

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Ю. Б. Гимпилевич**

# **СИГНАЛЫ И ПРОЦЕССЫ В РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ**

**Учебное пособие**

**Севастополь  
СевГУ  
2019**

УДК 621.396.1  
ББК 32.841  
Г48

**Р е ц е н з е н т ы:**

**И.Л. Афонин** - доктор технических наук, профессор кафедры  
«Радиоэлектроника и телекоммуникации»

Севастопольского государственного университета

**С.Р. Зиборов** - кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Радиоэлектроника и телекоммуникации»

Севастопольского государственного университета

**Гимпилевич Ю.Б.**

**Г48** Сигналы и процессы в радиоэлектронике: учеб. пособие / Ю.Б. Гимпилевич.  
– Севастополь: СевГУ, 2019. – 247 с.: ил.

В учебном пособии рассмотрены основные теоретические разделы дисциплины, приведены примеры решения задач.

Для студентов очной и заочной форм обучения высших учебных заведений радиоэлектронных и телекоммуникационных специальностей.

УДК 621.396.1  
ББК 32.841

Учебное пособие утверждено на заседании кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации», протокол № 6 от 28 ноября 2018 г.

Допущено ученым советом Института радиоэлектроники и информационной безопасности СевГУ в качестве учебного пособия для студентов очной и заочной форм обучения, протокол № 4 от 6 декабря 2018 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                            |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Принятые сокращения .....</b>                                                                           | <b>9</b>  |
| <b>Предисловие .....</b>                                                                                   | <b>10</b> |
| <b>1. Введение в радиоэлектронику .....</b>                                                                | <b>12</b> |
| 1.1. Основная задача радиоэлектроники .....                                                                | 12        |
| 1.2. Основные радиоэлектронные процессы.....                                                               | 12        |
| 1.3. Основные области применения радиоэлектроники.....                                                     | 18        |
| <b>2. Электрические сигналы и их характеристики .....</b>                                                  | <b>20</b> |
| 2.1. Определение электрического сигнала.....                                                               | 20        |
| 2.2. Классификация сигналов .....                                                                          | 20        |
| 2.3. Энергетические характеристики сигналов.....                                                           | 26        |
| 2.4. Разложение сигнала по системе ортогональных функций.....                                              | 31        |
| 2.5. Пример решения задачи .....                                                                           | 32        |
| <b>3. Спектральный Фурье - анализ периодических сигналов .....</b>                                         | <b>34</b> |
| 3.1. Определение спектра по Фурье и основные понятия.....                                                  | 34        |
| 3.2. Разложение периодического сигнала в комплексный ряд Фурье.....                                        | 35        |
| 3.3. Ряд Фурье в тригонометрической форме .....                                                            | 38        |
| 3.4. Спектры чётных и нечётных функций времени .....                                                       | 41        |
| 3.5. Распределение средней мощности периодического сигнала по спектру.<br>Эффективная ширина спектра ..... | 42        |
| 3.6. Спектр периодической последовательности импульсов прямоугольной<br>формы.....                         | 43        |
| 3.7. Меандр и его спектр .....                                                                             | 46        |
| 3.8. Пример решения задачи .....                                                                           | 47        |

|                                                                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. Спектральный Фурье - анализ непериодических сигналов .....</b>                                                           | <b>51</b> |
| 4.1. Постановка задачи .....                                                                                                   | 51        |
| 4.2. Преобразование Фурье. Спектральная плотность сигнала .....                                                                | 52        |
| 4.3. Некоторые представления спектральной плотности .....                                                                      | 54        |
| 4.4. Обратное преобразование Фурье в тригонометрической форме .....                                                            | 55        |
| 4.5. Спектральная плотность чётных и нечётных функций времени .....                                                            | 56        |
| 4.6. Свойства спектральной плотности сигнала .....                                                                             | 57        |
| 4.7. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала.<br>Эффективная ширина спектра .....                             | 63        |
| 4.8. Спектр одиночного импульса прямоугольной формы .....                                                                      | 64        |
| 4.9. Функция Дирака ( $\delta$ -функция) и её свойства .....                                                                   | 67        |
| 4.10. Спектральная плотность постоянного напряжения .....                                                                      | 70        |
| 4.11. Спектральная плотность гармонического колебания .....                                                                    | 71        |
| 4.12. Спектральная плотность произвольного периодического процесса ..                                                          | 72        |
| 4.13. Взаимосвязь между спектрами одиночного импульса и сигнала,<br>получаемого периодическим повторением этого импульса ..... | 73        |
| 4.14. Спектр пачки разновеликих прямоугольных импульсов .....                                                                  | 74        |
| 4.15. Пример решения задачи .....                                                                                              | 76        |
| <b>5. Применение преобразования Лапласа для спектрального анализа.....</b>                                                     | <b>79</b> |
| 5.1. Постановка задачи .....                                                                                                   | 79        |
| 5.2. Преобразование Лапласа .....                                                                                              | 79        |
| 5.3. Методика определения спектральной плотности .....                                                                         | 81        |
| 5.4. Методика определения оригинала по спектральной плотности .....                                                            | 81        |
| 5.5. Функция Хэвисайда и ее спектр .....                                                                                       | 82        |
| 5.6. Спектральная плотность усечённого гармонического колебания .....                                                          | 84        |
| 5.7. Пример решения задачи .....                                                                                               | 86        |
| <b>6. Корреляционный анализ детерминированных сигналов .....</b>                                                               | <b>89</b> |
| 6.1. Автокорреляционная функция сигналов с конечной энергией .....                                                             | 89        |
| 6.2. Автокорреляционная функция прямоугольного импульса .....                                                                  | 90        |

|                                                                                                          |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.3. Автокорреляционная функция пачки импульсов .....                                                    | 92         |
| 6.4. Автокорреляционная функция периодических сигналов.....                                              | 94         |
| 6.5. Автокорреляционная функция гармонического колебания .....                                           | 96         |
| 6.6. Взаимосвязь автокорреляционной функции и спектральной плотности<br>детерминированного сигнала ..... | 96         |
| 6.7. Взаимная корреляционная функция двух сигналов .....                                                 | 97         |
| 6.8. Пример решения задачи .....                                                                         | 99         |
| <b>7. Сигналы с ограниченным спектром и их свойства .....</b>                                            | <b>102</b> |
| 7.1. Определение и критерии ограничения спектра .....                                                    | 102        |
| 7.2. Идеальный низкочастотный сигнал .....                                                               | 103        |
| 7.3. Проблема дискретизации аналогового сигнала .....                                                    | 105        |
| 7.4. Теорема отсчетов.....                                                                               | 106        |
| 7.5. Спектр дискретного сигнала.....                                                                     | 109        |
| 7.6. Синтез аналогового сигнала по дискретным отсчетам .....                                             | 112        |
| 7.7. База сигнала с ограниченным спектром.....                                                           | 114        |
| 7.8. Пример решения задачи .....                                                                         | 115        |
| <b>8. Радиосигналы и их характеристики .....</b>                                                         | <b>117</b> |
| 8.1. Общие положения .....                                                                               | 117        |
| 8.2. Понятие узкополосности радиосигналов .....                                                          | 118        |
| 8.3. Радиосигналы с амплитудной модуляцией.....                                                          | 119        |
| 8.4. Радиосигналы с угловой модуляцией.....                                                              | 130        |
| 8.5. Радиоимпульс с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ).....                                             | 139        |
| 8.6. Пример решения задачи .....                                                                         | 143        |
| <b>9. Основы теории случайных процессов.....</b>                                                         | <b>145</b> |
| 9.1. Основные характеристики случайных процессов .....                                                   | 146        |
| 9.2. Некоторые законы распределения случайных процессов.....                                             | 152        |
| 9.3. Спектральный анализ случайных процессов .....                                                       | 155        |
| 9.4. Пример решения задачи .....                                                                         | 162        |

## **10. Линейные радиоэлектронные цепи с постоянными параметрами... 164**

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.1. Классификация цепей и основные определения.....               | 164 |
| 10.2. Характеристики линейных цепей с постоянными параметрами ..... | 165 |
| 10.3. Взаимосвязь характеристик линейной цепи .....                 | 169 |
| 10.4. Аперидические линейные цепи .....                             | 172 |
| 10.5. Линейные частотно-избирательные (колебательные) цепи .....    | 179 |
| 10.6. Пример решения задачи .....                                   | 182 |

## **11. Методы расчета реакции линейной цепи ..... 185**

|                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.1. Классический метод расчёта.....                                                                                         | 185 |
| 11.2. Спектральный метод расчета.....                                                                                         | 187 |
| 11.3. Операторный метод расчета .....                                                                                         | 188 |
| 11.4. Метод интеграла наложения.....                                                                                          | 189 |
| 11.5. Приближенный метод расчета реакции узкополосной цепи на<br>узкополосное воздействие (метод комплексной огибающей) ..... | 190 |
| 11.6. Условия неискаженной передачи сигнала линейной цепью.....                                                               | 192 |
| 11.7. Преобразование статистических характеристик случайного процесса<br>линейной цепью .....                                 | 195 |
| 11.8. Пример решения задачи .....                                                                                             | 198 |

## **12. Прохождение детерминированных сигналов через линейные цепи.. 201**

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.1. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через цепь<br>интегрирующего типа .....       | 201 |
| 12.2. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через цепь<br>дифференцирующего типа.....     | 203 |
| 12.3. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через<br>аперидический усилитель .....        | 204 |
| 12.4. Прохождение радиосигнала с амплитудной модуляцией через<br>частотно-избирательную цепь..... | 205 |
| 12.5. Прохождение радиосигнала с частотной модуляцией через частотно-<br>избирательную цепь ..... | 209 |

|                                                                                         |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 12.6. Прохождение манипулированных радиосигналов через частотно-избирательную цепь..... | 210        |
| 12.7. Пример решения задачи .....                                                       | 217        |
| <b>13. Обратная связь в активных линейных цепях. Устойчивость</b>                       |            |
| <b>линейных цепей с обратной связью .....</b>                                           | <b>219</b> |
| 13.1. Определение обратной связи .....                                                  | 219        |
| 13.2. Передаточная функция усилителя с обратной связью .....                            | 221        |
| 13.3. Проблема устойчивости активной линейной цепи.....                                 | 223        |
| 13.4. Критерий устойчивости Ляпунова .....                                              | 224        |
| 13.5. Критерий устойчивости по передаточной функции.....                                | 225        |
| 13.6. Критерий устойчивости Рауса - Гурвица .....                                       | 225        |
| 13.7. Частотный критерий устойчивости Михайлова .....                                   | 226        |
| 13.8. Частотный критерий устойчивости Найквиста.....                                    | 228        |
| 13.9. Устойчивость неинвертирующего усилителя с мостом Вина в цепи обратной связи.....  | 231        |
| 13.10. Пример решения задачи .....                                                      | 233        |
| <b>14. Собственные шумы радиоэлектронной аппаратуры .....</b>                           | <b>235</b> |
| 14.1. Классификация собственных шумов .....                                             | 235        |
| 14.2. Характеристики дробового тока.....                                                | 236        |
| 14.3. Дробовый шум на выходе апериодического усилителя .....                            | 239        |
| 14.4. Дробовый шум на выходе резонансного усилителя.....                                | 240        |
| 14.5. Пример решения задачи .....                                                       | 242        |
| <b>Приложение: таблица изображений и оригиналов по Лапласу .....</b>                    | <b>244</b> |
| <b>Библиографический список .....</b>                                                   | <b>247</b> |

### **ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ**

|     |   |                                     |
|-----|---|-------------------------------------|
| АД  | — | амплитудный детектор                |
| АКФ | — | автокорреляционная функция          |
| АМ  | — | амплитудная модуляция               |
| АЧХ | — | амплитудно-частотная характеристика |
| ВЧ  | — | высокая частота                     |
| ИНЧ | — | идеальный низкочастотный сигнал     |
| ИХ  | — | импульсная характеристика           |
| ККП | — | комплексный коэффициент передачи    |
| ЛЗ  | — | линия задержки                      |
| НЧ  | — | низкая частота                      |
| НБП | — | нижняя боковая полоса               |
| ВБП | — | верхняя боковая полоса              |
| ВКФ | — | Взаимная корреляционная функция     |
| ОЛФ | — | оптимальная линейная фильтрация     |
| ПХ  | — | переходная характеристика           |
| ПЧ  | — | промежуточная частота               |
| РГЗ | — | расчетно-графическое задание        |
| РЭА | — | радиоэлектронная аппаратура         |
| РЭС | — | радиоэлектронное средство           |
| СФ  | — | согласованный фильтр                |
| ТАМ | — | тональная амплитудная модуляция     |
| ТУМ | — | тональная угловая модуляция         |

|     |   |                                 |
|-----|---|---------------------------------|
| УВЧ | — | усилитель высокой частоты       |
| УЗЛ | — | ультразвуковая линия задержки   |
| УМ  | — | угловая модуляция               |
| УН  | — | усилитель напряжения            |
| УНЧ | — | усилитель низкой частоты        |
| УПЧ | — | усилитель промежуточной частоты |
| УЧ  | — | умножитель частоты              |
| ФВЧ | — | фильтр верхних частот           |
| ФД  | — | фазовый детектор                |
| ФМ  | — | фазовая модуляция               |
| ФНЧ | — | фильтр нижних частот            |
| ФЧХ | — | фазо-частотная характеристика   |
| ЧД  | — | частотный детектор              |
| ЧМ  | — | частотная модуляция             |
| ЭМС | — | электромагнитная совместимость  |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Сигналы и процессы в радиоэлектронике» играет важнейшую роль в системе подготовки специалистов радиоэлектронного профиля. В рамках этой дисциплины изучаются фундаментальные свойства сигналов, методы их обработки, преобразования и передачи по каналам связи.

Целью данного методического пособия является оказание помощи студентам очной и заочной форм обучения в изучении теоретической части дисциплины, а также в получении ими практических навыков анализа характеристик сигналов и цепей в процессе выполнения расчетно-графического задания и лабораторного практикума.

Изучение дисциплины базируется на знаниях, которые студенты получили при изучении таких дисциплин, как «Высшая математика», «Физика», «Основы теории цепей».

Основу учебного пособия составил лекционный курс, который разработан автором и используется в учебном процессе в Севастопольском государственном университете.

В учебном пособии рассмотрен следующий круг вопросов:

- свойства детерминированных и случайных сигналов;
- разложение детерминированных сигналов по ортогональному базису;
- спектральный и корреляционный анализ детерминированных и случайных сигналов;
- основы теории дискретизации аналоговых сигналов;
- характеристики и свойства узкополосных детерминированных и случайных процессов;
- характеристики линейных цепей с постоянными параметрами;
- преобразование детерминированных и случайных сигналов в линей-

ных радиоэлектронных цепях;

— прохождение радиосигналов с различными видами модуляции и манипуляции через избирательные цепи;

— теория устойчивости линейных радиоэлектронных цепей.

Автор выражает признательность рецензентам профессору Афонину И. Л. и доценту Зиборову С. Р. за полезные замечания и внимание, проявленные к учебному пособию.

## 1. ВВЕДЕНИЕ В РАДИОЭЛЕКТРОНИКУ

### 1.1. Основная задача радиоэлектроники

Термин «радиоэлектроника» возник от латинского слова «*radio*», что в переводе означает «**излучаю**». Этот термин в полной мере определяет основную задачу радиоэлектроники, которую сформулируем следующим образом.

**Основной задачей радиоэлектроники является передача информации с помощью излучаемых электромагнитных волн.**

Основным признаком радиоэлектронных систем является наличие беспроводного канала передачи информации. Термин «*wireless*» (беспроводный) является синонимом термина «*radio*» и часто используется применительно к радиоэлектронным системам и устройствам.

Смежными для радиоэлектроники являются такие отрасли как **инфокоммуникации** и **электротехника**. Следует помнить, что основные задачи, решаемые этими отраслями, отличаются от основной задачи радиоэлектроники. Основной задачей инфокоммуникаций является передача информации по любым линиям связи, в том числе и беспроводным. В этом смысле радиоэлектроника и инфокоммуникации являются родственными отраслями. Основной задачей электротехники является передача электрической энергии, что существенно отличает эту отрасль от радиоэлектроники и инфокоммуникаций.

### 1.2. Основные радиоэлектронные процессы

Основные радиоэлектронные процессы рассмотрим на примере укрупненной структурной схемы радиоэлектронной системы (РЭС). Эта система (рис. 1.1) состоит из двух частей: **передающей** и **приемной**. Рассмотрим последовательность операций (процессов), которые осуществляются над сигналами.

лами при передаче сообщения от источника к потребителю.

**В передающей части РЭС осуществляют следующие операции.**

**1.2.1. Преобразование неэлектрической величины в электрическую**

Сообщение, которое подлежит передаче по каналу связи, как правило, носит неэлектрический характер. Поэтому необходимо преобразовать неэлектрическую величину в электрическую. Преобразование осуществляют с помощью первичных преобразователей (блок 1), например, с помощью микрофона, видеокамеры, термопары и др. На выходе первичных преобразователей получают электрический сигнал, который несет информацию.

**1.2.2. Усиление сигналов первичных преобразователей**

Сигналы, поступающие с первичных преобразователей, как правило, имеют малый уровень, что вызывает необходимость их усиления. Эти сигналы являются относительно низкочастотными и занимают, как правило, достаточно широкую полосу частот. Поэтому для усиления применяют широкополосные (апериодические) усилители напряжения или тока с полосой пропускания, соответствующей полосе частот, занимаемой сигналами, поступающими с первичных преобразователей (блок 2).

**1.2.3. Кодирование передаваемого сообщения**

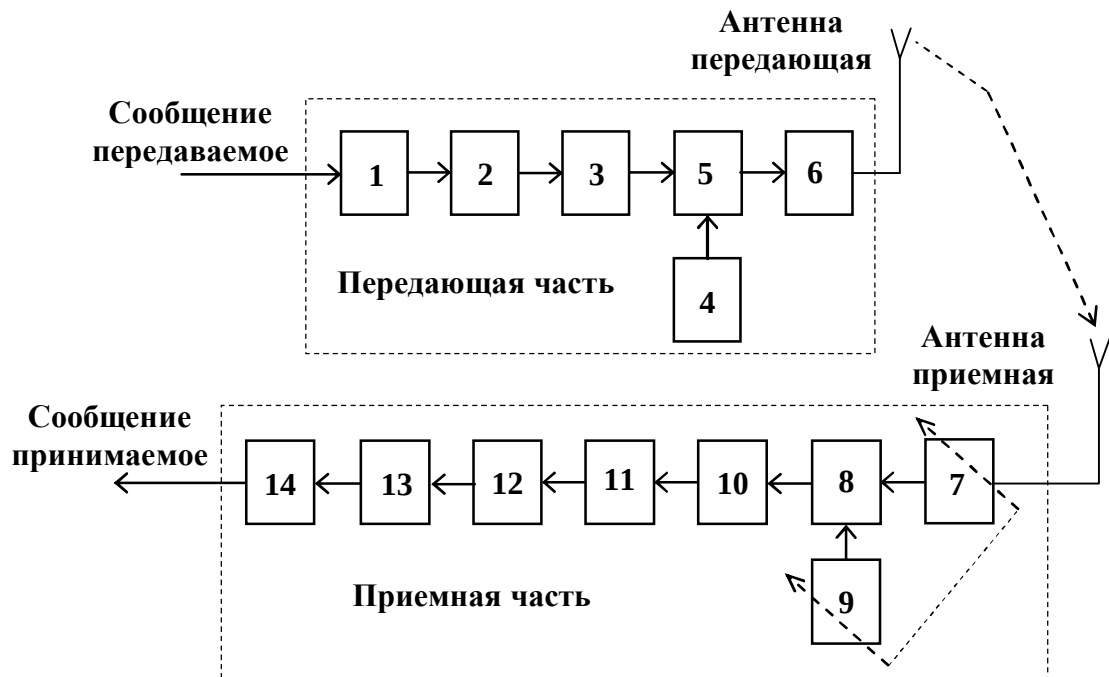
Эту операцию используют при необходимости обеспечить скрытность, либо повысить помехоустойчивость передачи данных, а также при переходе к цифровым принципам передачи информации. Кодирование осуществляется с помощью устройств, называемых кодерами (блок 3).

**1.2.4. Генерирование несущего колебания**

**Несущее колебание** — это высокочастотное колебание, параметры которого подвергают изменению по закону передаваемого сообщения. Это колебание исполняет роль переносчика сообщения. Это колебание поэтому и называют несущим, поскольку оно способно нести сообщение.

В каждом радиопередающем устройстве имеется собственный генератор

несущего колебания (блок 4). Как правило, в качестве несущего колебания используют отрезок гармонического колебания высокой частоты. При этом частоту этого колебания называют несущей частотой.



- 1 — преобразователь неэлектрического сигнала в электрический;
- 2 — усилитель сигнала первичного преобразователя;
- 3 — кодирующее устройство;
- 4 — генератор несущего колебания;
- 5 — модулятор высокочастотного колебания;
- 6 — усилитель мощности высокочастотного сигнала;
- 7 — усилитель напряжения высокой частоты (УВЧ);
- 8 — смеситель;
- 9 — гетеродин;
- 10 — усилитель промежуточной частоты (УПЧ);
- 11 — детектор высокочастотного колебания;
- 12 — усилитель продетектированного сигнала;
- 13 — декодер;
- 14 — преобразователь электрического сигнала в неэлектрический.

Рис. 1.1

### 1.2.5. Модуляция высокочастотного колебания

**Модуляция высокочастотного колебания** — это процесс изменения одного или нескольких параметров высокочастотного колебания по закону передаваемого сообщения.

В результате модуляции синхронно с изменением передаваемого сообщения изменяется либо амплитуда (амплитудная модуляция), либо частота

(частотная модуляция), либо начальная фаза (фазовая модуляция) высокочастотного колебания. Модуляция осуществляется с помощью устройств, называемых модуляторами (блок 5).

Применение модуляции позволяет уменьшить размеры передающей и приемной антенн и осуществить частотное разделение каналов. Проанализируем эти факторы.

1) Для эффективного излучения электромагнитных колебаний размер антенны  $L$  должен быть соизмерим с длиной волны. Рассмотрим случай радиотелефонии (передача звуковых сообщений). Нетрудно подсчитать, что длина электромагнитной волны на частоте 1000 Гц (средняя частота телефонного канала) составляет  $\lambda = 300$  км. При размере антенны  $L = \lambda/4$  она практически нереализуема ( $L = 75$  км). Поэтому необходимо перейти на существенно более высокую частоту. Этот переход осуществляется с помощью модуляции. Так на частоте 10 МГц размер антенны составит всего 7,5 м. Такую антенну практически легко реализовать.

2) Частотное разделение каналов достигается тем, что передатчик каждой из радиостанций работает на своей несущей частоте. Это позволяет после модуляции разнести полосы частот, которые занимают различные радиостанции, без перекрытия этих полос.

#### **1.2.6. Усиление мощности высокочастотного колебания**

Для обеспечения требуемой дальности действия радиоэлектронной системы передающая антенна должна излучать электромагнитные волны необходимой мощности. Поэтому после модуляции высокочастотный сигнал усиливают с помощью усилителя мощности (блок 6).

#### **1.2.7. Излучение и прием высокочастотных колебаний**

Создание свободно распространяющихся электромагнитных волн в окружающем передатчик пространстве и прием этих волн приемником осуществляется с помощью передающих и приемных антенн либо антенных систем (см. рис. 1.1).

## **В приемной части РЭС осуществляют следующие операции.**

### **1.2.8. Избирательность**

**Избирательность** — это свойство приемной части системы осуществлять выбор нужного сигнала из всей совокупности сигналов, воздействующих на антенну приемника. Способ осуществления избирательности зависит от принципа разделения каналов передачи данных. В настоящее время используют частотный, кодовый и временной принципы разделения каналов.

При использовании принципа частотного разделения каналов передатчики формируют сигналы с различными несущими колебаниями, а в приемниках осуществляется частотная избирательность. Эта операция реализуется с помощью узкополосных полосно-пропускающих фильтров (*LC*-контуры, твердотельные фильтры и т.п.). Эти фильтры располагают во входной цепи приемника, а также в усилителях высокой (блок 7) и промежуточной (блок 10) частот.

При использовании принципа кодового разделения каналов в передатчиках формируют кодированные сигналы на одной и той же несущей частоте, а в приемнике осуществляют кодовую избирательность. Эта операция реализуется с помощью специальных декодирующих устройств, обеспечивающих прием только тех сигналов, которые предназначены для данного абонента.

При использовании принципа временного разделения каналов передатчики формируют сигналы на одной и той же несущей частоте и последовательно излучают эти сигналы с соблюдением жесткого временного графика выхода в эфир. Зная этот график, в приемнике обеспечивается временная избирательность, поскольку сигналы от различных станций разделены во времени.

### **1.2.9. Усиление напряжения высокочастотных сигналов**

Сигналы, наводимые в антенне, как правило, имеют малый уровень (единицы микровольт и менее). Поэтому необходимо усиление этих сигналов по напряжению. Это достигается применением усилителя высокой (УВЧ),

(блок 7), и усилителя промежуточной частоты (УПЧ) (блок 10). УВЧ, также называемый усилителем радиочастоты (УРЧ), настраивают на несущую частоту принимаемого сигнала. УПЧ настраивают на так называемую промежуточную частоту.

### 1.2.10. Преобразование частоты

Это операция, в результате которой в приемнике формируется радиосигнал **с другой несущей частотой** отличной от несущей частоты принимаемого сигнала. Эту частоту называют **промежуточной частотой (ПЧ)**. При этом вид и параметры модуляции не изменяются. Для получения ПЧ в таких приемниках применяют преобразователь частоты, состоящий из смесителя (блок 8), генератора гармонических колебаний, называемого гетеродином (блок 9) и полосно-пропускающего фильтра промежуточной частоты, который расположен в усилителе промежуточной частоты (УПЧ) (блок 10). Смеситель формирует колебание, частота которого равна разности частот принимаемого сигнала и сигнала гетеродина. Это колебание выделяют с помощью полосно-пропускающего фильтра промежуточной частоты. Для того, чтобы промежуточная частота не изменялась при перестройке приемника, применяют синхронную перестройку частоты гетеродина и частоты настройки УВЧ. Приемник с преобразованием частоты называют **супергетеродинным**.

Применение преобразования частоты позволяет применить неперестраиваемый УПЧ при приеме сигналов с различными несущими частотами. Это обеспечивает высокую частотную избирательность по соседнему каналу и высокую чувствительность приемника.

### 1.2.11. Детектирование высокочастотных колебаний

**Детектирование высокочастотных колебаний** — это операция обратная модуляции. Детектирование осуществляют с помощью устройств, называемых детекторами (блок 11). На выходе детектора получают сигнал, величина которого пропорциональна модулируемому параметру входного высокочастотного сигнала. Для детектирования сигналов с амплитудной модуля-

цией применяют амплитудные детекторы, с частотной модуляцией — частотные детекторы, с фазовой модуляцией — фазовые детекторы.

#### **1.2.12. Усиление протектированного сигнала**

Эта операция необходима для получения выходного сигнала требуемого уровня. Для этих целей используют апериодические усилители тока, напряжения или мощности (блок 12).

#### **1.2.13. Декодирование**

**Декодирование** — операция обратная кодированию. Эта операция осуществляется в приемной части радиоэлектронной системы с помощью декодера (блок 13). Декодирование проводят только в том случае, когда в передающей части осуществлялось кодирование передаваемого сообщения.

#### **1.2.14. Преобразование электрического сигнала в неэлектрический**

Электрический сигнал на последнем этапе обработки, как правило, преобразуют в неэлектрический (блок 14). Эту операцию осуществляют с помощью электромеханических, электронно-оптических и других преобразователей. В частности, при передаче звука — это громкоговорители, при передаче изображения — электронно-лучевые трубки, светодиодные, плазменные панели и пр.

### **1.3. Основные области применения радиоэлектроники**

Перечислим наиболее важные области применения радиоэлектроники.

**Радиосвязь** — связь между несколькими абонентами с помощью электромагнитных волн. При этом каждый из абонентов может связаться с любым другим абонентом при помощи приемо-передатчика. Примером современных систем радиосвязи является мобильная сотовая связь.

**Радиовещание** — односторонняя радиосвязь, при которой источники информации имеют только передатчики, а потребители — только приемники. В настоящее время Земной шар покрыт сетью радиовещательных станций, обеспечивающих беспроводную доставку информации потребителям.

**Телевидение** — передача изображения на расстояние с помощью электромагнитных волн. Телевидение на сегодняшний день является мощным информационным средством во всех развитых странах.

**Радиолокация** — обнаружение объектов, определение их скорости и координат с помощью электромагнитных волн. Радиолокация широко применяется в авиации, судовождении, для военных целей и др.

**Радиотелемеханика** — управление объектами на расстоянии с помощью электромагнитных волн. Эта отрасль нашла свое применение в космической и военной технике, в системах дистанционного управления технологическими процессами и др.

**Радионавигация** — определение собственных координат объектов с помощью радиоэлектронных средств, например *GPS (Global Position System)*, ГЛОНАСС (Глобальная Навигационная Спутниковая Система) и др. К навигационному оборудованию относят также системы слепой посадки самолетов, системы стыковки космических кораблей и т.д.

Существует также множество других областей применения радиоэлектроники: радиоастрономия, радиотелеметрия, радиодоступ к информационным сетям, радиоизмерения, бытовая радиоэлектроника и др. Не преувеличивая, можно сказать, что радиоэлектроника проникает во все области деятельности человека.

## 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 2.1. Определение электрического сигнала

Термин «сигнал» в переводе с греческого (*signum*) означает «знак». Как правило, сигнал — это физический процесс (звук, оптическое изображение и др.), однозначно связанный с неким сообщением, содержащим информацию. Эти физические процессы порождают в радиоэлектронных системах электрические сигналы, что достигается применением первичных преобразователей.

**Электрический сигнал** — некоторое изменение тока или напряжения, однозначно связанное с сообщением. Физические процессы изменяются во времени. Поэтому математическую модель электрического сигнала в дальнейшем будем представлять функцией времени. Часто используют следующие обозначения сигналов:  $i(t)$  — ток;  $u(t)$  — напряжение;  $s(t)$  — видеосигнал (НЧ);  $a(t)$  — радиосигнал (ВЧ). Применяют также и другие обозначения.

### 2.2. Классификация сигналов

#### 2.2.1. Классификация по вероятностным характеристикам

По этому признаку сигналы делят на детерминированные и случайные.

**Детерминированные сигналы** — это сигналы, значения которых в любой момент времени известны, то есть предсказуемы с вероятностью, равной единице. Эти сигналы могут быть заданы аналитически (в виде математических формул), графически, либо в виде таблиц. Детерминированные сигналы не несут информации, поскольку они полностью определены.

**Случайные сигналы** — это такие сигналы, значения которых в произвольный момент времени не могут быть определены с вероятностью, равной

единице, Модель случайного сигнала используют в двух случаях: для описания шумов и помех; при рассмотрении информационных характеристик сигналов. В последнем случае случайный сигнал содержит информацию, например: речь, сигналы изображения и т.п.

Детерминированные сигналы разделяют на периодические и непериодические.

**Периодическими сигналами** называют сигналы, значения которых периодически повторяются через интервалы времени, кратные периоду. То есть на интервале времени  $-\infty < t < \infty$  для таких сигналов выполняется условие

$$s(t) = s(t + kT), \quad (2.1)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  целые числа;  $T$  — период функции  $s(t)$ .

К числу таких сигналов относят периодические последовательности импульсов, примеры которых изображены на рис. 2.1: периодическая последовательность прямоугольных импульсов (диаграмма **a**); периодическая последовательность треугольных импульсов (диаграмма **b**).

Для импульсных последовательностей вводится понятие скважности. Скважность — это отношение периода сигнала  $T$  к длительности отдельного импульса  $t_{\text{и}}$ :

$$Q = T/t_{\text{и}}. \quad (2.2)$$

Число  $Q$  удовлетворяет условию:  $Q \geq 1$ .

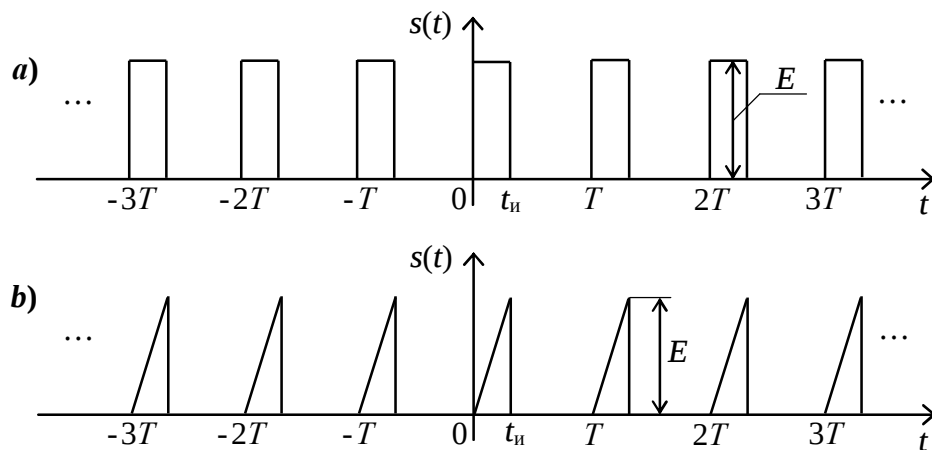


Рис. 2.1

Другим примером периодического сигнала является гармоническое колебание (рис. 2.2).

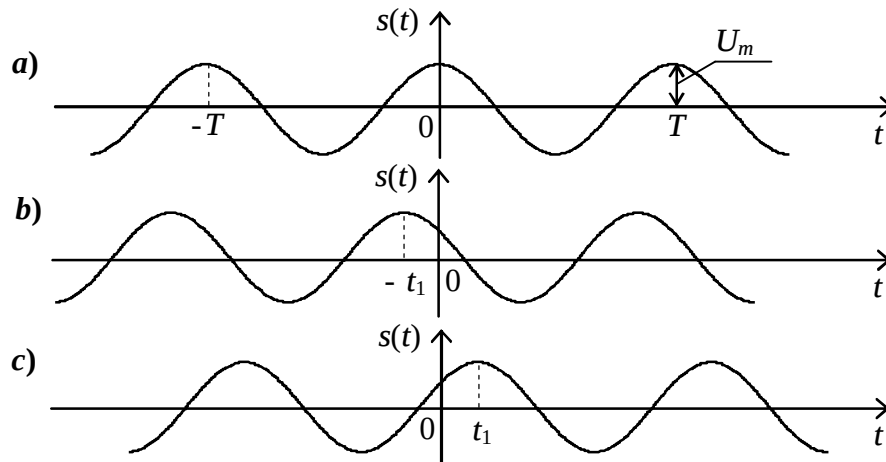


Рис. 2.2

Аналитическая запись такого колебания имеет вид

$$s(t) = U_m \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad (2.3)$$

где  $U_m$  — амплитуда, измеряемая в вольтах (для напряжения) или в амперах (для тока);  $\omega_1 = 2\pi f_1$  — круговая частота, измеряемая в рад/сек;  $f_1 = 1/T$  — частота, измеряемая в герцах;  $T$  — период, измеряемый в секундах;  $\theta_1$  — начальная фаза, измеряемая в радианах.

На рис. 2.2 построены колебания при различных значениях начальной фазы: **a)**  $\theta_1 = 0$ ; **b)**  $\theta_1 = +\omega t_1 > 0$  (сдвиг влево); **c)**  $\theta_1 = -\omega t_1 < 0$  (сдвиг вправо).

Периодические сигналы являются **математической абстракцией**, поскольку в соответствии с определением они отличны от нуля на интервале времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то есть бесконечны во времени. И все же модель периодического сигнала часто используют для теоретического описания **повторяющихся** процессов. Повторяющиеся процессы можно рассматривать как отрезки периодических функций. Если время наблюдения сигнала значительно превышает интервал повторения, то с достаточной степенью точности можно считать повторяющийся процесс периодическим.

**Непериодическими** называют сигналы, для которых не выполняется условие (2.1). Обычно это сигналы отличные от нуля на конечном интервале времени. Например, одиночные импульсы и пачки импульсов. Пачкой называют сигнал, содержащий конечное число импульсов. Непериодические сигналы могут отличаться от нуля и на бесконечном интервале времени, например сигнал вида  $\sin(kt)/kt$ , где  $k = \text{const}$ .

На рис. 2.3 изображены некоторые непериодические процессы: одиночные импульсы (диаграммы **a** и **b**); пачка из 3-х импульсов (диаграмма **c**); сигнал вида  $\sin(kt)/kt$  (диаграмма **d**). На этом рисунке обозначены:  $t_{\text{и}}$  — длительность импульса;  $T_{\text{с}}$  — длительность сигнала (пачки).

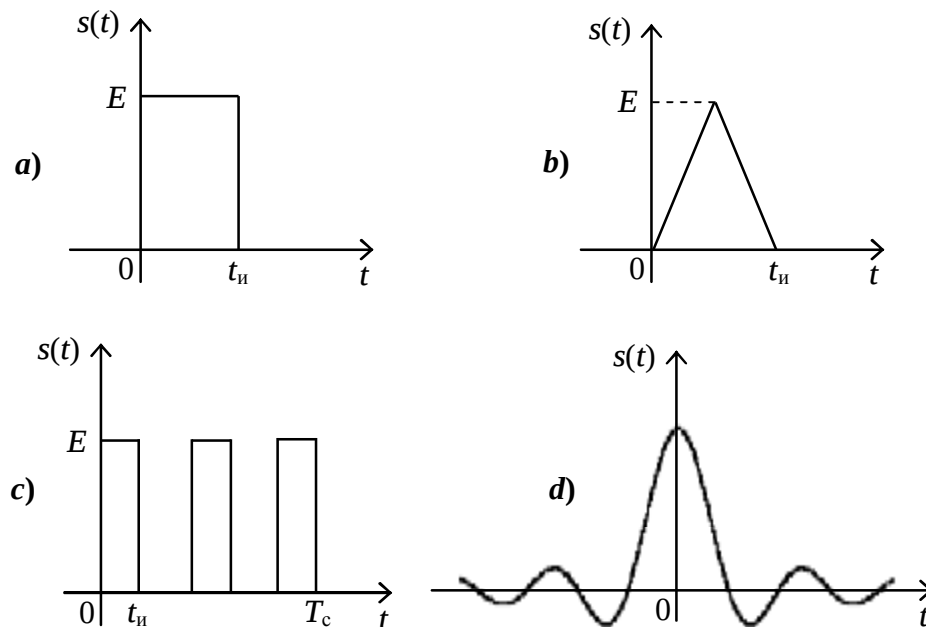


Рис. 2.3

### 2.2.2. Классификация по частотным свойствам

Особое место в классификации сигналов занимает разделение их на две группы: радиосигналы и видеосигналы.

**Радиосигналы** — это высокочастотные (относительно видеосигналов) колебания. Сообщение в радиосигнал закладывают путем модуляции. В РТС радиосигналы получают в передатчике на выходе модулятора, и они существуют вплоть до детектора приемника (радиотракт).

В отсутствии модуляции радиосигнал представляет собой несущее колебание. В этом случае (рис. 2.4,*a*) амплитуда  $A_0$ , начальная фаза  $\theta_0$  и частота  $f_0$  (а значит и период  $T_0$ ) колебания постоянны. В качестве несущих колебаний используют отрезки высокочастотных гармонических колебаний вида (2.3). Поэтому модуляции можно подвергнуть один из трех параметров: амплитуду, частоту либо начальную фазу.

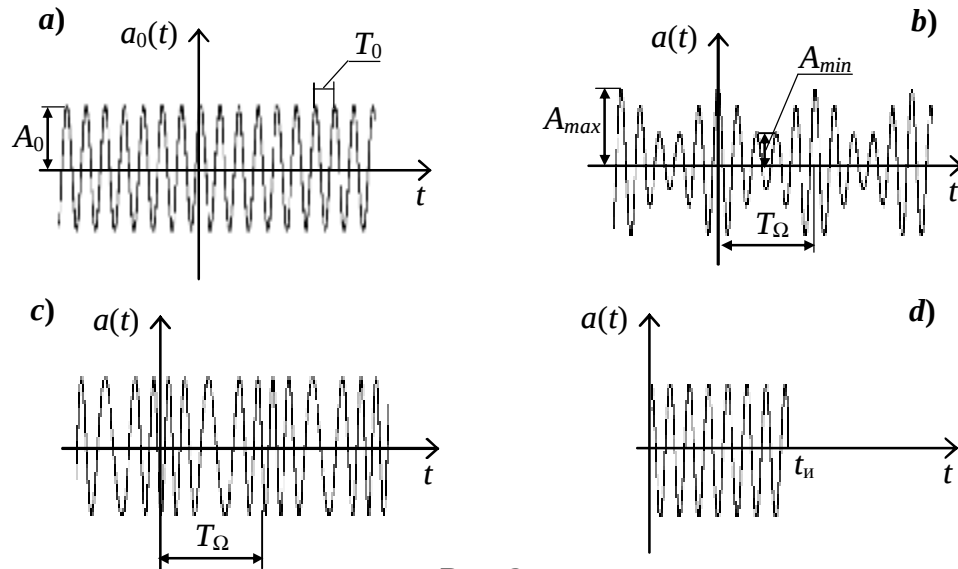


Рис. 2.4

В связи с этим различают три основных вида модуляции:

амплитудная модуляция (**АМ**) — процесс, при котором по закону передаваемого сообщения изменяют амплитуду радиосигнала;

частотная модуляция (**ЧМ**) — процесс, при котором по закону передаваемого сообщения изменяют частоту радиосигнала;

фазовая модуляция (**ФМ**) — процесс, при котором по закону передаваемого сообщения изменяют начальную фазу радиосигнала.

Два последних вида модуляции (ЧМ и ФМ) объединяют общим названием «угловая модуляция» (**УМ**), так как и в том и в другом случаях изменению подвергается полная фаза радиосигнала.

Модуляцию, при которой модулирующий сигнал представляет собой гармоническое колебание, называют **тональной** (гармонической). На рис. 2.4,*b* изображена временная диаграмма радиосигнала с тональной АМ, а на

рис. 2.4,с — с тональной ЧМ. На этих рисунках обозначено:  $A_{max}$ ,  $A_{min}$  — максимальное и минимальное значения амплитуды;  $T_{\Omega}$  — период модулирующего сигнала;  $\Omega$  — круговая частота модуляции.

На рис. 2.4,д изображен радиосигнал с импульсной амплитудной модуляцией — радиоимпульс с прямоугольной огибающей длительностью  $t_{и}$ .

**Видеосигналы** — это низкочастотные (относительно радиосигналов) колебания, которые непосредственно связаны с передаваемым сообщением. Эти сигналы называют модулирующими сигналами. Видеосигналы возникают в передатчике на выходе первичного преобразователя и существуют до модулятора, а в приемнике они возникают на выходе детектора (видеотракт).

### 2.2.3. Классификация по амплитудно-временным характеристикам

По этому признаку сигналы разбивают на четыре основные группы: аналоговые; дискретные во времени; квантованные по уровню; цифровые.

**Аналоговый (континуальный) сигнал** — это непрерывный по времени и непрерывный по уровню сигнал (рис. 2.5,а). Такой сигнал может принимать любые значения в пределах некоторого диапазона в любой момент времени.

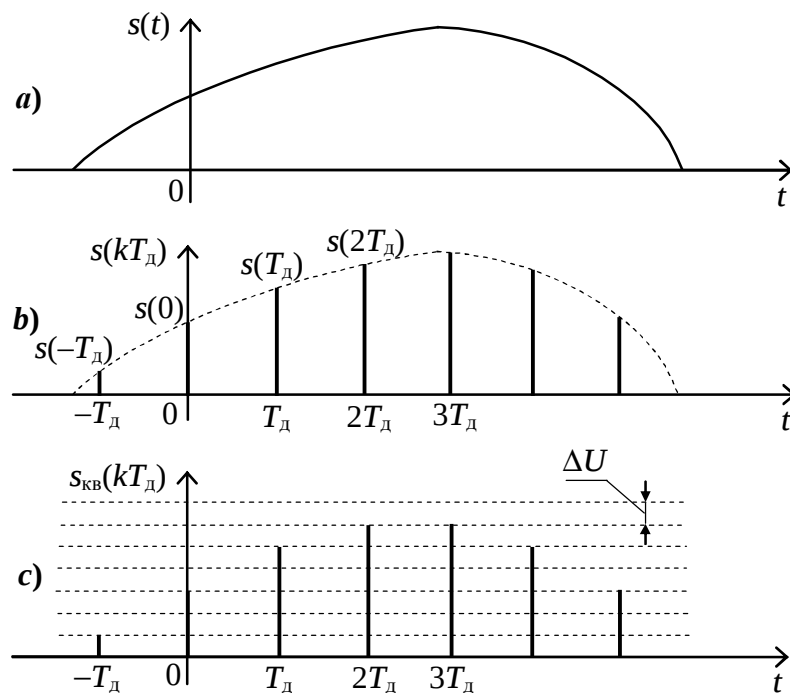


Рис. 2.5

**Дискретный сигнал** — это сигнал, непрерывный по уровню и дискретный во времени. Такой сигнал может принимать любые значения в пределах некоторого диапазона в дискретные моменты времени, кратные интервалу дискретизации  $T_d$ , а в промежутках между этими моментами времени он равен нулю. Отсчеты идеального дискретного сигнала имеют нулевую длительность (рис. 2.5, *b*) и по уровню совпадают со значениями аналогового сигнала  $s(kT_d)$  в моменты времени  $kT_d$ . В реальных условиях длительность отсчетов конечна.

**Квантованный сигнал** — это дискретный во времени и квантованный по уровню сигнал. Уровень такого сигнала может принимать только ряд дискретных значений  $s_{\text{кв}}(kT_d)$ , кратных некоторой постоянной величине  $\Delta U$ . Эта величина называется шагом квантования (рис. 2.5, *c*).

**Цифровой сигнал** — это квантованный сигнал, представленный цифровым кодом. При кодировании часто используют двоичный (бинарный) код, разрядность которого определяет число уровней квантования. Также используют и другие системы кодирования.

### 2.3. Энергетические характеристики сигналов

Мощность и энергия являются важными характеристиками сигналов. В радиоэлектронике используют следующие основные энергетические характеристики [1, 2].

#### 2.3.1. Мгновенная мощность сигнала

Это мощность  $p(t)$ , выделяемая сигналом  $s(t)$  на сопротивлении 1 Ом в момент времени  $t$ . В соответствии с законом Джоуля - Ленца:  $p(t) = s^2(t)R$ , если  $s(t)$  является током и  $p(t) = s^2(t)/R$ , если  $s(t)$  является напряжением. Для  $R = 1$  Ом независимо от того, является  $s(t)$  током или напряжением, мгновенная мощность определяется как квадрат временной функции

$$p(t) = s^2(t). \quad (2.4)$$

### 2.3.2. Энергия сигнала на интервале времени

Это энергия, выделяемая сигналом  $s(t)$  на сопротивлении 1 Ом на интервале времени  $(t_1, t_2)$ . Она определяется как интеграл от мгновенной мощности, то есть, с учетом (2.4), как интеграл от квадрата временной функции

$$\mathfrak{E}_{t_1 \div t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt . \quad (2.5)$$

### 2.3.3. Полная энергия сигнала

Это энергия, выделяемая сигналом  $s(t)$  на сопротивлении 1 Ом на бесконечном интервале времени. С учетом (2.5) можно записать

$$\mathfrak{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt . \quad (2.6)$$

Следует иметь в виду, что в соответствии с (2.6) **полная энергия периодических сигналов равна бесконечности**. Сигналы в виде одиночных импульсов и пачек импульсов обладают **конечным значением полной энергии**. В частности, полная энергия одиночного прямоугольного импульса, изображенного на рис. 2.3,*a* равна

$$\mathfrak{E} = \int_0^{t_{\text{и}}} E^2 dt = E^2 t_{\text{и}} . \quad (2.7)$$

### 2.3.4. Средняя мощность на конечном интервале времени

Эта мощность определяется отношением энергии, выделяемой на сопротивлении 1 Ом на интервале времени  $(t_1, t_2)$ , к величине этого интервала. С учетом (2.5) можно записать

$$P_{\text{cp}}^{t_1 \div t_2} = \frac{\mathfrak{E}_{t_1 \div t_2}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt . \quad (2.8)$$

### 2.3.5. Средняя мощность на бесконечном интервале времени

Эта мощность определяется как предел

$$P_{\text{cp}} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt . \quad (2.9)$$

Для периодических сигналов результаты усреднения на бесконечном интервале времени и на интервале, равном периоду  $T$ , совпадают, поэтому для этих сигналов можно записать

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt . \quad (2.10)$$

В частности, средняя мощность гармонического колебания (2.3) в соответствии с формулой (2.10) равна

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_m^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) dt = \frac{U_m^2}{2} , \quad (2.11)$$

а средняя мощность периодической последовательности прямоугольных импульсов, изображенной на рис. 2.1,  $a$  равна

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{\text{и}}} E^2 dt = \frac{E^2 t_{\text{и}}}{T} = \frac{E^2}{Q} . \quad (2.12)$$

### 2.3.6. Действующее значение периодического сигнала

Действующее (эффективное) значение  $S_{\text{д}}$  периодического сигнала  $s(t)$  вводится как некое постоянное напряжение (или ток), которое развивает на сопротивлении 1 Ом мощность, равную средней мощности этого сигнала. Из этого определения следует, что действующее значение периодического сигнала численно равно корню квадратному из его средней мощности

$$S_{\text{д}} = \sqrt{P_{\text{cp}}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt} . \quad (2.13)$$

С учётом (2.11) действующее значение гармонического сигнала равно

$$U_d = U_m / \sqrt{2} . \quad (2.14)$$

С учетом (2.12) определим действующее значение для периодической последовательности прямоугольных импульсов

$$U_d = E / \sqrt{Q} . \quad (2.15)$$

### 2.3.7. Взаимная энергия двух сигналов

Рассмотрим два сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . Энергия суммы этих сигналов на интервале времени  $(t_1, t_2)$  в соответствии с (2.5) равна

$$\mathfrak{E}_{t_1+t_2} = \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + 2\mathfrak{E}_{12} ,$$

где  $\mathfrak{E}_1$  и  $\mathfrak{E}_2$  — энергия 1-го и 2-го сигналов на интервале времени  $(t_1, t_2)$ ;

$\mathfrak{E}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt$  — **взаимная энергия этих сигналов** на интервале  $(t_1, t_2)$ .

Таким образом, в общем случае энергия суммы двух сигналов не равна сумме их энергий и отличается от этой суммы на величину  $2\mathfrak{E}_{12}$ . Это же можно сказать и о мощности. Таким образом, энергетические характеристики сигналов в общем случае не являются аддитивными. Исключение составляют сигналы, взаимная энергия которых равна нулю, то есть  $\mathfrak{E}_{12} = 0$ . Такие сигналы называют ортогональными. Условием ортогональности двух сигналов на интервале  $(t_1, t_2)$  можно записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt = 0 . \quad (2.16)$$

**Система ортогональных функций** — это бесконечный набор функций, в котором все функции попарно ортогональны. Таковую систему функций на-

зывают **ортгональным базисом**. Условие ортгоналности системы функций  $\varphi_n(t)$  на интервале времени  $(t_1, t_2)$  записывается в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{if } n \neq m; \\ \|\varphi_n\|^2, & \text{if } n = m, \end{cases} \quad (2.17)$$

где  $n, m$  — целые числа;  $\|\varphi_n\|^2$  — энергия функции  $\varphi_n(t)$  на интервале  $(t_1, t_2)$ , называемая квадратом нормы этой функции и определяемая соотношением

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t) dt.$$

Если система ортгональных функций  $\varphi_n(t)$  состоит из комплексных функций, то в этом случае мгновенная мощность и квадрат нормы вводятся следующим образом:

$$p(t) = \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) = |\varphi_n(t)|^2; \quad (2.18)$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi_n(t)|^2 dt. \quad (2.19)$$

При этом условие ортгоналности записывается в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{if } n \neq m; \\ \|\varphi_n\|^2, & \text{if } n = m. \end{cases} \quad (2.20)$$

В формулах (2.18) и (2.20) символ “\*” обозначает комплексное сопряжение. Формулы (2.18)...(2.20) являются общими и справедливы как для комплексных, так и для действительных функций  $\varphi_n(t)$ .

## 2.4. Разложение сигнала по системе ортогональных функций

Часто необходимо сложный сигнал разложить на сумму простых сигналов. Важное место при решении таких задач занимает разложение сигналов по системе ортогональных функций. Для таких разложений соблюдается принцип аддитивности энергетических характеристик. В этом случае энергия (мощность) сигнала распределяется между составляющими, на которые разлагается этот сигнал, и такое разложение приобретает более ясный физический смысл.

Процедура разложения сигналов по системе ортогональных функций тесно связана со спектральным анализом сигналов, имеющим огромное значение в теории сигналов.

**Теорема.** Сигнал  $s(t)$ , для которого на интервале времени  $(t_1, t_2)$  выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt < \infty ,$$

можно разложить в ряд по системе ортогональных на указанном интервале времени функций  $\varphi_n(t)$ , то есть

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \varphi_n(t) , \quad (2.21)$$

где  $C_n$  — коэффициенты разложения в ряд, независимые от времени.

Ряд (2.21) называют **обобщенным рядом Фурье**. Определим коэффициенты  $C_n$ . Для этого умножим левую и правую части соотношения (2.21) на  $\varphi_n^*(t)$  и проинтегрируем на промежутке  $(t_1, t_2)$ . С учетом условия ортогональности (2.20) в правой части останется только один член

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_n^*(t) dt = C_n \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) dt = C_n \|\varphi_n\|^2 . \quad (2.22)$$

Из (2.22) выразим искомую величину

$$C_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_n^*(t) dt. \quad (2.23)$$

Таким образом, формула (2.23) позволяет определить коэффициенты разложения для используемой системы ортогональных функций.

С разложением в ряд по системе ортогональных функций связано обобщенное представление о спектре сигнала. **Спектр сигнала в обобщенном смысле** — это набор ортогональных функций, на которые разлагается этот сигнал. Порой под спектром понимают набор коэффициентов  $C_n$ , которые определяют вклад (вес)  $n$ -ой ортогональной функции в сигнал.

Наиболее широко в радиоэлектронике используется разложение сигналов по системе гармонических функций (Фурье-анализ). Вопросам Фурье-анализа посвящены разделы 3 и 4 настоящего пособия.

## 2.5. Пример решения задачи

### 2.5.1. Условие

Определить полную энергию треугольного импульса, изображенного на рис. 2.6, а также рассчитать среднюю мощность и действующее значение процесса, получаемого путем периодического повторения этого импульса. Исходные данные для расчета: высота импульса  $E = 10\text{ В}$ ; длительность импульса  $t_{\text{и}} = 3 \cdot 10^{-3}\text{ с}$ ; период последовательности  $T = 20 \cdot 10^{-3}\text{ с}$ .

