	P:	Q	R:	T:	E:
1	c1	c1	c1		
2		c2		c2	
3				c3	c3
4	c				
5			c		
6					c

σ

1		0	0	0
---	--	---	---	---

c		c	c3	c
---	--	---	----	---

5. Значимость предложенного алгоритма

В случае получения пустого дизъюнкта в методе резолюций обратным просмотром хода решения получается кратчайший путь доказательства. Предлагаемый алгоритм, хотя и не может представить последовательное доказательство, но позволяет получить интервалы значений предикатов, являющиеся образом утверждений (посылок или ограничений следствия), добавление которых к исходной системе преобразует её в тождественно истинную. Он может эффективно использоваться в различных системах логического вывода, повышая эффективность соответствующих вычислений и, возможно, подсказывая путь сведения исследуемого утверждения к истинному.

Библиографический список

1. Чень Ч. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли. — М: Наука, 1983. — 360 с.
2. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем / А.Д. Закревский. — Минск: Наука и техника, 1981. — 461 с.
3. Новоселов В.Г. Дискретная математика: Учеб. пособие. Ч. 2. / В.Г. Новоселов, Т.В. Пластун, А.В. Скатков. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. — 122 с.

Поступила в редакцию 18.11 2002 г.