

УДК 681.324+65.011.56

В.В. Кирюхин, канд. физ.-мат. наук, проф., С.С. Ивашкевич, студент
E-mail: kvf@sevgtu.sebastopol.ua

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВХОДА СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

Предлагается методика оценки длительности интервала между моментом начала функционирования системы массового обслуживания и моментом, когда её выходные характеристики практически устанавливаются в стационарном состоянии. Для системы М/М/1 получены значения интервала, как таблицы, входами которой являются загрузка системы и заданная погрешность стационарности режима.

При имитационном моделировании систем и сетей массового обслуживания (которые, в свою очередь, часто являются моделями компьютерных комплексов, систем или сетей) для оценки характеристик в стационарном режиме функционирования обычно подвергают статистической обработке данные имитации, полученные на всём временном интервале соответствующей реализации случайного процесса [1]. При этом предполагается, что моделируемая система входит в стационарный режим практически сразу, так что погрешности, вносимые интервалом вхождения в этот режим, незначительны. Такое предположение хорошо работает в случае, если характеристики оцениваются усреднением по времени достаточно длинной реализации процесса. Там же, где оценка проводится по ансамблю коротких реализаций, она может привести к существенным погрешностям. Правильным решением в этом случае было бы отсечение начальных интервалов реализаций, являющихся, по сути, участками нестационарности процесса. Возникает проблема грамотной оценки длины каждого такого интервала.

В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть $a(t)$ – некоторая выходная характеристика моделируемой системы в момент t , и

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) \quad (1)$$

– значение этой характеристики в стационарном режиме. Полагаем, что характер (1) стремления $a(t)$ к a таков, что при $t \rightarrow \infty$ величина $a(t)$ нигде не может быть равной a , кроме как при $t = \infty$. Иными словами, $a(t)$ не совершает колебаний около a , приближаясь к a сверху или снизу. Тогда искомая длина интервала вхождения в стационарный режим – это величина τ , для которой при $t \geq \tau$ выполняется неравенство

$$|a(t) - a| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная “погрешность стационарности”, т.е., начиная с момента $t = \tau$, характеристика $a(t)$ становится “практически” стационарной с точностью до ε . Если $a \neq 0$, то более удобным для определения τ является нор-

мированное неравенство, получаемое из (2) делением обеих его частей на a

$$|b(t) - 1| \leq \delta, \quad (3)$$

где $b(t) = a(t)/a$, и $\delta = \varepsilon/a$ – относительная погрешность.

Введем обозначение $f(t) = |b(t) - 1|$. Предполагая, что $f(t)$ – непрерывная монотонная функция, с учётом (3) получаем уравнение для τ

$$f(\tau) = \delta, \quad (4)$$

которое имеет единственное решение

$$\tau = f^{-1}(\delta), \quad (5)$$

где f^{-1} – функция, обратная функции f . Формула (5) и даёт, вообще говоря, решение задачи.

К сожалению, как это следует из теории массового обслуживания, аналитических обратных функций даже для простых систем не существует. Поэтому решение уравнения (4) по необходимости можно получить лишь численными методами.

В качестве конкретной системы массового обслуживания (СМО) рассмотрим систему М/М/1, т.е. одноканальную СМО с неограниченной очередью, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , и заявки обслуживаются с интенсивностью μ . В качестве выходной характеристики выберем среднюю длину $L(t)$ очереди к СМО, поскольку именно эта характеристика наиболее популярна в приложениях и удовлетворяет нашим требованиям к $a(t)$, в частности, $L(t)$ – непрерывная и монотонная функция t [2]. В стационарном режиме характеристика $a = L$ принимает вид

$$L = \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \quad (6)$$

где $\rho = \lambda/\mu$, причём $\rho < 1$ (условие стационарности).

Подставляя (6) и известное выражение для $L(t)$ из [2] в (4), получаем уравнение

$$\frac{1 - \rho}{\rho^2} e^{-(\lambda + \mu)\tau} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\rho^{\frac{k}{2}} I_k(z) + \rho^{\frac{k-1}{2}} I_{k+1}(z) + (1 - \rho) \rho^k \sum_{j=k+2}^{\infty} (\rho^{-j/2} I_j(z)) \right] = 1 - \delta, \quad (7)$$

где $I_k(z)$ – обобщённая функция Бесселя первого рода; $z = 2\sqrt{\lambda\mu}\tau$.

Уравнение (7) решалось нами методом табуляции. Для вычисления $I_k(z)$ использовалось представление в виде ряда

$$I_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{k+2i}}{i!(i+k)!}, \quad (8)$$

причём для решения проблемы бесконечного числа членов, фигурирующего в (7) и (8), применялись стандартные процедуры вычислительной математики.

Программа решения уравнения (7) была написана на языке Паскаль и реализована на ПЭВМ в среде Windows. В результате была получена таблица $\tau(\rho, \delta)$ значений интервала вхождения в стационарный режим для различных значений загрузки ρ СМО и различной относительной погрешности δ стационарности (см. таблицу 1).

Таблица 1 – Интервалы вхождения в стационарный режим ($\lambda = 1$)

$\delta, \%$	ρ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1		2	5	11	21	39	77	167	448	2096
0,5		2	4	8	16	30	59	127	339	1580
1		1	4	8	14	27	52	110	293	1357
3		1	3	6	11	21	40	84	220	1012
5		1	3	5	10	18	34	72	187	855

Для удобства пользования таблицей значения τ округлены до ближайших больших сверху целых чисел, причём за единицу времени выбран средний интервал между двумя соседними заявками входящего потока ($\lambda = 1$).

Из таблицы следует, что интервал вхождения резко возрастает при приближении загрузки ρ системы к предельной, $\rho = 1$, в то время как рост τ с возрастанием точности, по крайней мере, в выбранном диапазоне, не так стремителен. Последний столбец ($\rho = 0,9$) говорит о том, что при имитационном моделировании СМО при больших нагрузках следует дожидаться поступления нескольких тысяч заявок, прежде чем начать регистрацию стационарного режима.

Данные таблицы 1, на первый взгляд, имеют ограниченное применение, поскольку, строго говоря, относятся к простейшей системе массового обслуживания. Однако известно [3], что простейший поток и экспоненциальное время обслуживания обеспечивают наихудшие характеристики системе по сравнению с другими законами при прочих равных условиях; в частности, для системы М/М/1 время вхождения в стационарный режим максимально. Поэтому приведенные в таблице результаты могут служить оценкой верхней границы этого времени для произвольной СМО типа G/G/1.

В перспективе дальнейших исследований предполагается получение оценок времени вхождения в стационарный режим для других СМО, а также более сложных объектов типа сетей массового обслуживания.

Библиографический список

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
2. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания / Т.Л. Саати. — М.: Сов. радио, 1965. — 510 с.
3. Советов Б.Я. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. — М.: Высш. шк., 2001. — 343 с.

Поступила в редакцию 8.09.2003 г.