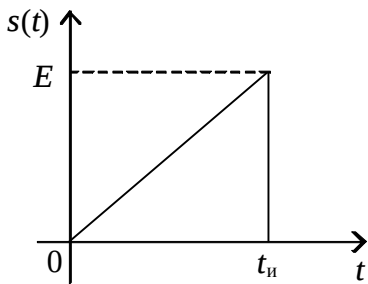


Рис. 2.6

### 2.5.2. Решение

Полная энергия сигнала определяется соотношением (2.6). В соответствии с этой формулой сигнал  $s(t)$  следует задать на бесконечном интервале времени. Из рис. 2.6 следует:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0, t > t_{\text{и}} ; \\ \frac{E}{t_{\text{и}}} t & \text{if } 0 \leq t \leq t_{\text{и}} . \end{cases} \quad (2.24)$$

Подставим (2.24) в формулу (2.6). В результате получим

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{E^2}{t_{\text{и}}^2} \int_0^{t_{\text{и}}} t^2 dt = \frac{E^2 t_{\text{и}}}{3} = 0,1 \text{ В}^2 \text{с} .$$

Средняя мощность периодического сигнала определяется соотношением (2.10). На интервале, равном периоду, аналитическое выражение для периодического сигнала совпадает с формулой (2.24), описывающей одиночный импульс. Поэтому среднюю мощность процесса, получаемого периодическим повторением заданного импульса, определим как

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{E^2}{t_{\text{и}}^2 T} \int_0^{t_{\text{и}}} t^2 dt = \frac{E^2 t_{\text{и}}}{3T} = 5 \text{ В}^2 .$$

Действующее значение этого процесса определим по формуле (2.13)

$$S_{\text{д}} = \sqrt{P_{\text{ср}}} = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ В} .$$

### 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ФУРЬЕ - АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

#### 3.1. Определение спектра по Фурье и основные понятия

Наибольшее распространение в радиоэлектронике нашло разложение сигналов по системе гармонических функций. С этим разложением связано определение спектра по Фурье, который первым доказал, что сложные сигналы можно представить в виде суммы гармонических колебаний. **Спектром сигнала по Фурье называют набор гармонических колебаний, на которые разлагается этот сигнал.**

Спектр по Фурье (в дальнейшем просто спектр) по своей сути определяет частотный состав сигнала. Для уяснения этого понятия рассмотрим простой пример, а именно определим спектр сигнала  $s(t) = E \cos^2 \omega_1 t$ . Применим для этого метод тригонометрических преобразований. Суть этого метода состоит в использовании известных тригонометрических формул.

В данном случае применим формулу  $\cos^2 \alpha = [1 + \cos(2\alpha)]/2$ . С учетом этой формулы, получаем

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} \cos(2\omega_1 t).$$

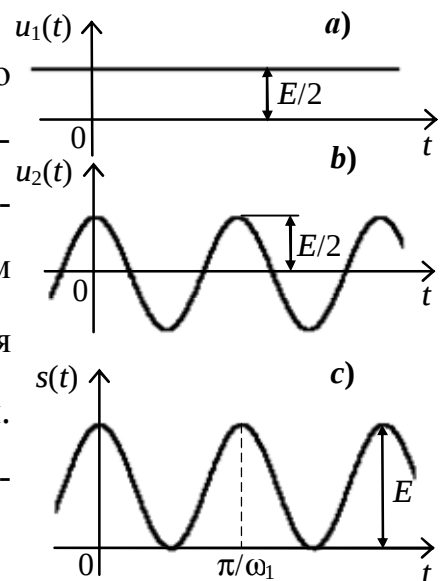


Рис. 3.1

Таким образом, сигнал  $s(t)$  можно представить в виде суммы двух гармонических составляющих (рис. 3.1). Первая составляющая, изображенная на рис. 3.1,а, представляет собой константу  $u_1(t) = E/2$  (вырожденный случай

гармонического колебания с нулевой частотой). Вторая составляющая, изображенная на рис. 3.1,**b**, представляет собой гармоническое колебание с частотой  $2\omega_1$ :  $u_2(t) = \frac{E}{2} \cos(2\omega_1 t)$ . Эти две составляющие в сумме дают исходный сигнал  $s(t)$ , который изображен на рис. 3.1,**c**.

По результатам спектрального анализа периодических сигналов строят спектрограммы (рис. 3.2).

**Спектрограмма амплитуд** (спектр амплитуд) — это зависимость амплитуд составляющих спектра от частоты.

**Спектрограмма начальных фаз** (спектр фаз) — это зависимость начальных фаз составляющих спектра от частоты.

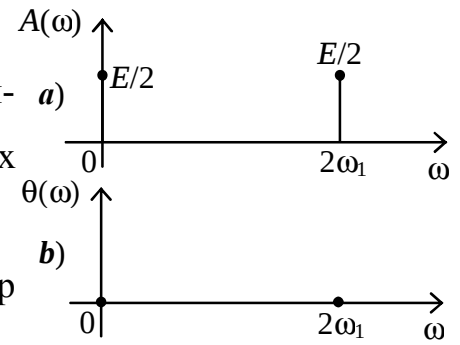


Рис. 3.2

На рис. 3.2,**a** построена спектрограмма амплитуд, а на рис. 3.2,**b** — спектрограмма начальных фаз рассмотренного сигнала.

### 3.2. Разложение периодического сигнала в комплексный ряд Фурье

Рассмотрим задачу спектрального Фурье-анализа произвольного периодического сигнала  $s(t)$  с круговой частотой  $\omega_1 = 2\pi/T$  (рис. 3.3), для которого на интервале времени, равном периоду  $T$ , выполняется условие абсолютной интегрируемости

$$\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)| dt < \infty, \quad (3.1)$$

а также выполняются условия Дирихле (конечное число экстремумов и разрывов первого рода на интервале, равном периоду).

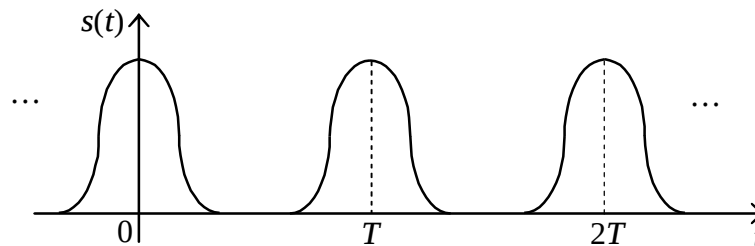


Рис. 3.3

Осуществим разложение этого сигнала в спектр по системе комплексных гармонических функций

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_1 t} . \quad (3.2)$$

Докажем, что система функций (3.2) является ортогональной на интервале времени  $(-T/2, T/2)$ . Для этого проверим выполнение условия (2.20):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} \text{if } m \neq n: & \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_1 t} e^{-jm\omega_1 t} dt = 0 ; \\ \text{if } m = n: & \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_1 t} e^{-jn\omega_1 t} dt = \|\varphi_n\|^2 = T . \end{cases} \quad (3.3)$$

В случае  $m \neq n$  интеграл в (3.3) берется следующим образом:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_1 t} e^{-jm\omega_1 t} dt = \frac{1}{jn\omega_1(n-m)} e^{jn\omega_1 t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0 .$$

Таким образом, периодический сигнал произвольной формы на интервале времени  $(-T/2, T/2)$ , а значит и на бесконечном интервале времени, можно разложить по системе ортогональных функций (3.2.). В этом случае ряд (2.21) принимает вид

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} . \quad (3.4)$$

Ряд (3.4) называют **рядом Фурье в комплексной форме**. Спектр сигнала, представленного в виде ряда (3.4), содержит бесконечный набор комплексных гармонических функций с кратными положительными и отрицательными частотами. Коэффициенты разложения  $C_n$  в этом случае являются комплексными амплитудами гармонических колебаний с частотами  $n\omega_1$ . Определим  $C_n$  в соответствии с (2.23):

$$C_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \Phi_n^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt . \quad (3.5)$$

Поскольку в общем случае эти коэффициенты являются комплексными числами, то представим их в алгебраической и показательной формах:

$$C_n = c_{nc} + jc_{ns} = |C_n| e^{j\theta_n} , \quad (3.6)$$

где  $c_{nc}, c_{ns}$  — действительная и мнимая части, а  $|C_n|, \theta_n$  — модули и аргументы комплексных весовых коэффициентов.

Применяя формулу Эйлера в (3.5) и правила взятия модуля и аргумента комплексного числа, определим  $c_{nc}, c_{ns}, |C_n|, \theta_n$ :

$$c_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt ; \quad (3.7)$$

$$c_{ns} = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt . \quad (3.8)$$

$$|C_n| = \sqrt{c_{nc}^2 + c_{ns}^2} ; \quad (3.9)$$

$$\theta_n = \text{Arctg} \frac{c_{ns}}{c_{nc}} = \text{angle}(c_{nc}, c_{ns}) . \quad (3.10)$$

В формуле (3.10) **angle** — это оператор, позволяющий определить аргумент комплексного числа по его действительной и мнимой частям в диапазоне  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Из (3.7)...(3.10) следует, что  $c_{nc}$  и  $|C_n|$  являются чётными функциями аргумента  $n$ , а  $c_{ns}$  и  $\theta_n$  — нечётными.

Представляя в формуле (3.4) коэффициент разложения  $C_n$  в показательной форме, получаем

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} . \quad (3.11)$$

Эта форма комплексного ряда Фурье удобна для построения спектрограмм. В данном случае строят спектрограммы модулей и аргументов коэффициентов разложения. На рис. 3.4,*a* изображен пример спектрограммы модулей, а на рис. 3.4,*b* — спектрограммы аргументов.

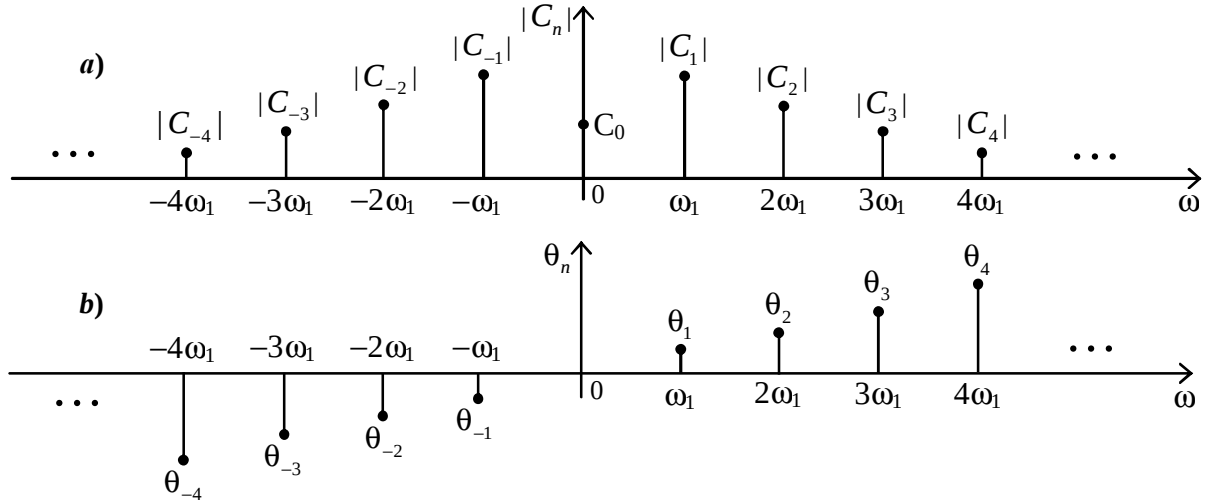


Рис. 3.4

### 3.3. Ряд Фурье в тригонометрической форме

Комплексный ряд Фурье (3.11) содержит набор комплексных гармонических функций с положительными и с отрицательными частотами. Если сигнал  $s(t)$  представляет собой чисто действительную функцию времени, то ряд (3.11) можно преобразовать к сумме действительных гармонических функций только с положительными (**физическими**) частотами. Такой ряд называют рядом Фурье в тригонометрической форме. Осуществим переход к такому ряду Фурье. Для этого разобьём (3.11) на две суммы, выделив при этом отдельно коэффициент  $C_0$ :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)}. \quad (3.12)$$

В последнем выражении первое и третье слагаемые — это суммы комплексных гармонических функций только с отрицательными и только положительными частотами соответственно.

Поменяем в первой сумме знак  $n$  на противоположный:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |C_{-n}| e^{j(-n\omega_1 t + \theta_{-n})} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} .$$

В последнем выражении учтем, что  $|C_n|$  является четной функцией переменной  $n$ , а  $\theta_n$  — нечетной, то есть  $|C_n| = |C_{-n}|$ ;  $\theta_n = -\theta_{-n}$ . Тогда

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{-j(n\omega_1 t + \theta_n)} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} . \quad (3.13)$$

Учтем, что

$$|C_n| \left[ e^{-j(n\omega_1 t + \theta_n)} + e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} \right] = 2 |C_n| \cos(n\omega_1 t + \theta_n) . \quad (3.14)$$

Объединяя обе суммы в (3.13) с учетом (3.14), получаем

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 |C_n| \cos(n\omega_1 t + \theta_n) . \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) представляет собой **ряд Фурье в тригонометрической форме**, который содержит косинусоидальные гармонические колебания только с физическими частотами. Представим (3.15) в следующем виде

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n) , \quad (3.16)$$

где  $a_0/2 = C_0$  — постоянная составляющая, которая не зависит от времени;

$A_n = 2 |C_n|$  и  $\theta_n$  — амплитуды и начальные фазы колебаний с частотами  $n\omega_1$ .

Каждый член ряда Фурье (3.16) представляет собой действительное гармоническое колебание с амплитудой  $A_n$ , физической частотой  $n\omega_1$  и начальной фазой  $\theta_n$ .

Амплитуды  $A_n$  и начальные фазы  $\theta_n$  определяют по следующим формулам, которые вытекают из соотношений (3.9), (3.10):

$$A_n = 2\sqrt{c_{nc}^2 + c_{ns}^2} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \quad (3.17)$$

$$\theta_n = \text{Arctg} \frac{c_{ns}}{c_{nc}} = \text{Arctg} \frac{b_n}{a_n} = \text{angle}(a_n, b_n), \quad (3.18)$$

где коэффициенты разложения  $a_n$  и  $b_n$  определяют по формулам, вытекающим из соотношений (3.7) и (3.8):

$$a_n = 2c_{nc} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \quad (3.19)$$

$$b_n = 2c_{ns} = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \quad (3.20)$$

Установим физический смысл постоянной составляющей, выражение для которой получим из формулы (3.19) положив в них  $n=0$ . В результате получим

$$\frac{a_0}{2} = C_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt. \quad (3.21)$$

Соотношение (3.21) представляет собой запись теоремы о среднем [4]. Поэтому постоянная составляющая численно равна среднему значению функции  $s(t)$  за период  $T$ .

Построим спектрограммы амплитуд и начальных фаз тригонометрического ряда Фурье (рис. 3.5).

Сравнивая спектрограммы для комплексного и тригонометрического рядов Фурье, представленные на рис. 3.4 и рис. 3.5, видим, что во втором случае отсутствуют отрицательные частоты, а амплитуды колебаний  $A_n$  в два раза превышают модули коэффициентов разложения  $|C_n|$ , за исключением постоянной составляющей, величина которой остается неизменной.

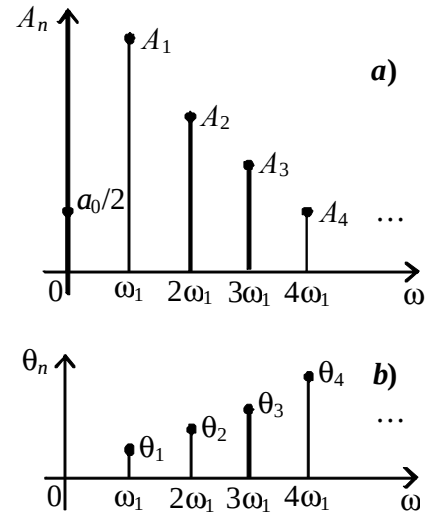


Рис. 3.5

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

1) Периодические сигналы обладают **дискретной** (линейчатой) структурой спектра. **Дискретный спектр** — это такой спектр, в состав которого входят гармонические колебания с дискретными значениями частот.

2) Спектр периодического сигнала состоит из гармонических колебаний с кратными частотами  $n\omega_1$ , где  $\omega_1 = 2\pi/T$  — частота сигнала, разлагаемого в спектр. Гармонические колебания с кратными частотами называют **гармониками**. Поэтому можно сказать, что спектр периодического сигнала — это бесконечный набор гармоник.

3) В спектре периодического сигнала может присутствовать постоянная составляющая, которая рассматривается как вырожденное гармоническое колебание с нулевой частотой.

4) Спектральный анализ позволяет рассматривать сигнал в двух областях: временной и частотной (спектральной). Причём, любые изменения формы сигнала во времени приводят к изменению его спектра и наоборот.

### 3.4. Спектры чётных и нечётных функций времени

**3.4.1.** Пусть  $s(t)$  — чётная функция времени, то есть  $s(t) = s(-t)$ . В этом случае из (3.20) вытекает, что коэффициенты  $b_n = 0$ , а из (3.19) следует, что коэффициенты  $a_n$  можно рассчитать по более простой формуле, осуществляя интегрирование на интервале времени, равном половине периода

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt. \quad (3.22)$$

Тогда амплитуды и начальные фазы гармоник спектра определяются соотношениями:

$$A_n = |a_n| = \frac{4}{T} \left| \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt \right|; \quad (3.23)$$

$$\theta_n = \text{angle}(a_n, 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } a_n > 0; \\ \pi & \text{if } a_n < 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

**3.4.2.** Пусть  $s(t)$  — нечётная функция времени, то есть  $s(t) = -s(-t)$ . В этом случае из (3.19) следует, что коэффициенты  $a_n = 0$ , а из (3.20) следует, что коэффициенты  $b_n$  можно рассчитать по более простой формуле, осуществляя интегрирование на интервале, равном половине периода

$$b_n = -\frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \quad (3.25)$$

Тогда амплитуды и начальные фазы гармоник спектра определяются соотношениями:

$$A_n = |b_n| = \frac{4}{T} \left| \int_0^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt \right|; \quad (3.26)$$

$$\theta_n = \text{angle}(0, b_n) = \begin{cases} +\pi/2 & \text{if } b_n > 0; \\ -\pi/2 & \text{if } b_n < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

### **3.5. Распределение средней мощности периодического сигнала по спектру. Эффективная ширина спектра**

Ряд Фурье (3.16) содержит бесконечное число членов и сходится к сигналу  $s(t)$  с нулевой среднеквадратической ошибкой [4]. Таким образом, теоретически ширина спектра периодического сигнала бесконечна. На практике спектр ограничивают некоторой полосой частот, называемой практической или эффективной шириной спектра. Наиболее часто в качестве критерия ограничения ширины спектра используют так называемый **энергетический критерий**, в соответствии с которым **эффективная ширина спектра** — это полоса частот, в пределах которой содержится основная часть (обычно 90%) средней мощности периодического сигнала.

Методика расчета эффективной ширины спектра согласно энергетическому критерию состоит в следующем. Среднюю мощность периодического сигнала в соответствии с (2.10) запишем в виде

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt. \quad (3.28)$$

В силу ортогональности составляющих спектра эта мощность распределяется между постоянной составляющей и гармониками. Поэтому мощность, сосредоточенную в полосе частот от нуля до  $k$ -ой гармоники, исключая мощность постоянной составляющей, можно определить по очевидной формуле

$$P_k = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k A_n^2 . \quad (3.29)$$

Доля мощности, сосредоточенной в этой полосе, по отношению к средней мощности сигнала (исключая мощность постоянной составляющей) определяется отношением

$$\frac{P_k}{P_{\text{cp}} - \frac{a_0^2}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^k A_n^2}{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4}} = \gamma(k) , \quad (3.30)$$

где  $\gamma(k)$  — долевой коэффициент ( $\gamma(k) \leq 1$ ), зависящий от номера  $k$ .

Изменяя  $k$  в (3.30) находят такое значение  $k = k_{\text{эф}}$ , при котором выполняется равенство  $\gamma(k_{\text{эф}}) \approx 0,9$ . Тогда эффективную ширину спектра определим по формуле

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = k_{\text{эф}} \omega_1 .$$

### 3.6. Спектр периодической последовательности импульсов прямоугольной формы

Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов, график которой изображен на рис. 3.6.

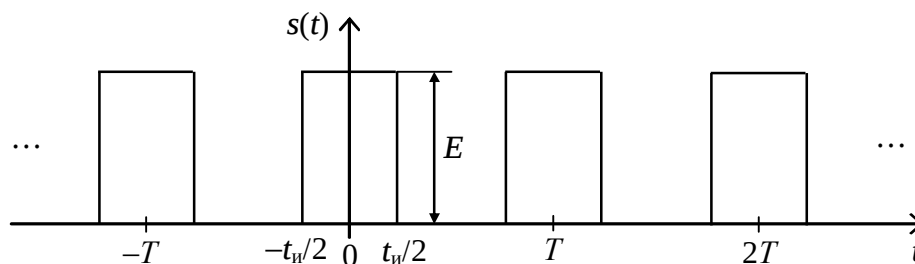


Рис. 3.6

Начало отсчета выбрано так, что рассматриваемый сигнал является чётной функцией времени. При этом (см. п. 3.4.1.) для расчета спектра достаточно задать аналитически сигнал на интервале времени  $(0, T/2)$ :

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{if } 0 \leq t < t_n/2; \\ 0 & \text{if } t_n/2 < t \leq T/2. \end{cases} \quad (3.31)$$

В рассматриваемом случае  $b_n = 0$ , а коэффициенты  $a_n$  определим по формуле (3.23). Используя (3.31), получаем

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{t_n/2} E \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2E}{Q} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right)}{\frac{n\omega_1 t_n}{2}}. \quad (3.32)$$

Используя формулу (3.32), определим постоянную составляющую, амплитуды и начальные фазы гармоник спектра:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{E}{Q}; \quad (3.33)$$

$$A_n = |a_n| = \frac{2E}{Q} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right)}{\frac{n\omega_1 t_n}{2}} \right|; \quad (3.34)$$

$$\theta_n = \begin{cases} 0 & \text{if } a_n > 0; \\ \pi & \text{if } a_n < 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Введём понятие **огibaющей спектра амплитуд** — это мысленная линия, соединяющая максимальные значения отсчетов дискретной функции  $A_n$ . Определим выражение для огibaющей спектра амплитуд. Для этого в формуле (3.34) дискретный аргумент  $n\omega_1$  заменим непрерывным аргументом  $\omega$ . В результате получим

$$A(\omega) = \frac{2E}{Q} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}\right)}{\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}} \right|. \quad (3.36)$$

Определим расположение нулей огибающей спектра амплитуд, приравняв (3.36) к нулю. В результате решения находим

$$\omega_{0k} = \frac{2\pi}{t_{\text{и}}} k, \text{ что соответствует } f_{0k} = \frac{1}{t_{\text{и}}} k, \quad (3.37)$$

где  $k = 1, 2, 3 \dots$ .

Построим спектрограммы амплитуд и начальных фаз (рис. 3.7). На этом рисунке по оси абсцисс отложена частота  $f = \omega/2\pi$ .

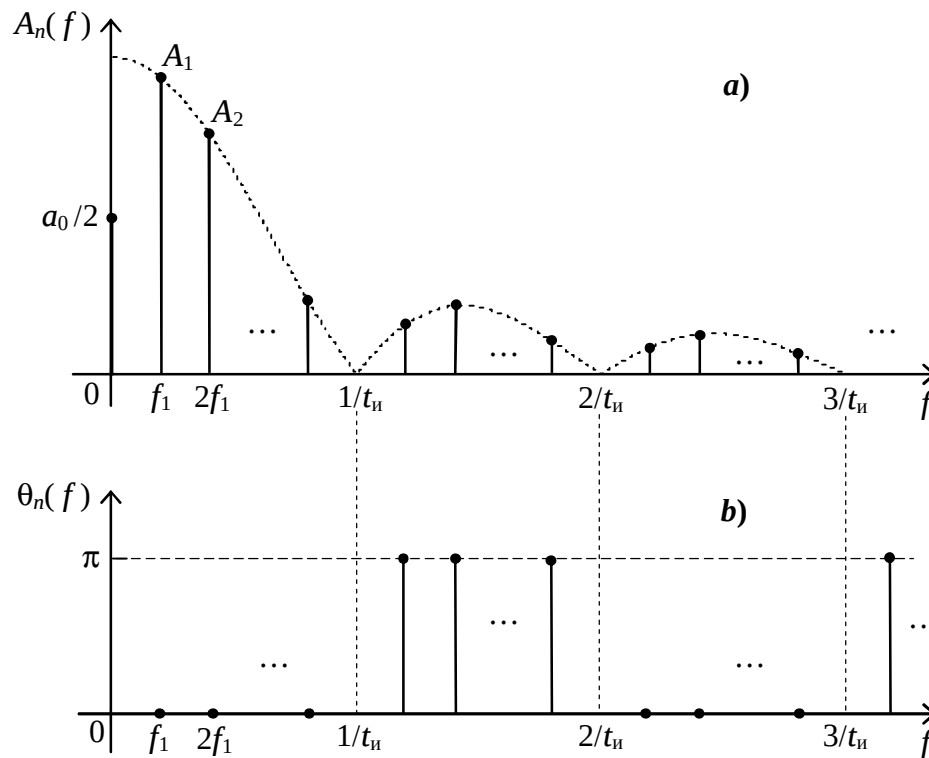


Рис. 3.7

В спектре могут отсутствовать (выпадать) составляющие с частотами  $mf_1$  ( $m$  — номер выпадающей гармоники). Это произойдет, если нули огибающей спектра амплитуд совпадут с этими частотами, то есть

$$f_{0k} = mf_1. \quad (3.38)$$

Из (3.38) с учетом (3.37) определим номера выпадающих гармоник

$$m = \frac{f_{0k}}{f_1} = Qk. \quad (3.39)$$

Из (3.39) следует, что если скважность  $Q$  — целое число, то выпадают гармоники, номера которых кратны  $Q$ . Так при  $Q = 3$  выпадут гармоники с номерами  $m = 3, 6, 9, \dots$ . Если же  $Q$  не является целым числом, то номера выпадающих гармоник соответствуют целочисленным значениям произведения  $Qk$ . Так при  $Q = 2,5$  выпадут гармоники с номерами  $m = 5, 10, 15, \dots$ .

### 3.7. Меандр и его спектр

Меандр (в переводе с греческого означает “**орнамент**”). Меандр (рис. 3.8) представляет собой частный случай периодической последовательности прямоугольных импульсов при скважности  $Q = 2$  и нулевой постоянной составляющей (сдвиг сигнала вдоль оси ординат на величину  $E/2$  вниз). Поэтому при анализе спектра меандра воспользуемся результатами, полученными в предыдущем подразделе.

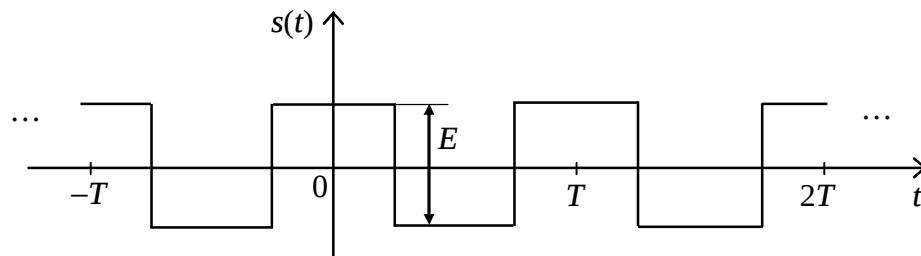


Рис. 3.8

Из формулы (3.32) при  $Q = 2$  получим следующее выражение для  $a_n$ :

$$a_n = E \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \bigg/ \frac{\pi n}{2}. \quad (3.40)$$

Из (3.39) и (3.40) следует, что  $a_n$  обращается в нуль при четных значениях  $n$ , то есть из спектра меандра выпадают все четные гармоники. Рассчитаем амплитуды и начальные фазы первой и третьей гармоник по формулам

(3.23) и (3.24):  $A_1 = 2E/\pi \approx 0,7E$ ;  $\theta_1 = 0$ ;  $A_3 = 2E/3\pi \approx 0,23E$ ;  $\theta_3 = \pi$ . На рис. 3.9 (диаграмма **a**) представлены эти гармоники, которые обозначены  $s_1(t)$  и  $s_3(t)$  соответственно. Проведём суммирование этих составляющих. На рис. 3.9 (диаграмма **b**) представлена сумма этих гармоник, обозначенная как  $s_\Sigma(t)$ . Там же пунктиром изображен меандр  $s(t)$ , спектр которого мы анализируем.

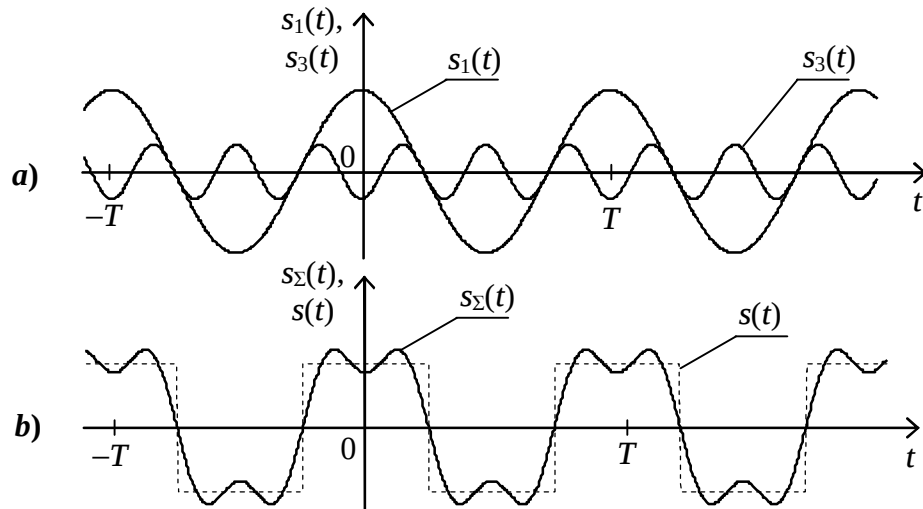


Рис. 3.9

Полученная в результате суммирования функция  $s_\Sigma(t)$  отличается от меандра. Если число суммируемых гармоник увеличить, то результирующее колебание  $s_\Sigma(t)$  по форме в большей степени приблизится к меандру. При стремлении числа составляющих спектра к бесконечности, сумма ряда Фурье сходится к меандру. Исключение составляют точки разрыва, в которых сумма сходится к величине  $1,18E$  [1]. Однако длительность этих выбросов при бесконечном увеличении членов ряда стремится к нулю, и они не влияют на среднеквадратическую ошибку, которая в пределе равна нулю.

### 3.8. Пример решения задачи

#### 3.8.1. Условие

Провести спектральный анализ периодического процесса, изображенного на рис. 3.10. Построить спектрограммы амплитуд и начальных фаз. Исходные данные: высота  $E = 100$  В; период  $T = 10 \cdot 10^{-3}$  с.

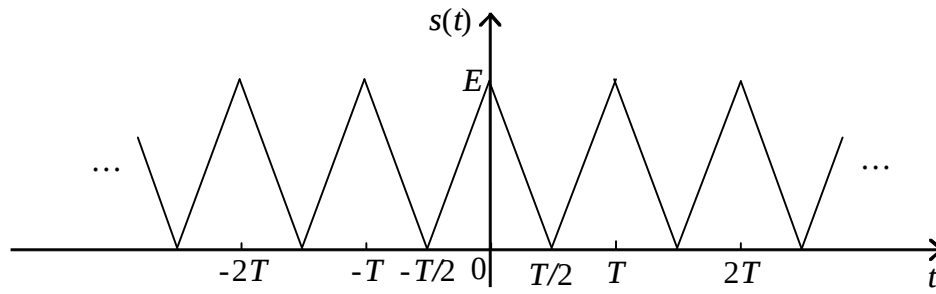


Рис. 3.10

### 3.8.2. Решение

Поскольку заданный процесс является четной функцией времени, то коэффициенты  $b_n = 0$ , а коэффициенты  $a_n$  рассчитаем по формуле (3.22).

В соответствии с этой формулой достаточно задать сигнал на интервале времени  $(0, T/2)$ . На этом интервале сигнал  $s(t)$  можно записать в виде

$$s(t) = \frac{-2E}{T}t + E. \quad (3.41)$$

Подставим (3.41) в формулу (3.22), что дает

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left( \frac{-2E}{T}t + E \right) \cos(n\omega_1 t) dt.$$

Беря интеграл в последнем выражении, получаем

$$a_n = \frac{8E}{T^2} \frac{1}{n^2 \omega_1^2} [1 - \cos(n\pi)].$$

Учтем, что  $\omega_1 = 2\pi/T$ . После преобразований, окончательно получаем

$$a_n = E \left[ \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n/2} \right]^2. \quad (3.42)$$

Определим амплитуды и начальные фазы гармоник спектра. В соответствии с (3.23) и (3.24) можем записать

$$A_n = |a_n| = E \left[ \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n/2} \right]^2 ; \quad (3.43)$$

$$\theta_n = 0 . \quad (3.44)$$

Из (3.43) следует, что из спектра выпадают все четные гармоники. В соответствии с (3.44) начальные фазы всех нечетных гармоник равны нулю. Постоянная составляющая в соответствии с (3.43) равна  $a_0/2 = E/2$  .

Тогда ряд Фурье (3.16) для данного случая принимает вид

$$s(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E \left[ \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n/2} \right]^2 \cos(n\omega_1 t) . \quad (3.45)$$

Для построения спектрограмм проведем расчет постоянной составляющей, а также амплитуд первой, третьей и пятой гармоник:  $a_0/2 = 50$  В;  $A_1 = 4E/\pi^2 \approx 40,57$  В;  $A_3 = 4E/9\pi^2 \approx 4,51$  В;  $A_5 = 4E/25\pi^2 \approx 1,62$  В. Спектрограммы амплитуд и начальных фаз построены на рис. 3.11.

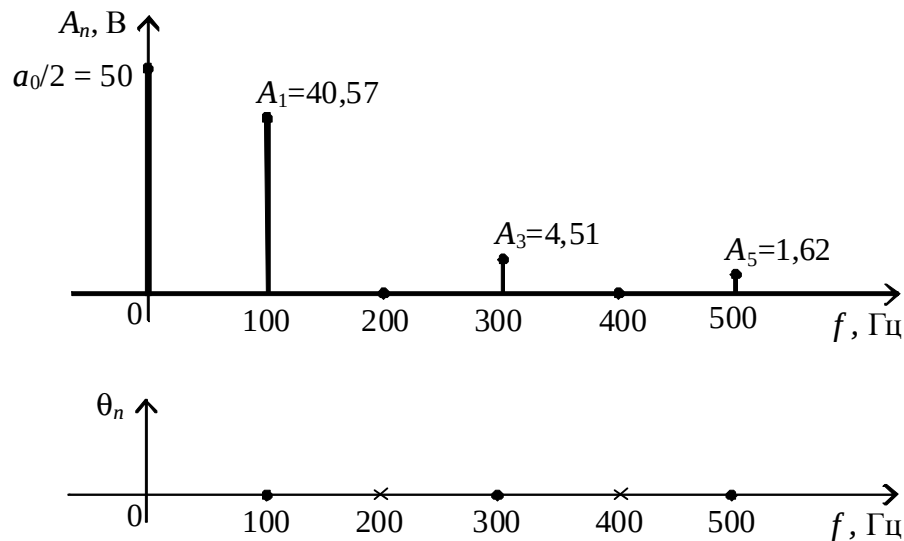
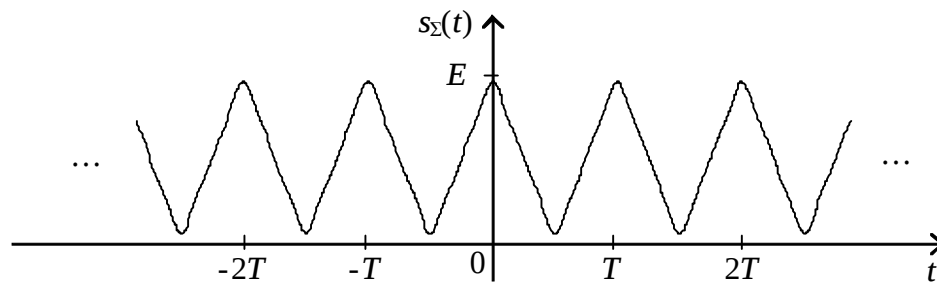


Рис. 3.11

Результат суммирования постоянной составляющей первой, третьей и пятой гармоник иллюстрируется рис. 3.12.

**Рис. 3.12**

Из рис. 3.12 следует, что в этом случае наблюдается достаточно хорошая сходимость ряда Фурье к исходному сигналу (см. рис. 3.10).

## 4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ФУРЬЕ - АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

### 4.1. Постановка задачи

Понятие «спектр» можно распространить и на непериодические сигналы, для которых выполняется условие абсолютной интегрируемости (3.1) на бесконечном интервале времени. Рассмотрим непериодический сигнал в виде одиночного импульса  $s(t)$  длительностью  $t_1$  произвольной формы (рис. 4.1, сплошная линия). Необходимо определить спектр этого сигнала.

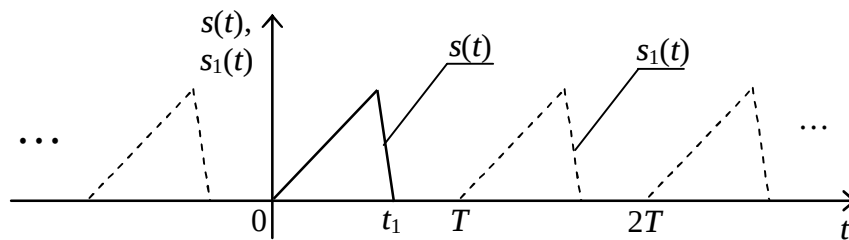


Рис. 4.1

Построим периодическое продолжение  $s_1(t)$  сигнала  $s(t)$  с периодом повторения  $T > t_1$  (рис. 4.1, штриховая линия). Очевидно, что при стремлении периода  $T$  к бесконечности, сигнал  $s_1(t)$  стремится к сигналу  $s(t)$ , то есть

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_1(t) .$$

Таким образом, спектр непериодического сигнала можно получить путем предельного перехода от спектра периодического сигнала при устремлении  $T \rightarrow \infty$ . При таком переходе возникают два качественно новых свойства, присущих спектру непериодического сигнала. Проанализируем эти свойства.

1) Частотное расстояние между спектральными линиями в спектре периодического сигнала  $s_1(t)$  равно  $\omega_1 = 2\pi/T$  (см. рис. 3.5). При устремлении

$T \rightarrow \infty$  в пределе получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\omega_1 = 2\pi/T) = 0 \quad .$$

Таким образом, спектр непериодического сигнала  $s(t)$  становится сплошным. **Сплошной спектр** — это спектр, состоящий из гармонических колебаний, физические частоты которых могут принимать любые значения от 0 до  $+\infty$ . Поэтому можно сказать, что частоты этих колебаний образуют непрерывное (сплошное) множество.

2) Амплитуды спектральных составляющих периодического сигнала, в соответствии с формулами (3.17), (3.19), (3.20), обратно пропорциональны периоду  $T$ . Устремляя период к бесконечности ( $T \rightarrow \infty$ ), в пределе получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A_n = 0 \quad .$$

Таким образом, амплитуды составляющих спектра непериодического сигнала представляют собой бесконечно малые величины.

В результате проведенного качественного анализа показано, что спектр непериодического сигнала представляет собой бесконечный набор бесконечно малых по амплитуде гармонических колебаний, физические частоты которых могут принимать любые значения от 0 до  $+\infty$ .

## 4.2. Преобразование Фурье. Спектральная плотность сигнала

Перейдем к количественному анализу.

В соответствии с формулой (3.4) периодический сигнал  $s_1(t)$  можно представить в виде комплексного ряда Фурье

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad , \quad (4.1)$$

коэффициенты разложения которого определяются соотношением:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad . \quad (4.2)$$

Полагая  $T = 2\pi/\omega_1$  и учитывая (4.2), преобразуем формулу (4.1) к виду

$$s_1(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right) e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1. \quad (4.3)$$

Устремим период  $T$  к бесконечности. Тогда в пределе (на основании изложенного в подразделе 4.1) в формуле (4.3) сигнал  $s_1(t)$  следует заменить на  $s(t)$ , параметр  $\omega_1$  — на  $d\omega$ , величину  $n\omega_1$  — на  $\omega$ , а операцию суммирования — операцией интегрирования. В результате получаем

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.4)$$

Интеграл в скобках в формуле (4.4) является функцией частоты. Этот интеграл называют спектральной плотностью сигнала и обозначают той же буквой, что и временную функцию сигнала, только прописной. Если написание прописной буквы отличается только масштабом, то снизу она подчеркивается прямой линией. В нашем случае спектральную плотность сигнала  $s(t)$  обозначим  $\underline{S}(j\omega)$ . С учетом этого получаем пару интегральных преобразований Фурье, связывающих временную и спектральную функции сигнала:

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (4.5)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.6)$$

Выражение (4.5) называют прямым преобразованием Фурье, а выражение (4.6) — обратным преобразованием Фурье. Прямое преобразование Фурье позволяет перейти от временной функции сигнала, к его спектральной плотности, а обратное преобразование Фурье позволяет сделать обратный переход от спектральной плотности сигнала к его временной функции.

### 4.3. Некоторые представления спектральной плотности

Как следует из (4.5) спектральная плотность в общем случае представляет собой комплексную функцию частоты. Используя формулу Эйлера в (4.5), представим спектральную плотность в алгебраической форме

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) , \quad (4.7)$$

где  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  — действительная и мнимая части спектральной плотности, вычисляемые по формулам:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt ; \quad (4.8)$$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt . \quad (4.9)$$

Заметим, что  $A(\omega)$  является четной, а  $B(\omega)$  — нечетной функциями аргумента  $\omega$ , что следует из (4.8) и (4.9).

Перейдём к показательной форме представления

$$\underline{S}(j\omega) = |\underline{S}(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} , \quad (4.10)$$

где  $|\underline{S}(j\omega)|$  и  $\theta(\omega)$  — модуль и аргумент спектральной плотности, вычисляемые по формулам:

$$|\underline{S}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} ; \quad (4.11)$$

$$\theta(\omega) = \text{angle}(A(\omega), B(\omega)) . \quad (4.12)$$

Заметим, что  $|\underline{S}(j\omega)|$  является четной, а  $\theta(\omega)$  — нечетной функциями аргумента  $\omega$ , что следует из четности  $A(\omega)$  и нечетности  $B(\omega)$ . Результаты спектрального анализа отображают в виде спектрограмм модуля и аргумента, которые в этом случае представляют собой графики зависимости модуля и аргумента спектральной плотности от частоты.

#### 4.4. Обратное преобразование Фурье в тригонометрической форме

Обратное преобразование Фурье, записанное в виде формулы (4.6), представлено в комплексной форме. Интегрирование при этом осуществляется в области как положительных (физических), так и отрицательных (математических) частот. Если сигнал  $s(t)$  представляет собой чисто действительную функцию времени, то (4.6) можно представить в тригонометрической форме. При этом интегрирование будет осуществляться только в области физических частот. По аналогии с рядом Фурье (см. подраздел 3.3) осуществим переход к тригонометрической форме.

Подставляя (4.10) в (4.6), получаем

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)| e^{j[\omega t + \theta(\omega)]} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)| \cos[\omega t + \theta(\omega)] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)| \sin[\omega t + \theta(\omega)] d\omega. \end{aligned}$$

В последнем выражении второй интеграл (мнимая часть) равен нулю ввиду четности  $|S(j\omega)|$  и нечетности  $\theta(\omega)$ , а первый интеграл можно упростить, проинтегрировав в пределах от нуля до бесконечности и удвоив результат. В итоге приходим к следующему выражению:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(j\omega)| \cos[\omega t + \theta(\omega)] d\omega. \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) представляет собой обратное преобразование Фурье в тригонометрическом виде.

Сравнивая формулу (4.13) и ряд (3.16), можно провести следующую аналогию. В выражении (4.13) аналогом амплитуды колебания выступает малая величина  $\Delta A$ , равная

$$\Delta A \approx \frac{1}{\pi} |S(j\omega)| \Delta\omega = 2 |S(j\omega)| \Delta f.$$

Из последнего равенства получаем

$$2|\underline{S}(j\omega)| = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta f}. \quad (4.14)$$

Итак, удвоенная величина модуля спектральной плотности на некоторой частоте представляет собой предел отношения амплитуды колебания, получаемого суммированием составляющих спектра в полосе частот, включающей данную частоту, к ширине этой полосы при стремлении ее к нулю.

Из (4.14) следует, что размерность спектральной плотности В/Гц (для напряжения), либо А/Гц (для тока). В принципиальном плане понятие спектральной плотности эквивалентно понятию плотности вещества.

#### 4.5. Спектральная плотность чётных и нечётных функций времени

Если сигнал  $s(t)$  представляет собой четную или нечетную функции времени, то спектральный анализ упрощается.

**4.5.1.** Пусть  $s(t)$  — чётная функция времени. При этом из формулы (4.9) вытекает, что мнимая часть спектральной плотности  $B(\omega) = 0$ . При этом спектральная плотность выражается в виде действительной функции частоты  $A(\omega)$ , которую в данном случае можно рассчитать по более простой, вытекающей из (4.8), формуле

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt. \quad (4.15)$$

Модуль и аргумент спектральной плотности в этом случае равны:

$$|\underline{S}(j\omega)| = |A(\omega)|; \quad (4.16)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } A(\omega) > 0; \\ \pm \pi & \text{if } A(\omega) < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

В последней формуле  $+\pi$  выбирают при  $\omega > 0$ , а  $-\pi$  — при  $\omega < 0$ , поскольку  $\theta(\omega)$  является нечетной функцией частоты.

**4.5.2.** Пусть  $s(t)$  — нечётная функция времени. При этом из формулы (4.8) следует, что действительная часть спектральной плотности  $A(\omega) = 0$ . При этом спектральная плотность выражается в виде мнимой функции частоты  $jB(\omega)$ , которую в данном случае можно рассчитать по более простой, вытекающей из (4.9), формуле

$$\underline{S}(j\omega) = jB(\omega) = -j2 \int_0^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt. \quad (4.18)$$

Модуль и аргумент спектральной плотности в этом случае равны:

$$|\underline{S}(j\omega)| = |B(\omega)|; \quad (4.19)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} +\pi/2 & \text{if } B(\omega) > 0; \\ -\pi/2 & \text{if } B(\omega) < 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

#### 4.6. Свойства спектральной плотности сигнала

Свойства спектральной плотности, по существу, являются свойствами прямого преобразования Фурье. Рассмотрим некоторые из этих свойств.

##### 4.6.1. Значение спектральной плотности сигнала при $\omega = 0$

Положим частоту в выражении (4.5) равной нулю:  $\omega = 0$ . При этом значение спектральной плотности равно

$$\underline{S}(j\omega)|_{\omega=0} = \underline{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt. \quad (4.21)$$

Из математики известно, что интеграл от модуля некоторой функции равен площади, ограниченной графиком этой функцией и осью абсцисс. В этом смысле площадь всегда положительная величина. Интеграл в (4.21) отличается тем, что в подынтегральной функции отсутствует операция взятия модуля. По аналогии будем называть интеграл в (4.21) **площадью сигнала  $s(t)$** . С учетом сказанного можно утверждать, что значение спектральной плотности сигнала  $s(t)$  при  $\omega = 0$  численно равно площади этого сигнала.

#### 4.6.2. Спектральная плотность суммы сигналов

Пусть сигнал  $s(t)$  представляет собой сумму  $n$  сигналов

$$s(t) = \sum_{k=1}^n s_k(t) . \quad (4.22)$$

Необходимо определить спектр сигнала  $s(t)$ .

Выполним прямое преобразование Фурье для левой и правой частей соотношения (4.22). В результате приходим к следующему:

$$\underline{S}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \underline{S}_k(j\omega) . \quad (4.23)$$

Таким образом, спектральная плотность суммы сигналов равна сумме спектральных плотностей этих сигналов.

#### 4.6.3. Сдвиг сигнала во времени (теорема сдвига)

Рассмотрим сигнал  $s_1(t)$ , которому соответствует спектральная плотность  $\underline{S}_1(j\omega)$ . Осуществим сдвиг этого сигнала вдоль оси времени на величину  $t_0$ . В результате получим сигнал  $s_2(t)$ , который связан с исходным сигналом соотношением

$$s_2(t) = s_1(t - t_0) . \quad (4.24)$$

Случай  $t_0 > 0$  соответствует запаздыванию, а  $t_0 < 0$  — опережению.

На рис. 4.2. изображены сигнал  $s_1(t)$  и сигнал  $s_2(t)$ , запаздывающий по отношению к сигналу  $s_1(t)$ .

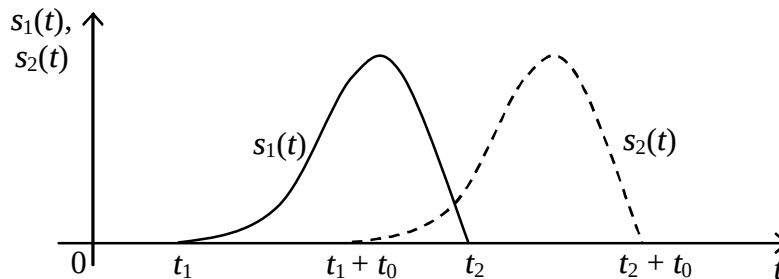


Рис. 4.2

Определим спектральную плотность сигнала  $s_2(t)$ . Для этого применим к (4.24) прямое преобразование Фурье

$$\underline{S}_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.25)$$

Осуществим в (4.25) замену переменной:  $t - t_0 = \tau$ . Отсюда:  $t = \tau + t_0$ ,  $dt = d\tau$ . Пределы интегрирования по новой переменной:  $-\infty \div +\infty$ . С учетом этого (4.25) запишем в виде

$$\underline{S}_2(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \underline{S}_1(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (4.26)$$

Таким образом, сдвиг сигнала во времени на величину  $t_0$  соответствует умножению спектральной плотности на  $e^{-j\omega t_0}$ .

Определим модуль и аргумент спектральной плотности сдвинутого сигнала, используя (4.26):

$$\begin{cases} |\underline{S}_2(j\omega)| = |\underline{S}_1(j\omega)|; \\ \theta_2(\omega) = \theta_1(\omega) - \omega t_0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Из (4.27) следует, что сдвиг сигнала во времени не изменяет модуль спектральной плотности, а изменяет только ее аргумент. Изменение выражается в суммировании аргумента спектральной плотности исходного сигнала и величины  $-\omega t_0$ , которая линейно зависит от частоты.

#### 4.6.4. Изменение масштаба времени

Под изменением масштаба времени понимают как сжатие, так и растяжение сигнала во времени. Рассмотрим сигнал  $s_1(t)$ , которому соответствует спектральная плотность  $\underline{S}_1(j\omega)$ . Изменение масштаба времени осуществляют путем умножения аргумента  $t$  на константу  $n$  ( $n > 1$  соответствует сжатие сигнала, а  $n < 1$  — растяжение). В результате этого получим сигнал  $s_2(t)$

$$s_2(t) = s_1(nt). \quad (4.28)$$

На рис. 4.3 показаны исходный  $s_1(t)$  и сжатый  $s_2(t)$  сигналы.

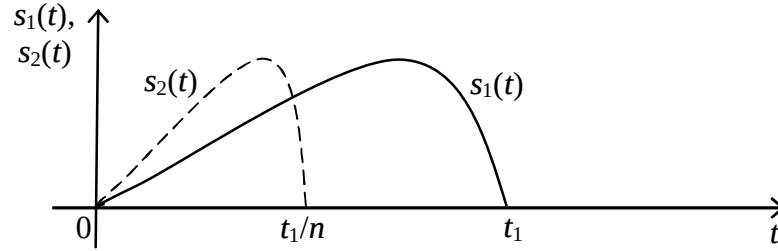


Рис. 4.3

Определим спектральную плотность сигнала  $s_2(t)$ .

Применим к (4.28) прямое преобразование Фурье:

$$\underline{S}_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(nt) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.29)$$

Выполним в (4.29) замену переменной:  $nt = \tau$ . Отсюда:  $t = \tau/n$ ,  $dt = d\tau/n$ . Пределы интегрирования по новой переменной:  $-\infty \div +\infty$ . С учетом этого (4.29) запишем в виде

$$\underline{S}_2(j\omega) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j\frac{\omega\tau}{n}} d\tau = \frac{1}{n} \underline{S}_1\left(j\frac{\omega}{n}\right). \quad (4.30)$$

Таким образом, умножение аргумента  $t$  на число  $n$  в выражении для временной функции приводит к делению аргумента  $\omega$  на это же число  $n$  в выражении для спектральной плотности. Иначе говоря, сжатие (растяжение) сигнала во времени в  $n$  раз вызывает расширение (сжатие) его спектральной плотности во столько же раз.

Следует запомнить вытекающее из этого правило: **чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр.**

#### 4.6.5. Дифференцирование сигналов по времени

Рассмотрим сигнал  $s_1(t)$ , которому соответствует спектральная плотность  $\underline{S}_1(j\omega)$ . Осуществим операцию дифференцирования этого сигнала по времени. В результате получим сигнал  $s_2(t)$ , который связан с исходным сигналом соотношением

$$s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt}. \quad (4.31)$$

Определим спектральную плотность сигнала  $s_2(t)$ . Путем простых выкладок [4] можно показать, что

$$\underline{S}_2(j\omega) = j\omega \cdot \underline{S}_1(j\omega). \quad (4.32)$$

Из (4.32) следует, что дифференцирование сигнала по времени соответствует умножению спектральной плотности этого сигнала на  $j\omega$ .

#### 4.6.6. Интегрирование сигналов по времени

Рассмотрим сигнал  $s_1(t)$ , которому соответствует спектральная плотность  $\underline{S}_1(j\omega)$ . Рассмотрим случай, при котором выполняется условие  $\underline{S}_1(0) = 0$ . В результате интегрирования сигнала  $s_1(t)$  получим сигнал  $s_2(t)$ , который связан с исходным сигналом соотношением

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(t) dt. \quad (4.33)$$

Из (4.33) сигнал  $s_1(t)$  можно выразить в виде

$$s_1(t) = \frac{ds_2(t)}{dt}.$$

Тогда на основании предыдущего свойства (4.32) запишем

$$\underline{S}_1(j\omega) = j\omega \cdot \underline{S}_2(j\omega). \quad (4.34)$$

Из (4.34) выразим спектральную плотность  $\underline{S}_2(j\omega)$ :

$$\underline{S}_2(j\omega) = \frac{\underline{S}_1(j\omega)}{j\omega}. \quad (4.35)$$

Таким образом, интегрирование сигнала по времени соответствует делению его спектральной плотности на  $j\omega$ .

Если значение спектральной плотности  $\underline{S}_1(0) \neq 0$ , то в соответствии с [1] формулу (4.35) следует дополнить слагаемым  $\pi\delta(\omega)\underline{S}_1(0)$ , где  $\delta(\omega)$  — так называемая  $\delta$ -функция (см. подраздел 4.9).

#### 4.6.7. Произведение двух сигналов

Рассмотрим сигналы  $g(t)$  и  $f(t)$ , которым соответствуют спектральные плотности  $G(j\omega)$  и  $F(j\omega)$ . Произведение этих сигналов равно

$$s(t) = g(t)f(t). \quad (4.36)$$

Определим спектральную плотность произведения, применив прямое преобразование Фурье к (4.36):

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.37)$$

Подставим в (4.37) сигнал  $g(t)$ , выраженный через его спектральную плотность, заменив в ней  $\omega$  на  $x$  (чтобы не совпадали буквенные обозначения параметра и переменной интегрирования). В результате получим

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(jx)e^{jxt} dx \right] f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.38)$$

Внося внешний интеграл, независящий от  $x$ , под внутренний, приходим к следующему соотношению

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(jx)F[j(\omega-x)]dx. \quad (4.39)$$

Из (4.39) следует, что спектральная плотность произведения двух функций времени равна свертке спектральных плотностей перемножаемых функций (с точностью до коэффициента  $1/2\pi$ ).

Рассмотрим частный случай формулы (4.39). Положим в этой формуле

$\omega = 0$ . В результате после обратной замены  $x$  на  $\omega$  получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) F^*(j\omega) d\omega. \quad (4.40)$$

Соотношение (4.40) называют формулой Рэлея. Из этой формулы следует, что скалярное произведение двух функций времени равно скалярному произведению их спектральных плотностей.

#### **4.7. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала. Эффективная ширина спектра**

Рассмотрим непериодический сигнал с конечной энергией. Эта энергия распределена по спектру. Количественно задача распределения энергии по спектру может быть решена с использованием формулы Рэлея (4.40). Положив в этой формуле  $g(t) = f(t) = s(t)$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.41)$$

Левая часть равенства (4.41) представляет собой полную энергию сигнала  $\mathcal{E}$ , рассчитанную во временной области, а правая часть — ту же величину, но рассчитанную в частотной области. Выражение (4.41) называют равенством Парсеваля. Из (4.41) следует, что энергия сигнала зависит только от модуля спектральной плотности и не зависит от ее аргумента. С учетом того, что  $|\underline{S}(j\omega)|$  является четной функцией частоты, перепишем (4.41) в виде

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.42)$$

Рассчитаем энергию, сосредоточенную в полосе частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , где  $\omega_1, \omega_2$  — крайние частоты этой полосы. В этом случае следует использовать формулу (4.42), изменив в ней пределы интегрирования

$$\mathfrak{E}_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.43)$$

Квадрат модуля спектральной плотности сигнала называют энергетическим спектром  $|\underline{S}(j\omega)|^2 = W(\omega)$ . Поэтому можно сказать, что энергия сигнала, сосредоточенная в полосе частот, определяется интегрированием энергетического спектра сигнала в этой полосе.

Поскольку спектры конечных во времени сигналов не ограничены, то теоретически ширина спектра таких сигналов бесконечна. На практике ширину спектра сигналов искусственно ограничивают. Для сигналов с конечной энергией вводят следующее определение эффективной (практической) ширины спектра  $\Delta\omega_{\text{эф}}$ . Эффективная ширина спектра — это полоса частот, в пределах которой содержится основная часть (обычно 90%) полной энергии сигнала.

Доля энергии, сосредоточенная в полосе частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , по отношению к полной энергии сигнала определяется выражением

$$\frac{\mathfrak{E}_{\Delta\omega}}{\mathfrak{E}} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt} = \gamma(\Delta\omega), \quad (4.44)$$

где  $\gamma(\Delta\omega)$  — долевого коэффициент, зависящий от полосы частот ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ).

Изменяя пределы интегрирования  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в (4.44), находят такую полосу частот, для которой выполняется равенство:  $\gamma(\Delta\omega) = 0,9$ . Эта полоса частот и будет эффективной шириной спектра  $\Delta\omega_{\text{эф}}$ .

#### 4.8. Спектр одиночного импульса прямоугольной формы

Одиночный импульс прямоугольной формы изображён на рис. 4.4. Начало координат выбрано так, чтобы сигнал  $s(t)$  представлял собой чётную функцию времени, что упрощает дальнейшие выкладки. Определим спек-

тральную плотность этого импульса.

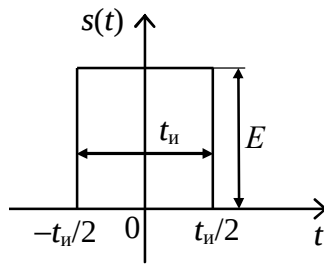


Рис. 4.4

Зададим сигнал  $s(t)$  на интервале времени  $(0, +\infty)$ , что, является достаточным для расчета спектра четной функции времени:

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{if } 0 \leq t \leq t_n/2; \\ 0 & \text{if } t > t_n/2. \end{cases} \quad (4.45)$$

Используя (4.15), с учетом (4.45) определим спектральную плотность

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) = 2 \int_0^{t_n/2} E \cos(\omega t) dt = \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_n}{2}\right) = Et_n \frac{\sin\left(\frac{\omega t_n}{2}\right)}{\frac{\omega t_n}{2}}. \quad (4.46)$$

Определим модуль и аргумент спектральной плотности (4.46):

$$|\underline{S}(j\omega)| = |A(\omega)| = Et_n \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_n}{2}\right)}{\frac{\omega t_n}{2}} \right|; \quad (4.47)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } A(\omega) > 0; \\ \pm \pi & \text{if } A(\omega) < 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

С использованием полученных формул построены график зависимости  $A(\omega)$  (рис. 4.5,*a*), спектрограмма модуля (рис. 4.5,*b*) и спектрограмма аргумента (рис. 4.5,*c*) одиночного импульса прямоугольной формы.

Из графика на рис. 4.5,*b* следует, что с ростом частоты модуль спектральной плотности немонотонно убывает, стремясь к нулю. Поскольку модуль спектральной плотности существенно отличен от нуля в полосе частот, примыкающей к нулевой частоте, то рассмотренный импульс следует отнести к классу видеосигналов.

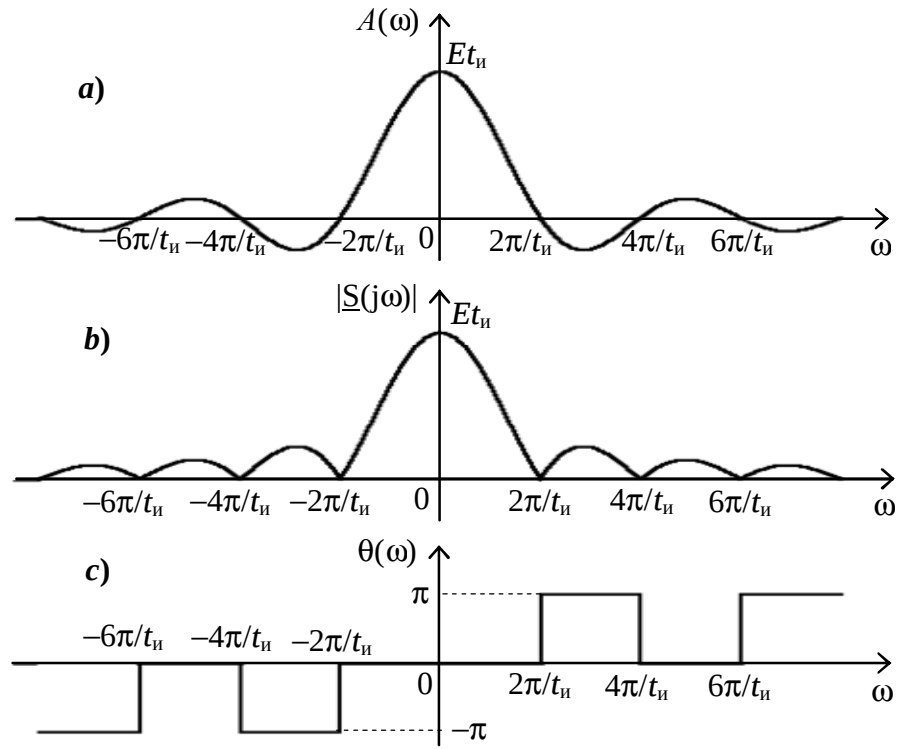


Рис. 4.5

Определим эффективную ширину спектра одиночного прямоугольного импульса. Для этого сначала рассчитаем полную энергию этого импульса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-t_n/2}^{t_n/2} E^2 dt = E^2 t_n. \quad (4.49)$$

Определим долевой коэффициент (формула (4.44)). Поскольку минимальная частота в спектре рассмотренного импульса равна нулю ( $\omega_1 = 0$ ), то можно положить в этой формуле  $\omega_2 = \Delta\omega$ . С учетом (4.47) и (4.49) получаем

$$\gamma(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} t_n \int_0^{\Delta\omega} \left( \sin\left(\frac{\omega t_n}{2}\right) / \frac{\omega t_n}{2} \right)^2 d\omega. \quad (4.50)$$

На рис. 4.6 изображена зависимость  $\gamma(\Delta\omega)$ , полученная в результате численного интегрирования (4.50). Зададимся  $\gamma(\Delta\omega) = 0,9$ . В результате (см. рис. 4.6) находим

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = 2\pi/t_n, \text{ что соответствует } \Delta f_{\text{эф}} = 1/t_n. \quad (4.51)$$

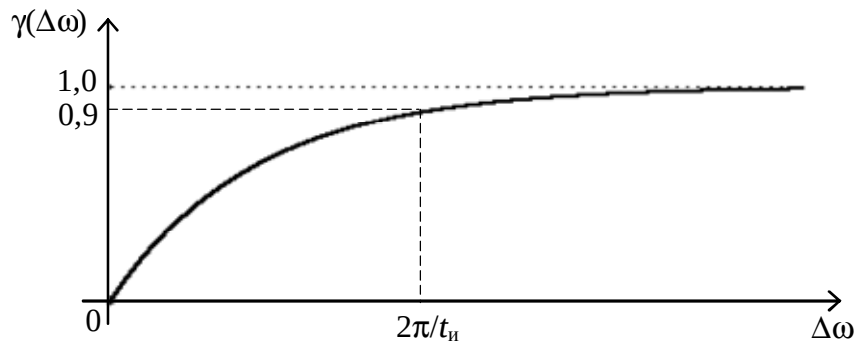


Рис. 4.6

Таким образом, 90% полной энергии одиночного прямоугольного импульса сосредоточено в пределах первого лепестка спектрограммы модуля.

Например, если длительность импульса  $t_{\text{и}} = 10^{-6}$  с, то, согласно (4.51), эффективная ширина спектра равна  $\Delta f_{\text{эф}} = 1$  МГц.

## 4.9. Функция Дирака (d-функция) и её свойства

### 4.9.1. Определение функции Дирака

Функцией Дирака или  $\delta$ -функцией называют бесконечно короткий импульс с нулевой длительностью и бесконечной высотой, площадь которого равна единице. Функция Дирака является математической абстракцией, поскольку она физически нереализуема. Однако модель такого импульса широко применяется для анализа характеристик сигналов и цепей.

Введем понятие  $\delta$ -функции следующим образом. Рассмотрим прямоугольный импульс, высота которого обратно пропорциональна его длительности:  $E = 1/t_{\text{и}}$  (рис. 4.7). Устремим длительность импульса  $t_{\text{и}}$  к нулю. При этом высота импульса устремится к бесконечности, а площадь импульса останется равной единице. В пределе получим  $\delta$ -функцию, которую записывают как  $\delta(t)$  (см. рис. 4.8). Заметим, что при таком введении размерность  $\delta$ -функции соответствует  $[\delta] = 1/\text{с}$ .

В общем случае  $\delta$ -функция может располагаться не только в начале координат, но и в любой точке временной оси  $t_0$ . В этом случае  $\delta$ -функцию записывают в виде:  $\delta(t - t_0)$ .

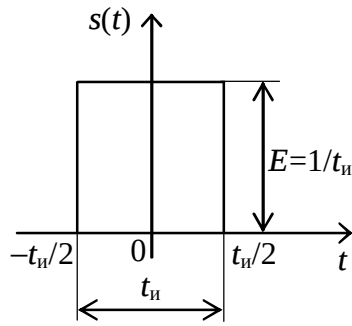


Рис. 4.7

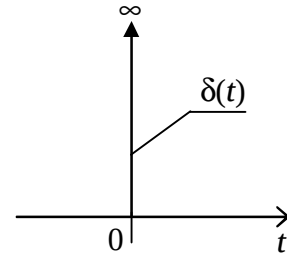


Рис. 4.8

Исходя из определения,  $\delta$ -функцию  $\delta(t - t_0)$  можно представить в виде:

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = t_0; \\ 0 & \text{if } t \neq t_0; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \end{cases} \quad (4.52)$$

Умножение  $\delta$ -функции на константу (например,  $k\delta(t - t_0)$ ) изменяет ее площадь. Эту константу ( $k$ ) называют весовым коэффициентом.

#### 4.9.2. Фильтрующее свойство $\delta$ -функции

Возьмем интеграл от произведения некоей функции времени  $f(t)$ , непрерывную в окрестности точки  $t = t_0$  на  $\delta$ -функцию  $\delta(t - t_0)$ . Поскольку функция  $\delta(t - t_0)$  равна нулю во всех точках, кроме точки  $t = t_0$ , то интервал интегрирования стягивается в одну точку, в которой значение функции  $f(t)$  является константой  $f(t_0)$ . При этом  $f(t_0)$  можно вынести за знак интеграла. Учитывая, что площадь  $\delta$ -функции равна единице, приходим к следующему

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (4.53)$$

Таким образом доказано фильтрующее свойство  $\delta$ -функции: интеграл от произведения  $\delta$ -функции  $\delta(t - t_0)$  и произвольной функции времени  $f(t)$ , непрерывной в окрестности точки  $t_0$ , равен значению функции  $f(t_0)$ .

### 4.9.3. Спектральная плотность $\delta$ -функции

Рассмотрим  $\delta$ -функцию, размещенную в произвольной точке временной оси  $\delta(t - t_0)$ . Определим её спектральную плотность. Для этого применим прямое преобразование Фурье к этой функции:

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt . \quad (4.54)$$

Преобразуем (4.54), применив фильтрующее свойство (4.53). В результате получим следующее выражение для спектральной плотности

$$\Delta(j\omega) = e^{-j\omega t_0} . \quad (4.55)$$

Определим модуль и аргумент спектральной плотности (4.55):

$$|\Delta(j\omega)| = 1 ; \quad (4.56)$$

$$\theta(\omega) = -\omega t_0 . \quad (4.57)$$

Спектрограммы модуля и аргумента  $\delta$ -функции изображены на рис. 4.9,*a* и 4.9,*b*. Из графика на рис. 4.9,*a* следует, что модуль спектральной плотности  $\delta$ -функции не зависит от частоты. Иначе говоря, спектр  $\delta$ -функции равномерен во всей полосе частот, а **эффективная ширина спектра бесконечна.**

Используя равенство Парсеваля, определяем полную энергию  $\delta$ -функции

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Delta(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega = \infty . \quad (4.58)$$

Как и следовало ожидать, полная энергия  $\delta$ -функции равна бесконечности, что также говорит о невозможности её физической реализации.

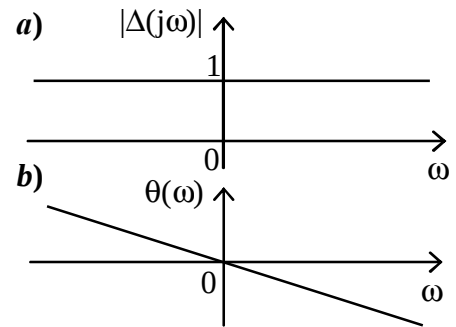


Рис. 4.9

#### 4.9.4. Некоторые представления $\delta$ -функции

Во времени  $\delta$ -функцию можно представить как обратное преобразование Фурье от её спектральной плотности

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (4.59)$$

Знак показателя экспоненты в (4.59) можно выбирать любым, в чем можно убедиться, применив формулу Эйлера для подынтегральной функции.

Выполним взаимную замену переменных  $\omega$  и  $t$  в (4.59) при этом приходим к понятию  $\delta$ -функции в частотной области  $\delta(\omega - \omega_0)$ :

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j(\omega - \omega_0)t} dt. \quad (4.60)$$

Это понятие весьма плодотворно при анализе дискретных спектров.

#### 4.10. Спектральная плотность постоянного напряжения

Спектральная плотность — понятие универсальное и может применяться не только к непериодическим, но и к периодическим процессам. Распространим это понятие сначала на постоянное напряжение. Рассмотрим постоянное напряжение  $s(t) = C_0 = \text{const}$  (рис. 4.10,а). Для этого процесса условие абсолютной интегрируемости не выполняется. Однако введенное понятие  $\delta$ -функции позволяет решить задачу определения спектральной плотности. Применим прямое преобразование Фурье к этому процессу.

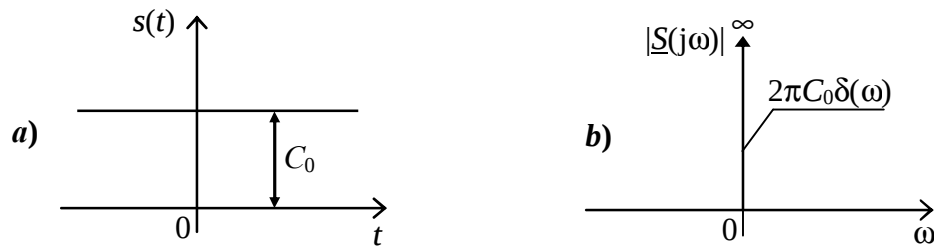


Рис. 4.10

Используя (4.60), получаем

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = C_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi C_0 \delta(\omega). \quad (4.61)$$

Итак, спектральная плотность постоянного напряжения представляет собой  $\delta$ -функцию, которая расположена в начале координат. Это говорит о том, что спектр постоянного напряжения содержит лишь одну составляющую нулевой частоты (постоянную составляющую).

Информация о величине постоянного напряжения  $C_0$  содержится в весовом коэффициенте, который равен  $2\pi C_0$ . Спектрограмма модуля постоянного напряжения изображена на рис. 4.10, **b**.

#### 4.11. Спектральная плотность гармонического колебания

Рассмотрим гармоническое колебание

$$s(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1). \quad (4.62)$$

Представим выражение (4.62) в виде

$$s(t) = A_1 \frac{e^{j(\omega_1 t + \theta_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \theta_1)}}{2}. \quad (4.63)$$

Применим к (4.63) прямое преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \underline{S}(j\omega) &= \frac{A_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 t + \theta_1)} e^{-j\omega t} dt + \frac{A_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 t + \theta_1)} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_1)t} dt + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_1)t} dt. \end{aligned}$$

В соответствии с (4.60) последнее выражение представим в виде

$$\underline{S}(j\omega) = \pi A_1 e^{j\theta_1} \delta(\omega - \omega_1) + \pi A_1 e^{-j\theta_1} \delta(\omega + \omega_1). \quad (4.64)$$

Итак, спектральная плотность гармонического колебания представляет собой сумму двух  $\delta$ -функций, расположенных на частотах  $\omega_1$  и  $-\omega_1$ . Эти

функции имеют одинаковые весовые коэффициенты  $\pi A_1$  и противоположные по знаку аргументы. Спектрограммы модуля и аргумента гармонического колебания изображены на рис. 4.11,*a* и 4.11,*b* соответственно.

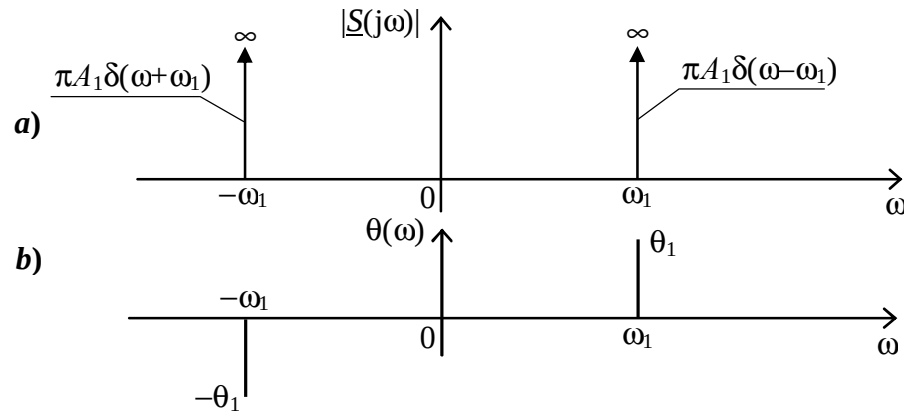


Рис. 4.11

Наличие  $\delta$ -функций в спектральной плотности говорит о том, что амплитуда гармонического колебания на частоте  $\omega_1$  имеет конечную величину.

#### 4.12. Спектральная плотность произвольного периодического процесса

Представим произвольный периодический процесс в виде ряда Фурье, содержащего постоянную составляющую и бесконечный набор гармоник:

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n). \quad (4.65)$$

С учетом результатов, полученных в подразделах 4.10 и 4.11, можно записать выражение для спектральной плотности этого процесса в виде

$$\underline{S}(j\omega) = 2\pi C_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi A_n [\delta(\omega - n\omega_1) e^{j\theta_n} + \delta(\omega + n\omega_1) e^{-j\theta_n}]. \quad (4.66)$$

Как видно из формулы (4.66), спектральная плотность периодического процесса представляет собой бесконечное множество  $\delta$ -функций, расположенных в дискретных частотных точках  $\pm n\omega_1$ . Пример спектрограмм произ-

вольного периодического процесса представлен на рис. 4.12.

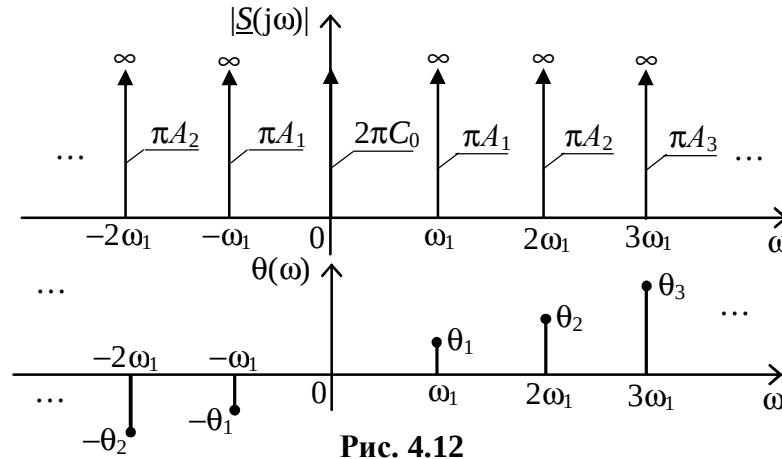


Рис. 4.12

Распространение понятия спектральной плотности на периодические процессы не дает качественно новых результатов. Однако этот подход удобен, поскольку позволяет осуществлять спектральный анализ процессов, содержащих как периодическую, так и непериодическую компоненты и отображать результаты на одних и тех же спектрограммах.

#### 4.13. Взаимосвязь между спектрами одиночного импульса и сигнала, получаемого периодическим повторением этого импульса

Сравним выражение для спектральной плотности импульсного процесса (4.5) с выражением для коэффициента разложения  $C_n$  периодического процесса в комплексный ряд Фурье (3.5). Эти выражения отличаются коэффициентом  $1/T$ , а также тем, что в первом случае частота может принимать любое значение  $\omega$ , а во втором — дискретные значения  $n\omega_1$ . Отсюда вытекает простая взаимосвязь спектральной плотности импульса с комплексными амплитудами гармоник процесса, получаемого путем периодического повторения этого импульса. Если учесть, что  $\dot{A}_n = 2C_n$ , то получим

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \underline{S}(jn\omega_1). \quad (4.67)$$

Из формулы (4.67) следует, что модуль спектральной плотности отдель-

ного импульса и огибающая спектра амплитуд процесса, получаемого путем периодического повторения этого импульса, совпадают по форме, differing только масштабным коэффициентом  $2/T$ .

Применение формулы (4.67) позволяет избежать громоздких выкладок, что иллюстрируется в следующем подразделе.

#### 4.14. Спектр пачки разновеликих прямоугольных импульсов

На рис. 4.13 изображен процесс в виде пачки, состоящей из четырех разновеликих прямоугольных импульсов одинаковой длительности  $t_n$ , следующих друг за другом с интервалом, равным  $T_1$ . Высоту каждого импульса обозначим как  $P_i$ , где  $i = 0, 1, 2, 3$ .

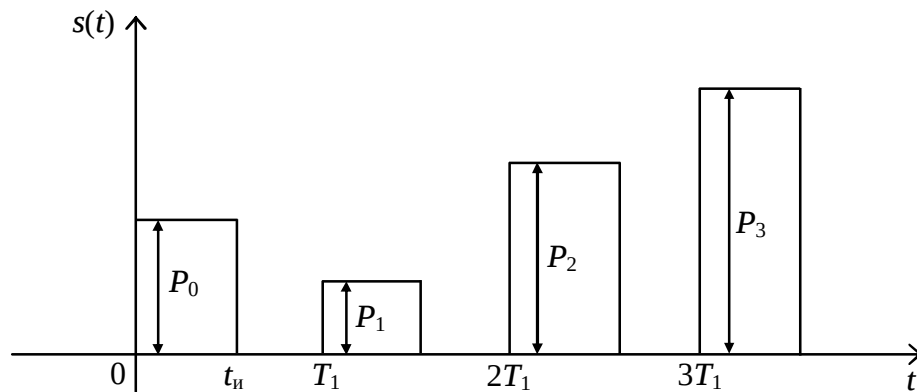


Рис. 4.13

Данный процесс можно рассматривать как сумму четырех прямоугольных импульсов сдвинутых относительно друг друга на интервал  $T_1$ . Поэтому, в соответствии с (4.23) спектральную плотность пачки определим как сумму спектральных плотностей этих импульсов. Учитывая теорему сдвига (4.26), а также выражения для спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса (4.46), получаем

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} (P_0 + P_1 e^{-j\omega T_1} + P_2 e^{-j2\omega T_1} + P_3 e^{-j3\omega T_1}) e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}. \quad (4.68)$$

Определим модуль спектральной плотности

$$|\underline{S}(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \left| \sin \frac{\omega t_n}{2} \right| \left| P_0 + P_1 e^{-j\omega T_1} + P_2 e^{-j2\omega T_1} + P_3 e^{-j3\omega T_1} \right|. \quad (4.69)$$

Результаты расчета на ЭВМ модуля спектральной плотности (4.69) при  $T_1/t_n = 2$  иллюстрируются рис. 4.14.

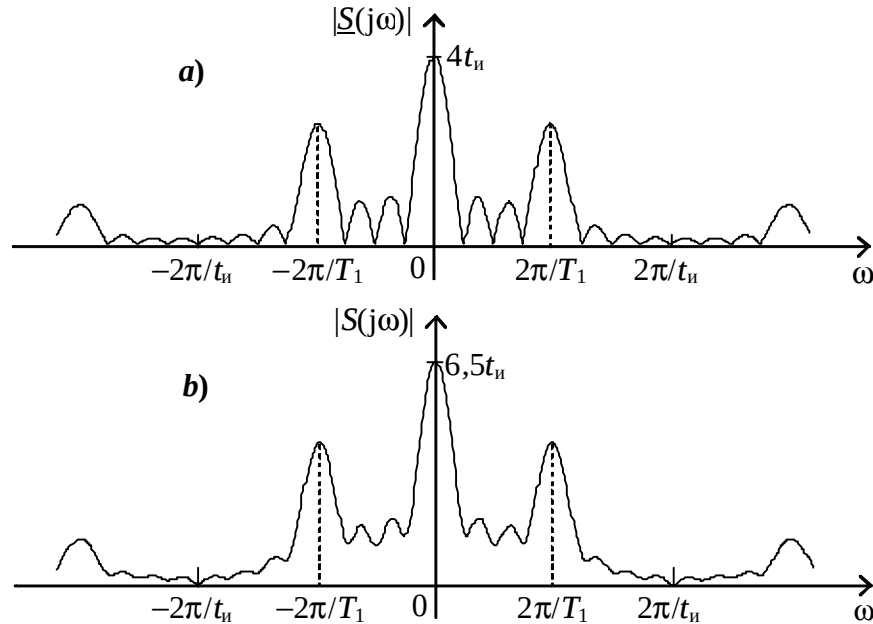


Рис. 4.14

На рис. 4.14,*a* изображена спектрограмма при значениях  $P_0 = P_1 = P_2 = P_3$ . Этот частный случай рассмотрен в [1]. Он соответствует пачке равновеликих импульсов и характеризуется всплесками спектральной плотности на частотах, кратных  $\omega_1 = 2\pi/T_1$ , а также отсутствием в спектре составляющих с частотами:  $\omega_1/4$ ;  $\omega_1/2$ ;  $3\omega_1/4$ . Изменение размаха любого из импульсов в пачке приводит к существенному изменению структуры спектра в полосе частот от нуля до  $\omega_1$ . На рис. 4.14,*b* в качестве примера изображена спектрограмма при значениях  $P_0 = 1$  В,  $P_1 = 1,5$  В,  $P_2 = 2$  В,  $P_3 = 2,5$  В.

Это свойство спектра может быть использовано для проведения функциональных преобразований над амплитудами импульсов в пачке. Покажем такую возможность. Для этого сформируем периодическую последовательность таких пачек, следующих с периодом  $T = 4T_1$ , и определим амплитуду

первой гармоники частоты  $\Omega = 2\pi/T = \omega_1/4$ . При этом рассмотрим частный случай, положив  $t_n = T_1$ . В соответствии с (4.67) амплитуда первой гармоники равна

$$A_1 = \frac{2}{T} |S(j\Omega)| = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left| P_0 + P_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} + P_2 e^{-j\pi} + P_3 e^{-j\frac{3\pi}{2}} \right|. \quad (4.70)$$

Преобразуя (4.70), приходим к следующему:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} |(P_0 - P_2) - j(P_1 - P_3)|. \quad (4.71)$$

Взяв модуль в последнем выражении, получим

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{(P_0 - P_2)^2 + (P_1 - P_3)^2}. \quad (4.72)$$

Таким образом, выделяя с помощью полосно-пропускающего фильтра первую гармонику и измеряя ее амплитуду, можно осуществлять функциональное преобразование (4.72).

## 4.15. Пример решения задачи

### 4.15.1. Условие

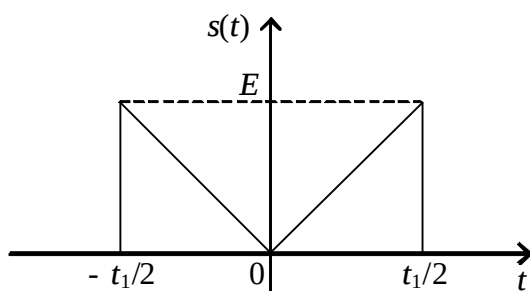


Рис. 4.15

Рассчитать спектральную плотность импульса, изображенного на рис. 4.15. Построить спектрограммы модуля и аргумента. Оценить эффективную ширину спектра. Исходные данные: высота  $E = 40$  В; длительность импульса  $t_1 = 1 \cdot 10^{-3}$  с.

### 4.15.2. Решение

Спектральная плотность непериодического процесса определяется применением прямого преобразования Фурье к сигналу  $s(t)$ . Поскольку задан-

ный сигнал является четной функцией времени, то спектральная плотность представляет собой чисто действительную функцию частоты, которую можно определить с помощью формулы (4.15). В соответствии с этой формулой зададим сигнал  $s(t)$  на интервале времени, равном  $(0, +\infty)$ :

$$s(t) = \begin{cases} \frac{2E}{t_1}t, & \text{if } 0 \leq t < t_1/2; \\ 0, & \text{if } t > t_1/2. \end{cases} \quad (4.73)$$

Подставим (4.73) в формулу (4.15):

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{t_1/2} \frac{2E}{t_1} t \cos(\omega t) dt.$$

Беря интеграл в последнем выражении, приходим к следующему:

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) = \frac{4E}{t_1} \left( \frac{\frac{t_1}{2} \sin(\omega t_1/2)}{\omega} + \frac{\cos(\omega t_1/2)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

После преобразований спектральная плотность приводится к виду

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) = Et_1 \frac{\sin(\omega t_1/2)}{\omega t_1/2} - \frac{Et_1}{2} \left[ \frac{\sin(\omega t_1/4)}{\omega t_1/4} \right]^2. \quad (4.74)$$

Из (4.74) следует, что на нулевой частоте спектральная плотность равна площади сигнала:  $\underline{S}(0) = Et_1/2 = 0,02$  В/Гц, что подтверждает правильность решения. Спектрограммы модуля и аргумента в виде функций частоты  $f$ , рассчитанные при заданных исходных данных, изображены на рис. 4.16.

Определим частоты, на которых спектральная плотность обращается в нуль. Для этого приравняем (4.74) к нулю. В результате несложных выкладок получаем следующую формулу для расчета

$$\omega_{0k} = \frac{4\pi}{t_1} k, \text{ либо } f_{0k} = \frac{2}{t_1} k, \quad (4.75)$$

где  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

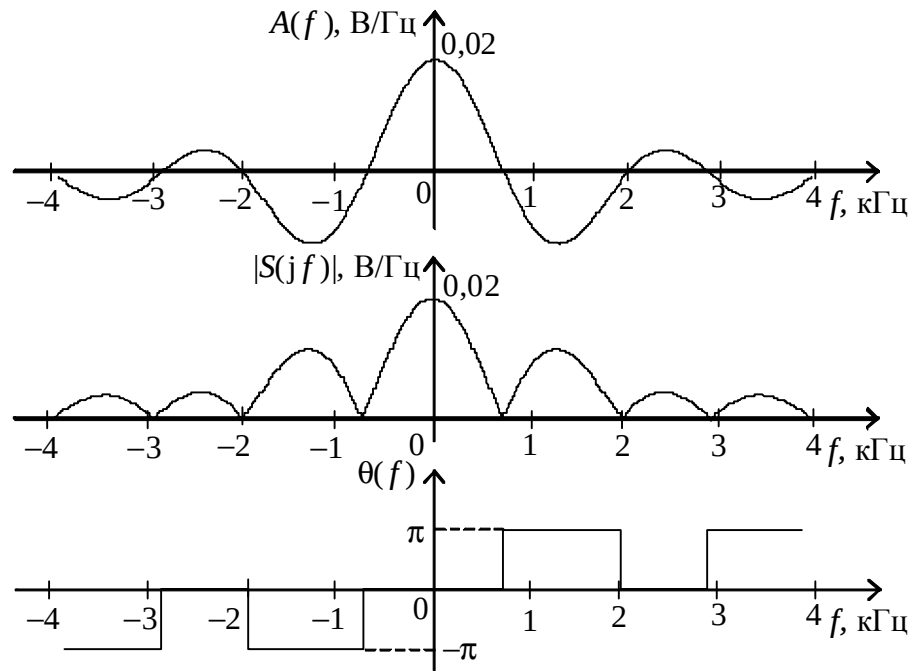


Рис. 4.16

При заданных исходных данных нули наблюдаются на частотах  $\pm 2$  кГц,  $\pm 4$  кГц,  $\pm 6$  кГц, ... .

Из спектрограммы модуля следует, что данный импульс является видеоимпульсом, поскольку спектральная плотность существенно отличается от нуля в полосе частот, примыкающей к нулевой частоте.

С ростом частоты модуль спектральной плотности немонотонно убывает, стремясь к нулю. Основная часть энергии сигнала сосредоточена в полосе частот, ограниченной двумя первыми лепестками спектрограммы. Поэтому оценкой эффективной ширины спектра может служить величина  $\Delta f_{\text{эф}} \approx 2/t_1 = 2$  кГц.

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

### 5.1. Постановка задачи

Для корректного применения преобразований Фурье сигнал  $s(t)$  должен удовлетворять условию абсолютной интегрируемости, которое имеет вид [4]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty . \quad (5.1)$$

Это обстоятельство ограничивает область применения преобразований Фурье. Для преодоления указанного ограничения умножим сигнал  $s(t)$  на так называемый множитель сходимости  $e^{-\sigma t}$  ( $\sigma > 0$ ). В результате умножения получаем функцию  $s_1(t)$  следующего вида

$$s_1(t) = s(t)e^{-\sigma t} . \quad (5.2)$$

Положим, что при  $t < 0$  сигнал  $s(t)$  равен нулю. Для конечных во времени сигналов это обеспечивается путем соответствующего выбора начала координат. Тогда для подавляющего большинства сигналов, используемых на практике, функция  $s_1(t)$  будет удовлетворять условию (5.1) и к этой функции можно применить прямое преобразование Фурье.

### 5.2. Преобразование Лапласа

Запишем выражение для прямого преобразования Фурье от функции  $s_1(t)$ . С учетом (5.2) получим

$$\underline{S}_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \underline{S}(\sigma + j\omega) . \quad (5.3)$$

Таким образом, спектральная плотность сигнала  $s_1(t)$  представляет собой спектральную плотность сигнала  $s(t)$ , вычисленную на **комплексной частоте**  $(\sigma + j\omega)$ .

Определим  $s_1(t)$ , применяя обратное преобразование Фурье к спектральной плотности  $\underline{S}_1(j\omega)$ :

$$s_1(t) = s(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Из последней формулы выразим  $s(t)$ :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega . \quad (5.4)$$

Произведем в (5.3) и (5.4) замену переменной:  $\sigma + j\omega = p$ . При этом  $\omega = (p - \sigma)/j$ ,  $d\omega = dp/j$ , а пределы интегрирования в (5.4) по новой переменной от  $(\sigma - j\infty)$  до  $(\sigma + j\infty)$ . В результате замены получаем:

$$\underline{S}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-pt} dt ; \quad (5.5)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \underline{S}(p) e^{pt} dp . \quad (5.6)$$

Выражения (5.5) и (5.6) представляют собой пару преобразований Лапласа, где  $\underline{S}(p)$  называют изображением, а  $s(t)$  — оригиналом. Преобразование Фурье можно рассматривать как частный случай преобразования Лапласа при  $\sigma = 0$ , что дает  $p = j\omega$ . Таким образом, переход от одной пары преобразований к другой осуществляют путем замены  $p$  на  $j\omega$  и наоборот.

Как уже отмечалось, комплексную переменную  $p = \sigma + j\omega$  называют комплексной частотой. Колебание с комплексной частотой представляет собой функцию, осциллирующую с частотой  $\omega$  и амплитудой, убывающей по закону  $\exp(-\sigma t)$ . В этом смысле изображение представляет собой спектральную плотность, которая определяется для комплексной частоты  $p = \sigma + j\omega$ . Иначе говоря, спектр в данном случае рассматривается как набор осциллирующих с частотой  $\omega$  колебаний, амплитуды которых уменьшаются по экспоненциальному закону.

### 5.3. Методика определения спектральной плотности

Методика определения спектральной плотности состоит в следующем.

**5.3.1.** Зная временную функцию  $s(t)$ , находят ее изображение  $\underline{S}(p)$ . Эту операцию, как правило, выполняют с использованием таблицы соответствия оригиналов и изображений по Лапласу (см. приложение).

**5.3.2.** Определяют полюса изображения  $\underline{S}(p)$  и наносят их на плоскости комплексной переменной  $p$ .

**5.3.3.** Производят замену переменной  $p$  в изображении на переменную  $j\omega$ . Если изображение  $\underline{S}(p)$  не имеет полюсов на оси  $j\omega$ , то полученная функция является спектральной плотностью сигнала.

**5.3.4.** Если изображение  $\underline{S}(p)$  имеет полюса на оси  $j\omega$ , то определяют полусумму вычетов в этих полюсах и к результату, полученному в пункте 5.3.3. прибавляют спектральную плотность этой полусуммы вычетов.

### 5.4. Методика определения оригинала по спектральной плотности

Методика определения оригинала состоит из следующих этапов.

**5.4.1.** В выражении для спектральной плотности  $\underline{S}(j\omega)$  переменную  $j\omega$  заменяют переменной  $p$ . В результате получают изображение  $\underline{S}(p)$ .

**5.4.2.** Выполняют обратное преобразование Лапласа. При этом возможны следующие варианты:

- использование таблицы соответствия оригиналов и изображений;
- применение теоремы разложения с последующим использованием таблицы соответствия оригиналов и изображений;
- непосредственное вычисление интеграла (5.6).

В последнем случае интеграл (5.6) сводится к определению суммы вычетов в полюсах изображения

$$s(t) = \sum_i \text{res}_i ,$$

где  $\text{res}_i$  — вычет в  $i$ -ом полюсе.

Если изображение представлено в виде правильной дроби

$$\underline{S}(p) = \frac{M(p)}{N(p)} , \quad (5.7)$$

а полюс  $p_i$  является простым, то вычет вычисляют по формуле [4]:

$$\text{res}_i = \frac{M(p)}{N'(p)} e^{pt} \Big|_{p=p_i} . \quad (5.8)$$

Если полюс  $p_i$  имеет кратность  $k$ , то вычет в этом полюсе вычисляют по формуле [4]:

$$\text{res}_i = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[ \frac{M(p)}{N(p)} e^{pt} (p-p_i)^k \right] \Big|_{p=p_i} . \quad (5.9)$$

### 5.5. Функция Хэвисайда и ее спектр

Функция Хэвисайда представляет собой единичный скачок напряжения или тока (рис. 5.1). Модель такого процесса широко используют в радиоэлектронике при задании кусочно-непрерывных функций, а также в качестве тестового сигнала при анализе характеристик цепей. Аналитическая запись функции Хэвисайда имеет вид:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t > 0 ; \\ 0 & \text{if } t < 0 . \end{cases} \quad (5.10)$$

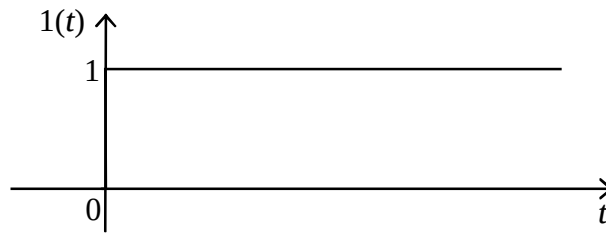


Рис. 5.1

Запишем выражение для изображения функции Хэвисайда [4]:

$$\underline{1}(p) = \frac{1}{p}. \quad (5.11)$$

Изображение (5.11) имеет один простой полюс в точке  $p_1 = 0$ . Поскольку этот полюс расположен на оси  $j\omega$ , то определим вычет, используя (5.8):

$$\text{res}_1 = \frac{e^{pt}}{1} \bigg|_{p=p_1=0} = 1.$$

Полусумма вычетов в данном случае является постоянной величиной, равной  $1/2$ . Заменяя в (5.11) переменную  $p$  на переменную  $j\omega$  и учитывая (4.61), получаем

$$\underline{1}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + 2\pi \frac{1}{2} \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega). \quad (5.12)$$

Определим модуль и аргумент спектральной плотности:

$$|\underline{1}(j\omega)| = \frac{1}{|\omega|} + \pi \delta(\omega); \quad (5.13)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{if } \omega > 0; \\ +\pi/2 & \text{if } \omega < 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Спектрограммы модуля и аргумента функции Хэвисайда, построенные в соответствии с (5.13) и (5.14), изображены на рис. 5.2.

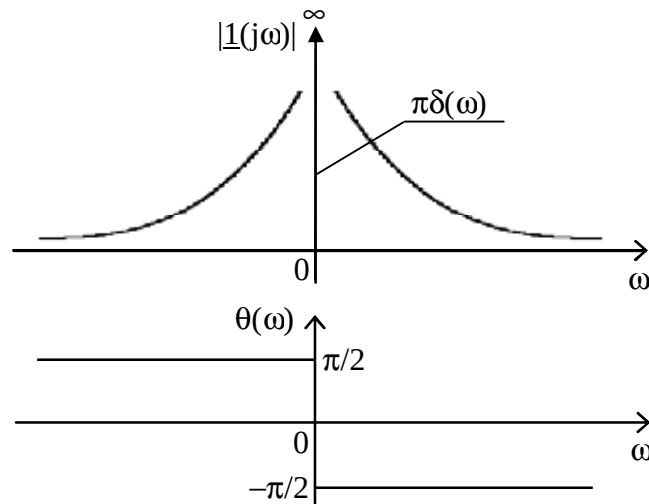


Рис. 5.2

Таким образом, спектр функции Хэвисайда содержит как сплошную, так и дискретную части. Вклад составляющих сплошного спектра плавно убывает с ростом частоты. На нулевой частоте имеется  $\delta$ -функция  $\pi\delta(\omega)$ . Это является свидетельством того, что в спектре функции Хэвисайда содержится постоянная составляющая конечной величины, которая равна 0,5.

### 5.6. Спектральная плотность усечённого гармонического колебания

Усечённое гармоническое колебание, получаемое включением в момент времени  $t = 0$  синусоидального сигнала изображено на рис. 5.3. Аналитическая запись такого сигнала имеет вид

$$s(t) = E \sin(\omega_0 t) \cdot 1(t) . \quad (5.15)$$

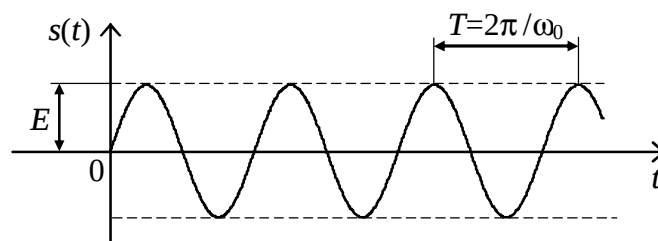


Рис. 5.3

Запишем выражение для изображения временной функции (5.15) [4]:

$$\underline{S}(p) = \frac{E\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}. \quad (5.16)$$

Изображение (5.16) имеет два простых полюса в точках  $p_1 = j\omega_0$  и  $p_2 = -j\omega_0$ . Поскольку эти полюсы расположены на оси  $j\omega$ , то определим вычеты, используя формулу (5.8):

$$\text{res}_1 = \left. \frac{E\omega_0 e^{pt}}{2p} \right|_{p=j\omega_0} = \frac{Ee^{j\omega_0 t}}{2j}; \quad \text{res}_2 = \left. \frac{E\omega_0 e^{pt}}{2p} \right|_{p=-j\omega_0} = -\frac{Ee^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$

Определим полусумму вычетов

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \text{res}_i = \frac{1}{2} \frac{E}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = \frac{E}{2} \sin(\omega_0 t) = \frac{E}{2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Заменяя в (5.16) переменную  $p$  на  $j\omega$  и учитывая (4.64), получаем

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{E\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega - \omega_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega + \omega_0) e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (5.17)$$

Определим модуль и аргумент спектральной плотности:

$$|\underline{S}(j\omega)| = \frac{E\omega_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega + \omega_0); \quad (5.18)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\omega| < \omega_0; \\ +\pi & \text{if } \omega > \omega_0; \\ -\pi & \text{if } \omega < -\omega_0; \\ -\pi/2 & \text{if } \omega = \omega_0; \\ +\pi/2 & \text{if } \omega = -\omega_0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Спектрограммы, построенные в соответствии с (5.18) и (5.19), изображены на рис. 5.4.

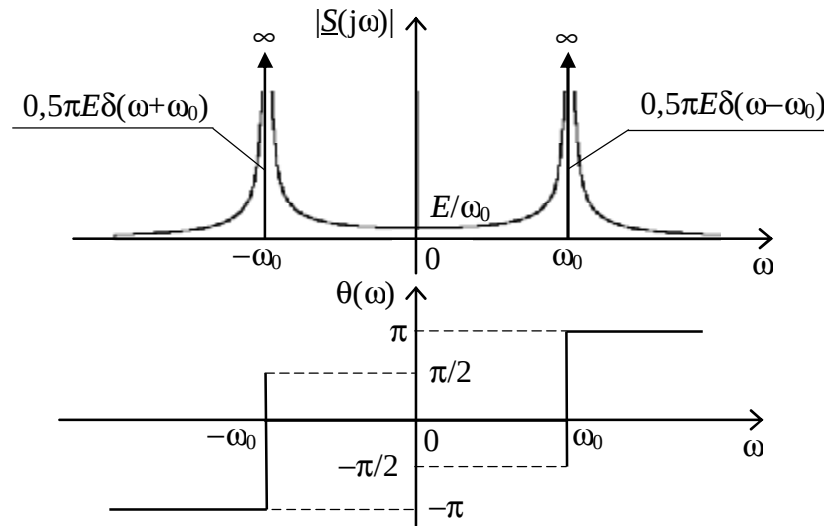


Рис. 5.4

Таким образом, спектр усеченного гармонического колебания содержит как сплошную, так и дискретную части. Сплошная часть существенно отличается от нуля в окрестности частот  $\pm \omega_0$  и имеет разрыв второго рода на этих частотах. На этих же частотах располагаются две  $\delta$ -функции, что говорит о наличии в спектре гармонического колебания конечной амплитуды  $E/2$ .

## 5.7. Пример решения задачи

### 5.7.1. Условие

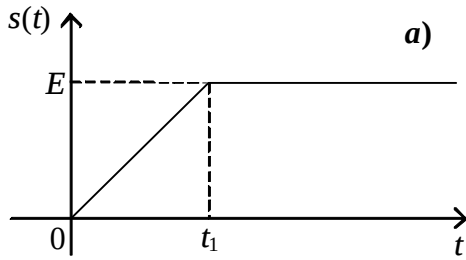
Рассчитать спектральную плотность сигнала, изображенного на рис. 5.5,а. Построить спектрограммы модуля и аргумента. Исходные данные:  $E = 400 \text{ В}$ ;  $t_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .

### 5.7.2. Решение

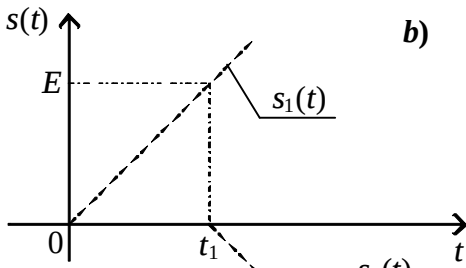
Заданный сигнал не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, поэтому для расчета спектральной плотности применим прямое преобразование Лапласа.

Представим сигнал  $s(t)$  как сумму двух более простых сигналов, изображения которых известны:  $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ . Сигнал  $s_1(t)$  представляет собой линейно-нарастающую функцию, которая “включается” в момент времени  $t = 0$ , а сигнал  $s_2(t)$  — линейно-убывающую функцию, которая “вклю-

чается” в момент времени  $t = t_1$ . Это представление иллюстрируется рис. 5.5, **b**. С учетом этого можно записать



$$s(t) = \frac{E}{t_1} t \cdot 1(t) - \frac{E}{t_1} (t - t_1) \cdot 1(t - t_1) .$$



Тогда изображение сигнала  $s(t)$  можно записать как сумму изображений сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . С учетом теоремы сдвига получим

$$\underline{S}(p) = \frac{E}{t_1} \frac{1}{p^2} - \frac{E}{t_1} \frac{1}{p^2} e^{-pt_1} = \frac{E}{t_1} \frac{(1 - e^{-pt_1})}{p^2} . \quad (5.20)$$

Рис. 5.5

Изображение (5.20) имеет один полюс кратности  $k = 2$  в точке  $p_1 = 0$ . Определим вычет в данном полюсе по формуле (5.9):

$$\text{res}_1 = \frac{E}{t_1} \frac{d}{dp} [(1 - e^{-pt_1}) e^{pt}] \Big|_{p=0} = E .$$

Теперь заменим в (5.20) переменную  $p$  на  $j\omega$  и к полученной функции прибавим спектральную плотность полусуммы вычетов, которая равна постоянному напряжению  $E/2$ . С учетом (4.61) окончательно получаем

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{E}{t_1} \frac{1}{(j\omega)^2} (1 - e^{-j\omega t_1}) + \pi E \delta(\omega) . \quad (5.21)$$

Определим модуль спектральной плотности. Применяя в (5.21) формулу Эйлера и проведя ряд несложных преобразований, получаем

$$|\underline{S}(j\omega)| = \frac{E}{|\omega|} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{\frac{\omega t_1}{2}} \right| + \pi E \delta(\omega) . \quad (5.22)$$

Спектрограммы модуля и аргумента, рассчитанные для исходных данных, исходя из (5.22), в виде функций частоты  $f$ , изображены на рис. 5.6.

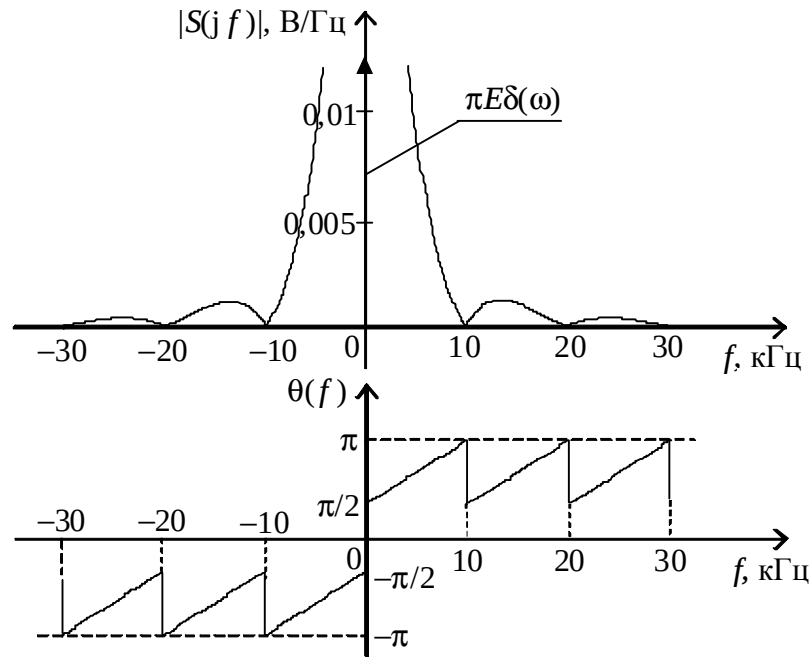


Рис. 5.6

Из спектрограммы следует, что основной вклад в сигнал вносят составляющие, примыкающие к нулевой частоте. С ростом частоты модуль спектральной плотности резко убывает, стремясь к нулю. При значении  $t_1 = 0$  выражение (5.22) с точностью до константы  $E$  становится равным спектральной плотности функции Хевисайда (см. формулу (5.12)), что и понятно, поскольку при этом исходный сигнал превращается в скачок постоянного напряжения.

## 6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Термин “корреляция” означает взаимосвязь между процессами. Это понятие широко используется в теории сигналов. Корреляция сигналов определяется их временными характеристиками, а именно: скоростью изменения, длительностью и формой. **Автокорреляция** — это корреляция между сигналом и его копией, сдвинутой во времени.

### 6.1. Автокорреляционная функция сигналов с конечной энергией

Для сигналов  $s(t)$ , обладающих конечной энергией, мерой автокорреляции служит площадь перекрытия сигнала и его копии, сдвинутой во времени. В этом случае автокорреляционная функция (АКФ) вводится как

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt, \quad (6.1)$$

где  $s(t+\tau)$  — копия сигнала  $s(t)$ , сдвинутая на время  $\tau$ , причем  $-\infty < \tau < \infty$ .

АКФ представляет собой функцию временного сдвига  $\tau$ , поскольку в результате интегрирования по времени переменная  $t$  в (6.1) исчезает.

Рассмотрим основные свойства АКФ сигналов с конечной энергией.

#### 1) Величина АКФ при нулевом значении временного сдвига $\tau$

Положим в (6.1)  $\tau = 0$ . В результате получим

$$B(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \Theta. \quad (6.2)$$

Таким образом, при нулевом сдвиге автокорреляционная функция максимальна, положительна и равна полной энергии сигнала.

## 2) Длительность АКФ

Если сигнал обладает конечной длительностью  $T_c$ , то и АКФ этого сигнала также обладает конечной длительностью. Поскольку сдвиг копии сигнала возможен как влево вдоль оси времени, так и вправо, то АКФ отлична от нуля на интервале времени от  $-T_c$  до  $T_c$ , а за пределами этого интервала она равна нулю. Отсюда следует, что длительность АКФ равна удвоенной длительности сигнала.

## 3) Свойство четности

Поскольку сдвиг копии сигнала влево и вправо вдоль временной оси на одну и ту же величину  $\tau$  приводит к одинаковому значению площади перекрытия, то АКФ является четной функцией временного сдвига  $\tau$ , то есть

$$B(\tau) = B(-\tau) \quad . \quad (6.3)$$

Иначе говоря, АКФ обладает симметрией относительно оси ординат.

## 6.2. Автокорреляционная функция прямоугольного импульса

В качестве примера проанализируем АКФ одиночного импульса прямоугольной формы, произвольно расположенного на оси времени (рис. 6.1,*a*). Определим АКФ этого импульса. На рис. 6.1,*b* изображена сдвинутая в сторону опережения ( $\tau > 0$ ) копия этого импульса.

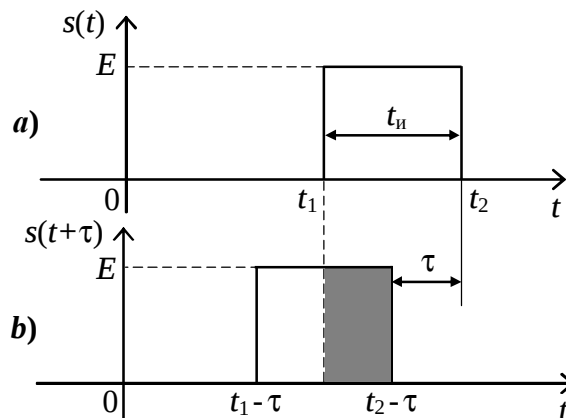


Рис. 6.1

Рассмотрим поведение АКФ при различных значениях  $\tau$ .

1) На интервале  $0 \leq |\tau| \leq t_n$ .

В соответствии с (6.1) при  $\tau > 0$  получаем

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{t_1}^{t_2-\tau} E^2 dt = E^2(t_2 - t_1 - \tau) = E^2(t_n - \tau), \quad (6.4)$$

где  $t_n = t_2 - t_1$  — длительность импульса.

Из (6.4) следует, что  $B(0) = E^2 t_n = \mathcal{E}$  — полная энергия импульса. С увеличением  $\tau$  АКФ уменьшается по линейному закону.

В виду четности АКФ запишем выражение, справедливое на интервале  $0 \leq |\tau| \leq t_n$ , взяв в (6.4) аргумент  $\tau$  по модулю

$$B(\tau) = E^2(t_n - |\tau|). \quad (6.5)$$

2) На интервале  $|\tau| > t_n$ .

На этом интервале времени АКФ равна нулю, так как сигнал не перекрывается со своей копией, смещенной во времени (корреляция отсутствует).

С учетом проведенного анализа изобразим АКФ импульса прямоугольной формы (рис. 6.2,*a*). Эта функция представляет собой равнобедренный треугольник длительностью  $2t_n$ .

На практике часто используют понятие нормированной автокорреляционной функции, которая вводится следующим образом:

$$R(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)}. \quad (6.6)$$

Нормированная АКФ безразмерна и обладает той же формой, что и ненормированная АКФ. При  $\tau = 0$  нормированная АКФ максимальна и равна единице. Нормированная АКФ одиночного импульса прямоугольной формы изображена на рис. 6.2,*b*.

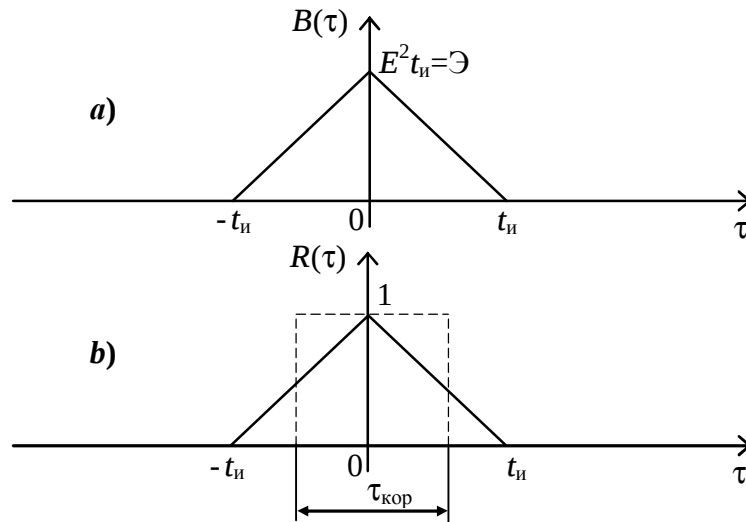


Рис. 6.2

С использованием нормированной АКФ вводят понятие интервал корреляции сигнала. Под интервалом корреляции сигнала понимают длительность нормированной АКФ прямоугольной формы (изображена штриховой линией на рис. 6.2,*b*) площадь которой равна площади нормированной АКФ сигнала, взятой по абсолютной величине. Очевидно, что интервал корреляции при таком определении равен

$$\tau_{\text{кор}} = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau. \quad (6.7)$$

В частности, для одиночного импульса прямоугольной формы, используя (6.7), получаем  $\tau_{\text{кор}} = t_{\text{н}}$ .

### 6.3. Автокорреляционная функция пачки импульсов

Рассмотрим пачку, состоящую из двух одинаковых прямоугольных импульсов длительностью  $t_{\text{н}}$ , следующих с интервалом  $T_1$  (рис. 6.3,*a*). Длительность этого сигнала  $T_{\text{с}} = T_1 + t_{\text{н}}$ .

Поскольку этот сигнал является кусочно-непрерывной функцией, то и АКФ представляет собой тоже кусочно-непрерывную функцию. Проведем расчет АКФ на различных участках непрерывности, осуществляя сдвиг в сторону опережения и учитывая, что АКФ — четная функция.

1) На интервале  $0 \leq |\tau| \leq t_n$  (рис. 6.3, *b*)

$$B(\tau) = \int_0^{t_n - \tau} E^2 dt + \int_{T_1}^{T_c - \tau} E^2 dt = 2E^2(t_n - |\tau|). \quad (6.8)$$

В частности, при  $\tau = 0$  получаем  $B(0) = 2E^2 t_n = 2\mathfrak{E}_1$ , где  $\mathfrak{E}_1 = E^2 t_n$  — энергия одиночного импульса.

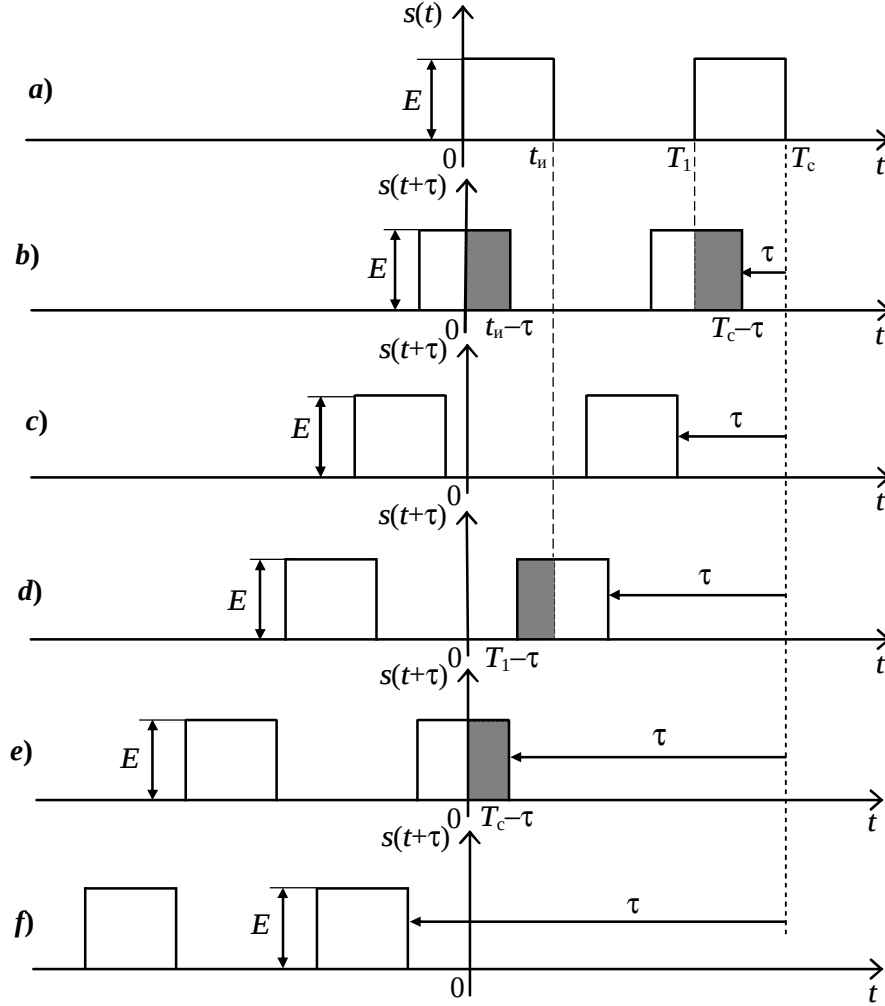


Рис. 6.3

2) На интервале  $t_n \leq |\tau| \leq T_1 - t_n$  (рис. 6.3, *c*)

$$B(\tau) = 0. \quad (6.9)$$

3) На интервале  $T_1 - t_n \leq |\tau| \leq T_1$  (рис. 6.3, *d*)

$$B(\tau) = \int_{T_1 - \tau}^{t_n} E^2 dt = E^2(t_n - T_1 + |\tau|). \quad (6.10)$$

В частности, при  $|\tau| = T_1$  получаем  $B(T_1) = E^2 t_{\text{и}} = \mathfrak{E}_1$ .

4) На интервале  $T_1 \leq |\tau| \leq T_c$  (рис. 6.3, *e*)

$$B(\tau) = \int_0^{T_c - \tau} E^2 dt = E^2 (T_c - |\tau|) . \quad (6.11)$$

В частности, при  $|\tau| = T_c$  получаем  $B(\tau) = 0$ .

5) На интервале  $|\tau| > T_c$  (рис. 6.3, *f*)

$$B(\tau) = 0 . \quad (6.12)$$

На основании формул (6.8)...(6.12) построен график АКФ (рис. 6.4).

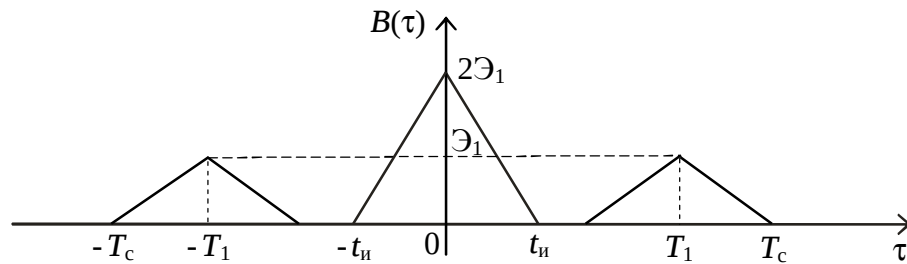


Рис. 6.4

Из графика следует, что АКФ пачки из двух прямоугольных импульсов состоит из трех треугольных импульсов.

В общем случае АКФ пачки, состоящей из  $n$  одинаковых импульсов произвольной формы, представляет собой пачку из  $(2n - 1)$  импульсов, совпадающих по форме с АКФ отдельного импульса из этой пачки. Причем при  $\tau = 0$  АКФ максимальна и равна полной энергии пачки  $B(0) = n\mathfrak{E}_1$ .

#### 6.4. Автокорреляционная функция периодических сигналов

Введенное ранее понятие АКФ (формула (6.1)) не может быть использовано для периодических сигналов, поскольку эти сигналы обладают бесконечной энергией, что приводит к появлению разрывов второго рода в (6.1). Поэтому для периодических сигналов АКФ вводят в следующем виде

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau)dt . \quad (6.13)$$

Рассмотрим основные свойства АКФ периодических сигналов.

### 1) Свойство периодичности

Из (6.13) следует, что АКФ периодического сигнала также периодическая функция переменной  $\tau$  с тем же периодом  $T$ .

### 2) Длительность АКФ

Длительность АКФ периодического сигнала бесконечна. Это вытекает из предыдущего свойства периодичности.

### 3) Величина АКФ при нулевом значении временного сдвига $\tau$

Положим в (6.13)  $\tau = 0$ . В результате с учетом (2.10) получим

$$B_{\text{пер}}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P_{\text{ср}} . \quad (6.14)$$

Таким образом, при нулевом сдвиге  $\tau$  АКФ периодического сигнала положительна, максимальна и равна средней мощности этого сигнала.

### 4) Свойство четности

АКФ периодического сигнала является четной функцией временного сдвига  $\tau$ , то есть  $B(\tau) = B(-\tau)$ .

### 5) Форма АКФ периодической импульсной последовательности

Из (6.13) следует, что на интервале  $t$ , равном  $(-T/2, T/2)$ , АКФ периодической последовательности импульсов совпадает по форме с АКФ одиночного импульса из этой последовательности.

С использованием последнего свойства построим АКФ периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. 6.5).

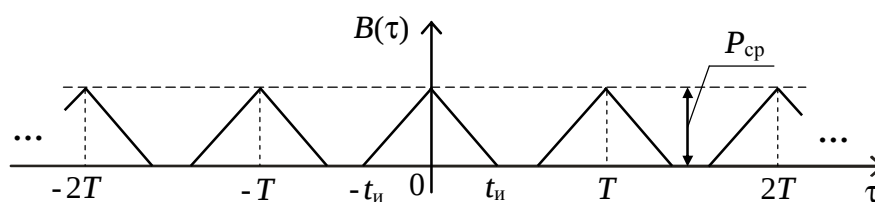


Рис. 6.5

### 6.5. Автокорреляционная функция гармонического колебания

Определим АКФ гармонического колебания с произвольной начальной фазой, заданного следующей формулой

$$s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \theta_0) . \quad (6.15)$$

Для этого воспользуемся соотношением (6.13):

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{U_m^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t + \theta_0) \cos[\omega_0(t + \tau) + \theta_0] dt .$$

Используя в последней формуле известное соотношение для произведения косинусов, получаем

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta_0) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 \tau) dt \right] .$$

Первый интеграл на интервале, равном периоду, обращается в нуль. В итоге получаем

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2T} \cos(\omega_0 \tau) \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{U_m^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) . \quad (6.16)$$

Таким образом, АКФ гармонического колебания с произвольной начальной фазой представляет собой гармоническое колебание с такой же частотой и нулевой начальной фазой. Отсюда следует, что АКФ гармонического колебания не зависит от начальной фазы этого колебания.

### 6.6. Взаимосвязь автокорреляционной функции и спектральной плотности детерминированного сигнала

Рассмотрим взаимосвязь автокорреляционной функции и спектральной плотности для сигналов с конечной энергией. Для этого воспользуемся формулой Рэлея (4.40), положив в ней

$$g(t) = s(t), \quad f(t) = s(t + \tau) .$$

Тогда с учетом теоремы сдвига получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(j\omega)\underline{S}^*(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 e^{-j\omega\tau}d\omega.$$

Интеграл в левой части полученного равенства является АКФ сигнала, а в правой части — обратное преобразование Фурье от  $|\underline{S}(j\omega)|^2$  (знак в показателе экспоненты не имеет значения из-за четности  $|\underline{S}(j\omega)|^2$ , в дальнейшем выберем знак «+»). Таким образом, АКФ и квадрат модуля спектральной плотности детерминированного сигнала связаны между собой парой преобразований Фурье. С учетом четности АКФ и  $|\underline{S}(j\omega)|^2$  можно записать:

$$|\underline{S}(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = 2 \int_0^{\infty} B(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau; \quad (6.17)$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 \cos(\omega\tau)d\omega. \quad (6.18)$$

Из проведенного анализа вытекает, что АКФ не зависит от аргумента спектральной плотности. Поэтому различным сигналам могут соответствовать одинаковые корреляционные функции, при условии, что спектрограммы модулей этих сигналов одинаковы. В частности отсюда следует, что сдвиг сигнала во времени не приводит к изменению АКФ.

### 6.7. Взаимная корреляционная функция двух сигналов

Рассмотрим два импульсных сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  произвольной формы (рис. 6.6, *a*).

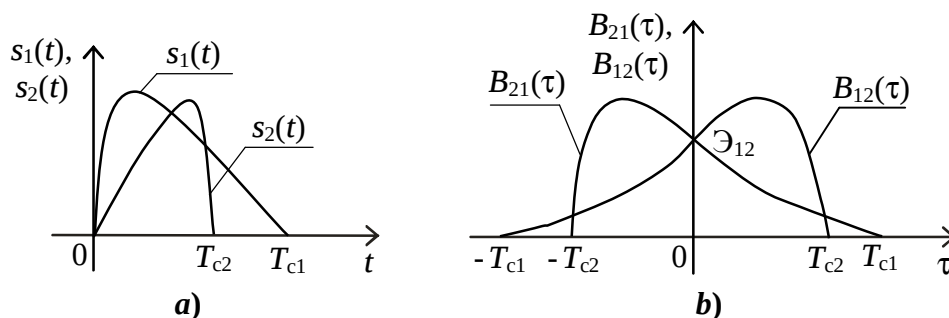


Рис. 6.6

Для количественной оценки степени корреляции этих сигналов вводят понятие взаимная корреляционная функция (ВКФ), которая определяется как площадь перекрытия одного из сигналов со сдвинутой копией второго.

Из этого определения следует две возможности задания ВКФ:

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t+\tau)dt ; \quad (6.19)$$

$$B_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+\tau)s_2(t)dt . \quad (6.20)$$

На рис. 6.6, **b** изображены графики ВКФ двух импульсных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , построенных качественно в соответствии с (6.19) и (6.20).

Рассмотрим основные свойства ВКФ.

### 1) Длительность ВКФ

Очевидно, что длительность ВКФ двух импульсных сигналов равна сумме длительностей исходных сигналов:  $T_{\text{вк}} = T_{\text{с1}} + T_{\text{с2}}$ .

### 2) Величина ВКФ при нулевом значении временного сдвига $\tau$

Положим в (6.19), (6.20)  $\tau = 0$ . В результате получим

$$B_{12}(0) = B_{21}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \Theta_{12} = \Theta_{21}. \quad (6.21)$$

Таким образом, при нулевом значении временного сдвига  $\tau$  ВКФ численно равна взаимной энергии сигналов. В частности для ортогональных сигналов при  $\tau = 0$  ВКФ всегда обращается в нуль.

### 3) Свойство зеркальной симметрии

ВКФ, в отличие от АКФ, в общем случае не является четной функцией временного сдвига  $\tau$ . Из приведенного выше определения ВКФ следует, что сдвиг вправо  $s_2(t)$  равнозначен сдвигу влево  $s_1(t)$ . Таким образом, для ВКФ выполняется условие зеркальной симметрии:  $B_{12}(\tau) = B_{21}(-\tau)$ .

## 6.8. Пример решения задачи

### 6.8.1. Условие

Рассчитать автокорреляционную функцию сигнала, изображенного на рис. 6.7,*a*. Построить график АКФ и определить интервал корреляции. Исходные данные:  $E = 50 \text{ В}$ ;  $t_{\text{и}} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

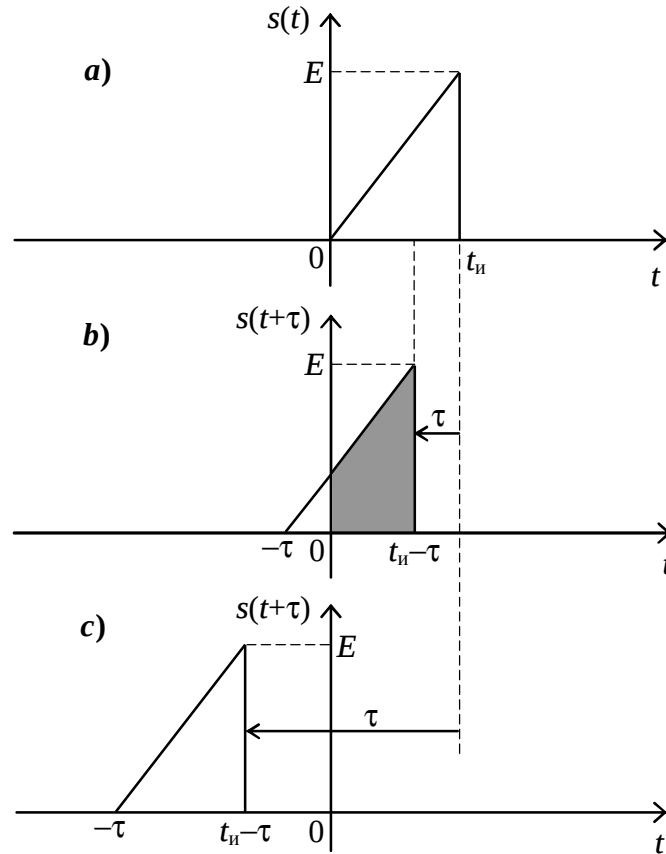


Рис. 6.7

### 6.8.2. Решение

Зададим данный сигнал аналитически на интервале времени  $(-\infty, +\infty)$ :

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0, \ t > t_{\text{и}}; \\ \frac{E}{t_{\text{и}}}t & \text{if } 0 \leq t < t_{\text{и}}. \end{cases} \quad (6.22)$$

Данный сигнал представляет собой кусочно-непрерывную функцию времени, поэтому и АКФ является кусочно-непрерывной. Проведем расчеты

на различных участках непрерывности, используя формулу (6.1) и сдвигая копию сигнала в сторону опережения.

1) На интервале  $0 \leq \tau \leq t_{\text{и}}$  (рис. 6.7,б)

$$B(\tau) = \int_0^{t_{\text{и}}-\tau} \left( \frac{E}{t_{\text{и}}} \right)^2 t(t+\tau) dt = \left( \frac{E}{t_{\text{и}}} \right)^2 \left[ \frac{(t_{\text{и}}-\tau)^3}{3} + \frac{\tau(t_{\text{и}}-\tau)^2}{2} \right]. \quad (6.23)$$

Упрощая (6.23) и учитывая четность АКФ, приходим к следующему:

$$B(\tau) = \left( \frac{E}{t_{\text{и}}} \right)^2 \frac{2t_{\text{и}}^3 - 3t_{\text{и}}^2|\tau| + |\tau|^3}{6}. \quad (6.24)$$

При  $\tau=0$  из (6.24) получаем  $B(0) = E^2 t_{\text{и}}/3$ , что соответствует полной энергии сигнала. При  $|\tau| = t_{\text{и}}$  из (6.24) получаем  $B(t_{\text{и}}) = 0$ .

2) На интервале  $\tau > t_{\text{и}}$  (рис. 6.7,с)

$$B(\tau) = 0. \quad (6.25)$$

Используя (6.24) и (6.25), построим график АКФ (рис. 6.8).

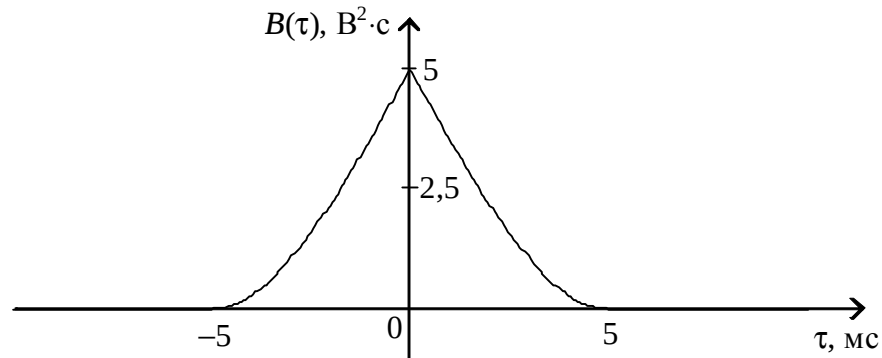


Рис. 6.8

Для определения интервала корреляции запишем выражение для нормированной АКФ

$$R(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)} = \frac{2t_{\text{и}}^3 - 3t_{\text{и}}^2|\tau| + |\tau|^3}{2t_{\text{и}}^3}. \quad (6.26)$$

Интервал корреляции в соответствии с формулой (6.7) равен

$$\tau_{\text{кор}} = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau = 2 \int_0^{t_{\text{и}}} \frac{2t_{\text{и}}^3 - 3t_{\text{и}}^2\tau + \tau^3}{2t_{\text{и}}^3} d\tau = \frac{1}{t_{\text{и}}^3} (2t_{\text{и}}^4 - 3\frac{t_{\text{и}}^4}{2} + \frac{t_{\text{и}}^4}{4}) = 0,75t_{\text{и}} = 3,75 \text{ мс.}$$

Таким образом, интервал корреляции треугольного импульса меньше, чем у прямоугольного импульса той же длительности (см. подраздел 6.2).

## 7. СИГНАЛЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ И ИХ СВОЙСТВА

### 7.1. Определение и критерии ограничения спектра

Сигналом с ограниченным спектром называют такой сигнал, в спектре которого отсутствуют колебания с частотой, большей некоторой максимальной частоты  $\omega_m (f_m)$ .

Ранее показано, что если длительность сигнала конечна, то его спектр неограничен. Реальные каналы связи обладают ограниченной полосой пропускания, поэтому на практике ширину спектра сигналов искусственно ограничивают. При этом форма сигнала искажается. Ограничение спектра следует проводить так, чтобы сохранялась основная (наиболее значимая) часть спектра, а влияние отбрасываемой части спектра на форму сигнала было бы допустимым. По сути, речь идет об определении эффективной (практической) ширины спектра сигнала. Эффективная ширина спектра в некоторой степени является условной величиной, поскольку существует ряд критериев ограничения спектра, применение которых дает несколько отличающиеся результаты. Рассмотрим основные критерии ограничения спектра.

#### Энергетический критерий

Под эффективной шириной спектра в этом случае понимают такую полосу частот, в пределах которой сосредоточена основная часть энергии (либо средней мощности) сигнала (обычно 90%). Этот критерий использовался ранее (см. подразделы 3.5 и 4.7).

#### Амплитудный критерий

Эффективной шириной спектра в этом случае называют полосу частот, на границах которой значение модуля спектральной плотности убывает в заданное число раз относительно максимального значения (например, в 10 раз).

### Критерий ограничения спектра по площади

Пусть модуль спектральной плотности сигнала  $|\underline{S}(j\omega)|$  имеет максимальное значение  $\underline{S}_{max}$ . Под эффективной шириной спектра  $\Delta\omega_{эф}$  в этом случае понимают ширину спектра прямоугольной формы, величина которого равна  $\underline{S}_{max}$  а площадь равна площади функции  $|\underline{S}(j\omega)|$ . Исходя из этого определения, можно записать

$$\underline{S}_{max}\Delta\omega_{эф} = \int_0^{\infty} |\underline{S}(j\omega)| d\omega.$$

Из последнего выражения определим эффективную ширину спектра

$$\Delta\omega_{эф} = \frac{\int_0^{\infty} |\underline{S}(j\omega)| d\omega}{\underline{S}_{max}}.$$

Зная эффективную ширину спектра можно определить и максимальную частоту  $\omega_m$  ( $f_m$ ).

### 7.2. Идеальный низкочастотный сигнал

Идеальный низкочастотный сигнал (ИНЧ) — это сигнал, спектр которого равномерен в полосе физических частот от нуля до  $\omega_1$ , а за пределами этой полосы равен нулю. В соответствии с этим определением на рис. 7.1 построена спектрограмма модуля ИНЧ.

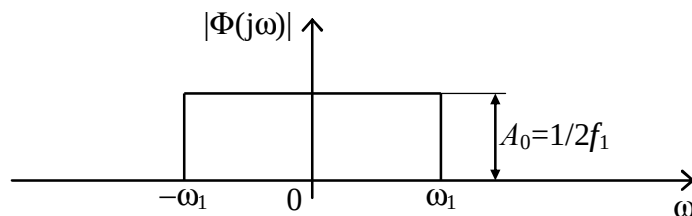


Рис. 7.1

Полагая аргумент спектральной плотности равным нулю в полосе частот от нуля до  $\omega_1$ , запишем выражение для спектральной плотности ИНЧ:

$$\Phi(j\omega) = \begin{cases} A_0 = \text{const} & \text{if } |\omega| < \omega_1 ; \\ 0, & \text{if } |\omega| > \omega_1 . \end{cases} \quad (7.1)$$

Определим временную функцию  $\varphi(t)$ , которая соответствует спектральной плотности (7.1). Применим для этого обратное преобразование Фурье (4.6). Подставляя в эту формулу выражение (7.1), получаем

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} A_0 e^{j\omega t} d\omega . \quad (7.2)$$

Интегрируя и учитывая, что  $\omega_1 = 2\pi f_1$ , получаем

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{2\pi} \frac{1}{jt} (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}) = 2A_0 f_1 \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} . \quad (7.3)$$

Поскольку  $A_0$  может принимать любое постоянное значение, то зададим для упрощения записи  $A_0 = 1/2 f_1$ . С учетом этого из (7.3) следует

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} . \quad (7.4)$$

Таким образом, во временной области ИНЧ представляет собой функцию вида  $\text{sinc}(\omega_1 t)$ . График этой функции изображен на рис. 7.2.

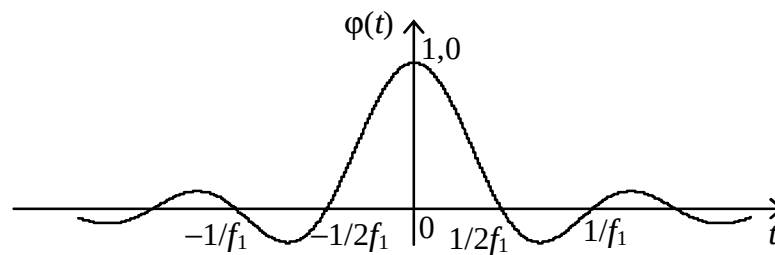


Рис. 7.2

Из этого графика следует, что ИНЧ обладает бесконечной длительностью, то есть этот сигнал физически нереализуем.

### 7.3. Проблема дискретизации аналогового сигнала

Часто возникает необходимость преобразования аналогового сигнала в дискретный (прямая задача), а также преобразования дискретного сигнала в аналоговый (обратная задача). Процесс дискретизации аналогового сигнала иллюстрируется рис. 7.3. На рис. 7.3,**a** представлен аналоговый сигнал  $s(t)$  и отмечены значения этого сигнала  $s(nT_d)$  в отсчетные моменты времени  $nT_d$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Интервал  $T_d$  называют интервалом дискретизации, а величину  $f_d = 1/T_d$  — частотой дискретизации. На рис. 7.3,**b** представлен дискретный сигнал в виде отсчетов аналогового сигнала  $s(nT_d)$  нулевой длительности, которые называют выборками. На этом рисунке для удобства пунктиром указана огибающая — несуществующая линия, соединяющая экстремальные значения этих отсчетов.

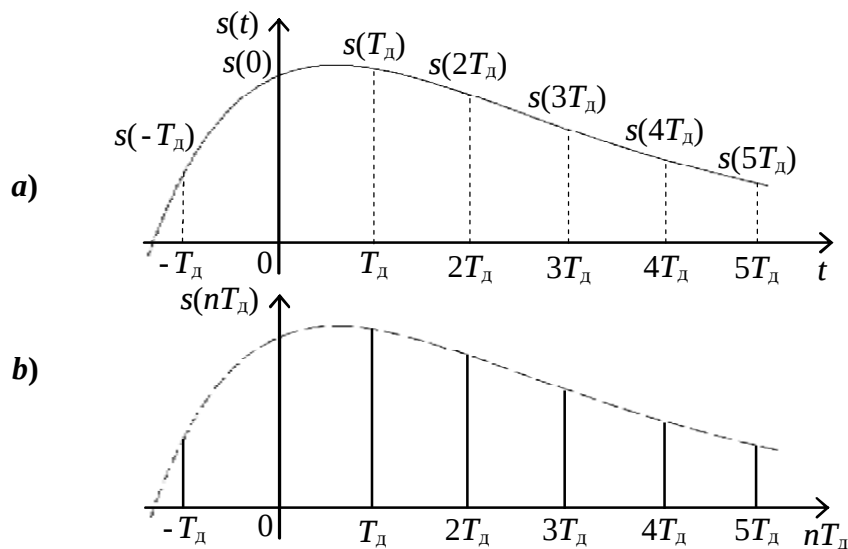


Рис. 7.3

При решении указанных задач необходимо осуществить: 1) выбор интервала дискретизации; 2) выбор алгоритма восстановления (синтеза) аналогового сигнала по дискретным отсчетам. Правильный выбор интервала дискретизации и алгоритма синтеза должны обеспечить в идеальном случае точное воспроизведение формы аналогового сигнала по его дискретным значениям. На оба эти вопроса дает ответ теорема отсчетов.

#### 7.4. Теорема отсчетов

**Теорема.** Аналоговый сигнал  $s(t)$  с **ограниченным спектром**, максимальная частота которого равна  $f_m$ , полностью определяется последовательностью своих выборочных значений  $s(nT_d)$ , следующих с интервалом дискретизации

$$T_d \leq \frac{1}{2f_m}, \quad (7.5)$$

причем восстановление исходного аналогового сигнала по этим выборочным значениям можно осуществить по формуле

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_d) \frac{\sin\left[\frac{\omega_d}{2}(t - nT_d)\right]}{\frac{\omega_d}{2}(t - nT_d)}, \quad (7.6)$$

где  $\omega_d = 2\pi f_d = 2\pi/T_d$  — круговая частота дискретизации.

В соответствии с (7.5) частота дискретизации должна превышать максимальную частоту спектра аналогового сигнала не менее, чем в два раза:  $f_d \geq 2f_m$  ( $\omega_d \geq 2\omega_m$ ).

В соответствии с теоремой отсчетов, аналоговый сигнал  $s(t)$  представляется в виде суммы бесконечного числа аналоговых функций вида  $s(nT_d) \cdot \text{sinc}[\omega_d(t - nT_d)/2]$ , смещённых вдоль оси времени друг относительно друга на интервал дискретизации  $T_d$ . Максимумы этих функций точно размещены в отсчетных точках и равны выборочным значениям сигнала  $s(nT_d)$ , а нули каждой из них точно совпадают с расположением максимумов всех остальных функций. Представление сигнала  $s(t)$  рядом (7.6) иллюстрируется рис. 7.4.

Следует помнить, что ряд (7.6) сходится к  $s(t)$  не только в точках размещения выборок, но и во всех других точках временной оси.

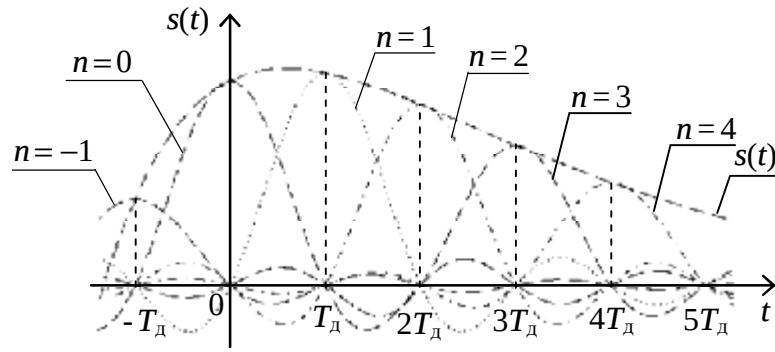


Рис. 7.4

Проведем доказательство теоремы отсчетов. Для этого разложим сигнал  $s(t)$  в ряд (2.21) по системе ортогональных функций

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \varphi_n(t). \quad (7.7)$$

Выберем в качестве ортогональной системы систему действительных функций вида

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \left[ \frac{\omega_d}{2} (t - nT_d) \right]}{\frac{\omega_d}{2} (t - nT_d)}. \quad (7.8)$$

Поскольку эти функции отличаются от ИНЧ (7.4) только сдвигом во времени на величину  $nT_d$ , то, в соответствии с теоремой сдвига, спектральную плотность функции  $\varphi_n(t)$  можно записать следующим образом

$$\Phi_n(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{f_d} e^{-j\omega nT_d} = T e^{-j\omega nT_d} & \text{if } |\omega| < \omega_d/2; \\ 0 & \text{if } |\omega| > \omega_d/2. \end{cases} \quad (7.9)$$

Докажем ортогональность выбранной системы функций на бесконечном интервале времени, воспользовавшись формулой Рэлея (4.40), в соответствии с которой запишем следующее равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(j\omega) \Phi_m^*(j\omega) d\omega. \quad (7.10)$$

Учитывая (7.9), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \frac{1}{2\pi f_d^2} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} e^{-j\omega(m-n)T_d} d\omega. \quad (7.11)$$

Нетрудно доказать, что при  $m \neq n$  выражение (7.11) обращается в нуль, то есть система функций  $\varphi_n(t)$  в соответствии с (2.20) является ортогональной. При  $m = n$  из (7.11) получаем выражение для квадрата нормы выбранной системы ортогональных функций

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{f_d} = T_d. \quad (7.12)$$

Воспользовавшись выражением (2.23), определим коэффициенты разложения  $C_n$ :

$$C_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_n(t) dt. \quad (7.13)$$

Рассмотрим случай, при котором интервал дискретизации выбран равным  $T_d \leq 1/2 f_m$ , то есть  $\omega_d/2 \geq \omega_m$ . Используя формулу Рэлея и учитывая (7.9) и (7.12), из (7.13) получаем

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega) e^{j\omega n T_d} d\omega. \quad (7.14)$$

Пределы интегрирования в (7.13) выбраны из тех соображений, что спектр сигнала  $s(t)$  ограничен максимальной частотой  $\omega_m$ , а спектр функции  $\varphi_n(t)$  — частотой  $\omega_d/2$ , причем  $\omega_d/2 > \omega_m$ . При этом подынтегральное выражение отлично от нуля в полосе частот от  $-\omega_m$  до  $\omega_m$ . В этом случае вы-

ражение (7.14) представляет собой выборочные значения сигнала  $s(t)$  в точках дискретизации  $t = nT_d$ , то есть

$$C_n = s(nT_d). \quad (7.15)$$

Подставляя (7.8) и (7.15) в (7.7), приходим к (7.6), что и требовалось доказать.

Если интервал дискретизации выбрать  $T_d > 1/2 f_m$ , то  $\omega_d/2 < \omega_m$ . Тогда пределы интегрирования в (7.14) необходимо выбрать от  $-\omega_d/2$  до  $\omega_d/2$ . При этом коэффициенты разложения (7.14) не будут равны выборочным значениям сигнала  $s(t)$ , то есть ряд (7.6) не будет сходиться к функции  $s(t)$ .

Таким образом, интервал дискретизации не может быть больше величины  $1/2 f_m$ .

### 7.5. Спектр дискретного сигнала

Рассмотрим случай, при котором длительность выборок бесконечно мала. В этом случае математическую модель дискретного сигнала удобно представить в виде произведения

$$s_T(t) = s(t)y_T(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT_d), \quad (7.16)$$

где  $s(t)$  — исходный аналоговый сигнал;  $y_T(t)$  — дискретизирующая функция, которая представляет собой периодическую последовательность  $\delta$ -функций с периодом, равным интервалу дискретизации  $T_d$ .

При таком представлении дискретный сигнал представляет собой последовательность  $\delta$ -функций, с весовыми коэффициентами, равными высоте выборок  $s(nT_d)$ .

Определим спектральную плотность дискретного сигнала (7.16), применив к нему прямое преобразование Фурье

$$\underline{S}_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)y_T(t)e^{-j\omega t}dt. \quad (7.17)$$

Представим периодическую функцию  $y_T(t)$  в виде комплексного ряда Фурье

$$y_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_d t}, \quad (7.18)$$

где  $C_n$  — коэффициенты разложения, которые определим, используя (3.5):

$$C_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} y_T(t) e^{-jn\omega_d t} dt. \quad (7.19)$$

Функция  $y_T(t)$  на интервале времени  $(-T_d/2, T_d/2)$  представляет собой единственную  $\delta$ -функцию, расположенную в точке  $t=0$ . Используя фильтрующее свойство  $\delta$ -функции (4.53), получаем

$$C_n = \frac{1}{T_d}. \quad (7.20)$$

Подставляя (7.18) в (7.17), учитывая (7.20) и внося интеграл под знак суммы, приходим к соотношению

$$\underline{S}_T(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega - n\omega_d)t} dt. \quad (7.21)$$

Поскольку интеграл под знаком суммы представляет собой прямое преобразование Фурье от  $s(t)$  на частоте  $(\omega - n\omega_d)$ , то (7.21) запишем в виде

$$\underline{S}_T(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}[j(\omega - n\omega_d)]. \quad (7.22)$$

В соответствии с (7.22) спектр дискретного сигнала для случая идеальных выборок нулевой длительности (с точностью до множителя  $1/T_d$ ) равен

сумме бесконечного множества копий спектра исходного аналогового сигнала, сдвинутых вдоль оси частот на  $n\omega_d$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

На рис. 7.5 изображена спектрограмма модуля аналогового сигнала  $s(t)$  (диаграмма **a**) и три спектрограммы дискретного сигнала  $s_T(t)$ , соответствующие трем значениям интервала дискретизации  $T_d$ :

- $T_d = 1/2 f_m$  ( $\omega_d = 2\omega_m$ ) (диаграмма **b**);
- $T_d < 1/2 f_m$  ( $\omega_d > 2\omega_m$ ) (диаграмма **c**);
- $T_d > 1/2 f_m$  ( $\omega_d < 2\omega_m$ ) (диаграмма **d**).

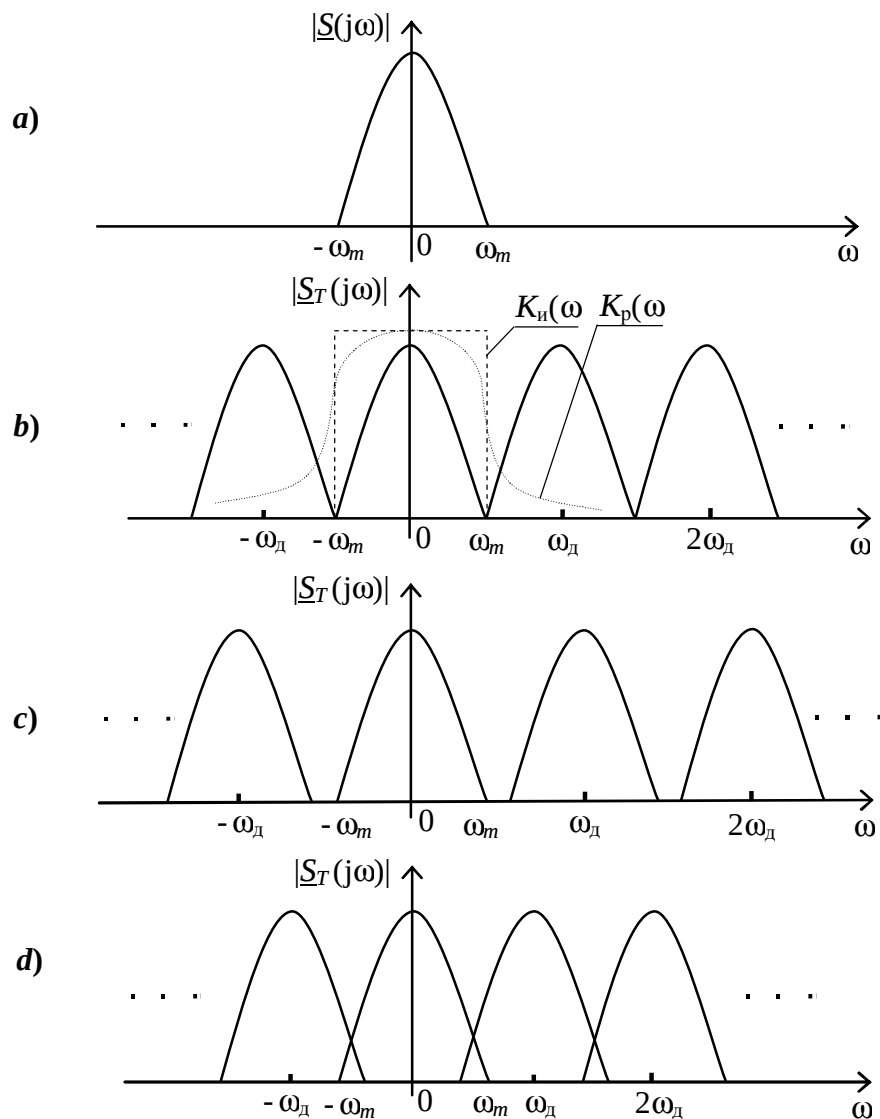


Рис. 7.5

Из диаграмм **b**, **c**, **d** следует, что в первом и во втором случаях отдельные копии не перекрываются (в случае **b** — соприкасаются, а в случае **c** — разне-

сены), а в случае  $d$  копии спектра перекрываются. Отсюда вытекает принципиальная возможность восстановления исходного аналогового сигнала в первом и во втором случаях. Это можно сделать путем “выделения” из полного спектра дискретного сигнала полосы частот от нуля до  $\omega_m$  (в области физических частот), поскольку в этой полосе частот спектры дискретного и исходного аналогового сигналов совпадают.

В случае  $d$  восстановить сигнал невозможно, поскольку в указанной полосе частот спектр дискретного сигнала отличается от спектра исходного аналогового сигнала из-за суммирования перекрывающихся частей. Поэтому интервал дискретизации должен выбираться из условия  $T_d \leq 1/2 f_m$ , что и утверждает теорема отсчетов.

## 7.6. Синтез аналогового сигнала по дискретным отсчетам

Задачей синтеза является восстановление аналогового сигнала по отсчетам дискретного сигнала. В случае идеального сигнала с ограниченным спектром (что соответствует неограниченному во времени сигналу) восстановление возможно абсолютно точно, о чем говорит теорема отсчетов. Однако на практике сигналы обладают конечной длительностью, то есть неограниченным спектром. При этом ограничение спектра (выбор максимальной частоты  $f_m$ ) осуществляют искусственно. По этой причине задача синтеза всегда сопряжена с методической погрешностью, величина которой зависит от величины  $f_m$ .

Рассмотрим реальную ситуацию, при которой длительность сигнала  $s(t)$  конечна и равна  $T_c$ , а максимальная частота спектра этого сигнала искусственно выбрана равной  $f_m$ .

### 7.6.1. Синтез во временной области

Во временной области синтез осуществляют с использованием формулы (7.6). При этом, поскольку длительность сигнала конечна, то и число выборок будет конечным. **Минимальное число выборок**  $N_1$ , которое необходи-

мо для синтеза сигнала, в соответствии с теоремой отсчетов, соответствует максимально возможному интервалу дискретизации  $T_d = 1/2 f_m$ . Рассчитаем  $N_1$  по очевидной формуле

$$N_1 = \frac{T_c}{T_d} + 1 = 2 f_m T_c + 1.$$

Величину  $N_1$  называют числом степеней свободы сигнала  $s(t)$ . При значении  $N_1 \gg 1$ , можно положить

$$N_1 \approx 2 f_m T_c. \quad (7.23)$$

Ряд (7.6) содержит в этом случае конечное число членов, и его сумма сходится к некому сигналу  $s_1(t)$ , который лишь приближенно совпадает с сигналом  $s(t)$  (ввиду того, что спектр искусственно ограничен). С учетом того, что в этом случае  $\omega_d = 2\omega_m$ , можно записать

$$s_1(t) \approx s(t) = \sum_{n=0}^{N_1} s(nT_d) \frac{\sin[\omega_m(t - nT_d)]}{\omega_m(t - nT_d)}. \quad (7.24)$$

Реализация алгоритма синтеза в соответствии с формулой (7.24) требует применения средств вычислительной техники и не обеспечивает работу в реальном масштабе времени при большом числе выборок.

### 7.6.2. Синтез в спектральной области

Этот метод синтеза основан на особенностях спектра дискретного сигнала, исследованных в подразделе 7.5. Там указывалось на возможность восстановления сигнала путем “выделения” из спектра дискретного сигнала полосы частот от нуля до  $\omega_m$ . Операцию “выделения” осуществляют с помощью фильтра нижних частот (ФНЧ). Этот метод аппаратного синтеза сигналов называют фильтровым методом. Для того, чтобы полностью сохранилась структура спектра, необходимо применить идеальный ФНЧ. Комплексный коэффициент передачи идеального ФНЧ в соответствии с [1] равен:

$$K_{\text{н}}(j\omega) = \begin{cases} K_1 \exp(-j\omega t_1) & \text{if } |\omega| < \omega_m ; \\ 0 & \text{if } |\omega| > \omega_m , \end{cases} \quad (7.25)$$

где  $K_1$  и  $t_1$  — постоянные величины.

Из (7.25) следует, что такой фильтр обладает равномерной АЧХ и линейной ФЧХ в полосе частот  $|\omega| < \omega_m$ . На рис. 7.5,**b** изображена АЧХ идеального ФНЧ, обозначенная как  $K_{\text{н}}(\omega)$ . Импульсная характеристика этого фильтра имеет вид [1]:

$$g(t) = 2K_1 f_m \frac{\sin [2\pi f_m (t - t_1)]}{2\pi f_m (t - t_1)} .$$

Известно (см. п. 10.6.3), что такая импульсная характеристика физически нереализуема, поскольку она отлична от нуля при  $t < 0$ .

Реальный ФНЧ имеет плавную АЧХ, которая изображена на рис. 7.5,**b** в виде функции  $K_{\text{р}}(\omega)$ . Это приводит к тому, что на форму выходного сигнала ФНЧ оказывают некоторое влияние составляющие спектра с частотами  $\omega > \omega_m$  из-за неполного их подавления. Поэтому применение фильтрового метода синтеза сопряжено с дополнительной погрешностью восстановления сигнала. Точность восстановления аналогового сигнала реальным фильтром для случая **c** выше, чем для случая **b**. Это связано с тем, что из-за разноса копий вдоль оси частот в случае **c** осуществляется большее подавление составляющих спектра с частотами  $\omega > \omega_m$ . Поэтому на практике следует выбирать интервал дискретизации в 3...4 раза меньший, нежели  $1/2 f_m$ , что существенно повышает точность восстановления сигнала.

## 7.7. База сигнала с ограниченным спектром

Для сигналов с конечными длительностью  $T_c$  и эффективной шириной спектра  $\Delta f_{\text{эф}}$  вводится понятие базы. Это понятие играет важную роль в теории передачи информации. База сигнала чаще всего определяется как удво-

енное произведение длительности сигнала на ширину его спектра [9]:

$$N = 2T_c \Delta f_{\text{эф}}. \quad (7.26)$$

Следует заметить, что простое изменение длительности сигнала не приводит к изменению базы сигнала. Это связано с тем, что ширина спектра импульсного сигнала обратно пропорциональна длительности. Например, уменьшение длительности импульса приведет к расширению его спектра во столько же раз и база при этом в соответствии с формулой (7.26) останется неизменной.

Изменение базы сигнала возможно путем изменения ширины спектра при сохранении длительности, например путем дополнительной модуляции. Другой путь увеличения базы — это наращивание длительности при сохранении ширины спектра, например, путем формирования пачек импульсов.

Для сигналов, спектр которых сосредоточен в полосе частот от нуля до  $f_m$ , то есть  $\Delta f_{\text{эф}} = f_m$ , значение базы совпадает с выражением (7.23). Для таких сигналов база представляет собой минимальное число выборок, которое необходимо для дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов.

## 7.8. Пример решения задачи

### 7.8.1. Условие

Дискретизации подвергнут импульс прямоугольной формы (см. рис. 7.6,а). Рассчитать максимально возможное значение интервала дискретизации, полагая, что максимальная частота в спектре ограничена величиной  $f_m = 1/t_{\text{и}}$ . Построить дискретный сигнал. Осуществить синтез аналогового сигнала. Исходные данные: высота  $E = 10 \text{ В}$ ;  $t_{\text{и}} = 10^{-3} \text{ с}$ .

### 7.8.2. Решение

Из теоремы отсчетов следует, что максимально возможное значение интервала дискретизации равно  $T_{\text{д}} = 1/2 f_m$ . Подставляя в эту формулу заданное

значение  $f_m = 1/t_n$ , получаем

$$T_d = \frac{1}{2f_m} = \frac{t_n}{2} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

В соответствии с этим построены отсчеты дискретного сигнала на рис.

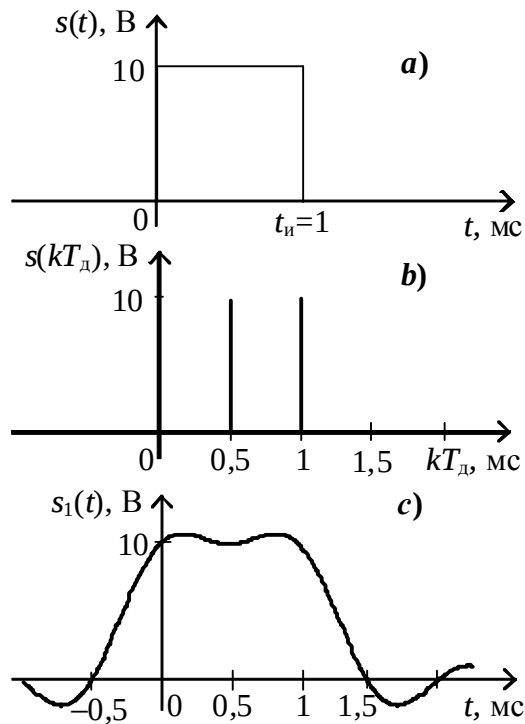


Рис. 7.6

7.6,**b**. Этот сигнал содержит три отсчета:  $N_1 = 3$ . Используя (7.24), запишем выражение для синтезированного аналогового сигнала:

$$s_1(t) = \sum_{n=0}^2 s(nT_d) \frac{\sin[\omega_m(t - nT_d)]}{\omega_m(t - nT_d)}.$$

Результаты синтеза иллюстрируются рис. 7.6,**с**. Из этого рисунка следует, что синтезированный сигнал по форме отличается от исходного импульса прямоугольной формы. Это связано с тем, что мы искусственно ограничили спектр. Если увеличивать

$f_m$ , то это приведет к уменьшению интервала дискретизации и увеличению числа отсчетов  $N_1$ . При этом форма синтезированного сигнала  $s_1(t)$  будет в большей степени приближаться к форме исходного импульса  $s(t)$ .

## 8. РАДИОСИГНАЛЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 8.1. Общие положения

Для передачи и приема сообщений с помощью электромагнитных волн используют радиосигналы. Повторим некоторые важные определения.

**Радиосигнал** — это высокочастотное (быстро осциллирующее) колебание, способное нести передаваемое сообщение, которое вводят в радиосигнал путем модуляции.

**Модуляция** — процесс изменения одного или нескольких параметров радиосигнала по закону передаваемого сообщения.

Модуляции подвергается несущее колебание, которое в технической литературе часто называют просто «несущей». В качестве несущего колебания обычно используют отрезок гармонического колебания вида

$$a_0(t) = A_0 \cos[\Psi_0(t)] = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (8.1)$$

где  $A_0$  — амплитуда;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  — круговая частота;  $f_0$  — циклическая частота;  $t$  — текущее время;  $\theta_0$  — начальная фаза;  $\Psi_0(t)$  — полная фаза.

Амплитуда, круговая частота и начальная фаза несущего колебания являются постоянными величинами:  $A_0, \omega_0, \theta_0 = \text{const}$ , а полная фаза несущего колебания  $\Psi_0(t)$  изменяется во времени по линейному закону

$$\Psi_0(t) = \omega_0 t + \theta_0. \quad (8.2)$$

При модуляции по закону передаваемого сообщения может изменяться один из следующих параметров высокочастотного колебания:

— амплитуда, что соответствует амплитудной модуляции (**АМ**);

- частота, что соответствует частотной модуляции (**ЧМ**);
- начальная фаза, что соответствует фазовой модуляции (**ФМ**).

Частотную и фазовую модуляции называют угловой модуляцией (**УМ**), поскольку при ЧМ и ФМ изменяется полная фаза (фазовый угол).

Аналитическое выражение для радиосигнала с произвольным видом модуляции можно записать в виде

$$a(t) = A(t) \cos[\Psi(t)], \quad (8.3)$$

где  $A(t)$  — амплитуда, которая при АМ является функцией времени;  $\Psi(t)$  — полная фаза, которая при УМ изменяется во времени по закону, отличающемуся от линейного.

## 8.2. Понятие узкополосности радиосигналов

Полагая, что несущая является гармоническим колебанием, приходим к заключению, что ее спектр содержит только одну составляющую с частотой  $\omega_0$ . Ширина такого спектра равна нулю.

Теперь рассмотрим спектр промодулированного колебания. В результате модуляции форма радиосигнала изменяется, что приводит к изменению спектрального состава, то есть наряду с несущей в спектре появятся дополнительные составляющие. Ширина спектра  $\Delta\omega$  при этом определяется скоростью изменения модулируемого параметра, то есть шириной спектра модулирующего сигнала. Поскольку модулирующий сигнал является низкочастотным (по отношению к несущей), то модуляция представляет собой медленный процесс. **Это означает, что за один период несущего колебания, модулируемый параметр изменяется очень незначительно.** Поэтому ширина спектра  $\Delta\omega$  радиосигнала при любом виде модуляции невелика относительно несущей частоты и практически всегда выполняется условие

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (8.4)$$

Условие (8.4) называют условием узкополосности радиосигнала. Выполнение этого условия позволяет разместить в некотором диапазоне частот спектры множества радиосигналов, без их перекрытия. Таким образом, появляется возможность обеспечить в радиоприемнике выделение нужного радиосигнала из смеси сигналов, наводимых на антенне, то есть обеспечить частотно-избирательный прием радиосигналов. При этом обработка модулированных радиосигналов может осуществляться с помощью узкополосных частотно-избирательных цепей.

### 8.3. Радиосигналы с амплитудной модуляцией

#### 8.3.1. Представление сигналов с амплитудной модуляцией

**Амплитудная модуляция** — такой вид модуляции, при котором сообщение вводят в закон изменения амплитуды радиосигнала, а его частота и начальная фаза остаются неизменными. При этом приращение амплитуды радиосигнала изменяется пропорционально величине модулирующего сигнала. То есть  $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$ , где  $\Delta A(t)$  — приращение амплитуды, вызванное модулирующим сигналом. С учетом этого из формулы (8.3), получаем следующее выражение для радиосигнала с АМ

$$a(t) = [A_0 + \Delta A(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) , \quad (8.5)$$

Если модулирующий сигнал обозначить как  $s(t)$ , то приращение амплитуды в соответствии с определением можно записать в виде

$$\Delta A(t) = k_{\text{ам}} s(t) , \quad (8.6)$$

где  $k_{\text{ам}}$  — коэффициент пропорциональности, величина которого определяет глубину АМ.

Подставляя (8.6) в (8.5), получаем

$$a(t) = [A_0 + k_{\text{ам}} s(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) . \quad (8.7)$$

Принцип амплитудной модуляции поясняется рис. 8.1. В качестве моду-

лирующего сигнала  $s(t)$  выбран произвольный сигнал (рис. 8.1,*a*). Под воздействием этого сигнала происходит синхронное изменение амплитуды радиосигнала (рис. 8.1,*b*).

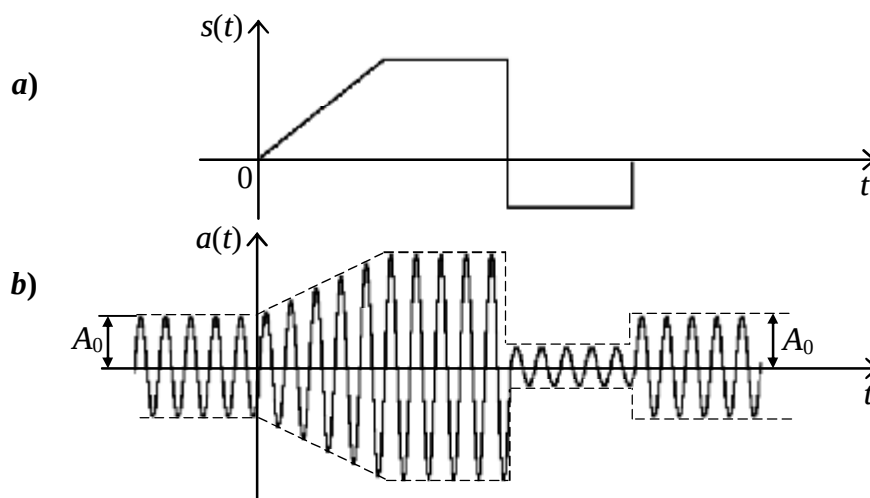


Рис. 8.1

**Огибающая радиосигнала** — это воображаемая линия, которая соединяет либо положительные, либо отрицательные экстремальные значения радиосигнала. Эту линию часто называют физической огибающей (верхней либо нижней). Огибающие радиосигнала изображают в виде пунктирных линий, которые касаются положительных или отрицательных экстремумов радиосигнала. Для узкополосных сигналов функция  $A(t)$  в выражении (8.3), является положительной огибающей, а функция  $-A(t)$  — отрицательной огибающей. Из рис. 8.1 видно, что при амплитудной модуляции форма огибающей радиосигнала совпадает с формой модулирующего сигнала.

### 8.3.2. Тональная амплитудная модуляция

**Тональная модуляция** — это такая модуляция, при которой модулирующий сигнал представляет собой гармоническое колебание, то есть

$$s(t) = S_0 \cos(\Omega t + \nu), \quad (8.8)$$

где  $S_0$ ,  $\Omega$ ,  $\nu$  — амплитуда, круговая частота и начальная фаза модулирующего колебания соответственно.

Подставляя (8.8) в (8.7) и преобразуя, получаем следующее выражение для радиосигнала с тональной амплитудной модуляцией (ТАМ)

$$a(t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t + \nu)] \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (8.9)$$

где  $M = k_{\text{ам}} S_0 / A_0$  — коэффициент амплитудной модуляции при ТАМ.

Формула (8.9) представляет собой **каноническую** (общепринятую) форму записи радиосигнала с ТАМ. На рис. 8.2 изображены графики модулирующего сигнала (**a**) и соответствующего ему радиосигнала с ТАМ (**b**), построенные в соответствии с формулами (8.8) и (8.9) соответственно.

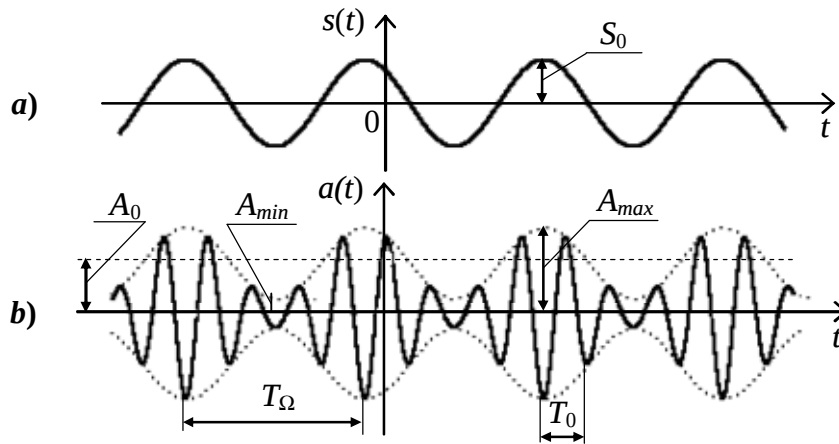


Рис. 8.2

Коэффициент амплитудной модуляции  $M$  определяет степень (глубину) модуляции и линейно зависит от амплитуды модулирующего сигнала. Значения этого коэффициента должны лежать в диапазоне

$$0 \leq M \leq 1. \quad (8.10)$$

Значение  $M = 0$  соответствует отсутствию модуляции, а  $M = 1$  — максимально глубокой модуляции. Увеличение значения  $M$  более единицы приводит к нарушению формы огибающей (так называемой перемодуляции).

Амплитуда радиосигнала при тональной АМ выражается формулой

$$A(t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t + \nu)]. \quad (8.11)$$

Определим максимальные и минимальные значения амплитуды. При

этом в формуле (8.11) значение  $\cos(\Omega t + \nu)$  следует положить равным  $+1$  и  $-1$  соответственно:

$$\begin{cases} A_{\max} = A_0(1 + M); \\ A_{\min} = A_0(1 - M). \end{cases} \quad (8.12)$$

Решая систему уравнений (8.12) относительно  $M$ , получаем

$$M = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}. \quad (8.13)$$

Формулу (8.13) удобно использовать для экспериментального определения коэффициента амплитудной модуляции по осциллограмме сигнала.

### 8.3.3. Спектр и векторная диаграмма радиосигнала с тональной амплитудной модуляцией

Спектральный состав радиосигнала с ТАМ определим, воспользовавшись методом алгебраических преобразований. Для этого раскроем скобки в (8.9) и применим алгебраическое соотношение для произведения косинусов:

$$\begin{aligned} a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \theta_0 + \nu] + \\ + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \theta_0 - \nu]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Из формулы (8.14) следует, что спектр радиосигнала с ТАМ состоит из трех высокочастотных составляющих:

- колебание с частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $A_0$  и начальной фазой  $\theta_0$  (несущее колебание);
- колебание с частотой  $(\omega_0 + \Omega)$ , амплитудой  $A_0 M / 2$  и начальной фазой  $(\theta_0 + \nu)$  (верхняя боковая составляющая спектра);
- колебание с частотой  $(\omega_0 - \Omega)$  амплитудой  $A_0 M / 2$  и начальной фазой  $(\theta_0 - \nu)$  (нижняя боковая составляющая спектра).

Таким образом, в результате ТАМ в спектре появляются два новых колебания с частотами  $(\omega_0 \pm \Omega)$ . Амплитуды этих колебаний одинаковы и равны  $A_0 M/2$ . Спектрограмма амплитуд радиосигнала изображена на рис. 8.3.

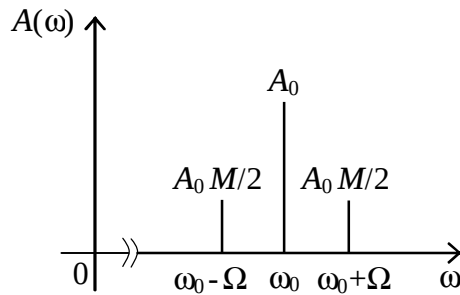


Рис. 8.3

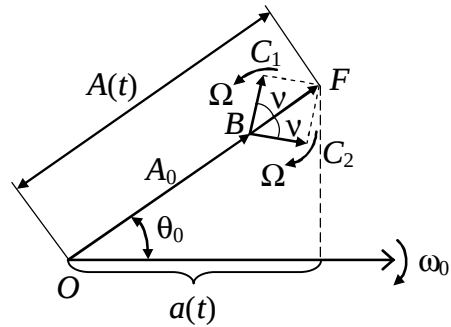


Рис. 8.4

Определим ширину спектра  $\Delta\omega$ . Из спектрограммы следует, что

$$\Delta\omega = (\omega_0 + \Omega) - (\omega_0 - \Omega) = 2\Omega.$$

Таким образом, ширина спектра радиосигнала с ТАМ равна удвоенной частоте модулирующего сигнала.

Построим векторную диаграмму радиосигнала с ТАМ (рис. 8.4). На этой диаграмме зафиксировано положение векторов в момент времени  $t = 0$ . При построении принято  $\nu, \theta_0 > 0$ . Поскольку спектр радиосигнала с ТАМ содержит три составляющих, то векторная диаграмма этого колебания представляет собой сумму трех векторов:

- вектора несущей  $OB$ , длиной  $A_0$ , вращающегося против часовой стрелки с угловой частотой  $\omega_0$ ;
- вектора верхней боковой составляющей  $BC_1$ , длиной  $A_0 M/2$ , вращающегося против часовой стрелки с угловой частотой  $(\omega_0 + \Omega)$ ;
- вектора нижней боковой составляющей  $BC_2$ , длиной  $A_0 M/2$ , вращающегося против часовой стрелки с угловой частотой  $(\omega_0 - \Omega)$ .

Вектор  $OF$  является суммой указанных трех векторов. Если из угловых частот вращения всех векторов исключить частоту  $\omega_0$  (это достигается вращением оси абсцисс по часовой стрелке с частотой  $\omega_0$ ), то вектор  $OB$  стано-

вится неподвижным, а векторы боковых составляющих  $BC_1$  и  $BC_2$  будут вращаться с частотой  $\Omega$  в противоположных направлениях (верхняя боковая — против часовой стрелки, а нижняя — по часовой). При этом длина вектора  $OF$  (амплитуда суммарного вектора  $A(t)$ ) изменяется во времени. Это свидетельствует о наличии в сигнале амплитудной модуляции. Угловая модуляция при этом отсутствует, поскольку угловое положение вектора  $OF$  относительно горизонтальной оси в процессе модуляции изменяется по линейному закону. Проекция вектора  $OF$  на горизонтальную ось представляет собой мгновенное значение радиосигнала  $a(t)$ .

#### 8.3.4. Спектр радиосигнала с нетональной АМ

Рассмотрим два случая: случай дискретного и случай сплошного спектров модулирующего сигнала.

**Случай дискретного спектра модулирующего сигнала.** Пусть спектр модулирующего сигнала  $s(t)$  содержит несколько колебаний с дискретными физическими частотами  $\Omega_i$  ( $i=1,2...m$ ). Спектрограмма амплитуд такого сигнала изображена на рис. 8.5,*a*.

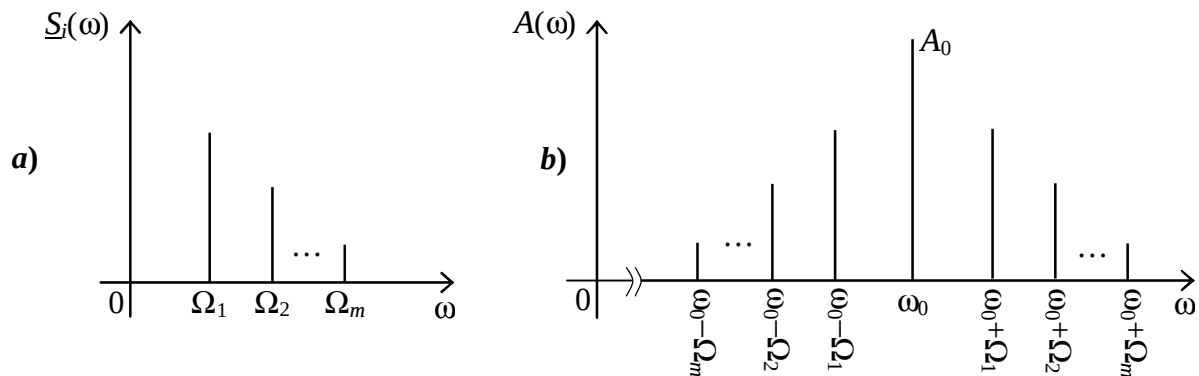


Рис. 8.5

Каждая составляющая спектра модулирующего колебания является гармонической и поэтому осуществляет тональную модуляцию. Это приводит к появлению в спектре радиосигнала двух боковых полос: верхней боковой полосы, которую образуют колебания с частотами  $(\omega_0 + \Omega_i)$ , и нижней боковой полосы, которую образуют колебания с частотами  $(\omega_0 - \Omega_i)$ . Спектрограмма

амплитуд радиосигнала для этого случая изображена на рис. 8.5,**b**.

Определим ширину спектра. Из спектрограммы (рис. 8.5,**b**) следует, что

$$\Delta\omega = (\omega_0 + \Omega_m) - (\omega_0 - \Omega_m) = 2\Omega_m .$$

Таким образом, ширина спектра для этого случая равна удвоенной максимальной частоте в спектре модулирующего сигнала.

**Случай сплошного спектра модулирующего сигнала.** Спектральную плотность радиосигнала в этом случае определим, применив к (8.7) прямое преобразование Фурье

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) e^{-j\omega t} dt + k_{\text{ам}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) e^{-j\omega t} dt .$$

В соответствии с (4.64) первый интеграл представляет собой две  $\delta$ -функции на частотах  $\pm \omega_0$  (спектральная плотность гармонического колебания). Представляя во втором интеграле косинус в виде

$$\cos(\omega_0 t + \theta_0) = \frac{1}{2} [e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta_0)}] ,$$

приходим к выражению

$$\begin{aligned} A(j\omega) = & \pi A_0 e^{j\theta_0} \delta(\omega - \omega_0) + \pi A_0 e^{-j\theta_0} \delta(\omega + \omega_0) + \\ & + \frac{k_{\text{ам}}}{2} e^{j\theta_0} \underline{S}[j(\omega - \omega_0)] + \frac{k_{\text{ам}}}{2} e^{-j\theta_0} \underline{S}[j(\omega + \omega_0)] , \end{aligned} \quad (8.15)$$

где  $\underline{S}[j(\omega \pm \omega_0)]$  — спектральная плотность модулирующего сигнала  $s(t)$ , смещенная вдоль оси частот на  $\pm \omega_0$ .

Таким образом, спектральная плотность радиосигнала содержит дискретную часть в виде двух  $\delta$ -функций на частотах  $\pm \omega_0$ , а также сплошную часть. Наличие дискретной части говорит о присутствии в сигнале несущего колебания с частотой  $\omega_0$  и конечной амплитудой  $A_0$ . Сплошная часть спек-

тра порождается модуляцией. Сплошная часть спектра, образуется путем суммирования двух копий спектра модулирующего сигнала, смещенных вдоль оси частот на  $\pm \omega_0$ . Поскольку спектр модулирующего сигнала концентрируется в области низких частот, то эти копии практически не перекрываются. Поэтому сумма копий в области частот  $\pm \omega_0$  практически совпадает с копиями спектра модулирующего сигнала, смещенными на  $\pm \omega_0$ . То есть спектрограмму модуля радиосигнала при АМ можно построить путем смещения спектрограммы модуля модулирующего сигнала вдоль оси частот на величину  $\pm \omega_0$ .

Таким образом, независимо от того, какова структура спектра модулирующего сигнала (дискретная или сплошная), физический спектр радиосигнала при амплитудной модуляции содержит кроме несущей частоты еще две боковые полосы частот, симметричные относительно несущей частоты. При этом ширина спектра радиосигнала в два раза превышает ширину спектра модулирующего процесса. Это приводит в соответствии с (7.26) к увеличению в два раза базы радиосигнала по отношению к базе модулирующего сигнала.

Так, например, ширина спектра речевого сигнала при телефонии равна  $\Delta F = 3,4$  кГц. Поэтому ширина спектра АМ радиосигнала при радиотелефонии составит  $\Delta f = 6,8$  кГц. Такой полосой пропускания должен обладать тракт промежуточной частоты связного радиоприемника в режиме радиотелефонии.

В качестве примера рассмотрим одиночный радиоимпульс с прямоугольной формой огибающей. Этот импульс получают путем амплитудной модуляции несущего колебания одиночным импульсом прямоугольной формы, который изображен на рис. 8.6,*a*. При этом радиоимпульс приобретает форму, изображенную на рис. 8.6,*b*.

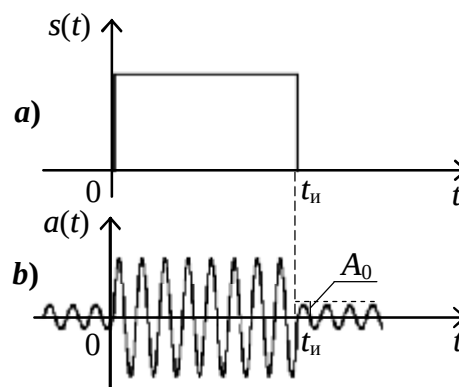


Рис. 8.6

Методика построения спектрограммы модуля такого радиоимпульса иллюстрируется рис. 8.7. Сплошная часть спектра радиосигнала получена путем смещения спектрограммы модуля одиночного прямоугольного импульса  $|\underline{S}(j\omega)|$  вдоль оси частот на величину  $\pm \omega_0$ .

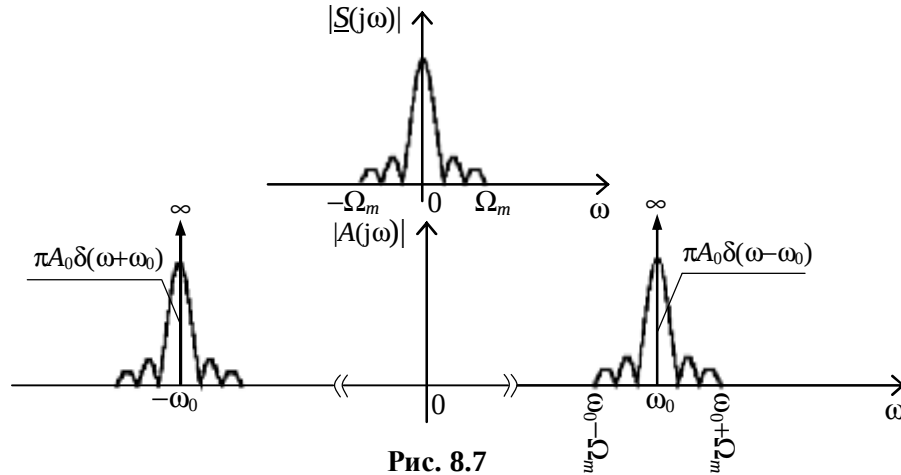


Рис. 8.7

Дискретная часть в спектре радиоимпульса может отсутствовать, если  $A_0 = 0$ .

### 8.3.5. Автокорреляционная функция радиосигнала с амплитудной модуляцией

Рассмотрим радиосигнал, обладающий конечной энергией. Тогда в соответствии с (6.2) АКФ радиосигнала определяется выражением

$$B_a(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)a(t+\tau)dt. \quad (8.16)$$

Подставляя (8.5) в (8.16), получаем следующее соотношение

$$B_a(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t+\tau) \cos(\omega_0 t + \theta_0) \cos[\omega_0(t+\tau) + \theta_0] dt.$$

Используя формулу для произведения косинусов, получаем

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t+\tau) \cos(\omega_0 \tau) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t+\tau) \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta_0) dt.$$

В полученном выражении второй интеграл практически равен нулю, поскольку он представляет собой площадь быстро осциллирующего (с частотой  $2\omega_0$ ) процесса с медленным изменением амплитуды. Тогда

$$B_a(\tau) \approx \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) A(t + \tau) dt . \quad (8.17)$$

Итак, из (8.17) следует, что АКФ амплитудно-модулированного радиосигнала является также радиосигналом с той же несущей частотой  $\omega_0$ .

Перепишем формулу (8.17) в следующем виде:

$$B_a(\tau) = B_s(\tau) B_0(\tau) , \quad (8.18)$$

где  $B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) A(t + \tau) dt$  — АКФ огибающей;  $B_0(\tau) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau$  — АКФ несущего колебания единичной амплитуды.

Таким образом, АКФ радиосигнала с АМ определяется как произведение АКФ несущего колебания единичной амплитуды и АКФ огибающей.

В качестве примера рассмотрим одиночный радиоимпульс длительностью  $t_n$  с прямоугольной формой огибающей (рис 8.8,*a*). Используя (6.5) и (8.17), запишем выражение для АКФ этого радиоимпульса:

$$B_a(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} E^2 (t_n - |\tau|) \cos \omega_0 \tau & \text{if } |\tau| \leq t_n ; \\ 0 & \text{if } |\tau| > t_n . \end{cases}$$

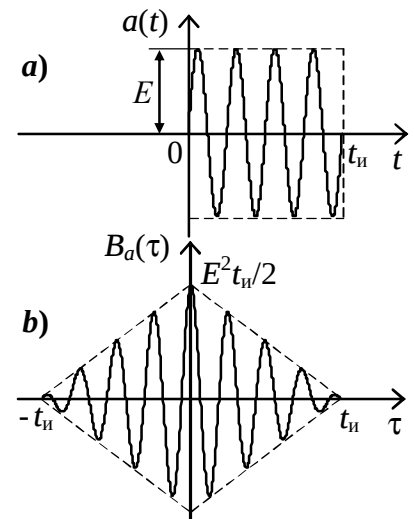


Рис. 8.8

В соответствии с этой формулой на рис. 8.8,*b* построен график АКФ радиоимпульса с прямоугольной огибающей. АКФ огибающей является треугольный импульс (см. рис. 6.2), поэтому АКФ радиоимпульса представляет собой радиоимпульс с треугольной огибающей.

### 8.3.6. Специальные виды амплитудной модуляции

В классическом варианте амплитудная модуляция обладает существенным недостатком, заключающемся в том, что основная часть мощности модулированного радиосигнала сосредоточена в несущем колебании, которое не содержит информации о передаваемом сообщении. Уровни нижней боковой полосы (НБП) и верхней боковой полосы (ВБП), которые являются информационными, существенно ниже уровня несущей, поэтому в них сосредоточена меньшая часть мощности радиосигнала (см. рис. 8.9,*a*). Это ухудшает помехозащищенность и уменьшает дальность радиосвязи.

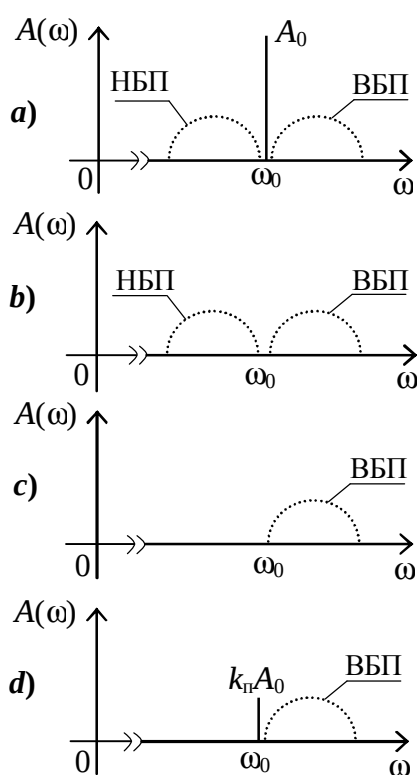


Рис. 8.9

В связи с этим можно исключить несущее колебание из спектра радиосигнала. При этом получаем радиосигнал с так называемой балансной амплитудной модуляцией, спектрограмма которого изображен на рис. 8.9,*b*.

Ввиду симметрии боковых полос спектра относительно несущей одна из боковых полос может быть удалена (подавлена). Полученный таким образом сигнал называют однополосным или *SSB* радиосигналом (*SSB — Single Side Band*). Спектрограмма этого сигнала изображена на рис. 8.9,*c*. Ширина спектра однополосного сигнала в два раза меньше по сравнению с двухполосным. Это

позволяет в одном и том же диапазоне частот разместить в два раза большее число радиостанций. Кроме того, вся мощность передатчика в данном случае используется для формирования информационной составляющей сигнала (одной боковой полосы), что увеличивает дальность действия радиосистем, использующих этот вид модуляции.

При приеме однополосного сигнала возникает необходимость восстанавливать с высокой точностью несущую, что связано с техническими трудностями. Поэтому на практике используют однополосные сигналы с частич-

но подавленной несущей. Остаток несущей, называемый пилот - сигналом, имеет амплитуду  $k_{\pi} A_0$ , где  $k_{\pi}$  — коэффициент подавления несущей. Значение этого коэффициента может находиться в диапазоне:  $0 < k_{\pi} < 1$ . Наличие пилот - сигнала исключает необходимость восстановления несущего колебания в приемнике. Спектрограмма такого сигнала изображена на рис. 8.9, *d*.

Однополосные сигналы находят широкое применение при разработке систем радиосвязи, а также телевизионных систем.

## 8.4. Радиосигналы с угловой модуляцией

### 8.4.1. Представление сигналов с угловой модуляцией

**Угловая модуляция** — такой вид модуляции, при котором приращение частоты либо начальной фазы радиосигнала изменяют пропорционально величине модулирующего сигнала. То есть сообщение вводят в закон изменения полной фазы радиосигнала, а его амплитуда остается неизменной.

С учетом этого из (8.3) получаем следующее выражение для радиосигнала с угловой модуляцией

$$a(t) = A_0 \cos[\Psi(t)]. \quad (8.19)$$

Как было отмечено ранее, при отсутствии угловой модуляции полная фаза радиосигнала изменяется по линейному закону (см. формулу (8.1)). Наличие угловой модуляции сопровождается появлением некоторого приращения начальной фазы  $\theta(t)$ , которое однозначно связано с передаваемым сообщением. Поэтому полную фазу радиосигнала с угловой модуляцией можно записать в виде

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \theta(t) + \theta_0. \quad (8.20)$$

### 8.4.2. Взаимосвязь мгновенной частоты и полной фазы радиосигнала

Поскольку при угловой модуляции частота радиосигнала изменяется, то вводят понятие **мгновенной частоты**, которое означает текущее значение частоты в произвольный момент времени. По сути, речь идет о функцио-

нальной зависимости частоты от времени  $\omega(t)$ .

Из курса физики известно, что частота — это скорость изменения фазы, поэтому с учетом (8.20) можно записать соотношения, связывающие мгновенную частоту и полную фазу радиосигнала:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} ; \quad (8.21)$$

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \theta_0 . \quad (8.22)$$

Таким образом, мгновенная частота — это первая производная полной фазы по времени, а полная фаза — это интеграл от мгновенной частоты (с точностью до начальной фазы). Из (8.21), (8.22) следует, что любое изменение частоты приведет к изменению полной фазы и наоборот изменение полной фазы, отличное от линейного, приведет к изменению частоты. Поэтому частотной модуляции всегда сопутствует фазовая модуляция, а фазовой модуляции — частотная. Если неизвестно какой из видов модуляции осуществлен при передаче, то при приеме это установить невозможно.

Отличие ЧМ от ФМ проявляется в следующем. При ЧМ по закону передаваемого сообщения изменяют частоту сигнала, а сопутствующее изменение его начальной фазы соответствует интегралу от передаваемого сообщения. При ФМ по закону передаваемого сообщения изменяют начальную фазу, а сопутствующее изменение его частоты соответствует производной от передаваемого сообщения.

#### 8.4.3. Радиосигналы с частотной модуляцией

Модулирующий сигнал  $s(t)$  при ЧМ непосредственно воздействует на частоту, вызывая приращение частоты  $\Delta\omega(t)$ , пропорциональное модулирующему сигналу. Поэтому для мгновенной частоты можно записать

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{чм}} s(t) , \quad (8.23)$$

где  $k_{\text{чм}}$  — коэффициент пропорциональности.

Тогда в соответствии с (8.22) полная фаза радиосигнала равна

$$\psi(t) = \int_0^t [\omega_0 + k_{\text{чм}} s(t)] dt + \theta_0 = \omega_0 t + k_{\text{чм}} \int_0^t s(t) dt + \theta_0 . \quad (8.24)$$

Из (8.24) следует, что в результате ЧМ появляется сопутствующая ФМ, о чем свидетельствует дополнительное приращение начальной фазы

$$\theta(t) = k_{\text{чм}} \int_0^t s(t) dt , \quad (8.25)$$

которое пропорционально интегралу от модулирующей функции.

Рассмотрим **случай тональной частотной модуляции**. В этом случае модулирующий сигнал  $s(t)$  в соответствии с (8.8) имеет вид:

$$s(t) = S_0 \cos(\Omega t + \nu) . \quad (8.26)$$

Модулирующий сигнал изображен на рис. 8.10,*a* (при  $\nu = 0$ ).

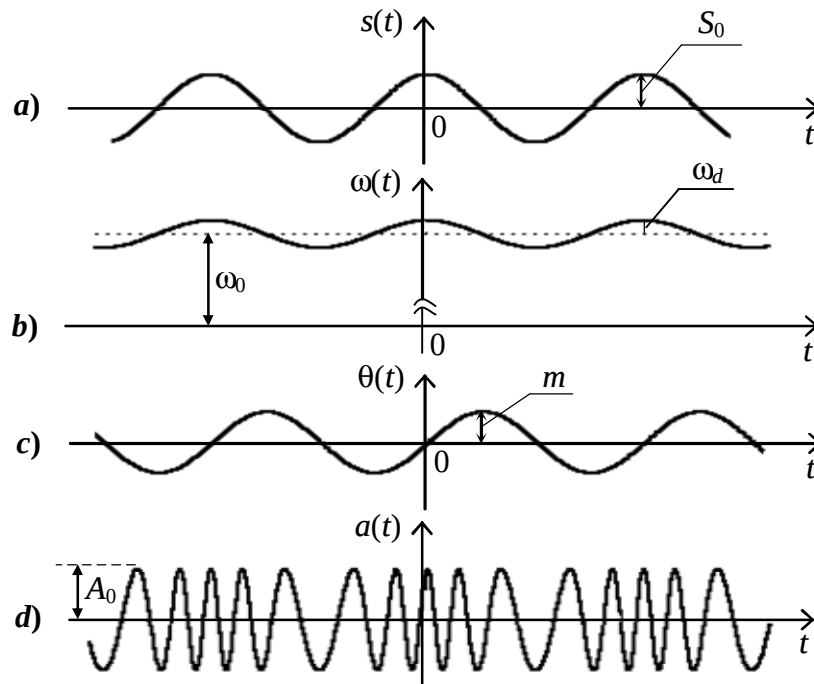


Рис. 8.10

При этом с учетом (8.23) выражение для мгновенной частоты радиосигнала запишется в виде

$$\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{чм}} S_0 \cos(\Omega t + \nu) = \omega_0 + \omega_d \cos(\Omega t + \nu), \quad (8.27)$$

где  $\omega_d = k_{\text{чм}} S_0$  — девиация **частоты** радиосигнала с тональной ЧМ.

**Девиацией частоты** при тональной ЧМ называют максимальное отклонение частоты радиосигнала от несущей частоты  $\omega_0$ . Величина девиации частоты при ЧМ зависит от амплитуды модулирующего сигнала и не зависит от его частоты. График зависимости частоты радиосигнала при тональной ЧМ от времени изображен на рис. 8.10,*b*.

Определим полную фазу радиосигнала, подставляя (8.27) в (8.24)

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\omega_d}{\Omega} \sin(\Omega t + \nu) + \theta_0 = \omega_0 t + m \sin(\Omega t + \nu) + \theta_0, \quad (8.28)$$

где  $m = \omega_d / \Omega$  — **индекс фазовой модуляции**.

Индекс фазовой модуляции, по существу, представляет собой девиацию фазы. Он численно равен максимальному значению приращения полной фазы, вызываемому модуляцией (см. рис. 8.10,*c*), и измеряется в радианах.

Тогда с учетом (8.19) мгновенное значение ЧМ радиосигнала с тональной модуляцией принимает вид

$$a(t) = A_0 \cos \psi(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t + \nu) + \theta_0]. \quad (8.29)$$

График ЧМ радиосигнала, построенный в соответствии с (8.29), изображен на рис. 8.10,*d*. Из этих графиков, а также из (8.27) и (8.28), следует, что тональная ЧМ приводит к сопутствующей тональной ФМ с запаздыванием по фазе на  $\pi/2$ .

Графики зависимостей параметров  $\omega_d$  и  $m$  от частоты модулирующего сигнала  $\Omega$  для тональной ЧМ изображены на рис. 8.11,*a*. При ЧМ девиация частоты  $\omega_d$  не зависит от частоты модуляции, а индекс  $m$  обратно пропорционален частоте модуляции.

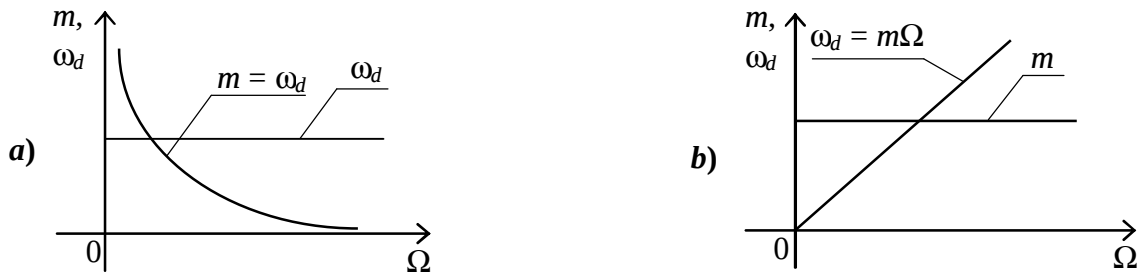


Рис. 8.11

#### 8.4.4. Радиосигналы с фазовой модуляцией

Модулирующий сигнал  $s(t)$  при ФМ непосредственно воздействует на начальную фазу, вызывая приращение начальной фазы  $\theta(t)$ , пропорциональное модулирующему сигналу. Поэтому с учетом (8.20) для полной фазы радиосигнала в этом случае можно записать следующее выражение

$$\psi(t) = \omega_0 t + \theta(t) + \theta_0 = \omega_0 t + k_{\text{фм}} s(t) + \theta_0, \quad (8.30)$$

где  $k_{\text{фм}}$  — коэффициент пропорциональности.

Используя (8.21), определим мгновенную частоту радиосигнала

$$\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{фм}} \frac{ds(t)}{dt}. \quad (8.31)$$

Из (8.31) видно, что в результате ФМ возникает сопутствующая ЧМ, о чем свидетельствует дополнительное приращение частоты

$$\Delta\omega(t) = k_{\text{фм}} \frac{ds(t)}{dt},$$

которое пропорционально производной модулирующего сигнала.

Рассмотрим случай тональной фазовой модуляции, при котором модулирующий сигнал задается формулой (8.25). При этом с учетом (8.30) полная фаза радиосигнала запишется в виде

$$\psi(t) = \omega_0 t + k_{\text{фм}} S_0 \cos(\Omega t + \nu) + \theta_0 = \omega_0 t + m \cos(\Omega t + \nu) + \theta_0, \quad (8.32)$$

где  $m = k_{\text{фм}} S_0$  — индекс фазовой модуляции, который при ФМ зависит от амплитуды модулирующего сигнала и не зависит от его частоты.

Мгновенную частоту определим, используя (8.31):

$$\omega(t) = \omega_0 - m\Omega \sin(\Omega t + \nu) = \omega_0 - \omega_d \sin(\Omega t + \nu). \quad (8.33)$$

Из формул (8.32) и (8.33) следует, что тональной ФМ сопутствует тональная ЧМ с опережением по фазе на  $\pi/2$ .

Используя (8.32), запишем выражение для мгновенного значения радиосигнала

$$a(t) = A_0 \cos \psi(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m \cos(\Omega t + \nu) + \theta_0]. \quad (8.34)$$

Графики зависимостей величин  $\omega_d$  и  $m$  от частоты модулирующего сигнала  $\Omega$  для тональной ФМ изображены на рис. 8.11, **b**. В случае тональной ФМ индекс фазовой модуляции  $m$  не зависит от частоты модуляции, а девиация частоты  $\omega_d$  линейно возрастает при увеличении частоты модуляции.

#### 8.4.5. Спектральный анализ радиосигналов с угловой модуляцией

В случае произвольного модулирующего воздействия задача определения спектра радиосигнала с угловой модуляцией не имеет аналитического решения и должна решаться численно с применением ЭВМ. Аналитическое решение существует только для радиосигнала с тональной угловой модуляцией. Зададим этот сигнал в виде

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t + \nu) + \theta_0]. \quad (8.35)$$

Используя формулу для косинуса суммы двух аргументов, получим

$$a(t) = A_0 \cos[m \sin(\Omega t + \nu)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) - A_0 \sin[m \sin(\Omega t + \nu)] \sin(\omega_0 t + \theta_0). \quad (8.36)$$

Таким образом, радиосигнал с угловой модуляцией представлен в виде алгебраической суммы двух АМ радиосигналов, находящихся в квадратуре, то есть сдвинутых друг относительно друга по фазе на  $\pi/2$ . Сложность ана-

лиза состоит в том, что законы изменения амплитуд каждого из АМ радиосигналов нелинейно связаны с модулирующим сигналом и поэтому мы не можем перенести результаты анализа спектра АМ колебаний на случай УМ.

Далее для уменьшения размеров формул положим  $\theta_0 = \nu = 0$ , что не приведет к нарушению общности полученных результатов.

Так как функции  $\cos(m \sin \Omega t)$  и  $\sin(m \sin \Omega t)$  являются периодическими (период равен периоду модулирующего сигнала), то их можно разложить в ряд Фурье. В соответствии с [4] представим эти функции в виде:

$$\cos(m \sin \Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m) \cos(2\Omega t) + 2J_4(m) \cos(4\Omega t) + \dots; \quad (8.37)$$

$$\sin(m \sin \Omega t) = 2J_1(m) \sin(\Omega t) + 2J_3(m) \sin(3\Omega t) + \dots, \quad (8.38)$$

где  $J_n(m)$  — значение функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка от аргумента  $m$ .

Подставляя (8.37) и (8.38) в (8.36), получаем

$$\begin{aligned} a(t) = A_0 [ & J_0(m) \cos(\omega_0 t) - 2J_1(m) \sin(\Omega t) \sin(\omega_0 t) + 2J_2(m) \cos(2\Omega t) \cos(\omega_0 t) - \\ & - 2J_3(m) \sin(3\Omega t) \sin(\omega_0 t) + 2J_4(m) \cos(4\Omega t) \cos(\omega_0 t) - \dots ] \end{aligned} \quad (8.40)$$

Воспользовавшись известными тригонометрическими формулами для произведения синусов и косинусов, приходим к следующему выражению

$$\begin{aligned} a(t) = A_0 \{ & J_0(m) \cos(\omega_0 t) + J_1(m) \cos[(\omega_0 + \Omega)t] - J_1(m) \cos[(\omega_0 - \Omega)t] + \\ & + J_2(m) \cos[(\omega_0 + 2\Omega)t] + J_2(m) \cos[(\omega_0 - 2\Omega)t] + J_3(m) \cos[(\omega_0 + 3\Omega)t] - \\ & - J_3(m) \cos[(\omega_0 - 3\Omega)t] + \dots \} \end{aligned} \quad (8.40)$$

Формула (8.40) представляет собой разложение радиосигнала с тональной угловой модуляцией на спектральные составляющие. Из этой формулы следует, что в спектре радиосигнала с тональной угловой модуляцией присутствуют следующие составляющие:

- несущее колебание с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_0 |J_0(m)|$ ;
- верхняя боковая полоса, образованная колебаниями с частотами

$(\omega_0 + n\Omega)$  и амплитудами  $A_0|J_n(m)|$ ;

— нижняя боковая полоса, образованная колебаниями с частотами  $(\omega_0 - n\Omega)$  и амплитудами  $A_0|J_n(m)|$ .

Итак, при тональной угловой модуляции в спектре радиосигнала формируются две боковых полосы составляющих в отличие от тональной АМ, при которой в спектре формируется только две боковые составляющие. На спектрограмме амплитуд составляющие в боковых полосах расположены симметрично относительно несущей частоты. Амплитуды симметрично расположенных составляющих одинаковы, а их начальные фазы при нечетных значениях  $n$  отличаются на  $\pi$ .

Амплитуды составляющих спектра радиосигнала с тональной угловой модуляции определяются по формуле

$$U_n = A_0|J_n(m)|, \quad (8.41)$$

где  $n=0$  соответствует несущей частоте;  $n=1, 2, 3, \dots$  — номера пар боковых составляющих, симметричных относительно несущей частоты.

Значения функций Бесселя  $J_n(m)$ , являются весовыми коэффициентами, которые определяют амплитуды составляющих спектра. Структура спектра существенно зависит от индекса фазовой модуляции  $m$ , поскольку этот параметр является аргументом функций Бесселя. Рассмотрим динамику изменения спектра при изменении индекса  $m$ .

### Случай малых индексов ( $m \ll 1$ )

В этом случае выполняются следующие приближенные соотношения:  $\cos(m \sin \Omega t) \approx 1$ ;  $\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t$ . С учетом этих соотношений (8.36) принимает вид

$$a(t) \approx A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t] - \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t]. \quad (8.42)$$

Из (8.42) следует, что при малых значениях индекса фазовой модуляции  $m$ , в спектре можно учитывать только три составляющие: несущую с частотой

той  $\omega_0$  и первую пару боковых составляющих с частотами  $(\omega_0 + \Omega)$  и  $(\omega_0 - \Omega)$ . Амплитуды этих боковых составляющих спектра равны  $A_0 m/2$ . Спектрограмма амплитуд для этого случая изображена на рис. 8.12. Спектр по структуре похож на спектр радиосигнала с тональной АМ. Отличие состоит в том, что начальная фаза нижней боковой составляющей отличается на  $\pi$ . Ширина спектра, как и в случае тональной АМ, равна:  $\Delta\omega = 2\Omega$ .

На рис. 8.13 изображена векторная диаграмма для данного случая. Диаграмма построена по тем же правилам, что и диаграмма на рис. 8.4.

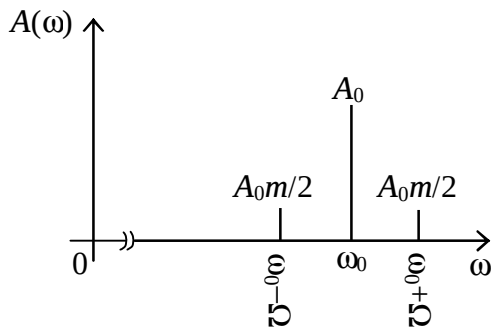


Рис. 8.12

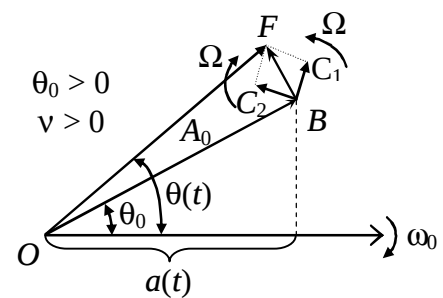


Рис. 8.13

Существенное отличие между этими диаграммами состоит в том, что вектор нижней боковой составляющей ( $BC_2$ ) направлен в противоположном направлении. Это приводит к тому, что при вращении векторов  $BC_1$  и  $BC_2$  угловое положение суммарного вектора  $OF$  изменяется. Это говорит о наличии в сигнале угловой модуляции. При этом амплитуда суммарного вектора практически не изменяется, что говорит об отсутствии амплитудной модуляции.

### Случай больших индексов ( $m \gg 1$ )

С увеличением значения  $m$  возрастает число спектральных составляющих, которые имеют достаточно большую амплитуду, и их следует учитывать при оценке эффективной ширины спектра сигнала. Так, при  $m = 0,5$  необходимо учитывать вторую пару боковых составляющих, при  $m = 1$  — третью пару и так далее. Примерный вид спектрограммы амплитуд в случае больших индексов ( $m \gg 1$ ) изображен на рис. 8.14.

Особенность функций Бесселя такова, что при больших значениях аргумента  $m$ , они имеют существенные значения для  $n \leq m$  (причем при  $n \approx m$  наблюдается всплеск), а при  $n > m$  наблюдается резкий спад.

Из рис. 8.14 следует, что при больших индексах фазовой модуляции  $m$  в спектре можно учитывать лишь  $(m+1)$  пар боковых составляющих, то есть ширину спектра в этом случае можно оценить следующим образом

$$\Delta\omega = 2(m+1)\Omega \approx 2m\Omega = 2\omega_d. \quad (8.43)$$

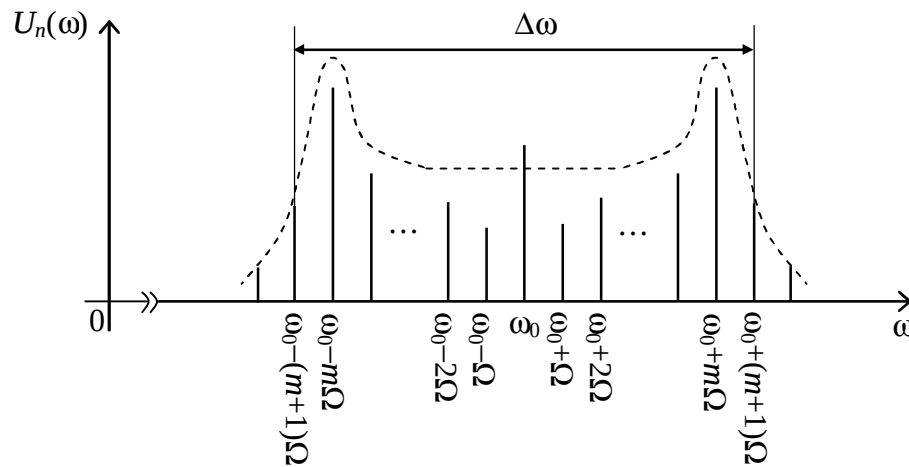


Рис. 8.14

Таким образом, при больших индексах фазовой модуляции  $m$  ширина спектра радиосигнала с тональной УМ приблизительно равна удвоенной девиации частоты, то есть в  $m$  раз больше, чем при малых индексах (и при тональной АМ). Поэтому частотную модуляцию в этом случае называют **широкополосной**.

## 8.5. Радиоимпульс с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ)

### 8.5.1. Представление и спектр радиоимпульса с ЛЧМ

**Радиоимпульс с ЛЧМ** — это быстро осциллирующий импульсный процесс, частота осцилляций которого в пределах длительности импульса изменяется по линейному закону. Такие импульсы широко используют в радиолокации, а также в цифровых системах связи, поскольку их применение повышает помехоустойчивость.

На рис. 8.15,**a** представлен ЛЧМ радиоимпульс с прямоугольной огибающей и линейным нарастанием частоты. На рис. 8.15,**b** приведен график зависимости частоты осцилляций от времени. На этом графике:  $\omega_0$  — частота осцилляций при  $t = 0$ ;  $\omega_D$  — изменение частоты за время, равное длительности импульса  $t_{\text{и}}$  (полная девиация частоты). Зависимость частоты осцилляций от времени в пределах длительности импульса  $t_{\text{и}}$  запишем в виде

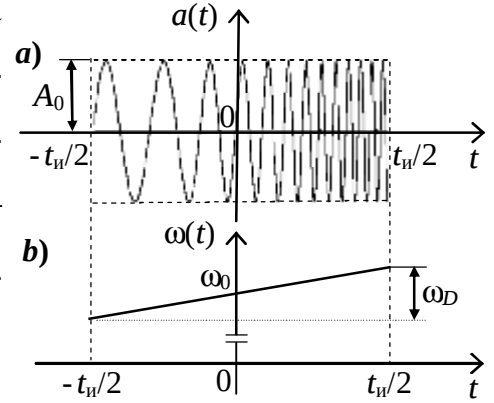


Рис. 8.15

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad (8.44)$$

где  $\beta$  — параметр, определяющий скорость нарастания частоты, рассчитываемый по формуле

$$\beta = \omega_D / t_{\text{и}}. \quad (8.45)$$

Определим полную фазу радиосигнала, воспользовавшись (8.22)

$$\psi(t) = \int_0^t (\omega_0 + \beta t) dt + \theta_0 = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} + \theta_0. \quad (8.46)$$

С учетом (8.46) мгновенное значение радиосигнала запишем как

$$a(t) = A_0 \cos \psi(t) = A_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} + \theta_0 \right). \quad (8.47)$$

Определим спектральную плотность радиоимпульса с ЛЧМ, применив к (8.47) прямое преобразование Фурье

$$A(j\omega) = A_0 \int_{-t_{\text{и}}/2}^{t_{\text{и}}/2} \cos \left( \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} + \theta_0 \right) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.48)$$

Интеграл в (8.48) сводится к комбинации интегралов Френеля [1]. Приведем результаты численного анализа модуля спектральной плотности (рис.

8.16) при различных значениях величины  $B = f_D t_n$ , которую называют **параметром ЛЧМ радиоимпульса**. На рис. 8.16 изображены спектрограммы модуля ЛЧМ радиоимпульса только в области физических частот.

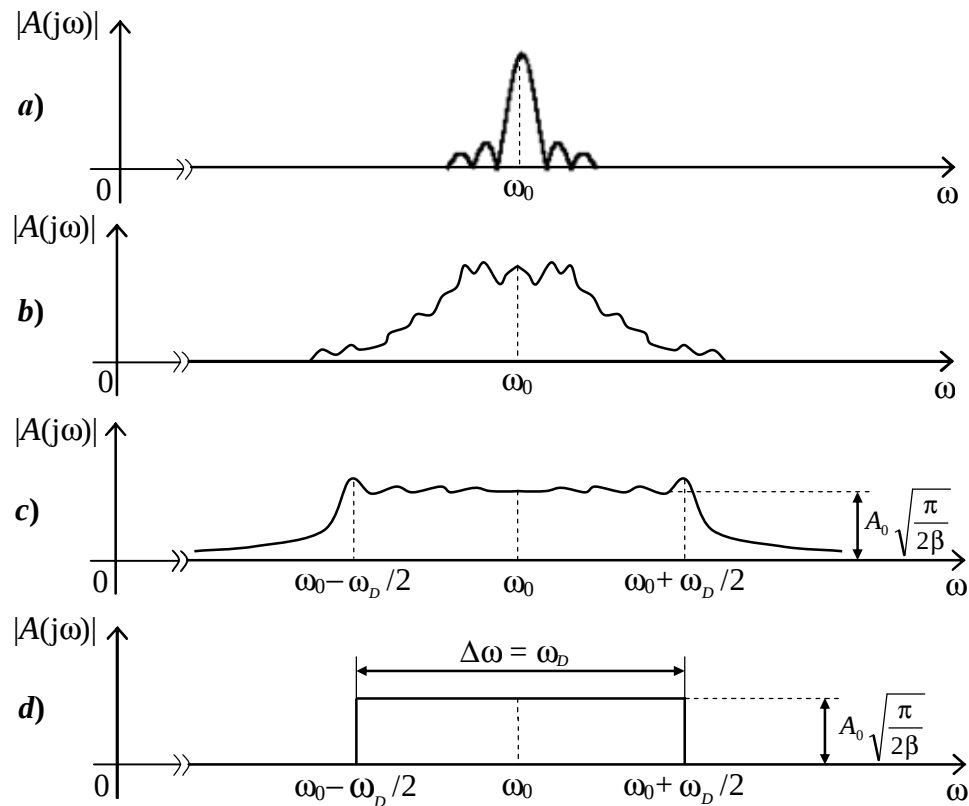


Рис. 8.16

1) Случай  $B=0$  соответствует отсутствию ЧМ и иллюстрируется рис. 8.16,*a*. Спектр в этом случае совпадает со спектром радиоимпульса с прямоугольной огибающей (см. рис. 8.7).

2) Случай  $B=10$  иллюстрируется рис. 8.16,*b*.

3) Случай  $B=100$  иллюстрируется рис. 8.16,*c*.

Анализ результатов показывает, что с ростом параметра  $B$  спектр расширяется. При больших  $B$  ( $B \gg 1$ ) модуль спектральной плотности практически постоянен в полосе частот от  $(\omega_0 - \omega_D/2)$  до  $(\omega_0 + \omega_D/2)$ , а за пределами этой полосы резко уменьшается. То есть можно считать, что эффективная ширина спектра равна полной девиации частоты:  $\Delta\omega = \omega_D$ . Поэтому для теоретических расчетов в этом случае можно пользоваться прямоугольной аппроксимацией спектрограммы модуля, считая, что в указанной полосе частот

модуль спектральной плотности постоянен, а за пределами этой полосы — равен нулю. Идеализированная спектрограмма модуля радиоимпульса с большим параметром  $B$  изображена на рис. 8.16,  $d$ .

Такое представление существенно упрощает анализ. Аналитическая запись для модуля спектральной плотности в этом случае имеет вид:

$$|A(j\omega)| = \begin{cases} 0, & \text{if } |\omega| < \omega_0 - \frac{\omega_D}{2}, |\omega| > \omega_0 + \frac{\omega_D}{2}; \\ A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}, & \text{if } \omega_0 - \frac{\omega_D}{2} < |\omega| < \omega_0 + \frac{\omega_D}{2}. \end{cases} \quad (8.49)$$

Аргумент спектральной плотности ЛЧМ радиоимпульса при больших значениях параметра  $B$  с достаточной степенью точности описывается соотношением, которое представляет собой квадратичную параболу [2]:

$$\theta(\omega) = -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta}. \quad (8.50)$$

Заметим, что при  $B \gg 1$  база ЛЧМ радиоимпульса в соответствии с формулой (7.26) равна:  $N \approx 2 f_D t_n = 2B \gg 1$ . Поэтому такой импульс называют ЛЧМ радиоимпульсом с большой базой. Именно ЛЧМ радиоимпульсы с большой базой нашли широкое применение в радиоэлектронике.

### 8.5.2. Автокорреляционная функция ЛЧМ радиоимпульса

Рассмотрим наиболее интересный для практики случай, при котором ЛЧМ радиоимпульс обладает большой базой (параметр  $B \gg 1$ ). Воспользуемся тем, что АКФ сигнала — это обратное преобразование Фурье от энергетического спектра. В соответствии с (6.17) при учете (8.49) можно записать

$$B_a(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\omega_D}{2}}^{\omega_0 + \frac{\omega_D}{2}} A_0^2 \frac{\pi}{2\beta} \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (8.51)$$

После несложных преобразований приходим к следующему:

$$B_a(\tau) = \frac{A_0^2 t_{\text{и}}}{2} \frac{\sin(\omega_D \tau / 2)}{\omega_D \tau / 2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (8.52)$$

На рис. 8.17 изображен график АКФ радиоимпульса с ЛЧМ, построенный в соответствии с (8.52).

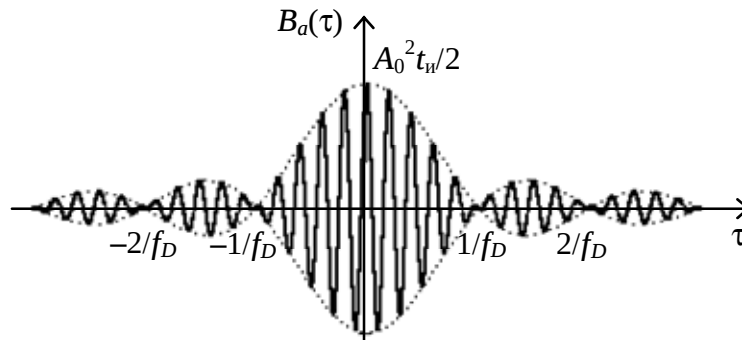


Рис. 8.17

Таким образом, АКФ ЛЧМ радиоимпульса с большой базой представляет собой высокочастотный процесс с частотой осцилляций, равной  $\omega_0$ . При  $\tau = 0$  АКФ имеет ярко выраженный всплеск. С ростом  $\tau$  АКФ немонотонно, убывает, стремясь к нулю. Увеличивая полную девиацию частоты  $f_D$ , можно получить АКФ, обладающую весьма узким центральным лепестком.

## 8.6. Пример решения задачи

### 8.6.1. Условие

Получить аналитическое выражение радиосигнала с тональной балансной амплитудной модуляцией и построить временную диаграмму этого сигнала. Параметры несущего колебания:  $A_0 = 10\text{ В}$ ;  $f_0 = 10^6\text{ Гц}$ ;  $\theta_0 = \pi$ . Параметры модулирующего сигнала:  $F = 10^5\text{ Гц}$ ;  $\nu = -\pi/2$ ;  $M = 0,5$ .

### 8.6.2. Решение

В спектре радиосигнала с балансной амплитудной модуляцией отсутствует несущее колебание, поэтому такой сигнал при тональной модуляции можно записать как сумму двух боковых составляющих, исключив из формулы (8.14) первый член, представляющий собой несущее колебание. В итоге

получим

$$a(t) = \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \theta_0 + \nu] + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \theta_0 - \nu], \quad (8.53)$$

где  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ;  $\Omega = 2\pi F$ .

Выражение (8.53) представляет собой сумму двух гармонических функций с одинаковыми амплитудами, частоты которых отличаются на малую величину. Как известно это приводит к так называемым биениям. Путем простых тригонометрических преобразований приведем выражение (8.53) к виду

$$a(t) = A_0 M \cos(\Omega t + \nu) \cos(\omega_0 t + \theta_0). \quad (8.54)$$

Из (8.54) следует, что колебание представляет собой быстро осциллирующий с частотой  $\omega_0$  процесс с медленным изменением амплитуды.

Временная диаграмма радиосигнала с баланснй тональной АМ, рассчитанная по формуле (8.54) в соответствии с исходными данными, изображена на рис. 8.18.

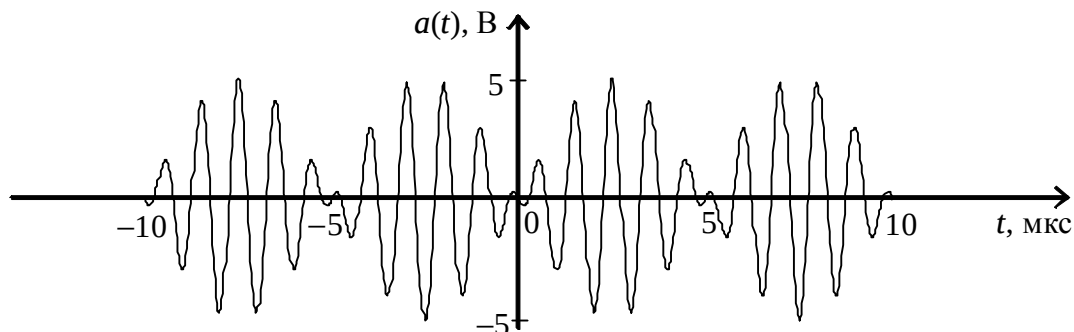


Рис. 8.18

Из (8.54), а также из рисунка следует, что амплитуда радиосигнала при любом значении коэффициента модуляции (исключая вырожденный случай  $M = 0$ , при котором сигнал тождественно равен нулю) периодически с частотой, равной удвоенной частоте модуляции, принимает нулевые значения, что подтверждает факт наличия биений.

## 9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Предметом изучения этого раздела являются случайные процессы и их свойства. Это изучение является чрезвычайно важным, поскольку связано с

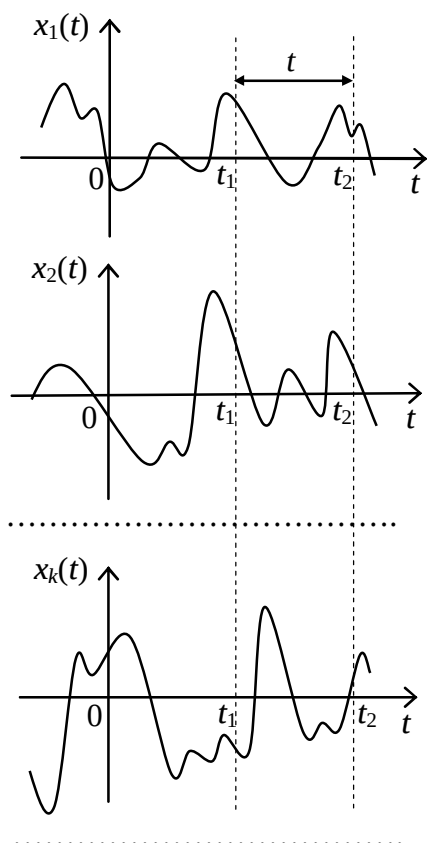


Рис. 9.1

проблемой помехозащищенности каналов связи. Напомним, что случайным называют процесс, мгновенное значение которого не может быть определено с вероятностью, равной единице.

В радиоэлектронике процессы рассматривают как случайные в двух случаях:

1) при описании возникающих в тракте передачи сигналов шумов и помех, которые по своей природе являются случайными функциями времени;

2) при необходимости оценить количество информации, которое передают по каналу связи с помощью сигналов. Сигнал, несущий информацию, является для получателя случайным процессом, поскольку априорно (до приема)

получателю неизвестно, какое сообщение ему передано. Чем более неожиданным для получателя является принятое сообщение, тем больше информации в нем заключено.

Случайные процессы могут быть как непрерывными (аналоговыми) так и дискретными, либо цифровыми. Для описания случайных процессов используют методы теории вероятностей и математической статистики.

## 9.1. Основные характеристики случайных процессов

### 9.1.1. Реализации случайного процесса

Рассмотрим случайный процесс  $X(t)$ . Реализация случайного процесса — это бесконечная запись временной функции случайного процесса, полученная в результате его наблюдения (например, функция  $x_1(t)$  на рис. 9.1).

На практике доступна лишь конечная во времени реализация ввиду того, что время наблюдения ограничено. При этом необходимо, чтобы время наблюдения было достаточно большим, чтобы изменчивость процесса за это время была отражена в достаточно полной мере.

**Ансамбль** реализаций представляет собой множество реализаций случайного процесса. Ансамбль реализаций, состоящий из бесконечного числа реализаций, называют полным **ансамблем**. Полный ансамбль полностью характеризует случайный процесс, поскольку он включает все возможные исходы случайного процесса. На рис. 9.1 представлен полный ансамбль реализаций процесса  $X(t)$ , состоящий из реализаций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и т.д. Для описания ансамбля применяют фигурные скобки. Например, ансамбль процесса  $X(t)$  можно представить в виде:  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots\}$ . На практике доступно только конечное число реализаций, то есть неполный ансамбль.

Сечение ансамбля представляет собой совокупность случайных величин, наблюдаемых в произвольный момент времени, например  $t_1$  (см. рис. 9.1). Сечение ансамбля в момент времени  $t_1$  можно записать в виде  $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_k(t_1), \dots\}$ .

### 9.1.2. Одномерная плотность вероятности

Указанная выше совокупность случайных величин в каждом сечении ансамбля описывается с помощью одномерного закона распределения.

**Одномерная плотность вероятности** является важнейшей характеристикой случайного процесса. Плотность вероятности называют еще **дифференциальным законом** распределения, поскольку она определяется как первая производная от функции распределения, которую в свою очередь назы-

вают **интегральным законом распределения**.

Будем обозначать одномерную плотность вероятности случайной величины  $x$  в виде функции  $p(x, t)$ . Зависимость этой функции от времени  $t$  говорит о том, что плотность вероятности в общем случае может быть разной в различных сечениях ансамбля реализаций. Функция  $p(x, t)$ , в частности, позволяет рассчитать вероятность попадания случайной величины  $x$  в интервал значений  $(a, b)$  по формуле

$$F_t(a < x < b) = \int_a^b p(x, t) dx. \quad (9.1)$$

Если интервал  $(a, b)$  включает все возможные значения случайной величины, то интеграл (9.1) равен единице (полная вероятность).

### 9.1.3. Двумерная плотность вероятности

Одномерная плотность вероятности недостаточна для глубокого описания случайного процесса, поскольку она характеризует процесс только в отдельных сечениях ансамбля и не дает представления о степени связи значений этого процесса в различных сечениях ансамбля реализаций.

Для оценки изменчивости случайного процесса во времени используют двумерную плотность вероятности  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$ , где  $t_1$  и  $t_2$  — моменты времени, в которых наблюдают значения  $x_1$  и  $x_2$  случайного процесса, соответственно (см. рис. 9.1). Зависимость функции  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$  от  $t_1$  и  $t_2$  говорит о том, что двумерная плотность вероятности в общем случае зависит не только от расстояния между сечениями  $\tau = t_2 - t_1$ , но и от расположения этих сечений на оси времени.

Двумерная плотность вероятности определяет взаимосвязь значений случайного процесса в сечениях  $t_1$  и  $t_2$ . Знание  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$  позволяет, в частности, определить вероятность попадания случайной величины  $x$  в интервал значений  $(a, b)$  в сечении  $t_1$ , в то время как в сечении  $t_2$  она попадает в интервал значений  $(c, d)$  по следующей формуле

$$F_{t_1, t_2}(a < x_1 < b, c < x_2 < d) = \int_a^b \int_c^d p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (9.2)$$

Если интервалы  $(a, b)$  и  $(c, d)$  включают все возможные значения случайной величины, то интеграл (9.2) равен единице (полная вероятность).

На основании свойств одномерной и двумерной плотностей вероятности вводится понятие стационарности случайного процесса.

**Стационарный в широком смысле случайный процесс** — это такой процесс, одномерная плотность вероятности которого не зависит от времени, а двумерная плотность вероятности зависит только от временного интервала между сечениями  $\tau = t_2 - t_1$  и не зависит от положения этого интервала  $\tau$  на оси времени [11]. В противном случае процесс считается нестационарным. Теория нестационарных процессов разработана недостаточно полно. Большую часть случайных процессов в радиоэлектронике можно отнести к категории стационарных, поэтому в дальнейшем рассмотрены только стационарные процессы.

Из приведенного выше определения следует, что для стационарных процессов выполняются следующие соотношения:

$$p(x, t) = p(x) ;$$

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) = p(x_1, x_2, \tau) .$$

В ряде случаев стационарный процесс может обладать так называемым свойством эргодичности.

**Эргодический случайный процесс** — это такой стационарный случайный процесс, для полного описания которого достаточно знать только одну реализацию.

#### 9.1.4. Усреднения случайного процесса

Количественная оценка свойств случайных процессов базируется на усреднениях. Для каждого случайного процесса можно определить некоторые

константы, которые описывают его в среднем. Эти константы называют моментами.

Пусть  $f(x)$  — функция случайного аргумента  $x$ , который обладает плотностью вероятности  $p(x)$ , тогда  $f(x)$  также является случайной функцией. Известно [11], что среднее значение случайной функции определяется соотношением

$$M[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \quad (9.3)$$

Здесь буквой  $M$  обозначена операция усреднения (определения математического ожидания). Рассмотрим наиболее часто используемые усреднения.

### 1) Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины

Математическое ожидание является начальным моментом первого порядка. В этом случае усредняют функцию  $f(x) = x$ . Применяв (9.3), получим

$$M[x] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (9.4)$$

Математическое ожидание имеет физический смысл среднего значения случайного процесса. Для эргодического процесса математическое ожидание представляет собой постоянную составляющую этого процесса во времени.

### 2) Среднее значение квадрата случайной величины

Эта характеристика является начальным моментом второго порядка. В этом случае усредняют функцию  $f(x) = x^2$ . Применяв (9.3), получим

$$M[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx. \quad (9.5)$$

Среднее значение квадрата случайной величины имеет физический смысл полной средней мощности процесса (с учетом мощности математического ожидания).

### 3) Среднее значение квадрата флуктуации (дисперсия)

**Флуктуация** — это отклонение случайного процесса от его среднего значения, то есть это **переменная составляющая случайного процесса**.

В математике переменную (флуктуирующую) часть процесса называют центрированным процессом. Центрированный случайный процесс можно получить из нецентрированного путем исключения (вычитания) из него математического ожидания, а именно:  $x_{\approx} = x - m_x$ .

Среднее значение квадрата флуктуации называют дисперсией (второй центральный момент). В этом случае усредняется функция  $f(x) = (x - m_x)^2$ . Применяв (9.3), получим

$$D_x = M[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx. \quad (9.6)$$

Очевидно, что дисперсия имеет физический смысл средней мощности переменной составляющей случайного процесса и определяет степень (интенсивность) разброса значений этого процесса.

Выражение (9.6) можно преобразовать к виду

$$D_x = M[x^2] - m_x^2. \quad (9.7)$$

Таким образом, дисперсия численно равна разности полной средней мощности случайного процесса и мощности математического ожидания этого процесса.

### 4) Среднеквадратическое отклонение (СКО) случайной величины

Эта характеристика имеет ту же размерность, что и случайная величина  $x$  и определяется по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (9.8)$$

Среднеквадратическое отклонение имеет физический смысл действующего значения переменной составляющей случайного процесса по аналогии с действующим значением детерминированного сигнала.

### 9.1.5. Ковариационная и корреляционная функции

Знание двумерной плотности вероятности позволяет ввести понятие ковариационной и корреляционной функций случайного процесса.

Ковариационная функция стационарного случайного процесса вводится как среднее значение произведения двух значений случайной величины  $x_1$  и  $x_2$  в сечениях, которые находятся на расстоянии  $\tau$  друг от друга. Процедура усреднения для двумерных процессов отличается от (9.3) только тем, что вместо одномерного вычисляют двумерный интеграл и используют при этом двумерную плотность вероятности. В этом случае усредняется функция  $f(x) = x_1 x_2$ . Применив процедуру усреднения, получим

$$K_x(\tau) = M[x_1 x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (9.9)$$

Ковариационная функция (9.9) является четной функцией аргумента  $\tau$ . Если положить в (9.9)  $\tau = 0$ , то величина  $x_1 x_2$  превращается в величину  $x^2$ , а двумерная плотность вероятности — в одномерную. При этом (9.9) принимает вид

$$K_x(0) = M[x^2]. \quad (9.10)$$

Таким образом, при  $\tau = 0$  ковариационная функция положительна, принимает максимальное значение и численно равна среднему квадрату случайного процесса.

**Корреляционная функция** вводится как среднее значение произведения двух значений центрированной случайной величины в сечениях, которые находятся на расстоянии  $\tau$  друг от друга:

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= M[(x_1 - m_x)(x_2 - m_x)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (9.11)$$

После несложных преобразований (9.11) получаем

$$B_x(\tau) = K_x(\tau) - m_x^2. \quad (9.12)$$

Итак, корреляционная функция отличается от ковариационной на постоянную величину, равную квадрату математического ожидания. Для централизованного случайного процесса ковариационная и корреляционная функции совпадают.

Если положить  $\tau = 0$  в (9.12), то получим

$$B_x(0) = M[x^2] - m_x^2 = D_x, \quad (9.13)$$

то есть при  $\tau = 0$  корреляционной функции положительна, принимает максимальное значение и численно равна дисперсии случайного процесса.

Часто используют понятие **нормированной корреляционной функции**, которая вводится следующим образом

$$R_x(\tau) = B_x(\tau) / B_x(0).$$

Ясно, что при  $\tau = 0$  нормированная корреляционная функция равна единице:  $R_x(0) = 1$ . Интервал корреляции по аналогии с (6.7) определяют как интеграл от модуля нормированной корреляционной функции в бесконечных пределах

$$\tau_{\text{кор}} = \int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau. \quad (9.14)$$

## 9.2. Некоторые законы распределения случайных процессов

### 9.2.1. Равномерный закон распределения

Это такой закон распределения, плотность вероятности которого равномерна в интервале допустимых значений  $(x_1, x_2)$ . При этом вероятность попадания случайной величины в любые

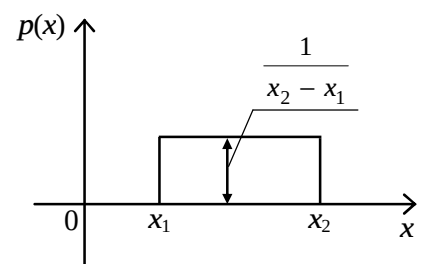


Рис. 9.2

равные промежутки в интервале  $(x_1, x_2)$  одинакова, а за пределы этого интервала — равна нулю. Из приведенного определения следует, что аналитическое выражение для плотности вероятности случайной величины, распределенной по этому закону, имеет следующий вид:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & \text{if } x_1 < x < x_2 ; \\ 0 & \text{if } x < x_1 ; x > x_2 . \end{cases} \quad (9.15)$$

График плотности вероятности изображен на рис. 9.2. В соответствии с (9.4)...(9.7) определим математическое ожидание, средний квадрат, дисперсию и среднеквадратическое отклонение процесса:

$$m_x = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_1 + x_2}{2} ; \quad (9.16)$$

$$M[x^2] = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} ; \quad (9.17)$$

$$D_x = M[x^2] - m_x^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} . \quad (9.18)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}} . \quad (9.19)$$

### 9.2.2. Нормальный (гаусовский) закон распределения

Нормальный закон распределения широко используется в разных областях науки и техники. Множество случайных процессов подчиняется этому закону. Из центральной предельной теоремы теории вероятностей [11] следует, что если случайный процесс является суммой множества других случайных процессов, ни один из которых не является превалирующим, то независимо от законов распределения суммируемых процессов результирующий процесс имеет нормальный закон распределения.

Аналитическая запись плотности вероятности нормального процесса имеет вид [4]:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp \left[ -\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (9.20)$$

Графики плотности вероятности нормального закона распределения при разных значениях среднеквадратического отклонения  $\sigma_x$  изображены на рис. 9.3.

Рассмотрим процесс с нулевым средним ( $m_x = 0$ ) и определим для этого случая вероятность попадания случайной величины, распределенной по закону Гаусса, в интервал значений от  $a$  до  $b$

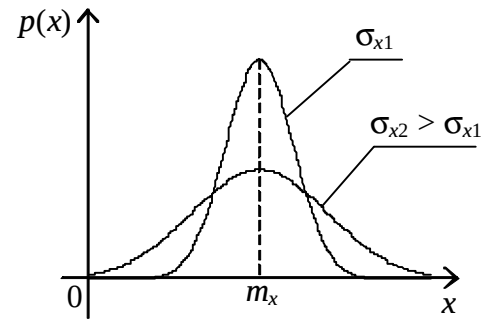


Рис. 9.3

$$F(a < x < b) = \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_a^b \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right) dx.$$

Проведем замену переменной:  $y = x/\sigma_x$ . Тогда получим:

$$F(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{b/\sigma_x} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma_x} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy. \quad (9.21)$$

Интеграл вида

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy = F(0 < y < u) \quad (9.22)$$

называют интегралом вероятности (интегралом Лапласа). Он позволяет рассчитать вероятность попадания случайной безразмерной величины  $y$  в интервал значений  $0 < y < u$ .

Рассчитаем вероятность попадания случайной величины  $x$  в симметричный интервал, положив  $a = -b$ . Используя (9.21) и (9.22), получаем

$$F(-b < x < b) = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right).$$

Результаты расчета вероятности по этой формуле для различных интервалов приведены в таблице 9.1. Из таблицы следует, что в интервал значений  $\pm 3\sigma_x$  при нормальном законе распределения попадает 99,7% значений случайной величины, то есть можно считать, что ширина шумовой дорожки, которая наблюдается при осциллографировании такого процесса, не превышает  $6\sigma_x$ .

Таблица 9.1

| Интервал                     | Вероятность |
|------------------------------|-------------|
| $-\sigma_x \dots \sigma_x$   | 0,683       |
| $-2\sigma_x \dots 2\sigma_x$ | 0,954       |
| $-3\sigma_x \dots 3\sigma_x$ | 0,997       |

### 9.3. Спектральный анализ случайных процессов

#### 9.3.1. Спектральная плотность средней мощности

Каждая из реализаций случайного процесса представляет собой детерминированный сигнал, поэтому можно определить спектральную плотность отдельных реализаций. Очевидно, что различным реализациям соответствуют различные спектры. Из-за случайности и независимости начальных фаз составляющих спектра усреднение спектральной плотности по ансамблю реализаций приведет к нулевому значению спектральной плотности. Поэтому для случайных процессов бессмысленно говорить о спектральной плотности амплитуд, как это делалось для детерминированного сигнала.

В то же время случайный процесс обладает средней мощностью (средний квадрат), которая не зависит от начальных фаз составляющих и распределена по частотному диапазону. Поэтому для случайных процессов вводят понятие: **спектральная плотность средней мощности**. Эта характеристика в некоторой частотной точке  $\omega = 2\pi f$  представляет собой предел отношения средней мощности, сосредоточенной в полосе частот  $\Delta f$ , охватывающей эту точку, к величине этой полосы при стремлении ее к нулю. Из этого определения следует, что спектральная плотность средней мощности вводится как

$$W_x(\omega) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta M[x^2]}{\Delta f}, \quad (9.23)$$

где  $\Delta M[x^2]$  — средняя мощность, сосредоточенная в полосе частот  $\Delta f$ .

Спектральную плотность средней мощности называют также энергетическим спектром случайного процесса. Из (9.23) следует, что энергетический спектр измеряется в следующих единицах: В<sup>2</sup>/Гц или А<sup>2</sup>/Гц.

Энергетический спектр случайного процесса  $W_x(\omega)$  обладает следующими основными свойствами:

- 1)  $W_x(\omega)$  — действительная и неотрицательная функция частоты;
- 2)  $W_x(\omega)$  — четная функция аргумента  $\omega$ .

Поскольку случайный процесс в общем случае обладает ненулевым средним, то энергетический спектр можно представить в виде суммы

$$W_x(\omega) = W_{x\approx}(\omega) + 2\pi m_x^2 \delta(\omega), \quad (9.24)$$

где  $W_{x\approx}(\omega)$  — энергетический спектр переменной (флуктуирующей) составляющей (сплошная часть спектра);  $2\pi m_x^2 \delta(\omega)$  — дельта-функция с весовым коэффициентом  $2\pi m_x^2$  (дискретная составляющая спектра).

Наличие в (9.24)  $\delta$ -функции говорит о том, что процесс имеет математическое ожидание конечной величины мощностью  $m_x^2$ .

Исходя из определения, можно записать формулу для расчета средней мощности процесса через его энергетический спектр

$$M[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega. \quad (9.25)$$

Подставляя в (9.25) выражение (9.24) и учитывая (9.7), получаем

$$M[x^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x\approx}(\omega) d\omega + m_x^2 = D_x + m_x^2. \quad (9.26)$$

Из (9.26) следует, что с учетом четности  $W_{x\approx}(\omega)$  мощность переменной составляющей процесса (дисперсию) можно определять по формуле

$$D_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_{x\approx}(\omega) d\omega . \quad (9.27)$$

По аналогии с детерминированными сигналами для случайных процессов вводят понятие эффективной ширины спектра. Это такая полоса частот, в пределах которой сосредоточено 90 % средней мощности переменной составляющей процесса (дисперсии). Эту полосу частот иногда называют **шумовой полосой**.

### 9.3.2. Теорема Винера - Хинчина

Между ковариационной функцией и энергетическим спектром случайного стационарного процесса имеется взаимосвязь, которая определяется теоремой Винера - Хинчина.

**Теорема:** энергетический спектр и ковариационная функция случайного стационарного процесса связаны парой преобразований Фурье [10]:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau; \quad (9.28)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega . \quad (9.29)$$

Для процесса с нулевым средним ( $m_x = 0$ ) вместо ковариационной функции  $K_x(\tau)$  в (9.28) и (9.29) можно использовать корреляционную функцию  $B_x(\tau)$ , поскольку в этом случае эти функции совпадают.

Из теоремы Винера - Хинчина вытекает важное свойство: **чем меньше интервал корреляции случайного процесса, тем шире его спектр**.

### 9.3.3. Белый шум

Белый шум — это случайный процесс, энергетический спектр которого

равномерен во всей полосе частот (рис. 9.4), то есть

$$W_x(\omega) = W_0 = \text{const} . \quad (9.30)$$

Используя (9.29), определим корреляционную функцию белого шума

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0 e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau) . \quad (9.31)$$

Таким образом корреляционная функция представляет собой  $\delta$ -функцию с весовым коэффициентом  $W_0$  (рис. 9.5).

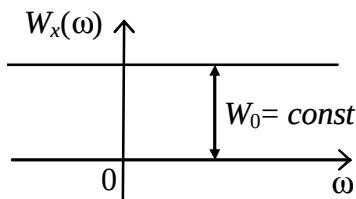


Рис. 9.4

Поэтому интервал корреляции белого шума равен нулю, то есть реализация процесса представляет собой случайную последовательность  $\delta$ -импульсов.

Определим дисперсию белого шума:

$$D_x = B_x(0) = \infty . \quad (9.32)$$

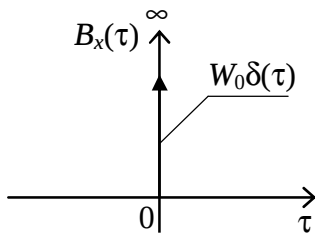


Рис. 9.5

Таким образом, средняя мощность белого шума равна бесконечности, а это говорит о невозможности физической реализации такого процесса. Реальные

процессы обладают энергетическими спектрами, которые убывают с ростом частоты. Модель белого шума используют в том случае, если ширина спектра шума существенно больше полосы пропускания устройства, на которое воздействует этот шум.

#### 9.3.4. Широкополосный шум

Широкополосный шум — это случайный процесс, энергетический спектр которого существенно отличен от нуля в полосе частот от  $-\omega_1$  до  $\omega_1$  ( $\omega_1 = 2\pi f_1$ ), а за пределами этой полосы — быстро убывает, стремясь к нулю. Такой шум можно получить на выходе ФНЧ, если на его вход подать белый шум.

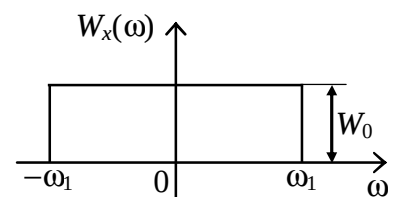


Рис. 9.6

На рис. 9.6 изображен энергетический спектр идеального широкополосного шума, который имеет  $\Pi$  - образную форму. Аналитическое выражение для такого спектра имеет вид:

$$W_x(\omega) = \begin{cases} W_0 = \text{const} & \text{if } |\omega| < \omega_1; \\ 0 & \text{if } |\omega| > \omega_1. \end{cases} \quad (9.33)$$

Используя (9.29), определим корреляционную функцию этого процесса

$$B_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} W_0 \cos(\omega\tau) d\omega = 2W_0 f_1 \frac{\sin(\omega_1\tau)}{\omega_1\tau}. \quad (9.34)$$

График нормированной корреляционной функции широкополосного шума изображен на рис. 9.7. Корреляционная функция с ростом  $\tau$  немонотонно убывает, стремясь к нулю.

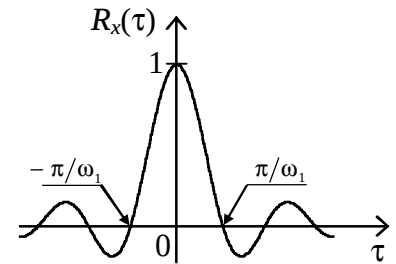


Рис. 9.7

Интервал корреляции процесса приблизительно соответствует ширине центрального лепестка корреляционной функции:  $\tau_{\text{кор}} \cong 2\pi/\omega_1 = 1/f_1$ . То есть, с расширением спектра (увеличением  $\omega_1$ ) интервал корреляции уменьшается.

### 9.3.5. Узкополосный шум

Узкополосный шум — это случайный процесс, энергетический спектр которого существенно отличен от нуля в полосе частот  $\Omega_1 = 2\pi F_1$  в районе частот  $\pm \omega_0$ , а за пределами этой полосы быстро уменьшается, стремясь к нулю. Причем выполняется следующее условие:  $\Omega_1/\omega_0 \ll 1$ .

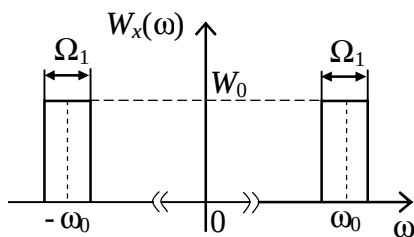


Рис. 9.8

Такой шум можно получить на выходе полосно - пропускающего узкополосного фильтра, если на его вход подать белый шум.

На рис. 9.8 изображен энергетический спектр идеального узкополосного шума. Спектр имеет

$\Pi$  - образную форму. Аналитическая запись энергетического спектра такого

процесса имеет вид:

$$W_x(\omega) = \begin{cases} W_0 = \text{const} & \text{if } \omega_0 - \Omega_1/2 < |\omega| < \omega_0 + \Omega_1/2 ; \\ 0 & \text{if } |\omega| < \omega_0 - \Omega_1/2, |\omega| > \omega_0 + \Omega_1/2 . \end{cases} \quad (9.35)$$

Используя (9.29), определим корреляционную функцию такого шума:

$$B_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Omega_1/2}^{\omega_0 + \Omega_1/2} W_0 \cos(\omega\tau) d\omega = 2W_0 F_1 \frac{\sin\left(\frac{\Omega_1\tau}{2}\right)}{\frac{\Omega_1\tau}{2}} \cos(\omega_0\tau) . \quad (9.36)$$

В соответствии с (9.36) корреляционная функция представляет собой высокочастотный процесс с частотой осцилляций  $\omega_0$  и медленным изменением огибающей. На рис. 9.9 изображена нормированная корреляционная функция узкополосного процесса.

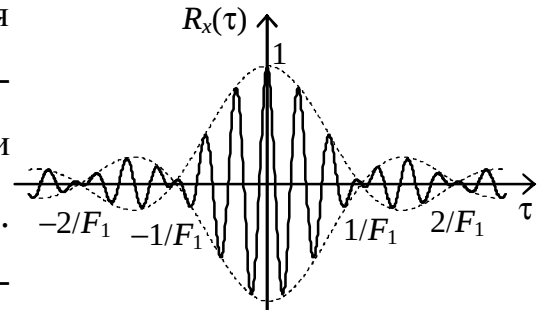


Рис. 9.9

Исходя из этого, можно считать, что узкополосный шум представляет собой высокочастотное колебание со случайным изменением амплитуды и частоты осцилляций. Причем средняя частота осцилляций равна  $\omega_0$ . С учетом этого запишем выражение для реализации узкополосного процесса

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] , \quad (9.37)$$

где  $A(t)$ ,  $\theta(t)$  — огибающая и начальная фаза процесса, которые являются случайными медленно изменяющимися функциями времени.

Таким образом, узкополосный шум представляет собой высокочастотное колебание со случайной амплитудной и угловой модуляциями. Реализация такого процесса представлена на рис. 9.10. Огибающая и начальная фаза этого процесса изменяются медленно по сравнению с измене-

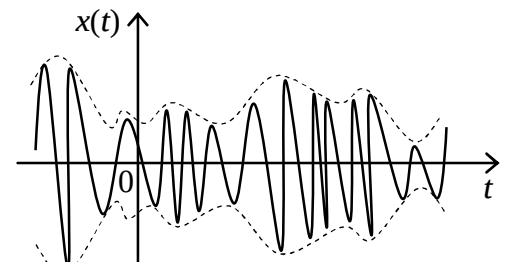


Рис. 9.10

нием мгновенного значения.

### 9.3.6. Характеристики узкополосного нормального шума

Мгновенное значение узкополосного шума подчиняется нормальному закону распределения [10]. Исходя из этого, запишем выражение для одномерной плотности вероятности мгновенного значения узкополосного шума

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp(-x^2/2\sigma_x^2). \quad (9.38)$$

В [10] показано, что при этом плотность вероятности огибающей узкополосного процесса соответствует закону распределения Рэлея, а начальной фазы — равномерному закону:

$$p(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp(-A^2/2\sigma_x^2); \quad (9.39)$$

$$p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{if } |\theta| < \pi; \\ 0, & \text{if } |\theta| > \pi. \end{cases} \quad (9.40)$$

Графики плотностей вероятности огибающей и начальной фазы узкополосного случайного процесса иллюстрируются рисунками 9.11,*a* и 9.11,*b*.

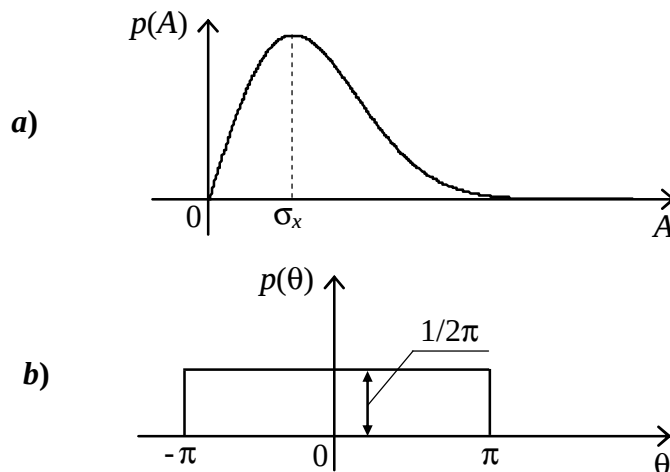


Рис. 9.11

Знание  $p(A)$  и  $p(\theta)$  позволяет определить математическое ожидание, средний квадрат, дисперсию и среднеквадратическое отклонение огибающей

и начальной фазы узкополосного шума [1]:

$$m_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x ; M[A^2] = 2\sigma_x^2 ; D_A \approx \frac{\sigma_x^2}{2} ; \sigma_A \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}} ; \quad (9.41)$$

$$m_\theta = 0 ; M[\theta^2] = D_\theta = \frac{\pi^2}{3} ; \sigma_\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} . \quad (9.42)$$

## 9.4. Пример решения задачи

### 9.4.1. Условие

Среднеквадратичное отклонение (СКО) узкополосного шума равно  $\sigma_x = 1$  мВ. Определить математическое ожидание, средний квадрат, дисперсию и СКО огибающей этого шума, а также вероятность попадания огибающей в диапазон значений от 0,5 мВ до 2 мВ.

### 9.4.2. Решение

Используя (9.41) определим значения математического ожидания и среднего квадрата огибающей узкополосного шума, подставив в расчетные формулы значение  $\sigma_x = 1$  мВ:

$$m_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 = 1,253 \text{ мВ} ;$$

$$M[A^2] = 2\sigma_x^2 = 2 \cdot 1^2 = 2 \text{ мВ}^2 .$$

Теперь определим точное значение дисперсии огибающей узкополосного шума, воспользовавшись формулой (9.7):

$$D_x = M[A^2] - m_A^2 = 2 - (1,253)^2 = 0,429 \text{ мВ}^2 .$$

Тогда точное значение СКО огибающей будет равно

$$\sigma_A = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,429} = 0,655 \text{ мВ}.$$

Определим вероятность попадания огибающей в диапазон значений от 0,5 мВ до 2 мВ, воспользовавшись формулой (9.1):

$$F(a < A < b) = \int_a^b p(A) dA .$$

Подставляя в эту формулу исходные данные  $a = 0,5 \text{ мВ}$  и  $b = 2 \text{ мВ}$ , а также выражение для одномерной плотности вероятности огибающей (9.39), получаем

$$F(0,5 < A < 2) = \int_{0,5}^2 \frac{A}{\sigma_x^2} \exp(-A^2/2\sigma_x^2) dA = \int_{0,5}^2 A \exp(-A^2/2) dA.$$

В результате численного интегрирования этого соотношения, получен следующий результат:

$$F(0,5 < A < 2) = 0,558 .$$

Таким образом, в результате длительного наблюдения следует ожидать, что 55,8 % от общего времени наблюдения огибающая заданного узкополосного шума будет находиться в диапазоне от 0,5 мВ до 2 мВ.

## 10. ЛИНЕЙНЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 10.1. Классификация цепей и основные определения

В данном разделе рассмотрены радиоэлектронные цепи с сосредоточенными параметрами. Эти цепи разделяют на два класса:

- линейные цепи;
- нелинейные цепи.

Приведенное разделение является достаточно условным, поскольку отнесение цепи к тому или иному классу зависит от уровня воздействующих на цепь сигналов. Так в режиме достаточно малого сигнала все цепи можно рассматривать как линейные (квазилинейное приближение).

**Линейная цепь** — это цепь, для которой справедлив принцип суперпозиций (наложения), согласно которому реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий.

Можно показать, что принцип суперпозиций справедлив для цепей, параметры которых не изменяются при изменении уровня входного воздействия. При этом можно выделить два типа линейных цепей:

- линейные цепи с постоянными параметрами;
- линейные цепи с переменными параметрами (параметрические цепи).

В первом случае параметры цепи вообще не изменяются во времени, а во втором случае параметры цепи изменяются независимо от входного воздействия.

В этом разделе рассматривается первый из указанных двух типов линейных цепей — линейные цепи с постоянными параметрами. Эти цепи состоят из элементов, параметры которых не изменяются во времени. Такие элемен-

ты в дальнейшем будем называть линейными.

Основными элементами радиоэлектронных цепей являются: пассивные элементы (резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы); активные элементы (полупроводниковые и электровакуумные приборы).

Исходя из данного выше определения, цепь считается линейной с постоянными параметрами, если для всех элементов цепи выполняется условие

$$R_i, L_i, C_i, S_i \dots = \text{const}, \quad (10.1)$$

где  $R_i$  — сопротивление любого резистора;  $L_i$  — индуктивность любой катушки;  $C_i$  — емкость любого конденсатора;  $S_i$  — крутизна ВАХ любого электронного прибора и пр.

## 10.2. Характеристики линейных цепей с постоянными параметрами

Рассмотрим линейную цепь, которая обладает одним входом и одним выходом. В обобщенном виде эту цепь можно представить в виде четырехполюсника (рис. 10.1). На этом рисунке  $s_{\text{вых}}(t)$  — выходной сигнал;  $s_{\text{вх}}(t)$  — входной сигнал.

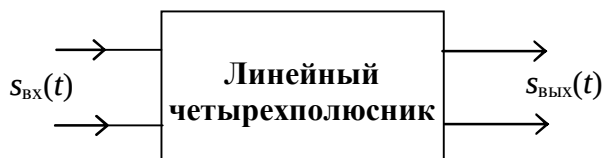


Рис. 10.1

Рассмотрим основные характеристики, которые используют для описания свойств линейных цепей.

### 10.2.1. Дифференциальное уравнение

Линейная цепь с постоянными параметрами описывается линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Общая форма записи этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned}
& a_0 \frac{d^n s_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} s_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{ds_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + a_n s_{\text{ВЫХ}}(t) = \\
& = b_0 \frac{d^m s_{\text{ВХ}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} s_{\text{ВХ}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{ds_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + b_m s_{\text{ВХ}}(t), \quad (10.2)
\end{aligned}$$

где  $a_0 \dots a_n; b_0 \dots b_m$  — постоянные коэффициенты, которые определяются параметрами элементов цепи;  $n, m$  — целые числа, зависящие от конкретной цепи (в физически реализуемых цепях  $n > m$ ).

Если входной сигнал известен, то правая часть уравнения (10.2) представляет собой известную функцию времени  $f(t)$ . При этом можно записать

$$a_0 \frac{d^n s_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} s_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{ds_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + a_n s_{\text{ВЫХ}}(t) = f(t). \quad (10.3)$$

### 10.2.2. Комплексный коэффициент передачи

Важнейшей характеристикой линейной цепи является комплексный коэффициент передачи (ККП). ККП можно ввести двумя способами.

#### 1) Случай гармонического входного воздействия

При подаче на вход линейной цепи гармонического колебания на ее выходе также формируется гармоническое колебание той же частоты, что следует из дифференциального уравнения (10.2). Комплексный коэффициент передачи вводят как отношение комплексных амплитуд (либо действующих значений) выходного  $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(\omega)$  и входного  $\dot{U}_{\text{ВХ}}(\omega)$  гармонических колебаний при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{\dot{U}_{\text{ВХ}}(\omega)}. \quad (10.4)$$

В соответствии с методом комплексных амплитуд [3] соотношение (10.4) представим в виде

$$K(j\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega)}}{U_{\text{ВХ}}(\omega)e^{j\varphi_{\text{ВХ}}(\omega)}} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (10.5)$$

где  $U_{\text{ВЫХ}}(\omega)$ ,  $U_{\text{ВХ}}(\omega)$  — амплитуды (или действующие значения) выходного и входного колебаний;  $\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega)$ ,  $\varphi_{\text{ВХ}}(\omega)$  — начальные фазы выходного и входного колебаний;  $K(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  — амплитудно-частотная (АЧХ) и фазо-частотная (ФЧХ) характеристики цепи, которые определяются соотношениями:

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)}; \quad (10.6)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega). \quad (10.7)$$

С математической точки зрения АЧХ определяется как модуль ККП, а ФЧХ — как аргумент ККП. С физической точки зрения АЧХ — это зависимость коэффициента передачи цепи от частоты, а ФЧХ — это зависимость фазового сдвига, вносимого цепью, от частоты. Поэтому эти характеристики называют **частотными характеристиками цепи**.

Заметим, что значение коэффициента передачи линейной цепи не зависит от амплитуды входного сигнала, а значение фазового сдвига не зависит от начальной фазы входного сигнала.

## 2) Случай произвольного входного воздействия

При произвольном входном воздействии входной и выходной сигналы можно разложить в спектры, представляющие собой наборы гармонических колебаний. Поэтому в этом случае комплексный коэффициент передачи вводят как отношение спектральных плотностей выходного и входного сигналов

$$K(j\omega) = \frac{\underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\underline{S}_{\text{ВХ}}(j\omega)}, \quad (10.8)$$

где  $\underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)$ ,  $\underline{S}_{\text{ВХ}}(j\omega)$  — спектральные плотности выходного и входного сигналов, соответственно.

Комплексный коэффициент передачи зависит от свойств цепи, а не свойств сигнала, поэтому и в первом (формула (10.4)) и во втором (формула (10.8)) случаях результаты будут одинаковыми.

### 10.2.3. Передаточная функция цепи

Передаточная функция цепи вводится как отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала

$$K(p) = \frac{\underline{S}_{\text{вых}}(p)}{\underline{S}_{\text{вх}}(p)}. \quad (10.9)$$

Совершенно очевидно, что комплексный коэффициент передачи является частным случаем передаточной функции. В соответствии с изложенным ранее, переход от (10.9) к (10.8) и наоборот осуществляется взаимной заменой переменных  $p$  и  $j\omega$ .

### 10.2.4. Импульсная характеристика цепи

Импульсная характеристика цепи — это реакция цепи на воздействие в виде  $\delta$ -функции (функции Дирака). В дальнейшем будем обозначать импульсную характеристику цепи как  $h(t)$ .

Из определения вытекают два очевидных требования к импульсной характеристике физически реализуемой цепи:

— при  $t < 0$ , она должна быть равна нулю, то есть  $h(t < 0) = 0$ . Это требование вытекает из принципа причинности: следствие не может опережать причину;

— при стремлении времени  $t$  к бесконечности она должна стремиться к нулю:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ . Это требование связано с обеспечением устойчивости цепи — процессы в свободном режиме должны затухать.

### 10.2.5. Переходная характеристика цепи

Переходная характеристика — это реакция цепи на воздействие в виде единичного скачка (функции Хевисайда). В дальнейшем будем обозначать

переходную характеристику цепи как  $g(t)$ .

Из определения вытекают два очевидных требования к переходной характеристике физически реализуемой цепи:

— при  $t < 0$  она должна быть равной нулю, то есть  $g(t < 0) = 0$ , что вытекает из принципа причинности;

— при стремлении  $t$  к бесконечности она должна стремиться к постоянной величине:  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \text{const.}$  В частности, эта величина может равняться нулю. Это требование связано с обеспечением устойчивости цепи.

### 10.3. Взаимосвязь характеристик линейной цепи

Каждая из вышеприведенных характеристик полностью определяет цепь. Поэтому все введенные выше характеристики цепи однозначно связаны друг с другом и, зная одну из них, можно определить остальные.

#### 10.3.1. Взаимосвязь дифференциального уравнения и комплексного коэффициента передачи

Для установления этой взаимосвязи, выполним прямое преобразование Фурье выражения (10.2). В результате получаем

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n] = \\ = \underline{S}_{\text{ВХ}}(j\omega)[b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(j\omega) + b_m], \end{aligned}$$

откуда в соответствии с (10.8) комплексный коэффициент передачи цепи равен

$$K(j\omega) = \frac{\underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\underline{S}_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(j\omega) + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n} = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)}. \quad (10.10)$$

Таким образом, комплексный коэффициент передачи линейной цепи можно представить в виде отношения двух полиномов  $P_m(j\omega)$  и  $Q_n(j\omega)$  переменной  $j\omega$ . Причем коэффициенты полинома знаменателя равны коэффици-

ентам левой части дифференциального уравнения (10.2), а коэффициенты полинома числителя равны коэффициентам правой части этого уравнения.

Порядки полиномов  $P_m(j\omega)$  и  $Q_n(j\omega)$  определяются характером и сложностью конкретной цепи.

### 10.3.2. Взаимосвязь дифференциального уравнения и передаточной функции

Применив преобразование Лапласа к (10.2), получим по аналогии с (10.10) выражение для передаточной функции линейной цепи

$$K(p) = \frac{\underline{S}_{\text{вых}}(p)}{\underline{S}_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_0(p)^m + b_1(p)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(p) + b_m}{a_0(p)^n + a_1(p)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p) + a_n} = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}. \quad (10.11)$$

Таким образом, передаточную функцию линейной цепи можно представить в виде отношения двух полиномов  $P_m(p)$  и  $Q_n(p)$  переменной  $p$ . Причем коэффициенты полиномов в формуле (10.11) как и в формуле (10.10) равны коэффициентам дифференциального уравнения (10.2).

Выражение (10.11) можно представить в виде

$$K(p) = \frac{b_0(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})}{a_0(p - p_{п1})(p - p_{п2}) \dots (p - p_{пn})}, \quad (10.12)$$

где  $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0m}$  — нули передаточной функции (корни числителя);

$p_{п1}, p_{п2}, \dots, p_{пn}$  — полюса передаточной функции (корни знаменателя).

Таким образом, с точностью до константы  $b_0/a_0$  передаточная функция линейной цепи определяется своими нулями и полюсами.

### 10.3.3. Взаимосвязь комплексного коэффициента передачи и импульсной характеристики

Подадим на вход линейной цепи в момент времени  $t = 0$  воздействие в виде  $\delta$ -функции. Тогда на выходе этой цепи возникнет колебание, представляющее собой импульсную характеристику  $h(t)$ . ККП цепи, записанный с использованием формулы (10.8), примет вид

$$K(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{\Delta(j\omega)},$$

где  $H(j\omega)$  — спектральная плотность импульсной характеристики;  $\Delta(j\omega)$  — спектральная плотность  $\delta$ -функции.

Поскольку спектральная плотность  $\delta$ -функции, размещенной на временной оси в точке  $t = 0$ , равна  $\Delta(j\omega) = 1$ , то с учетом последнего соотношения спектральная плотность импульсной характеристики совпадает с комплексным коэффициентом передачи цепи

$$H(j\omega) = K(j\omega) . \quad (10.13)$$

Отсюда вытекает, что комплексный коэффициент передачи и импульсная характеристика линейной цепи связаны парой преобразований Фурье:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt ; \quad (10.14)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega . \quad (10.15)$$

#### **10.3.4. Взаимосвязь передаточной функции и импульсной характеристики**

Учитывая взаимосвязь преобразований Лапласа и Фурье, можно сделать вывод о том, что передаточная функция и импульсная характеристика линейной цепи связаны парой преобразования Лапласа

$$\left. \begin{aligned} K(p) &= L[h(t)] \\ h(t) &= L^{-1}[K(p)] \end{aligned} \right\}, \quad (10.16)$$

где  $L$  и  $L^{-1}$  — операторы, которые обозначают прямое и обратное преобразования Лапласа соответственно.

### 10.3.5. Взаимосвязь импульсной и переходной характеристик

Поскольку функция Хевисайда определяется как интеграл от  $\delta$ -функции (площадь  $\delta$ -функции равна единице), то таким же образом, связаны и реакции на эти воздействия:

$$g(t) = \int_0^t h(t) dt . \quad (10.17)$$

Отсюда следует, что

$$h(t) = \frac{d[g(t)]}{dt} . \quad (10.18)$$

Таким образом, переходная характеристика является интегралом от импульсной характеристики, а импульсная характеристика — производной по времени от переходной характеристики.

Если в момент времени  $t = 0$  переходная характеристика отлична от нуля, то в импульсной характеристике присутствует  $\delta$ -функция с весовым коэффициентом  $g(0)$ , то есть  $h(0) = g(0)\delta(t)$ .

### 10.3.6. Взаимосвязь переходной характеристики и передаточной функции

Поскольку в соответствии с (10.17), переходная характеристика является интегралом от импульсной характеристики, то, согласно теореме об интегрировании оригинала [4], получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{K(p)}{p} &= L[g(t)] \\ g(t) &= L^{-1}\left[\frac{K(p)}{p}\right] \end{aligned} \right\} . \quad (10.19)$$

## 10.4. Аperiodические линейные цепи

Аperiodическими называют цепи, переходной процесс в которых носит плавный (неколебательный) характер. Такими свойствами обладают, в част-

ности, цепи, в состав которых наряду с резистивными элементами входят энергоемкие элементы одного типа (только конденсаторы, либо только катушки индуктивности). В этом подразделе рассмотрены простейшие апериодические цепи с одним энергоемким элементом.

#### 10.4.1. Апериодические цепи интегрирующего типа

На рис. 10.2. изображены две схемы, обладающие идентичными характеристиками. Их называют **цепями интегрирующего типа**, так как при определенных условиях они способны осуществлять приближенное интегрирование входного сигнала. Комплексный коэффициент передачи этих цепей можно записать в виде

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad (10.20)$$

где  $\tau$  — постоянная времени цепи, которая для  $RC$ -цепи определяется соотношением  $\tau = RC$ , а для  $RL$ -цепи —  $\tau = L/R$ .

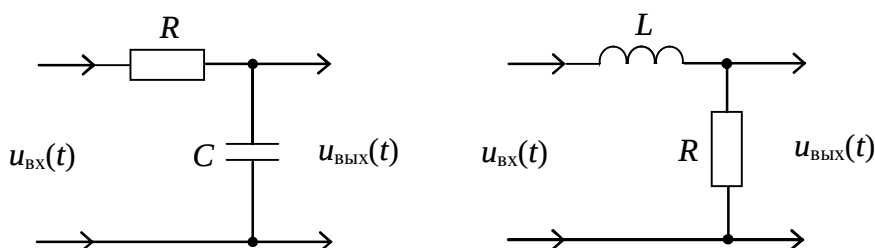


Рис. 10.2

Из формулы (10.20) получаем выражение для АЧХ и ФЧХ этих цепей:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad (10.21)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau). \quad (10.22)$$

Частотные характеристики, построенные в соответствии с (10.21) и (10.22), изображены на рис. 10.3.

Анализ АЧХ показывает, что рассматриваемые цепи интегрирующего

типа являются простейшими фильтрами нижних частот (ФНЧ).

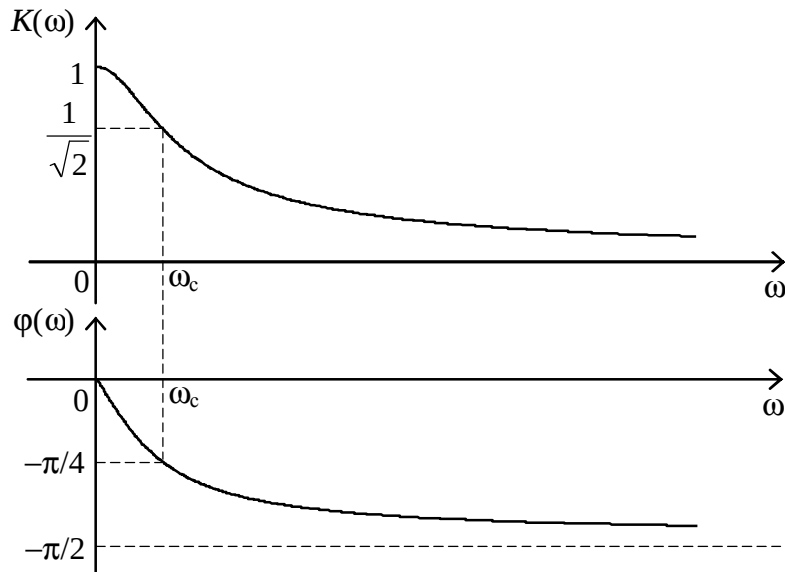


Рис. 10.3

Частотой среза фильтра ( $\omega_c$ ) называют такую частоту, на которой коэффициент передачи уменьшается в  $\sqrt{2}$  раза относительно максимального значения (см. рис. 10.3). Из формулы (10.21) следует, что

$$\omega_c = 1/\tau. \quad (10.23)$$

Зная частоту среза, можно рассчитать значение  $\tau$  по формуле:  $\tau = 1/\omega_c$ .

Если в формуле (10.21) положить  $\omega\tau \gg 1$  ( $\tau \gg 1/\omega$ ), то можно приближенно считать, что

$$K(j\omega) \approx 1/j\omega\tau. \quad (10.24)$$

Известно, что точное интегрирование сигнала во времени соответствует делению его спектра на  $j\omega$  (см. п. 4.5.6). Поэтому из (10.24) следует, что цепи, изображенные на рис. 10.2, при больших значениях постоянной времени осуществляют **приближенное интегрирование** сигнала. Если входной сигнал обладает ограниченным спектром, то рассмотренное условие должно выполняться для минимальной частоты спектра  $\omega_{min}$ . Поэтому условие достаточно точного интегрирования сигнала можно записать в виде

$$\tau \gg 1/\omega_{min}. \quad (10.25)$$

### 10.4.2. Аperiodические цепи дифференцирующего типа

На рис. 10.4. изображены две схемы, обладающие идентичными характеристиками.

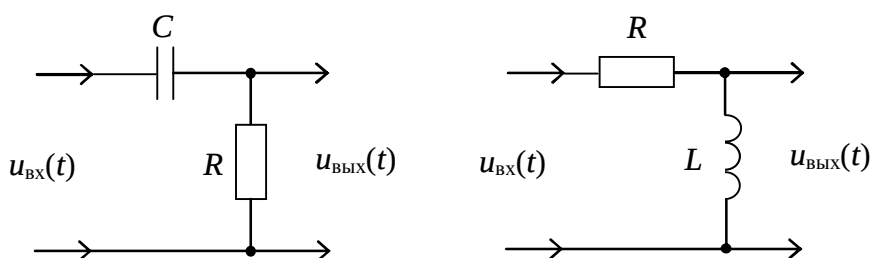


Рис. 10.4

Эти цепи называют **цепями дифференцирующего типа**, так как при определенных условиях они способны реализовать приближенное дифференцирование входного сигнала.

Комплексный коэффициент передачи этих цепей можно записать в виде

$$K(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} . \quad (10.26)$$

Из (10.26) получаем выражения для АЧХ и ФЧХ этих цепей:

$$K(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} ; \quad (10.27)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega\tau) . \quad (10.28)$$

Частотные характеристики, построенные в соответствии с (10.27) и (10.28), изображены на рис. 10.5. Анализ АЧХ показывает, что рассматриваемые цепи дифференцирующего типа являются простейшими фильтрами верхних частот (ФВЧ).

Если в формуле (10.26) положить  $\omega\tau \ll 1$  ( $\tau \ll 1/\omega$ ), то можно приближенно считать, что

$$K(j\omega) \approx j\omega\tau . \quad (10.29)$$

Известно, что точное дифференцирование сигнала во времени соответствует умножению его спектра на  $j\omega$  (см. п. 4.5.6). Поэтому из (10.29) следует, что цепи, изображенные на рис. 10.4, при малых значениях постоянной времени осуществляют **приближенное дифференцирование** сигнала.

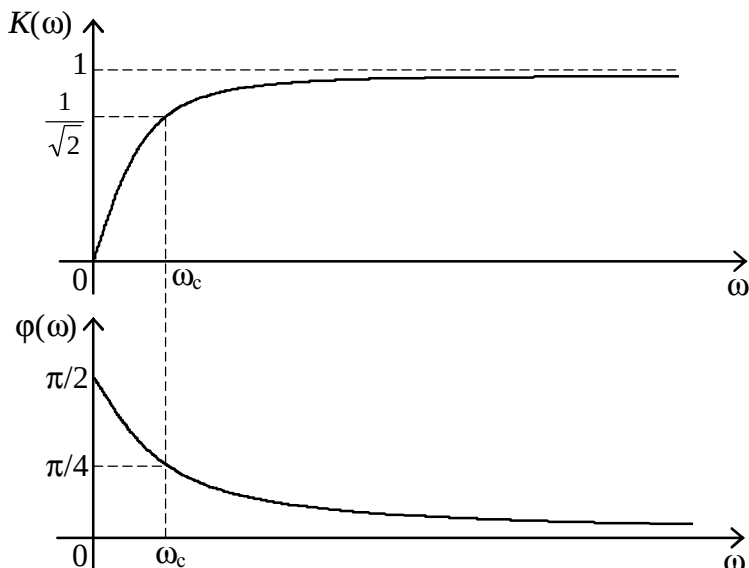


Рис. 10.5

Если входной сигнал обладает ограниченным спектром, то рассмотренное условие должно выполняться для максимальной частоты  $\omega_{max}$ . Поэтому условие достаточно точного дифференцирования сигнала можно записать в виде

$$\tau \ll 1/\omega_{max} . \quad (10.30)$$

### 10.4.3. Линейный апериодический усилитель

**Линейный усилитель** — это устройство, на выходе которого формируется сигнал, уровень которого (напряжения, тока, либо мощности) превышает уровень входного сигнала, а форма остается неизменной.

Реальный усилитель вносит искажения в форму усиливаемого сигнала, однако если эти искажения не превышают некоторого уровня, то их считают допустимыми.

Рассмотрим простейший апериодический усилитель, выполненный на полевом транзисторе  $VT$ , включенном по схеме с общим истоком (рис. 10.6).

Нагрузкой каскада является сопротивление  $R_H$ , включенное в цепь стока транзистора. Линейность режима реализуется выбором положения точки покоя на середине наиболее линейного участка ВАХ транзистора, что достигается установкой начального напряжения между затвором и истоком с помощью резистора  $R_H$ , а также тем, что на вход усилителя подается сигнал относительно небольшой амплитуды. Конденсатор  $C_H$  устраняет отрицательную обратную связь по переменному току, а резистор  $R_3$  обеспечивает нулевой потенциал на затворе транзистора по постоянному току.

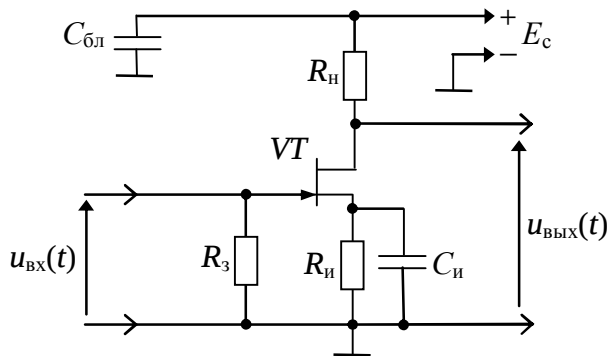


Рис. 10.6

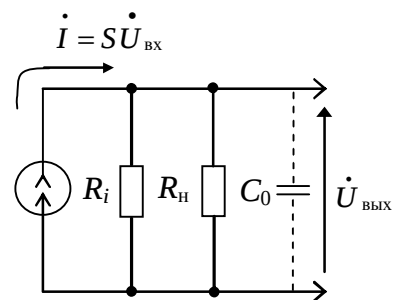


Рис. 10.7

Схема замещения выходной цепи усилительного каскада изображена на рис. 10.7. Полевой транзистор в схеме замещения представлен в виде источника переменного тока с комплексной амплитудой

$$\dot{I} = S \dot{U}_{\text{вх}}, \quad (10.31)$$

где  $S$  — крутизна проходной ВАХ транзистора в точке покоя.

На схеме замещения  $R_i$  — выходное сопротивление транзистора. В этой схеме учтена также паразитная емкость  $C_0$ , представляющая собой сумму выходной емкости транзистора и емкости монтажа. Обозначим сопротивление параллельно включенных резисторов  $R_i$  и  $R_H$  как  $R$ , а комплексное сопротивление, которое является нагрузкой источника тока, как  $\underline{Z}_H$ :

$$R = \frac{R_i R_H}{R_i + R_H} = \frac{R_H}{1 + R_H / R_i}; \quad (10.32)$$

$$\underline{Z}_H = \frac{R \frac{1}{j\omega C_0}}{R + \frac{1}{j\omega C_0}} = \frac{R}{1 + j\omega RC_0}. \quad (10.33)$$

Определим комплексную амплитуду выходного сигнала

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = -\dot{I} \underline{Z}_H = -\dot{U}_{\text{ВХ}} \frac{SR}{1 + j\omega\tau_0}, \quad (10.34)$$

где  $\tau_0 = RC_0$  — постоянная времени выходной цепи.

Знак минус в формуле (10.34) учитывает инвертирующие свойства каскада с общим истоком, которое заключается в том, что выходной сигнал каскада сдвинут по фазе на  $180^\circ$  относительно входного сигнала.

Из формулы (10.34) определим комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = -\frac{K_0}{1 + j\omega\tau_0}, \quad (10.35)$$

где  $K_0 = SR$  — значение коэффициента передачи на постоянном токе ( $\omega = 0$ ).

Из (10.35) определим АЧХ и ФЧХ апериодического усилителя:

$$K(\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau_0)^2}}; \quad (10.36)$$

$$\varphi(\omega) = \pi - \arctg(\omega\tau_0). \quad (10.37)$$

Графики АЧХ и ФЧХ изображены на рис. 10.8. Из графика АЧХ следует, что апериодический усилитель представляет собой ФНЧ. Спад АЧХ в области верхних частот связан с шунтирующим влиянием паразитной емкости  $C_0$ . Сравнивая формулу (10.20) с формулой (10.35), приходим к выводу, что апериодический усилитель по своим частотным свойствам соответствует цепи интегрирующего типа. Отличие состоит в наличии постоянного коэффи-

циента  $K_0$  (эффект усиления) и знака минус (эффект инверсии).

Из (10.36) определим частоту среза АЧХ апериодического усилителя, на границе которой коэффициент передачи уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз:

$$\omega_c = 1/\tau_0 = 1/RC_0. \quad (10.38)$$

Таким образом, полоса пропускания апериодического усилителя обратно пропорциональна постоянной времени выходной цепи. Увеличить полосу пропускания можно двумя способами:

- уменьшением емкости  $C_0$  (выбрать другой транзистор, либо уменьшить емкость монтажа);
- уменьшением сопротивления нагрузки  $R_n$ , но следует помнить, что это приведет к уменьшению коэффициента усиления  $K_0$ .

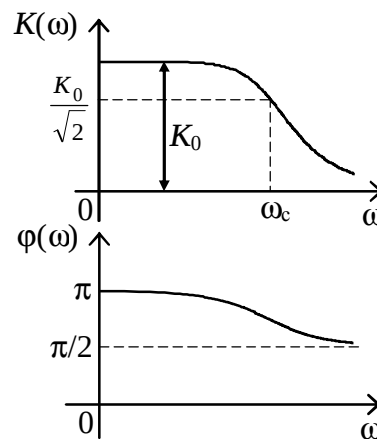


Рис. 10.8

## 10.5. Линейные частотно-избирательные (колебательные) цепи

**Частотно-избирательная цепь** — это такая цепь, коэффициент передачи которой существенно отличен от нуля в узкой полосе частот в окрестности некоторой центральной частоты, а за пределами этой полосы он резко убывает, стремясь к нулю. Такие цепи так же называют **узкополосными полюсно-пропускающими, или колебательными цепями**.

Частотно-избирательные цепи широко используются для обработки радиосигналов с различными видами модуляции. Применение этих цепей позволяет реализовать принцип избирательности в радиоэлектронных системах.

### 10.5.1. Идеальная частотно-избирательная цепь

Коэффициент передачи идеальной частотно-избирательной цепи в полосе пропускания равен постоянной величине  $K_{max}$ , а за пределами полосы пропускания он равен нулю. С учетом этого можно записать следующее выражение для АЧХ идеальной частотно-избирательной цепи

$$K(\omega) = \begin{cases} K_{max}, & \text{if } \omega_p - \frac{\Delta\omega_p}{2} < \omega < \omega_p + \frac{\Delta\omega_p}{2}; \\ 0, & \text{if } \omega > \omega_p + \frac{\Delta\omega_p}{2}; \omega < \omega_p - \frac{\Delta\omega_p}{2}, \end{cases} \quad (10.39)$$

где  $\Delta\omega_p$  — полоса пропускания;  $\omega_p$  — центральная (резонансная) частота.

АЧХ такой цепи изображена на рис. 10.9. Она имеет так называемую П-образную форму. Такая цепь обеспечивает полное подавление колебаний, спектр которых находится вне полосы ее пропускания, то есть идеальную избирательность. Такая цепь физически нереализуема, однако при создании полосно-пропускающих фильтров стремятся получить характеристику, близкую к идеальной, чтобы обеспечить высокую избирательность.

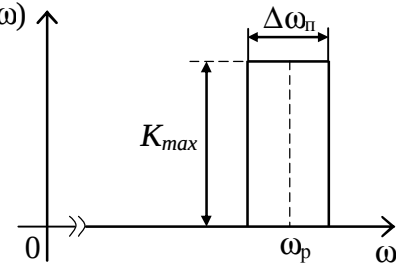


Рис. 10.9

### 10.5.2. Резонансный усилитель на основе колебательного контура

Частотно-избирательная цепь может быть реализована в виде резонансного усилителя с нагрузкой в виде колебательного контура (рис. 10.10).

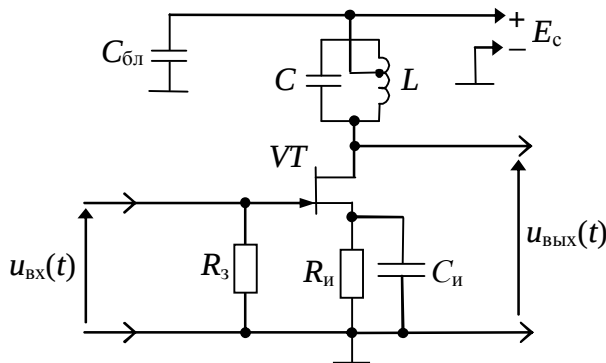


Рис. 10.10

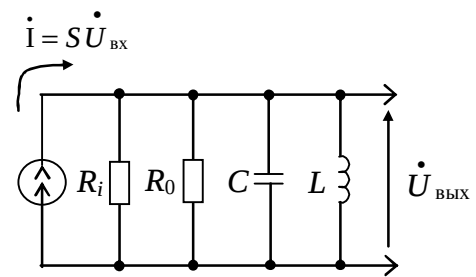


Рис. 10.11

Усилитель выполнен на полевом транзисторе  $VT$ , в цепь стока которого в качестве нагрузки включен параллельный колебательный  $LC$ -контур. Схема замещения выходной цепи усилительного каскада изображена на рис. 10.11. На этой схеме  $R_0$  — резонансное сопротивление контура. Обозначим эквивалентное сопротивление параллельно включенных резисторов  $R_i$  и  $R_0$  как  $R_{0Э}$ :

$$R_{0Э} = \frac{R_i R_0}{R_i + R_0} = \frac{R_0}{1 + R_0/R_i} . \quad (10.40)$$

Комплексное сопротивление нагрузки усилителя запишем в виде [3]:

$$\underline{Z}_H = \frac{R_{0Э}}{1 + j\xi} , \quad (10.41)$$

где  $\xi$  — обобщенная расстройка, которая равна [3]:

$$\xi = Q_{кэ} (\omega/\omega_p - \omega_p/\omega) . \quad (10.42)$$

В последней формуле  $Q_{кэ}$  — эквивалентная добротность контура;  
 $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота контура.

Определим комплексную амплитуду выходного напряжения

$$\dot{U}_{\text{вых}} = -\dot{I} \underline{Z}_H = -\dot{U}_{\text{вх}} \frac{SR_{0Э}}{1 + j\xi} . \quad (10.43)$$

Тогда комплексный коэффициент передачи равен

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = -\frac{K_{\text{max}}}{1 + j\xi} , \quad (10.44)$$

где  $K_{\text{max}} = SR_{0Э}$  — значение коэффициента передачи при  $\omega = \omega_p$  ( $\xi = 0$ ).

Из (10.44) определим АЧХ и ФЧХ усилителя:

$$K(\omega) = \frac{K_{\text{max}}}{\sqrt{1 + \xi^2}} ; \quad (10.45)$$

$$\varphi(\omega) = \pi - \text{arctg}(\xi) . \quad (10.46)$$

Графики АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя, построенные в соответствии с (10.45) и (10.46), изображены на рис. 10.12.

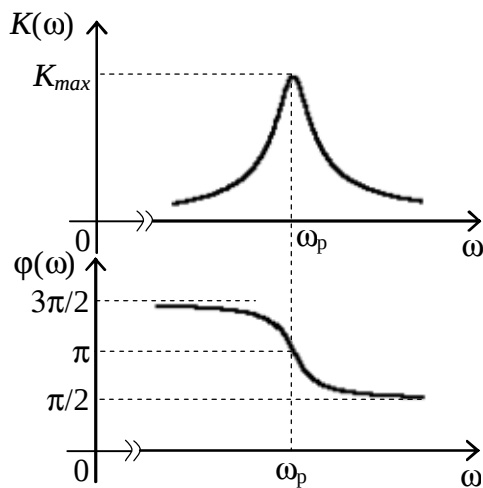


Рис. 10.12

Каскад обладает избирательными свойствами. На резонансной частоте значение коэффициента передачи максимально, а фазовый сдвиг равен  $\pi$  (из-за инвертирующего свойства каскада).

При малых расстройках (в пределах полосы пропускания) параметр  $\xi$  можно с достаточной степенью точности рассчитывать по формуле [1]:

$$\xi \approx (\omega - \omega_p) \tau_{кэ}, \quad (10.47)$$

где  $(\omega - \omega_p)$  — абсолютная расстройка контура;  $\tau_{кэ}$  — эквивалентная постоянная времени контура, определяемая соотношениями [3]:

$$\tau_{кэ} = 2Q_{кэ}/\omega_p = 2/\Delta\omega_{п}, \quad (10.48)$$

где  $\Delta\omega_{п}$  — полоса пропускания.

## 10.6. Пример решения задачи

### 10.6.1. Условие

Для цепи, изображенной на рис. 10.13, рассчитать и построить АЧХ, ФЧХ, а также импульсную и переходную характеристики. Исходные данные:  $L = 1 \cdot 10^{-3}$  Гн;  $R = 10$  Ом.

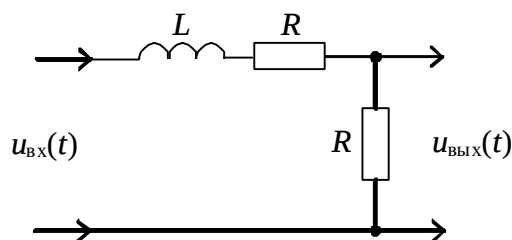


Рис. 10.13

### 10.6.2. Решение

Используя правило делителя напряжения [3], запишем выражение для комплексного коэффициента передачи данной цепи:

$$K(j\omega) = \frac{R}{2R + j\omega L} . \quad (10.49)$$

Определим АЧХ и ФЧХ цепи, взяв модуль и аргумент комплексного коэффициента передачи (10.49):

$$K(\omega) = \frac{R}{\sqrt{4R^2 + (\omega L)^2}} ; \quad (10.50)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega L/2R) . \quad (10.51)$$

Графики АЧХ и ФЧХ, рассчитанные в соответствии с исходными данными по формулам (10.50), (10.51), изображены на рис. 10.14. Из графика АЧХ следует, что данная цепь представляет собой фильтр нижних частот, частота среза которого легко определяется из (10.49) и равна  $\omega_c = 2R/L = 2 \cdot 10^4$  p/c.

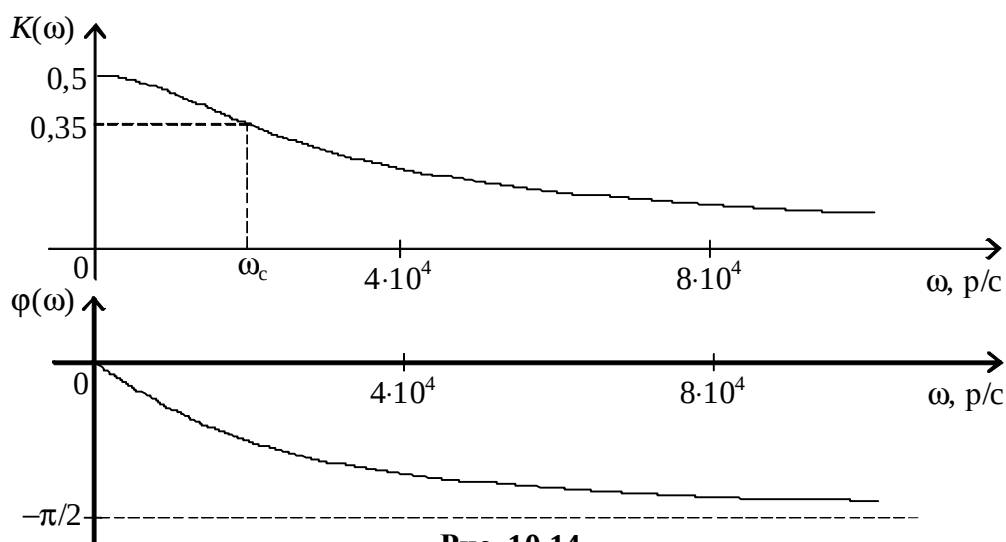


Рис. 10.14

Запишем выражение для передаточной функции цепи, заменив в (10.49)  $j\omega$  комплексной переменной  $p$ :

$$K(p) = \frac{R}{2R + pL} = \frac{R/L}{p + 2R/L}. \quad (10.52)$$

Определим импульсную и переходную характеристики, воспользовавшись соотношениями (10.16) и (10.19) и таблицей (см. приложение А):

$$h(t) = L^{-1} \left[ \frac{R/L}{p + 2R/L} \right] = \frac{R}{L} e^{-\frac{2R}{L}t} 1(t); \quad (10.53)$$

$$g(t) = L^{-1} \left[ \frac{R/L}{p(p + 2R/L)} \right] = \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{2R}{L}t}) 1(t). \quad (10.54)$$

Графики импульсной и переходной характеристик, рассчитанные по формулам (10.53) и (10.54) при заданных исходных данных, изображены на рис. 10.15.

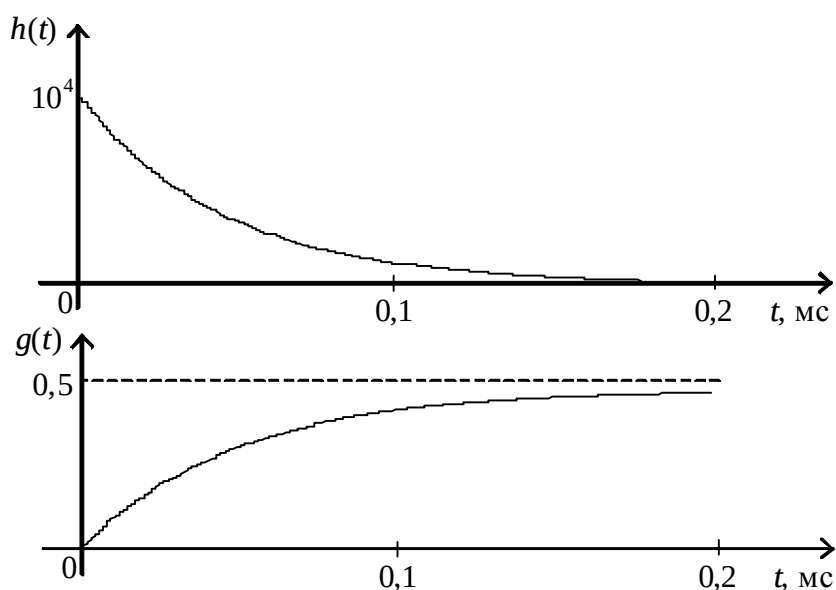


Рис. 10.15

Из графиков следует, что данная цепь относится к классу апериодических цепей, поскольку переходной процесс носит апериодический характер.

Постоянная времени цепи равна  $\tau = (L/2R) = 0,05 \text{ мс}$ . Из графиков видно, что за время, равное  $3\tau$ , переходной процесс на выходе практически полностью устанавливается.

## 11. МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕАКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Задача, рассматриваемая в этом разделе, формулируется следующим образом. На вход линейной цепи с постоянными параметрами подается известный входной сигнал произвольной формы  $s_{\text{вх}}(t)$  (рис 11.1). Необходимо рассчитать выходной сигнал  $s_{\text{вых}}(t)$ , который часто называют откликом цепи или выходным переходным процессом.

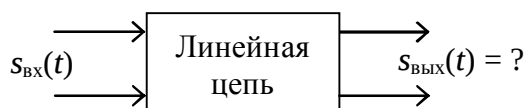


Рис. 11.1

### 11.1. Классический метод расчёта

Этот метод расчёта основан на классическом методе решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (10.2). Как известно, в соответствии с этим методом решение неоднородного линейного дифференциального уравнения можно записать в следующем виде [3, 4]:

$$s_{\text{вых}}(t) = s_{\text{св}}(t) + s_{\text{вын}}(t), \quad (11.1)$$

где  $s_{\text{св}}(t)$  — общее решение однородного дифференциального уравнения, называемое свободной составляющей;  $s_{\text{вын}}(t)$  — частное решение неоднородного дифференциального уравнения, называемое вынужденной составляющей.

Нахождение вынужденной составляющей сводится к расчету выходного сигнала при  $t \rightarrow \infty$ . При этом в цепи устанавливается стационарный режим и

расчет не вызывает сложностей.

Для нахождения свободной составляющей запишем однородное дифференциальное уравнение, приравняв правую часть (10.2) к нулю:

$$a_0 \frac{d^n s_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} s_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n s_{\text{ВЫХ}}(t) = 0. \quad (11.2)$$

Далее составим так называемое характеристическое уравнение путем замены в (11.2) каждой из производных на переменную  $p$  в степени, соответствующей порядку заменяемой производной:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (11.3)$$

Характеристическое уравнение (11.3) имеет  $n$  корней. Зная эти корни, можно записать решение однородного дифференциального уравнения (11.2) в виде суммы [4]:

$$s_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}, \quad (11.4)$$

где  $p_i$  — корни характеристического уравнения (11.3);  $A_i$  — постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования  $A_i$  определяют по известным начальным условиям, характеризующим исходное состояние цепи.

Характер выходного процесса, определяемого соотношением (11.4), существенно зависит от вида корней характеристического уравнения.

Рассмотрим два практически важных случая.

### 1) Случай действительного отрицательного корня

Пусть  $i$ -й корень характеристического уравнения представляет собой отрицательное действительное число  $p_i = -\alpha_i$ , где  $\alpha_i > 0$ . Тогда этому корню в сумме (11.4) соответствует затухающий по экспоненте

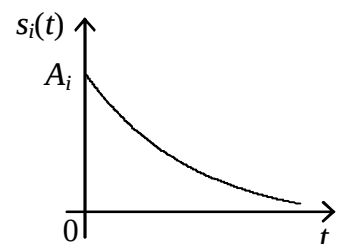


Рис. 11.2

плавный процесс  $s_i(t) = A_i e^{-\alpha_i t}$  (рис. 11.2). Такой процесс называют аperiодическим.

## 2) Случай комплексно-сопряженных корней с отрицательными действительными частями

В этом случае корни образуют пары комплексно сопряженных чисел  $(-\alpha_i \pm j\omega_i)$ . Каждой такой паре корней в сумме (11.4) соответствует пара комплексно сопряженных слагаемых [4]:  $A_i e^{(-\alpha_i + j\omega_i)t}$  и  $A_i^* e^{(-\alpha_i - j\omega_i)t}$ . Здесь  $A_i = |A_i| e^{j\varphi_i}$  — комплексная в общем случае постоянная интегрирования. Просуммировав эти слагаемые, получаем осциллирующий процесс  $s_i(t) = 2|A_i| e^{-\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  с частотой осцилляций, равной  $\omega_i$ , и амплитудой, убывающей по экспоненте (рис. 11.3). Такой процесс называют колебательным.

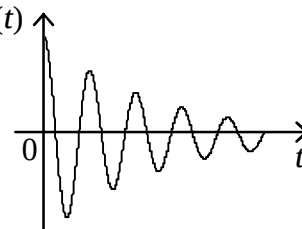


Рис. 11.3

Недостатком классического метода расчета отклика линейной цепи является то, что при  $n > 2$ , возникают трудности при аналитическом решении характеристического уравнения (11.3). Поэтому для сложных цепей, описываемых дифференциальными уравнениями высокого порядка, часто используют другие методы расчета, рассматриваемые ниже.

## 11.2. Спектральный метод расчета

Спектральный метод расчета основан на использовании комплексного коэффициента передачи  $K(j\omega)$  цепи и спектральных характеристик сигнала. Суть метода заключается в том, что входной сигнал представляют в виде суммы гармонических составляющих. Каждая из составляющих входного сигнала проходит через линейную цепь без искажения формы. Изменению подвергаются амплитуды и начальные фазы этих составляющих. Выходной сигнал формируется как сумма этих колебаний. Применение этого метода включает нижеследующие этапы.

1) Определяют спектральную плотность входного сигнала как прямое

преобразование Фурье от функции  $s_{\text{BX}}(t)$ :

$$\underline{S}_{\text{BX}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{BX}}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (11.5)$$

2) Определяют спектральную плотность выходного сигнала, которая в соответствии с формулой (10.8) равна

$$\underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \underline{S}_{\text{BX}}(j\omega) K(j\omega). \quad (11.6)$$

3) Рассчитывают выходной сигнал во времени как обратное преобразование Фурье от спектральной плотности  $\underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)$ . С учетом (11.6) получаем

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}_{\text{BX}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.7)$$

По существу, формула (11.7) показывает, что выходной сигнал формируется путем суммирования составляющих спектра входного сигнала с весовой функцией  $K(j\omega)$ .

### 11.3. Операторный метод расчета

Операторный метод расчета основан на использовании передаточной функции цепи  $K(p)$ . Этот метод близок по своей сущности к спектральному методу. Применение этого метода включает нижеследующие этапы.

1) Определяют изображение входного сигнала как прямое преобразование Лапласа от временной функции  $s_{\text{BX}}(t)$ :

$$\underline{S}_{\text{BX}}(p) = L[s_{\text{BX}}(t)], \quad (11.8)$$

причем для многих сигналов изображение можно найти без проведения интегрирования, используя таблицу соответствия (см. приложение).

2) Определяют изображение выходного сигнала по формуле, аналогичной (11.6)

$$\underline{S}_{\text{вых}}(p) = \underline{S}_{\text{вх}}(p)K(p). \quad (11.9)$$

3) Рассчитывают выходной сигнал во времени (оригинал) как обратное преобразование Лапласа от функции  $\underline{S}_{\text{вых}}(p)$ . С учетом (11.9) получаем

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{S}_{\text{вх}}(p)K(p)e^{pt} dp, \quad (11.10)$$

причем процедура обратного преобразования Лапласа может быть выполнена любым из методов, описанных в подразделе 5.4.

#### 11.4. Метод интеграла наложения

Этот метод называют также методом интеграла Дюамеля. При этом используют либо импульсную характеристику, либо переходную характеристику цепи. Сущность метода заключается в том, что входной сигнал представляют в виде суммы смещенных вдоль оси времени элементарных функций: либо  $\delta$ -функций (функций Дирака), либо ступенчатых функций (функций Хевисайда).

Поскольку реакция на  $\delta$ -функцию представляет собой импульсную характеристику, а реакция на функцию Хевисайда — переходную характеристику, то сигнал на выходе цепи, в соответствии с принципом суперпозиций, формируется как сумма этих характеристик, смещенных во времени, с соответствующими весовыми коэффициентами.

В первом случае сигнал на выходе определяют в виде свертки входного сигнала с импульсной характеристикой цепи [3]:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^t s_{\text{вх}}(x)h(t-x)dx. \quad (11.11)$$

Во втором случае сигнал на выходе определяют в виде [3]:

$$s_{\text{вых}}(t) = s_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_0^t \frac{ds_{\text{вх}}(x)}{dx} g(t-x)dx. \quad (11.12)$$

### 11.5. Приближенный метод расчета реакции узкополосной цепи на узкополосное воздействие (метод комплексной огибающей)

Важными для практики является решение задач, связанных с прохождением радиосигналов через частотно-избирательные цепи. Эти задачи возникают при обработке радиосигналов в трактах высокой и промежуточной частот приемных устройств. Ввиду неидеальности свойств этих трактов принимаемые радиосигналы искажаются. Применение точных методов расчета, рассмотренных выше, для случаев нетональной модуляции существенно усложняет решение задачи, не позволяя решить ее в аналитическом виде.

Рассматриваемый ниже метод комплексной огибающей является обобщением метода комплексных амплитуд, применяемого для анализа линейных цепей при гармоническом воздействии [3].

Как показано в разделе 8, узкополосный радиосигнал с произвольным видом модуляции (при  $\theta_0 = 0$ ) можно представить как

$$a(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]. \quad (11.13)$$

Комплексная огибающая узкополосного сигнала — это комплексная функция времени, у которой модуль равен физической огибающей  $A(t)$ , а аргумент — начальной фазе  $\theta(t)$  этого сигнала. Исходя из этого определения, из выражения (11.13) получаем

$$\dot{A}(t) = A(t)e^{j\theta(t)}. \quad (11.14)$$

Отличие комплексной огибающей радиосигнала от комплексной амплитуды гармонического сигнала заключается в том, что в процессе модуляции модуль и аргумент комплексной огибающей в общем случае являются функциями времени. При отсутствии модуляции модуль и аргумент комплексной огибающей остаются постоянными, и она в этом случае совпадает с комплексной амплитудой гармонического сигнала (несущей).

Мгновенное значение радиосигнала определяется через комплексную

огибающую следующим образом:

$$a(t) = \operatorname{Re} \left[ \dot{A}(t) e^{j\omega_0 t} \right] = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]. \quad (11.15)$$

При воздействии узкополосного сигнала на узкополосную цепь на выходе этой цепи формируется также узкополосный сигнал, комплексная огибающая которого отличается от комплексной огибающей входного сигнала.

Поэтому прохождение узкополосного радиосигнала через частотно-избирательную цепь эквивалентно прохождению его комплексной огибающей через некоторое эквивалентное низкочастотное звено (низкочастотный эквивалент). Это позволяет свести решение задачи прохождения узкополосного радиосигнала через узкополосную цепь к задаче прохождения низкочастотной комплексной огибающей через эквивалентную низкочастотную цепь.

В [1] показано, что с достаточной степенью точности комплексный коэффициент передачи низкочастотной эквивалентной цепи может быть получен путем следующей формальной замены переменных в комплексном коэффициенте передачи узкополосной цепи:  $\Omega = \omega - \omega_p$ . При такой замене переменной функция  $K(j\omega)$  перемещается вдоль оси частот на величину  $\omega_p$  в область низких частот. Поэтому низкочастотным эквивалентом узкополосной частотно-избирательной цепи является ФНЧ.

В частности, комплексный коэффициент передачи низкочастотного эквивалента резонансного усилителя, рассмотренного в п. 10.5.2, при небольших расстройках можно записать в виде

$$K(j\Omega) \approx -\frac{K_{max}}{1 + j\Omega\tau_{кэ}}. \quad (11.16)$$

Сравнивая (11.16) с формулой (10.35), замечаем, что низкочастотным эквивалентом резонансного усилителя является апериодический усилитель, для которого выполняются условия:  $\tau_0 = RC_0 = \tau_{кэ}$ ;  $K_0 = K_{max}$ .

## 11.6. Условия неискаженной передачи сигнала линейной цепью

### 11.6.1. Причины линейных искажений

Из предыдущего материала следует, что сигнал на выходе линейной цепи может отличаться от сигнала на входе этой цепи. Иначе говоря, линейные цепи искажают сигналы. Эти искажения называют линейными искажениями, так как их вносят линейные цепи.

Физически причина линейных искажений состоит в наличии в цепях наряду с резистивными элементами реактивных элементов. При этом возникновение линейных искажений можно объяснить, используя как временные, так и спектральные представления:

- во временной области — линейные искажения объясняются переходными процессами, вызванными зарядом и разрядом реактивных элементов цепи (временная трактовка линейных искажений);
- в частотной области — линейные искажения объясняются различием коэффициентов передачи и временных сдвигов для спектральных составляющих различных частот (спектральная трактовка линейных искажений).

### 11.6.2. Частотные характеристики неискажающей линейной цепи

Неискажающей цепью назовем цепь, которая не искажает форму сигнала. Такая цепь может осуществлять масштабное преобразование сигнала и его сдвиг во времени. Подадим на вход неискажающей цепи сигнал  $s_{\text{вх}}(t)$ , спектр которого занимает полосу частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . За пределами этой полосы ККП неискажающей цепи положим равным нулю, чтобы исключить прохождение на выход других сигналов, спектры которых расположены вне этой полосы. В соответствии с определением неискажающей цепи, сигнал на выходе этой цепи можно записать в виде

$$s_{\text{вых}}(t) = K_1 s_{\text{вх}}(t - t_1), \quad (11.17)$$

где  $K_1$  — масштабный множитель;  $t_1$  — временной сдвиг выходного сигнала

относительно входного.

В соответствии с теоремой сдвига спектральную плотность выходного сигнала запишем в виде

$$\underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = K_1 \underline{S}_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{-j\omega t_1}. \quad (11.18)$$

С учетом (11.18) запишем выражение для ККП неискажающей цепи

$$K(j\omega) = \begin{cases} \frac{\underline{S}_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\underline{S}_{\text{ВХ}}(j\omega)} = K_1 e^{-j\omega t_1} & \text{if } \omega_1 < \omega < \omega_2; \\ 0 & \text{if } \omega < \omega_1, \omega > \omega_2. \end{cases} \quad (11.19)$$

Используя (11.19), определим АЧХ и ФЧХ такой цепи:

$$K(\omega) = \begin{cases} K_1, & \text{if } \omega_1 < \omega < \omega_2; \\ 0, & \text{if } \omega < \omega_1; \omega > \omega_2; \end{cases} \quad (11.20)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\omega t_1, & \text{if } \omega_1 < \omega < \omega_2; \\ \text{не определена} & \text{if } \omega < \omega_1; \omega > \omega_2. \end{cases} \quad (11.21)$$

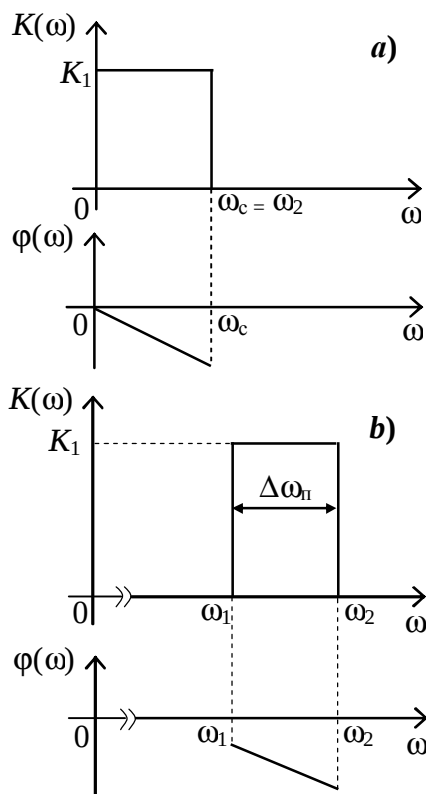


Рис. 11.4

Из формул (11.20) и (11.21) следует, что неискажающая линейная цепь должна обладать равномерной АЧХ и линейной ФЧХ в полосе частот, занимаемой спектром входного сигнала. Поскольку за пределами этой полосы частот мы положили коэффициент передачи равным нулю, то форма АЧХ неискажающей линейной цепи должна быть П - образной.

Проиллюстрируем полученный результат для видео и радио сигналов.

Графики АЧХ и ФЧХ цепи, которая не искажает видеосигнал, изображены на рис. 11.4,а.

Поскольку для видеосигнала  $\omega_1 = 0$ , то АЧХ неискажающей цепи должна быть равномерной, а ФЧХ — линейной в полосе частот от нуля до  $\omega_c = \omega_2$  ( $\omega_c$  — частота среза). Таким образом, неискажающая линейная цепь для видеосигнала представляет собой идеальный ФНЧ.

В случае радиосигнала АЧХ неискажающей цепи должна быть равномерной, а ФЧХ — линейной в полосе частот  $\Delta\omega_{\Pi} = \omega_2 - \omega_1$ , где  $\Delta\omega_{\Pi}$  — полоса пропускания цепи, которая совпадает с шириной спектра радиосигнала (рис. 11.4, *b*). Таким образом, неискажающая линейная цепь для радиосигнала представляет собой идеальный узкополосный полосно-пропускающий фильтр.

### 11.6.3. Импульсная характеристика неискажающей линейной цепи

Импульсную характеристику неискажающей линейной цепи для случая ФНЧ определим, применив обратное преобразование Фурье к комплексному коэффициенту передачи (11.19) этой цепи

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} K_1 e^{-j\omega t_1} e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.22)$$

Взяв интеграл в (11.22), получим

$$h(t) = 2K_1 f_m \frac{\sin[2\pi f_c(t-t_1)]}{2\pi f_c(t-t_1)}. \quad (11.23)$$

График импульсной характеристики неискажающей цепи, построенный в соответствии с (11.23), изображен на рис. 11.5. Из этого графика следует, что при  $t < 0$  функция  $h(t)$  отличается от нуля, что противоречит ранее сформулированному требованию к импульсной характеристике физически реализуемой цепи (см. п. 9.2.4). Поэтому идеальная неискажающая цепь физически нереализуема.

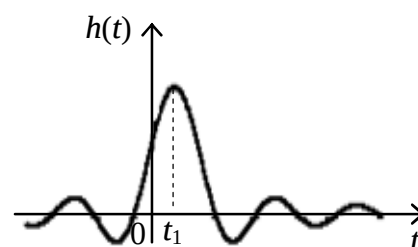


Рис. 11.5

Реальные линейные цепи обладают неравномерными АЧХ и нелинейными ФЧХ и поэтому вносят искажения в сигнал. Стремление уменьшить искажения приводит к необходимости увеличивать степень П - образности АЧХ и линейности ФЧХ цепи. С этой целью для обработки видеосигналов применяют сложные схемы ФНЧ, а для обработки радиосигналов используют связанные колебательные контура.

### 11.7. Преобразование статистических характеристик случайного процесса линейной цепью

Рассмотрим прохождение случайного процесса  $x(t)$  через линейную цепь с известными параметрами (рис. 11.6). При этом известны следующие характеристики входного процесса: энергетический спектр  $W_x(\omega)$  (а значит и корреляционная функция  $B_x(\tau)$ ); одномерная плотность вероятности  $p(x)$ .

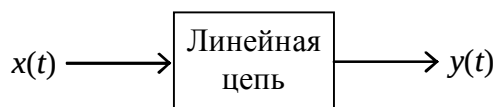


Рис. 11.6

В результате на выходе цепи формируется случайный процесс  $y(t)$ . Необходимо определить следующие статистические характеристики выходного процесса: энергетический спектр  $W_y(\omega)$ ; корреляционную функцию  $B_y(\tau)$ ; одномерную плотность вероятности  $p(y)$ .

#### 11.7.1. Энергетический спектр и корреляционная функция процесса на выходе

Рассмотрим два метода расчета этих характеристик.

##### 1) Спектральный метод расчета

В соответствии с этим методом сначала рассчитывают энергетический спектр выходного процесса, а затем его корреляционную функцию.

Расчет осуществляется на основе АЧХ линейной цепи. Поскольку мощ-

ность пропорциональна квадрату напряжения или тока, то энергетический спектр процесса на выходе линейной цепи связан с энергетическим спектром процесса на ее входе через квадрат коэффициента передачи. Поэтому

$$W_y(\omega) = W_x(\omega)K^2(\omega) , \quad (11.24)$$

где  $K(\omega)$  — АЧХ линейной цепи.

Далее, с помощью теоремы Винера - Хинчина, полагая  $m_y = 0$ , определим корреляционную функцию выходного процесса

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)K^2(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega . \quad (11.25)$$

Таким образом, на энергетический спектр и корреляционную функцию выходного случайного процесса влияет только АЧХ цепи.

## 2) Временной метод расчета

В соответствии с этим методом сначала рассчитывают корреляционную функцию, а затем энергетический спектр.

Расчет осуществляется на основе импульсной характеристики линейной цепи. Ранее отмечалось, что спектральной плотностью импульсной характеристики является комплексный коэффициент передачи. Поэтому корреляционная функция импульсной характеристики представляет собой обратное преобразование Фурье от квадрата модуля комплексного коэффициента передачи. Используя правило, согласно которому произведению спектров сигналов (см. формулу (11.24)) соответствует свертка их временных функций, запишем

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau)B_h(\tau-t)dt , \quad (11.26)$$

где  $B_h(\tau)$  — корреляционная функция импульсной характеристики цепи.

Зная корреляционную функцию на выходе, с помощью теоремы Винера

- Хинчина определим энергетический спектр выходного процесса

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (11.27)$$

### 11.7.2. Плотность вероятности выходного процесса

В общем случае, при котором на вход линейной цепи поступает случайный процесс с произвольной одномерной плотностью вероятности  $p(x)$ , определить плотность вероятности процесса на выходе  $p(y)$  не представляется возможным [10].

Задача имеет точное решение лишь для случая, нормального закона распределения входного процесса. В этом случае выходной процесс также как и входной обладает нормальным законом распределения, плотность вероятности которого (при  $m_y = 0$ ) равна

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp(-y^2 / 2\sigma_y^2). \quad (11.28)$$

При этом для определения  $p(y)$  по формуле (11.28) необходимо знать дисперсию процесса на выходе, которую определим из соотношения (11.25):

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) K^2(\omega) d\omega. \quad (11.29)$$

В ряде случаев цепь осуществляет нормализацию процесса. Используя центральную предельную теорему теории вероятностей, можно показать [1], что если полоса пропускания линейной цепи намного меньше, чем ширина спектра входного процесса, то закон распределения выходного процесса близок к нормальному, независимо от закона распределения процесса на входе. Этот эффект и называют нормализацией.

## 11.8. Пример решения задачи

### 11.8.1. Условие

На вход цепи (рис. 11.7) подан белый шум с энергетическим спектром  $W_0$ . Рассчитайте и постройте графики энергетического спектра и корреляционной функции процесса на выходе. Определите дисперсию, среднеквадратическое отклонение и интервал корреляции выходного шума. Исходные данные:  $R = 100 \text{ Ом}$ ;  $C = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ ;  $W_0 = 10^{-7} \text{ В}^2\text{с}$ .

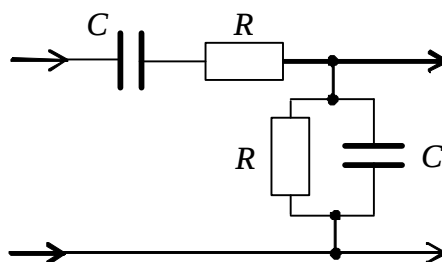


Рис. 11.6

### 11.8.2. Решение

Энергетический спектр шума на выходе линейной цепи определяется в соответствии с формулой (11.24). Подставляя в эту формулу выражение для коэффициента передачи данной цепи (13.27), приходим к следующему выражению для энергетического спектра выходного шума

$$W_y(\omega) = \frac{W_0(\omega RC)^2}{9(\omega RC)^2 + [(\omega RC)^2 - 1]^2}. \quad (11.30)$$

График энергетического спектра шума на выходе цепи, рассчитанный по формуле (11.30) в соответствии с исходными данными, изображен на рис. 11.7.

Экстремум энергетического спектра соответствует частоте, на которой коэффициент передачи цепи максимален. Эту частоту определим по формуле (13.29):

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{100 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 10^5 \text{ p/c}.$$

Рассчитаем корреляционную функцию выходного процесса, воспользовавшись соотношением Винера - Хинчина (9.29):

$$B_y(\tau) = \frac{W_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega RC)^2}{9(\omega RC)^2 + [(\omega RC)^2 - 1]^2} \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (11.31)$$

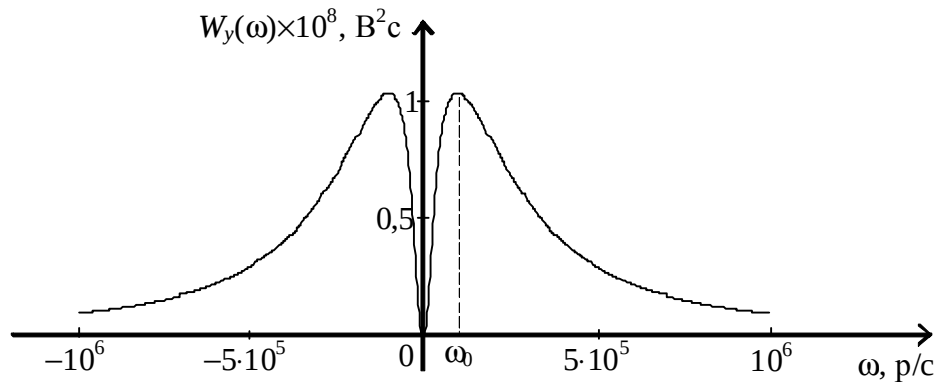


Рис. 11.7

Ввиду сложности подынтегрального выражения проведем численное интегрирование (11.31). Верхний предел интегрирования следует выбрать так, чтобы охватить значимую часть спектра. При этом погрешность из-за ограничения спектра может быть весьма малой. Из графика энергетического спектра выходного процесса (рис. 11.7) следует, что можно ограничить спектр частотой  $\omega_m = 10^7$  p/c. Численное интегрирование показало, что увеличение этой частоты практически не сказывается на результате (форма корреляционной функции практически не изменялась). Результат расчета корреляционной функции изображен на рис. 11.8.

Определим дисперсию выходного процесса, воспользовавшись формулой (9.13):  $D_y = B_y(0) \approx 0,00164 \text{ В}^2$ . Это соответствует среднеквадратическому значению выходного шума  $\sigma_y = \sqrt{D_y} \approx 0,040 \text{ В}$ .

Интервал корреляции выходного шума рассчитаем в соответствии с (9.14) как интеграл от модуля нормированной корреляционной функции

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{B(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |R_y(\tau)| d\tau. \quad (11.32)$$

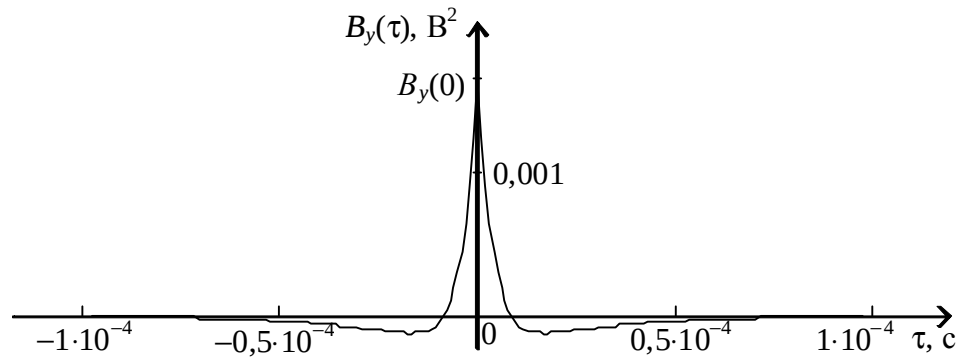


Рис. 11.8

Проведем численное интегрирование (11.32). Осуществим выбор пределов интегрирования. Из графика корреляционной функции (рис. 11.8) следует, что пределы интегрирования можно ограничить интервалом  $(-10^{-4} \dots 10^{-4})$ , поскольку за пределами этого интервала корреляционная функция практически равна нулю. С учетом этого получено следующее значение:

$$\tau_{\text{кор}} = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

## 12. ПРОХОЖДЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

### 12.1. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через цепь интегрирующего типа

Рассмотрим прохождение видеоимпульса прямоугольной формы (рис. 12.1,*a*) через простейшую цепь интегрирующего типа, схемы которой изображены на рис. 10.2.

Представим входное напряжение  $u_{\text{вх}}(t)$  в виде суммы двух ступенчатых функций

$$u_{\text{вх}}(t) = E \cdot 1(t) - E \cdot 1(t - t_{\text{и}}) , \quad (12.1)$$

где  $E$  — высота импульса;  $t_{\text{и}}$  — длительность импульса.

Для определения напряжения на выходе цепи воспользуемся операторным методом расчета.

Тогда изображение входного напряжения запишется в виде [4]:

$$U_{\text{вх}}(p) = E \frac{1}{p} - E \frac{1}{p} \exp(-pt_{\text{и}}) . \quad (12.2)$$

В соответствии с (11.9) и с учетом (10.20) изображение выходного напряжения равно

$$U_{\text{вых}}(p) = E \frac{1/\tau}{p(p + 1/\tau)} - E \frac{1/\tau}{p(p + 1/\tau)} \exp(-pt_{\text{и}}) . \quad (12.3)$$

Определим выходное напряжение (оригинал), воспользовавшись таблицей соответствия оригиналов и изображений (см. приложение):

$$u_{\text{вых}}(t) = E \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] 1(t) - E \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t-t_{\text{и}}}{\tau}\right) \right] 1(t-t_{\text{и}}). \quad (12.4)$$

Графики выходного процесса, построенные при различных значениях постоянной времени  $\tau$  по формуле (12.4), изображены на рис. 12.1, **б** и 12.1, **с**. Выходное напряжение на интервале времени  $0 \leq t \leq t_{\text{и}}$  представляет собой нарастающий (заряд конденсатора), а на интервале  $t > t_{\text{и}}$  — убывающий по экспоненте процесс (разряд конденсатора).

При большой величине постоянной времени  $\tau$  ( $\tau \gg t_{\text{и}}$ ) выходной процесс на интервале времени  $0 \leq t \leq t_{\text{и}}$  близок к линейной функции, то есть осуществляется приближенное интегрирование (рис. 12.1, **б**). Поэтому условие удовлетворительного интегрирования (10.25) для импульсного сигнала принимает вид

$$\tau \gg t_{\text{и}}. \quad (12.5)$$

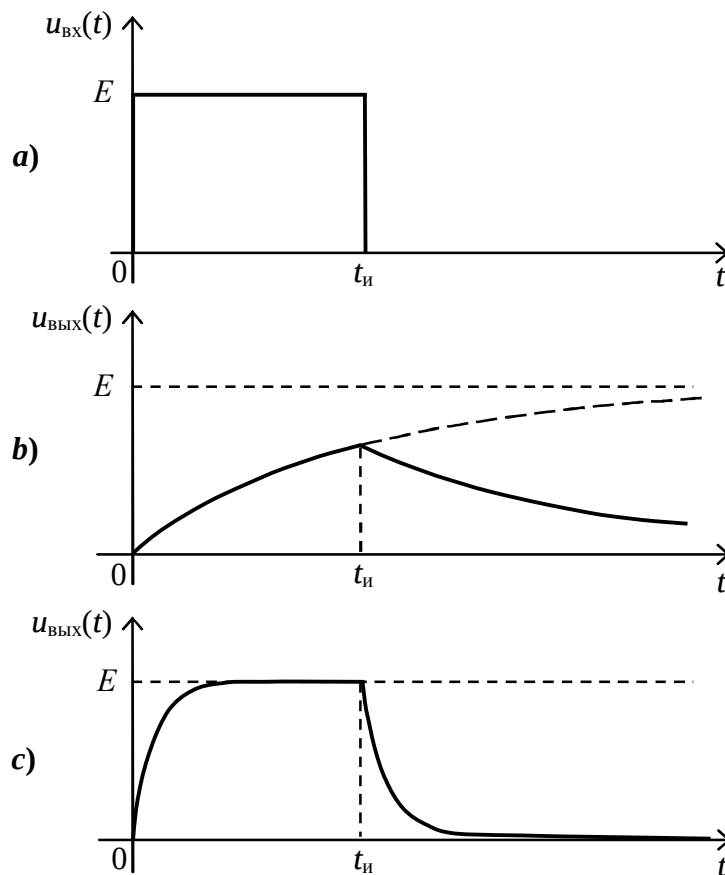


Рис. 12.1

При малой величине постоянной времени ( $\tau \ll t_{\text{и}}$ ) эффект интегрирования уменьшается, форма выходного сигнала приближенно повторяет форму входного сигнала, то есть цепь становится малоискажающей (рис. 12.1,с).

## 12.2. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через цепь дифференцирующего типа

Рассмотрим прохождение видеоимпульса прямоугольной формы (рис. 12.1,а) через простейшую цепь дифференцирующего типа, схемы которой изображены на рис. 10.4.

Изображение выходного напряжения в соответствии с (11.9) и с учетом (10.26) и (12.2) равно

$$U_{\text{вых}}(p) = E \frac{1}{(p + 1/\tau)} - E \frac{1}{(p + 1/\tau)} \exp(-pt_{\text{и}}). \quad (12.6)$$

Определим выходное напряжение (оригинал), воспользовавшись таблицей соответствия оригиналов и изображений (см. приложение):

$$u_{\text{вых}}(t) = E \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] 1(t) - E \left[ \exp\left(-\frac{t-t_{\text{и}}}{\tau}\right) \right] 1(t-t_{\text{и}}). \quad (12.7)$$

Графики выходного процесса, построенные при различных значениях постоянной времени  $\tau$  по формуле (12.7), изображены на рис. 12.2,б и 12.2,с.

В момент времени  $t = 0$  происходит положительный скачок выходного напряжения от нуля до уровня  $E$ . На интервале времени  $0 < t < t_{\text{и}}$  выходное напряжение убывает (происходит заряд конденсатора). В момент времени  $t = t_{\text{и}}$  происходит отрицательный скачок выходного напряжения на величину  $-E$  (со сменой знака выходного сигнала). На интервале  $t > t_{\text{и}}$  выходное напряжение убывает по экспоненте, стремясь к нулю (происходит разряд конденсатора).

При малой величине постоянной времени  $\tau$  ( $\tau \ll t_{\text{и}}$ ) выходной сигнал представляет собой два коротких разнополярных импульса практически оди-

наковой амплитуды, то есть осуществляется приближенное дифференцирование входного сигнала (рис. 12.2,*b*). Поэтому условие удовлетворительного дифференцирования (10.30) для импульсного сигнала принимает вид

$$\tau \ll t_{и} . \quad (12.8)$$

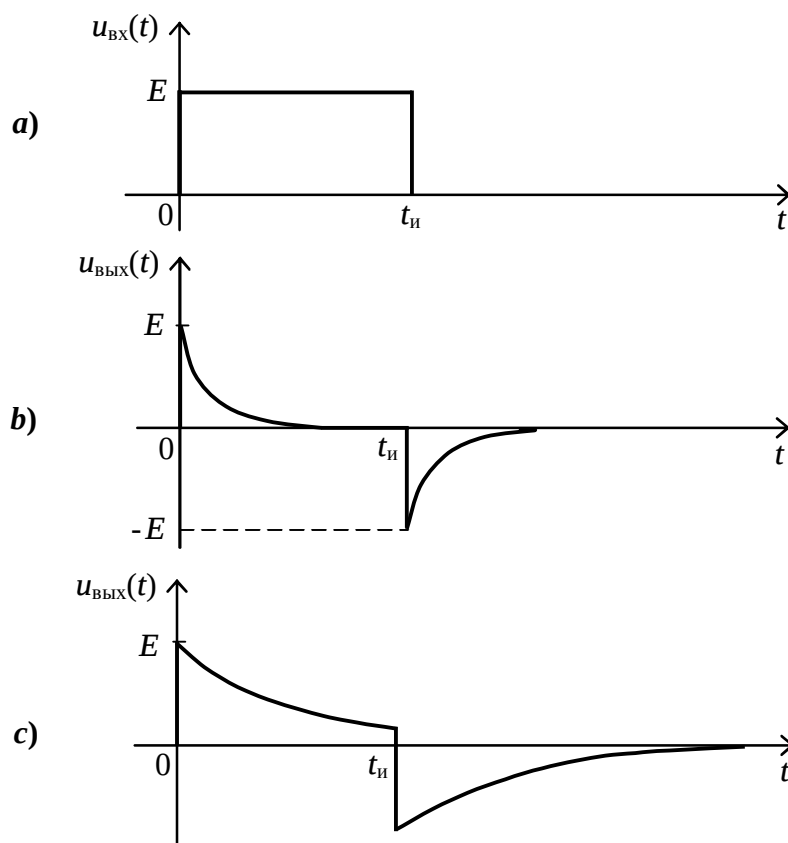


Рис. 12.2

При большой величине постоянной времени ( $\tau \gg t_{и}$ ) эффект дифференцирования уменьшается, форма выходного сигнала приближенно повторяет форму входного сигнала, то есть цепь становится малоискажающей (рис. 12.2,*c*).

### 12.3. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через апериодический усилитель

Рассмотрим прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через апериодический усилитель, схема которого изображена на рис. 10.6.

В пункте 10.4.3 показано, что апериодический усилитель по своим свой-

ствам соответствует цепи интегрирующего типа. Отличие в ККП усилителя состоит в наличии эффекта усиления (коэффициента  $K_0$ ) и эффекта инверсии (знака минус). Отсюда следует, что характер искажений импульса при усилении будет таким же, как и при прохождении этого импульса через цепь интегрирующего типа. С учетом (12.4) запишем выражение для напряжения на выходе апериодического усилителя в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = -EK_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \right] 1(t) + EK_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t-t_{\text{и}}}{\tau_0}\right) \right] 1(t-t_{\text{и}}). \quad (12.9)$$

Этот процесс изображен на рис. 12.3. Таким образом, при усилении импульсных сигналов апериодический усилитель вносит искажения в их форму.

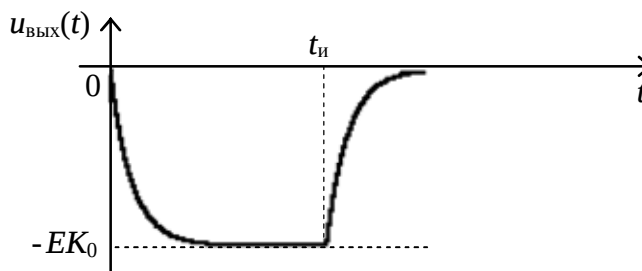


Рис. 12.3

Искажения формы импульса при прохождении его через апериодический усилитель возникают из-за влияния паразитной емкости  $C_0$ . Искажения проявляются в увеличении длительностей переднего и заднего фронтов импульса. Причем, длительности фронтов тем больше, чем меньше полоса пропускания апериодического усилителя (чем больше постоянная времени выходной цепи усилителя).

#### 12.4. Прохождение радиосигнала с амплитудной модуляцией через частотно-избирательную цепь

Рассмотрим прохождение радиосигнала с тональной амплитудной модуляцией через простейший резонансный усилитель, схема которого изображена на рис. 10.10.

Полагая для удобства в формуле (8.9)  $\theta_0 = \nu = 0$ , получаем выражение

для входного сигнала

$$a_{\text{вх}}(t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t). \quad (12.10)$$

В соответствии с (8.14) представим входной сигнал в виде суммы трех гармонических составляющих (несущей, верхней боковой и нижней боковой) с частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_{\text{в}} = \omega_0 + \Omega$ ,  $\omega_{\text{н}} = \omega_0 - \Omega$  соответственно:

$$a_{\text{вх}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t] + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t]. \quad (12.11)$$

Поскольку резонансный усилитель рассматривается в линейном приближении, то, в соответствии с принципом суперпозиций, выходной сигнал равен сумме трех сигналов, вызываемых каждой из гармонических составляющих входного сигнала

$$a_{\text{вых}}(t) = a_{1\text{вых}}(t) + a_{2\text{вых}}(t) + a_{3\text{вых}}(t), \quad (12.12)$$

где  $a_{1\text{вых}}(t)$  — реакция усилителя на несущее колебание;  $a_{2\text{вых}}(t)$  — реакция усилителя на верхнюю боковую составляющую;  $a_{3\text{вых}}(t)$  — реакция усилителя на нижнюю боковую составляющую.

**Рассмотрим случай точной настройки**, при котором резонансная частота усилителя равна несущей частоте входного сигнала:  $\omega_p = \omega_0$ . На рис. 12.4. изображены АЧХ и ФЧХ усилителя, а также спектрограмма амплитуд входного сигнала для этого случая.

С учетом (10.45) и (10.46) находим составляющие выходного сигнала:

$$a_{1\text{вых}}(t) = A_0 K_{\text{max}} \cos(\omega_0 t + \pi) = -A_0 K_{\text{max}} \cos(\omega_0 t); \quad (12.13)$$

$$a_{2\text{вых}}(t) = \frac{-A_0 M K_{\text{max}}}{2\sqrt{1+\xi_{\text{в}}^2}} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_{\text{в}}]; \quad (12.14)$$

$$a_{3\text{вых}}(t) = \frac{-A_0 M K_{\text{max}}}{2\sqrt{1+\xi_{\text{н}}^2}} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_{\text{н}}]. \quad (12.15)$$

В приведенных формулах  $\xi_B, \xi_H, \varphi_B, \varphi_H$  — обобщенные расстройки и фазовые сдвиги относительно величины  $\pi$  для верхней и нижней боковых составляющих спектра входного сигнала соответственно.

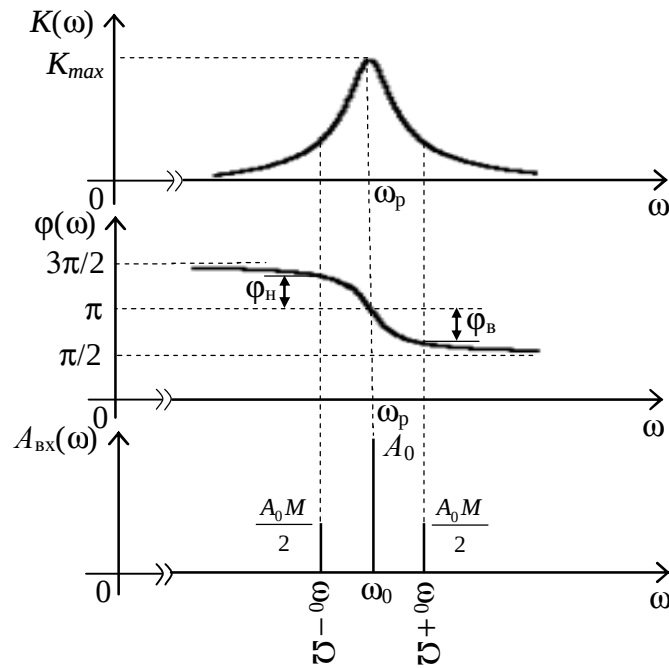


Рис. 12.4

В соответствии с (10.47) при малых расстройках можно положить:

$$\xi_B \approx -\xi_H \approx \Omega \tau_{кэ}; \quad \varphi_H \approx -\varphi_B = \varphi \approx \arctg(\Omega \tau_{кэ}).$$

С учётом этого, подставив (12.13)...(12.15) в (12.12), получим

$$a_{\text{вых}}(t) = -A_0 K_{\text{max}} [1 + M_{\text{вых}} \cos(\Omega t - \varphi)] \cos(\omega_0 t), \quad (12.16)$$

где  $M_{\text{вых}}$  — коэффициент амплитудной модуляции выходного сигнала, определяемый соотношением

$$M_{\text{вых}} \cong \frac{M}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau_{кэ}^2}}. \quad (12.17)$$

Проведенный анализ показывает, что при точной настройке:

— сигнал на выходе резонансного усилителя сохраняет тональную АМ, что следует из формулы (12.16);

— коэффициент модуляции выходного сигнала меньше коэффициента

модуляции входного сигнала, причем, чем больше модулирующая частота  $\Omega$ , тем меньше  $M_{\text{вых}}$ , что вытекает из формулы (12.17);

— огибающая выходного сигнала запаздывает по фазе относительно огибающей входного сигнала на угол  $\varphi$ .

Таким образом, при прохождении АМ радиосигнала через избирательную цепь возникают искажения, уменьшить которые можно, расширив полосу пропускания резонансного усилителя. Однако это приведет к ухудшению частотной избирательности. На практике приходится идти на компромисс, при котором искажения не превышают допустимой величины при заданной избирательности. Если компромисса достичь не удастся, то необходимо использовать более сложные частотно-избирательные цепи.

**Рассмотрим случай расстройки**, при котором  $\omega_p \neq \omega_0$ . Это соответствует смещению спектрограммы входного сигнала относительно резонансной частоты усилителя на рис. 12.4. При этом несущее колебание приобретает дополнительный фазовый сдвиг  $\varphi_0$  относительно  $\pi$ . Кроме того, в этом случае амплитуды боковых составляющих в выходном сигнале не одинаковы, поскольку коэффициенты передачи для боковых составляющих

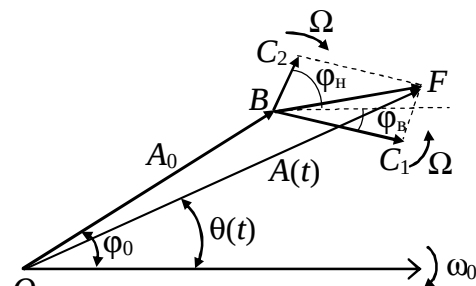


Рис. 12.5

различны. Фазовые сдвиги  $\varphi_B$ ,  $\varphi_H$  для боковых составляющих также различны по величине. Данная ситуация при  $\omega_p > \omega_0$  иллюстрируется векторной диаграммой, изображенной на рис. 12.5. При вращении векторов нижней и верхней боковых составляющих изменяется как длина  $A(t)$ , так и угловое положение  $\theta(t)$  суммарного вектора  $OF$ . Это говорит о том, что в выходном сигнале кроме амплитудной модуляции возникает паразитная угловая модуляция. При этом амплитуда сигнала изменяется по периодическому, но не гармоническому закону. Поэтому в огибающей выходного сигнала возникают высшие гармоники, которые проявятся после амплитудного детектирования этого сигнала в виде нелинейных искажений.

## 12.5. Прохождение радиосигнала с частотной модуляцией через частотно-избирательную цепь

Рассмотрим прохождение радиосигнала с тональной ЧМ через резонансный усилитель. Пусть мгновенная частота входного сигнала изменяется по косинусоидальному закону ( $\nu = 0$ )

$$\omega_{\text{вх}}(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + \omega_d \cos(\Omega t). \quad (12.18)$$

Положив в (8.35)  $\theta_0 = 0$ , получаем выражение для сигнала на входе

$$a_{\text{вх}}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t)]. \quad (12.19)$$

Рассмотрим только случай точной настройки, при котором  $\omega_p = \omega_0$ . Решение задачи выполним с учетом того, что изменение частоты входного сигнала происходит намного медленнее по сравнению с изменением мгновенного значения сигнала. Тогда с достаточной для практики точностью амплитуду и фазу выходного сигнала можно определить, используя АЧХ и ФЧХ усилителя. Этот метод называют методом мгновенной частоты [1].

Рассчитаем амплитуду выходного сигнала и его полную фазу с учетом (10.45) и (10.46):

$$A_{\text{вых}}(t) = A_0 K[\omega(t)] = \frac{A_0 K_{\text{max}}}{\sqrt{1 + \xi^2(t)}}; \quad (12.20)$$

$$\psi_{\text{вых}}(t) = \psi_{\text{вх}}(t) + \phi[\omega(t)] = \omega_0 t + m \sin \Omega t + \pi - \arctg[\xi(t)]. \quad (12.21)$$

Учитывая (10.47) и (12.18), преобразуем (12.20), (12.21) к виду:

$$A_{\text{вых}}(t) = \frac{A_0 K_{\text{max}}}{\sqrt{1 + [\Delta\omega(t)\tau_{\text{кз}}]^2}} = \frac{A_0 K_{\text{max}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega_d^2 \tau_{\text{кз}}^2}{2} [1 + \cos(2\Omega t)]}}; \quad (12.22)$$

$$\psi_{\text{вых}}(t) = \omega_0 t + m \sin \Omega t + \pi - \arctg[\omega_d \tau_{\text{кз}} \cos(\Omega t)]. \quad (12.23)$$

С учетом (12.23) рассчитаем частоту выходного сигнала:

$$\omega_{\text{вых}}(t) = \frac{d[\psi_{\text{вых}}(t)]}{dt} = \omega_{\text{вх}}(t) - \frac{d[\arctg(\omega_d \tau_{\text{кз}} \cos \Omega t)]}{dt}. \quad (12.24)$$

Из (12.22) следует, что сигнал на выходе резонансного усилителя приобретает паразитную АМ, которая происходит с удвоенной частотой модуляции. Этот вид искажений объясняется неравномерностью АЧХ усилителя.

Из (12.24) следует, что частота выходного сигнала отличается от частоты входного сигнала на величину некоторого приращения, которое изменяется во времени. Этот вид искажений объясняется нелинейностью ФЧХ усилителя. Исключить указанные искажения полностью не представляется возможным. Уменьшить их можно путем уменьшения добротности контура, что расширит полосу пропускания, то есть ухудшит частотную избирательность.

## 12.6. Прохождение манипулированных радиосигналов через частотно-избирательную цепь

**Манипуляция** — это разновидность модуляции, при которой модулируемый параметр радиосигнала изменяют дискретно (скачкообразно).

В радиосистемах манипуляцию широко применяют для передачи дискретных сообщений, в частности, цифровых сигналов. Режим работы радиосистемы с использованием манипуляции называют **телеграфным**.

Телеграфный режим работы обеспечивает повышенную помехозащищенность канала передачи информации.

В зависимости от того, какой параметр радиосигнала подвергается изменению, различают три вида манипуляции: амплитудную, частотную и фазовую.

### 12.6.1. Прохождение радиосигналов с амплитудной манипуляцией через частотно-избирательную цепь

Рассмотрим прохождение радиосигнала с манипуляцией амплитуды (рис. 12.6,*а*) через резонансный усилитель для случая точной настройки. Сигнал на входе усилителя запишем в виде

$$a_{\text{вх}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) 1(t) . \quad (12.25)$$

Решим задачу, используя метод комплексной огибающей. Физическая огибающая входного сигнала  $A_{\text{вх}}(t)$  представляет собой скачок постоянного напряжения (рис. 12.6,*b*). Поскольку  $\theta(t) = 0$ , то комплексная огибающая входного сигнала в соответствии с (10.14) имеет вид

$$\dot{A}_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}}(t)e^{j\theta(t)} = A_{\text{вх}}(t) = A_0 1(t) . \quad (12.26)$$

В соответствии с методом комплексной огибающей задача сводится к прохождению скачка постоянного напряжения через апериодический усилитель. Эта задача была решена в подразделе 12.3. В соответствии с (12.9) комплексная огибающая выходного сигнала при точной настройке равна

$$\dot{A}_{\text{вых}}(t) = -A_0 K_{\text{max}} [1 - \exp(-t/\tau_{\text{кэ}})] 1(t) . \quad (12.27)$$

Форма физической огибающей выходного сигнала изображена на рис. 12.6,*с*. Тогда радиосигнал на выходе усилителя можно записать в виде

$$a_{\text{вых}}(t) = \text{Re} \left[ \dot{A}_{\text{вых}}(t) e^{j\omega_0 t} \right] = -A_0 K_{\text{max}} [1 - \exp(-t/\tau_{\text{кэ}})] \cos(\omega_0 t) 1(t) . \quad (12.28)$$

Выходной сигнал резонансного усилителя, построенный в соответствии с (12.28), изображен на рис. 12.6,*d*. Из этого рисунка следует, что огибающая радиосигнала на выходе искажается. Характер искажений заключается в том, что при мгновенном нарастании огибающей сигнала на входе усилителя, на его выходе огибающая нарастает плавно, устанавливаясь в течение некоторого времени. В установившемся (стационарном) режиме амплитуда выходного сигнала равна  $A_{\text{ст}} = A_0 K_{\text{max}}$ .

Обычно под временем установления сигнала понимают время, в течение которого огибающая радиосигнала достигает 90% от установившегося значения. На основании этого с учетом (12.27) составим уравнение

$$1 - \exp(-t_y / \tau_{кз}) = 0,9, \quad (12.29)$$

где  $t_y$  — время установления.

Решая уравнение (12.29) относительно  $t_y$ , находим

$$t_y = \tau_{кз} \ln 10 \approx 2,3 \tau_{кз}. \quad (12.30)$$

Таким образом, время установления прямо пропорционально постоянной времени частотно-избирательной цепи. Уменьшить искажения можно путем уменьшения постоянной времени, что соответствует снижению добротности.

При неточной настройке резонансного усилителя ( $\omega_p \neq \omega_0$ ) переходной процесс установления амплитуды на выходе носит колебательный характер с частотой осцилляций  $\omega_p - \omega_0 = \Delta\Omega$  [1]. Установившееся значение амплитуды выходного сигнала в этом случае равно

$$A_{ст} = \frac{A_0 K_{max}}{\sqrt{1 + (\Delta\Omega \tau_{кз})^2}}. \quad (12.31)$$

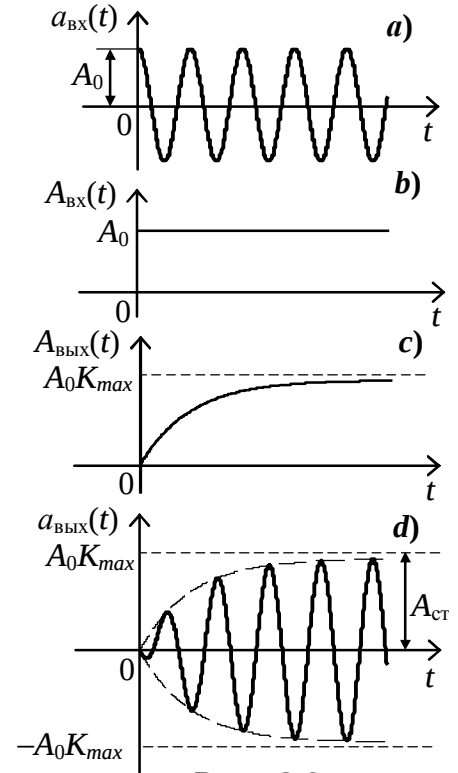


Рис. 12.6

### 12.6.2. Прохождение радиоимпульса с прямоугольной огибающей через частотно-избирательную цепь

Рассмотрим прохождение радиоимпульса (рис. 12.7,а) через резонансный усилитель. Для расчета воспользуемся методом комплексной огибающей. При точной настройке резонансного усилителя ( $\omega_p = \omega_0$ ) задача сводится к прохождению прямоугольного видеоимпульса через апериодический усилитель. Тогда, используя (12.9), приходим к следующему выражению для выходного сигнала:

$$a_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0; \\ -A_0 K_{\text{max}} [1 - \exp(-t/\tau_{\text{кэ}})] \cos(\omega_0 t), & \text{if } 0 \leq t \leq t_{\text{и}}; \\ -A_{\text{ВЫХ}}(t_{\text{и}}) \exp[(t - t_{\text{и}})/\tau_{\text{кэ}}] \cos(\omega_0 t), & \text{if } t > t_{\text{и}}, \end{cases} \quad (12.32)$$

где  $A_{\text{ВЫХ}}(t_{\text{и}})$  — значение огибающей выходного сигнала в момент времени  $t = t_{\text{и}}$ , определяемое соотношением

$$A_{\text{ВЫХ}}(t_{\text{и}}) = A_0 K_{\text{max}} [1 - \exp(-t_{\text{и}}/\tau_{\text{кэ}})]. \quad (12.33)$$

Выходной сигнал усилителя для данного случая изображен на рис. 12.7, *b*. Искажения, вносимые резонансным усилителем, проявляются в увеличении времени нарастания (длительности переднего фронта) и времени

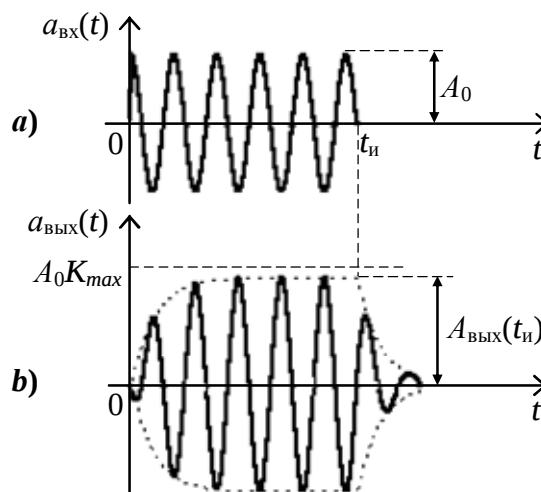


Рис. 12.7

спада (длительности заднего фронта) огибающей радиоимпульса. Время нарастания и спада огибающей радиоимпульса зависят от эквивалентной постоянной времени контура  $\tau_{\text{кэ}}$ , то есть от полосы пропускания резонансного усилителя. С уменьшением полосы пропускания искажения увеличиваются.

Если длительность входного радиоимпульса сделать меньше, чем время установления огибающей (12.30), то это приведет к существенному уменьшению амплитуды выходного радиоимпульса, поскольку процесс на выходе не успеет установиться за время длительности входного импульса. А это в свою очередь приведет к ухудшению помехоустойчивости системы передачи дискретной информации, поскольку усиливается влияние шумов. Таким образом, предельная скорость передачи дискретной информации по радиоканалу (количество импульсов в единицу времени) зависит от полосы пропускания избирательной системы. Чем больше полоса пропускания цепи, тем выше предельная скорость передачи дискретной информации, которую называют пропускной способностью цепи.

При неточной настройке усилителя ( $\omega_p \neq \omega_0$ ) процесс установления амплитуды выходного сигнала при  $0 \leq t \leq t_{\text{и}}$  носит колебательный характер [1]. При  $t > t_{\text{и}}$  сигнал на выходе представляет собой затухающий по экспоненте колебательный процесс. Частота осцилляций этого процесса равна частоте свободных колебаний в цепи, которая в высокодобротной узкополосной цепи практически совпадает с резонансной частотой.

### 12.6.3. Прохождение радиосигнала с фазовой манипуляцией через частотно-избирательную цепь

Рассмотрим случай фазовой манипуляции, при котором скачок фазы осуществляют на величину, равную  $\pi$ . Этот случай иллюстрируется рис. 12.8,*a*. Рассмотрим прохождение такого сигнала через резонансный усилитель. Входной сигнал можно записать в виде суммы двух колебаний

$$a_{\text{вх}}(t) = a_1(t) + a_2(t), \quad (12.34)$$

где  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  определяются соотношениями:

$$a_1(t) = \begin{cases} -A_0 \sin(\omega_0 t), & \text{if } t \leq 0; \\ 0, & \text{if } t > 0; \end{cases} \quad (12.35)$$

$$a_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq 0; \\ A_0 \sin(\omega_0 t), & \text{if } t > 0. \end{cases} \quad (12.36)$$

С учетом полученных ранее результатов реакции резонансного усилителя на каждый из этих колебаний при точной настройке ( $\omega_p = \omega_0$ ) можно записать следующим образом:

$$a_{1\text{вых}}(t) = \begin{cases} A_0 K_{\text{max}} \sin(\omega_0 t), & \text{if } t \leq 0; \\ A_0 K_{\text{max}} \exp(-t/\tau_{\text{кз}}) \sin(\omega_0 t), & \text{if } t > 0; \end{cases} \quad (12.37)$$

$$a_{2\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq 0; \\ -A_0 K_{\text{max}} [1 - \exp(-t/\tau_{\text{кэ}})] \sin(\omega_0 t), & \text{if } t > 0. \end{cases} \quad (12.38)$$

В соответствии с принципом суперпозиций сигнал на выходе равен

$$a_{\text{ВЫХ}}(t) = a_{1\text{ВЫХ}}(t) + a_{2\text{ВЫХ}}(t). \quad (12.39)$$

Подставляя (12.37) и (12.38) в (12.39), получаем

$$a_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} A_0 K_{\text{max}} \sin(\omega_0 t), & \text{if } t \leq 0; \\ A_0 K_{\text{max}} [2 \exp(-t/\tau_{\text{кэ}}) - 1] \sin(\omega_0 t), & \text{if } t > 0. \end{cases} \quad (12.40)$$

График выходного процесса, построенный в соответствии с (12.40), изображен на рис. 12.8, **b**. Из графика следует, что манипуляция фазы на величину  $\Delta\theta = \pi$  сохранилась, но момент манипуляции на выходе усилителя запаздывает на время  $t_0$ . Кроме того, в выходном сигнале возникает процесс установления амплитуды, который характеризуется переходом огибающей через нуль в точке  $t_0$ . Этот момент времени определим, приравняв огибающую выходного процесса к нулю. Используя (12.40), составим уравнение

$$2 \exp(-t_0/\tau_{\text{кэ}}) - 1 = 0, \quad (12.41)$$

решая которое относительно  $t_0$ , находим:

$$t_0 \approx 0,69\tau_{\text{кэ}}. \quad (12.42)$$

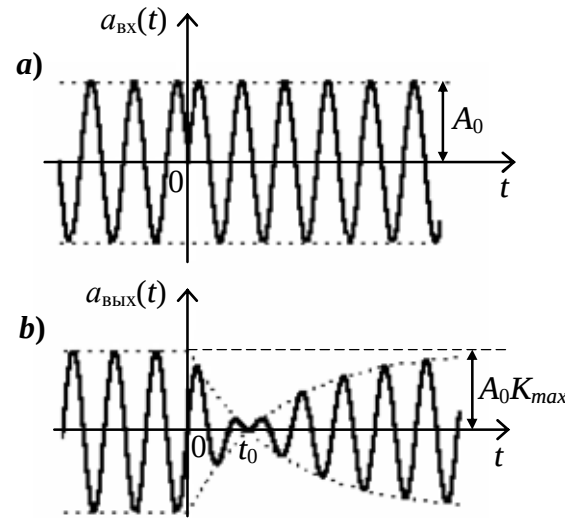


Рис. 12.8

Таким образом, искажения сигнала можно снизить, уменьшив постоянную времени  $\tau_{\text{кэ}}$ , но следует помнить, что это приведет к ухудшению избирательности.

Анализ показывает, что при неточной настройке наблюдается процесс плавного установления фазы выходного сигнала [1].

#### 12.6.4. Прохождение радиосигнала с частотной манипуляцией через частотно-избирательную цепь

Рассмотрим прохождение радиосигнала с манипуляцией частоты (рис. 12.9,*a*) через резонансный усилитель. В момент времени  $t = 0$  частота радиосигнала на входе усилителя скачком изменяется от  $\omega_1$  до  $\omega_2 = \omega_1 + 2\Delta\omega$  (см. рис. 12.9,*b*). Резонансный усилитель настраивают на среднюю частоту:  $\omega_p = \omega_1 + \Delta\omega = \omega_2 - \Delta\omega$ .

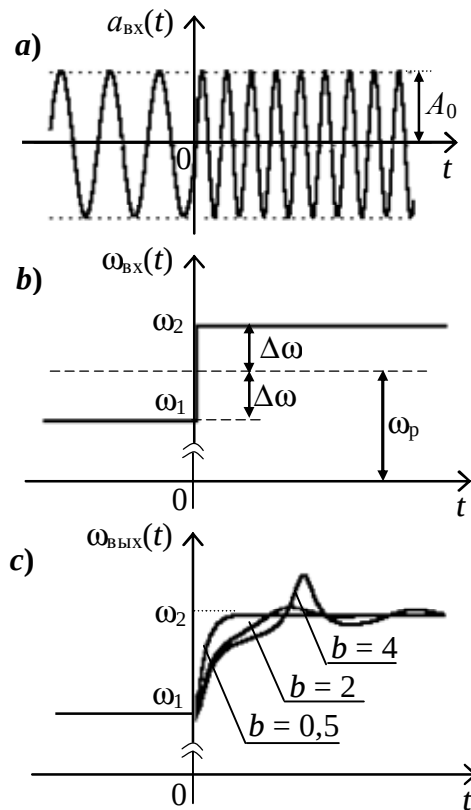


Рис. 12.9

возрастает время установления частоты.

Помимо искажения закона изменения частоты наблюдается паразитная амплитудная модуляция выходного радиосигнала. Начиная с момента манипуляции, амплитуда сигнала сначала возрастает, проходит через максимум, а затем уменьшается до величины

$$A_{\text{ст}} = \frac{A_0 K_{\text{max}}}{\sqrt{1 + (\Delta\omega\tau_{\text{кэ}})^2}} = \frac{A_0 K_{\text{max}}}{\sqrt{1 + b^2}}. \quad (12.43)$$

Процесс установления огибающей выходного сигнала также как и про-

Методика расчета переходного процесса на выходе усилителя совпадает с методикой, примененной в предыдущем пункте. Подробные выкладки приведены в [1]. Приведем лишь результаты. Анализ показывает, что частота выходного сигнала будет изменяться плавно. Характер переходного процесса зависит от параметра  $b = \Delta\omega\tau_{\text{кэ}}$ . Процесс установления частоты выходного сигнала носит аperiodический характер при  $b \leq 1$ , и колебательный характер при  $b > 1$  (см. рис. 12.9,*c*). С увеличением параметра  $b$  искажения закона изменения частоты возрастают, в частности, возрастает частотный выброс, а также

цесс установления частоты, может носить апериодический (при  $b \leq 1$ ) и колебательный (при  $b > 1$ ) характер. Уменьшение величины искажений возможно путем уменьшения параметра  $b$ . Это достигается двумя путями: либо уменьшением величины скачка частоты  $\Delta\omega$ , либо уменьшением добротности избирательной системы (уменьшение  $\tau_{кэ}$ ). Необходимо помнить, что в последнем случае это приведет к ухудшению избирательности.

## 12.7. Пример решения задачи

### 12.7.1. Условие

На вход УВЧ вещательного приемника, выполненного на основе одноконтурного колебательного контура, подан радиосигнал с ТАМ со следующими параметрами: коэффициент модуляции  $M = 0,5$ ; несущая частота  $f_0 = 1\text{МГц}$ . Резонансная частота УВЧ равна частотой несущего колебания:  $f_p = f_0$ . Частота модулирующего сигнала  $F = 1\text{кГц}$ . При этом коэффициент модуляции на выходе усилителя равен  $M_{\text{вых}} = 0,4$ . Рассчитать эквивалентную добротность резонансного контура и степень подавления паразитного сигнала промежуточной частоты ( $f_{\text{пр}} = 465\text{кГц}$ ), которое обеспечивает данный УВЧ.

### 12.7.2. Решение

Из формулы (12.17) выразим и рассчитаем эквивалентную постоянную времени контура

$$\tau_{кэ} = \frac{1}{2\pi F} \sqrt{\frac{M}{M_{\text{вых}}} - 1} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3} \sqrt{\left(\frac{0,5}{0,4}\right) - 1} = 1,194 \cdot 10^{-4} \text{ с}. \quad (12.44)$$

Используя формулу (9.48), получим выражение для эквивалентной добротности контура и рассчитаем ее с учетом (12.44):

$$Q_{кэ} = \frac{\omega_p \tau_{кэ}}{2} = \frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 1,194 \cdot 10^{-4}}{2} = 80,72. \quad (12.45)$$

По формуле (9.42), используя (12.45), рассчитаем обобщенную рас-

стройку контура на промежуточной частоте

$$\xi_{\text{пр}} = Q_{\text{кэ}}(f_{\text{пр}}/f_p - f_p/f_{\text{пр}}) = 80,75(0,465/1 - 1/0,465) = -136,057. \quad (12.46)$$

Используя формулу (10.45), рассчитаем относительный коэффициент передачи на промежуточной частоте (по отношению к коэффициенту передачи  $K_{\text{max}}$  на резонансной частоте):

$$\frac{K(f_{\text{пр}})}{K_{\text{max}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{пр}}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (-136,057)^2}} = 0,735 \cdot 10^{-2}. \quad (12.47)$$

Таким образом, коэффициент передачи по паразитному каналу промежуточной частоты в 136 раз меньше, чем для принимаемого канала. Степень подавления паразитных сигналов принято оценивать, выражая относительный коэффициент передачи в децибелах. С учетом (12.47) подавление паразитного сигнала промежуточной частоты равно

$$20 \lg \left( \frac{K(f_{\text{пр}})}{K_{\text{max}}} \right) = 20 \lg(0,735 \cdot 10^{-2}) = -42,68 \text{ дБ}.$$

## 13. ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В АКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

### 13.1. Определение обратной связи

Обратная связь широко используется в радиоэлектронике, поскольку позволяет улучшать свойства радиоэлектронных систем и придавать им новые качества. Рассмотрим это понятие, опираясь на представления, изложенные в работе [9].

Пусть независимая переменная  $q$  порождает две зависимые переменные  $x_1$  и  $x_2$ . Связь между этими переменными может осуществляться через различные каналы. Если переменная  $x_1$  влияет на переменную  $x_2$ , а обратное влияние отсутствует, то такой канал называют необратимым (невзаимным). Энергия по необратимому каналу передается только в одном направлении. Такая связь называется односторонней, при этом обратная связь отсутствует. Если энергия по каналу может в равной степени передаваться в противоположных направлениях, то такой канал называют обратимым (взаимным). Такая связь называется двухсторонней.

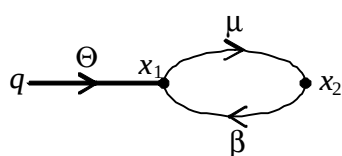


Рис. 13.1

На рис. 13.1 изображен граф, соответствующий двусторонней связи переменных  $x_1$  и  $x_2$ . На этом рисунке обозначены:  $\Theta$  — входная передача;  $\mu$  — прямая передача от  $x_1$  к  $x_2$ ;  $\beta$  — обратная передача

от  $x_2$  к  $x_1$ . Прямая и обратная передачи образуют замкнутый контур.

Наличие двухсторонней связи является необходимым, но не достаточным условием для существования обратной связи. Двухсторонняя связь может быть названа обратной связью лишь в том случае, когда переменные  $x_1$  и

$x_2$  связаны физически различными каналами и при разрыве одного из них передача энергии по другому каналу не исчезает. Следовательно, обратная связь между переменными  $x_1$  и  $x_2$  существует, если выполняются следующие условия:

1) передача прямого канала не обращается в нуль при разрыве обратного канала, то есть:  $\mu \neq 0$  при  $\beta = 0$ .

2) передача обратного канала не обращается в нуль при разрыве прямого канала, то есть:  $\beta \neq 0$  при  $\mu = 0$ .

Эти условия выполняются в том случае, когда хотя бы один из каналов прямой или обратной передачи необратим. Тогда в образованном замкнутом контуре энергия передается только в одном направлении.

Из сказанного вытекает определение обратной связи: это связь между двумя зависимыми переменными, возникающая при охвате этих переменных замкнутым контуром с односторонней передачей воздействий в контуре.

Для графа, изображенного на рис. 13.1, справедлива следующая система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \Theta_0 q + \beta x_2 ; \\ x_2 = \mu x_1 , \end{cases} \quad (13.1)$$

где  $\Theta_0$  — входная передача при разомкнутом контуре.

Выражая из второго уравнения системы (13.1) переменную  $x_1$  и подставляя ее в первое уравнение этой системы, приходим к соотношению

$$x_2(1 - \beta\mu) = q\Theta_0\mu . \quad (13.2)$$

Из (13.2) следует, что передаточная характеристика между независимой переменной  $q$  и зависимой переменной  $x_2$  для случая двухсторонней связи определяется формулой

$$F = \frac{x_2}{q} = \frac{\Theta_0\mu}{1 - \beta\mu} . \quad (13.3)$$

Если оба канала прямой и обратной передачи необратимы, то при разрыве одного из них передача другого не изменяется. Если же один из каналов обратим, то при его разрыве передача другого канала изменяется.

В радиоэлектронных цепях существование обратной связи возможно при использовании активных (усилительных) компонентов, которые являются невзаимными устройствами. Очень часто, усилительный элемент устанавливают в канале прямой передачи, а канал обратной передачи является взаимным устройством. Это приводит (как указывалось) к зависимости передачи прямого канала  $\mu$  от передачи обратного канала  $\beta$ , что требует учета этого влияния. В этом случае (при обратимом канале обратной передачи) влияние обратной связи на передаточную функцию определяется отношением

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\mu_0}{\mu} (1 - \beta\mu), \quad (13.4)$$

где  $F_0$  и  $\mu_0$  — передаточная характеристика и значение прямой передачи  $\mu$  при разорванном канале обратной передачи ( $\beta = 0$ ).

Практическая независимость передач  $\mu$  и  $\beta$  может быть обеспечена при выполнении условий развязки: выходные сопротивления каналов должны быть много меньше, чем их входные сопротивления. Это возможно также при использовании активных компонентов, свойства которых близки к идеальным (например, операционный усилитель, который имеет выходное сопротивление близкое к нулю и очень большое входное сопротивление).

### 13.2. Передаточная функция усилителя с обратной связью

При дальнейшем рассмотрении с целью упрощения будем считать, что условия независимости каналов прямой и обратной передач, оговоренные в предыдущем подразделе, выполняются. Кроме того, будем считать, что источник сигнала представляет собой идеальный генератор напряжения, а усилитель охвачен последовательной по входу обратной связью. Эти ограничения позволяют упростить рассмотрение задачи.

Структурная схема системы, представляющей собой усилитель, охваченный обратной связью, изображена на рис.

13.2. На этом рисунке:  $K_y(j\omega)$  — комплексный коэффициент передачи усилителя;  $K_{oc}(j\omega)$  — комплексный коэффициент передачи четырехполюсника обратной связи.

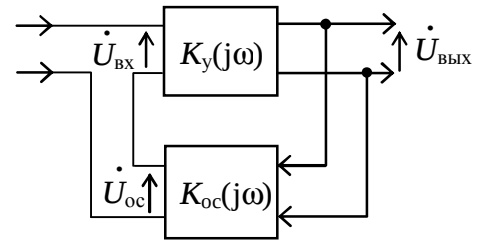


Рис. 13.2

С учетом действия обратной связи комплексный коэффициент передачи системы определяется соотношением

$$K(j\omega) = \dot{U}_{\text{ВЫХ}} / \dot{E} , \quad (13.5)$$

где  $\dot{E}$  и  $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$  — комплексные амплитуды напряжений на входе и выходе системы соответственно.

Напряжение на выходе четырехполюсника обратной связи  $\dot{U}_{oc}$  равно

$$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_{\text{ВЫХ}} K_{oc}(j\omega) .$$

Напряжение на входе усилителя  $\dot{U}_{\text{ВХ}}$ , при соблюдении оговоренных ранее условий, равно сумме напряжения на входе системы и напряжения обратной связи:

$$\dot{U}_{\text{ВХ}} = \dot{E} + \dot{U}_{oc} = \dot{E} + \dot{U}_{\text{ВЫХ}} K_{oc}(j\omega) . \quad (13.6)$$

Напряжение на выходе определим из очевидного соотношения

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \dot{U}_{\text{ВХ}} K_y(j\omega) = \left[ \dot{E} + \dot{U}_{\text{ВЫХ}} K_{oc}(j\omega) \right] K_y(j\omega) . \quad (13.7)$$

Решая уравнение (13.7) относительно  $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$  и подставляя полученное значение в (13.5), получаем

$$K(j\omega) = \frac{K_y(j\omega)}{1 - K_y(j\omega)K_{oc}(j\omega)}. \quad (13.8)$$

Выражение (13.8) представляет собой комплексный коэффициент передачи системы с обратной связью.

Полученная формула носит название формулы Найквиста. Очевидно, что эта формула является частным случаем формулы (13.3), если положить:  $F = K(j\omega)$ ;  $\Theta_0 = 1$ ;  $\mu = K_y(j\omega)$ ;  $\beta = K_{oc}(j\omega)$ .

Из (13.8) следует, что комплексный коэффициент передачи системы зависит как от свойств усилителя, так и от свойств цепи обратной связи.

Если в результате введения обратной связи коэффициент усиления (модуль комплексного коэффициента передачи) уменьшается, то такую обратную связь называют отрицательной. В этом случае напряжение обратной связи складывается с входным сигналом в противофазе, что вызывает уменьшение сигнала на входе усилителя.

Если в результате введения обратной связи коэффициент усиления увеличивается, то такую обратную связь называют положительной. В этом случае напряжение обратной связи складывается с входным сигналом синфазно, что вызывает увеличение сигнала на входе усилителя. При этом если на какой-то частоте произведение  $K_y(j\omega)K_{oc}(j\omega)$  обращается в единицу, то в соответствии с (13.8) коэффициент усиления становится бесконечно большой величиной, что физически соответствует потере устойчивости системы.

Заменяя в (13.8)  $j\omega$  на  $p$ , получаем передаточную функцию системы с обратной связью в виде

$$K(p) = \frac{K_y(p)}{1 - K_y(p)K_{oc}(p)}. \quad (13.9)$$

### 13.3. Проблема устойчивости активной линейной цепи

Об устойчивости цепи судят по ее поведению в свободном режиме. Свободным режимом называют режим, при котором на цепь не подают внешние

воздействия. **Устойчивой** называют цепь, процессы в которой в **свободном режиме** имеют затухающий характер. Иначе говоря, после прекращения внешнего возмущающего воздействия устойчивая цепь должна возвратиться в исходное состояние.

Из (13.9) следует, что потеря устойчивости может произойти только в активной цепи (усилителе), охваченной цепью положительной обратной связи. На практике в усилителях используют отрицательные обратные связи, но из-за наличия реактивных элементов схемы, в том числе паразитных (междуэлектродные емкости усилительных элементов, емкость монтажа, индуктивности выводов и др.) эта обратная связь частотно зависима. То есть, амплитуда и начальная фаза напряжения обратной связи зависят от частоты. Это может привести к тому, что для некоторой частоты обратная связь станет чисто положительной что, как отмечалось выше, может привести к потере устойчивости. Важной задачей является оценка устойчивости линейных систем на стадии их проектирования. Такая оценка осуществляется с помощью критериев устойчивости.

#### 13.4. Критерий устойчивости Ляпунова

Из (10.3) следует, что в свободном режиме ( $f(t) = 0$ ) линейная цепь описывается однородным линейным дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0, \quad (13.10)$$

где  $x(t)$  — процесс на выходе цепи (ток или напряжение);  $n$  — порядок уравнения;  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров элементов цепи. Именно эти коэффициенты определяют свойства цепи, в частности, ее устойчивость.

Решение уравнения (13.10) имеет вид [4]:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i \exp(p_i t), \quad (13.11)$$

где  $A_i$  — коэффициенты, не зависящие от времени;  $p_i$  — корни характеристического уравнения, которое имеет вид

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (13.12)$$

Для того чтобы процесс (13.11) был затухающим, необходимо и достаточно, чтобы все корни  $p_i$  характеристического уравнения были бы отрицательными действительными числами, либо комплексными числами с отрицательными действительными частями.

Отсюда вытекает формулировка критерия устойчивости Ляпунова: **линейная цепь устойчива, если все корни характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ .**

### 13.5. Критерий устойчивости по передаточной функции

Известно (см. подраздел 10.3), что левая часть характеристического уравнения (13.12) линейной цепи совпадает со знаменателем передаточной функции этой цепи. Поэтому корни характеристического уравнения являются полюсами передаточной функции. Отсюда вытекает критерий устойчивости на основе анализа передаточной функции: **линейная цепь устойчива, если все полюса передаточной функции расположены в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ .**

Этот критерий удобно применять в тех случаях, когда известна передаточная функция цепи. При этом нет необходимости составлять дифференциальное уравнение цепи.

### 13.6. Критерий устойчивости Рауса - Гурвица

Определение корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции) при высоком порядке цепи  $n$  является трудоемкой задачей. Поэтому были разработаны критерии устойчивости, не требующие решения характеристического уравнения.

Алгебраический критерий устойчивости Рауса - Гурвица позволяет оце-

нить устойчивость цепи по коэффициентам  $a_i$  характеристического уравнения (13.9) без его решения. Согласно этому критерию [1, 2], **линейная цепь устойчива, если положительны следующие величины:**

- 1) все коэффициенты характеристического уравнения  $a_0...a_n$ ;
- 2) определитель Гурвица  $(n - 1)$ -го порядка  $D_{n-1}$ , который имеет вид

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}; \quad (13.13)$$

- 3) все главные миноры этого определителя.

### 13.7. Частотный критерий устойчивости Михайлова

Левая часть характеристического уравнения (13.12) представляет собой степенной полином (его называют характеристическим полиномом) комплексной переменной  $p$ . Запишем выражение для этого полинома

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (13.14)$$

Проведем в (13.14) замену переменной  $p$  на  $j\omega$ . В результате получим характеристический полином переменной  $j\omega$ , который представим в показательном виде через модуль  $|D(j\omega)|$  и аргумент  $\varphi(\omega)$ :

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n = |D(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (13.15)$$

Определим полное приращение аргумента  $\varphi(\omega)$ , которое возникнет при изменении частоты от нуля до  $+\infty$  для устойчивых и неустойчивых систем. Для простоты ограничимся случаем чисто действительных корней характеристического уравнения, которые обозначим как  $\alpha_i$ . В этом случае характеристический полином (13.15) можно записать в виде

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - \alpha_1)(j\omega - \alpha_2) \dots (j\omega - \alpha_n). \quad (13.16)$$

С учетом этого запишем выражение для аргумента полинома

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{-\alpha_i} \right). \quad (13.17)$$

Если цепь устойчива, то, в соответствии с критерием Ляпунова, все корни характеристического уравнения отрицательны, то есть  $\alpha_i < 0$ . Поэтому при изменении частоты от нуля до  $+\infty$  каждый из членов суммы (13.17) изменяется от нуля до  $\pi/2$  (приращение  $+\pi/2$ ). При этом полное приращение аргумента для устойчивой цепи составит

$$\Delta(\varphi) = \varphi(\infty) - \varphi(0) = n \frac{\pi}{2}. \quad (13.18)$$

Если же цепь неустойчива, то среди корней характеристического уравнения этой цепи имеется  $m$  положительных корней. Для этих корней каждый из членов суммы (13.17) при изменении частоты от нуля до  $+\infty$  изменяется от  $\pi$  до  $\pi/2$  (приращение  $-\pi/2$ ). При этом полное приращение аргумента для неустойчивой цепи составит

$$\Delta(\varphi) = \varphi(\infty) - \varphi(0) = (n - m) \frac{\pi}{2} + m \left( -\frac{\pi}{2} \right) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}. \quad (13.19)$$

Итак, для неустойчивой цепи полное приращение аргумента характеристического полинома всегда меньше, чем для устойчивой цепи такого же порядка  $n$ . Этот же результат можно получить и для комплексных корней.

Отсюда вытекает формулировка критерия Михайлова: **линейная цепь устойчива, если полное приращение аргумента характеристического полинома при изменении частоты от нуля до  $+\infty$  равно  $n\pi/2$ , где  $n$  — степень характеристического полинома.**

Удобство применения этого критерия состоит в том, что достаточно

проанализировать поведение аргумента характеристического полинома  $\Phi(\omega)$  при изменении частоты от нуля до  $+\infty$ . При этом для устойчивой цепи аргумент должен изменяться от нуля в положительном направлении и последовательно пройти  $n$  квадрантов.

### 13.8. Частотный критерий устойчивости Найквиста

В соответствии с критерием, изложенным в подразделе 13.5, для оценки устойчивости замкнутой системы достаточно знать полюса передаточной функции  $K(p)$ . Эти полюса находят, приравняв знаменатель (13.9) к нулю. В результате этого получаем уравнение

$$K_y(p)K_{oc}(p) = 1. \quad (13.20)$$

Произведение  $K_y(p)K_{oc}(p)$  представляет собой передаточную функцию двух каскадно-включенных звеньев, которые образуют разомкнутую систему (см. рис. 13.3). Введем обозначение

$$K_y(p)K_{oc}(p) = H(p). \quad (13.21)$$

Таким образом, об устойчивости системы в замкнутом состоянии можно судить по передаточной функции разомкнутой системы. Из (13.20) следует, что система в замкнутом состоянии устойчива, если передаточная функция

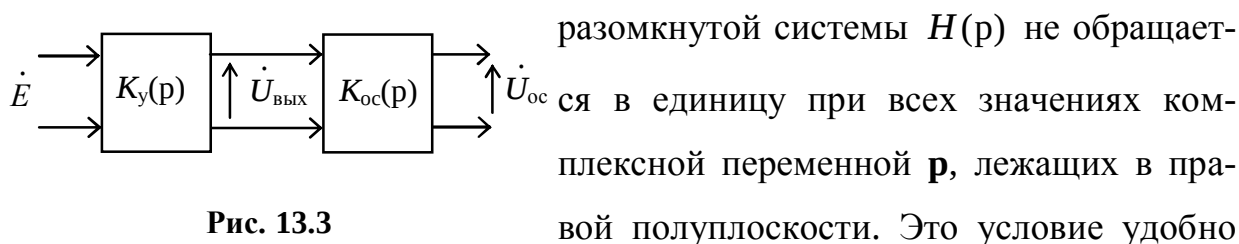


Рис. 13.3

анализировать в плоскости комплексной переменной  $H$ . Перейдем от плоскости комплексной переменной  $p$  к плоскости комплексной переменной  $H$ , для чего представим эту переменную в виде

$$H = u + jv. \quad (13.22)$$

Представим правую полуплоскость переменной  $p$  в виде замкнутого контура, состоящего из оси ординат  $\omega$  и полуокружности бесконечного радиуса (рис. 13.4). Этот контур отобразится в некий замкнутый контур в плоскости переменной  $H$ .

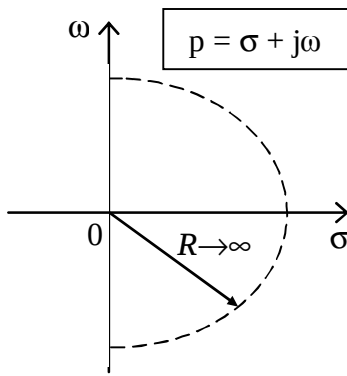


Рис. 13.4

На первом участке  $\sigma = 0$  ( $p = j\omega$ ), то есть на оси частот, передаточная функция  $H(p)$  представляет собой комплексный коэффициент пере-

дачи разомкнутой системы  $H(j\omega)$ , который в соответствии с (13.21) запишем в виде

$$H(j\omega) = K_y(\omega)K_{oc}(\omega)e^{j[\varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega)]}. \quad (13.23)$$

С учетом (13.22) получаем:

$$\begin{aligned} u(\omega) &= K_y(\omega)K_{oc}(\omega)\cos[\varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega)]; \\ v(\omega) &= K_y(\omega)K_{oc}(\omega)\sin[\varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega)]. \end{aligned} \quad (13.24)$$

В приведенных формулах  $K_y(\omega)K_{oc}(\omega) = H(\omega)$  представляет АЧХ, а  $\varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega) = \varphi(\omega)$  — ФЧХ разомкнутой системы. Из (13.24) следует, что  $u(\omega)$  является четной функцией частоты, а  $v(\omega)$  — нечетной. Соотношения (13.23) и (13.24) показывают, что при перемещении точки по оси частот  $j\omega$  в плоскости  $p$ , точка в плоскости  $H$  описывает некую кривую, называемую годографом. Годограф, по существу, является амплитудно-фазовой характеристикой системы, построенной в полярных координатах. Для построения годографа необходимо знать АЧХ и ФЧХ системы.

Методика построения годографа некой системы иллюстрируется рис. 13.5. Каждой точке годографа соответствует определенное значение частоты (на рис. 13.5 точка М соответствует некоторой частоте  $\omega_1$ ). Положение этой точки на плоскости определяется вектором  $OM$ , выходящим из начала координат.

При построении годографа в соответствии с (13.23) длину вектора берут равной значению модуля  $H(\omega_1)$ , а угол наклона вектора относительно оси абсцисс берут равным аргументу  $\varphi(\omega_1)$ . Построения следует проводить в диапазоне частот от нуля до  $+\infty$ . В диапазоне частот от  $-\infty$  до нуля годограф симметричен относительно оси абсцисс ввиду четности  $u(\omega)$  и нечетности  $v(\omega)$  и его построение в этом диапазоне можно не проводить.

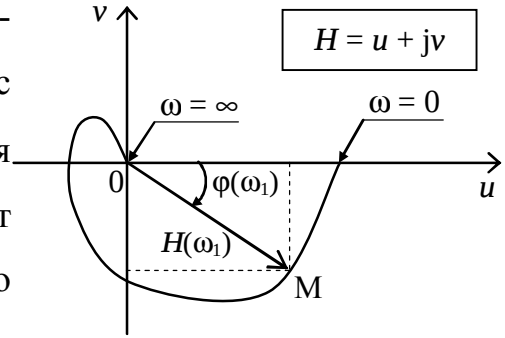


Рис. 13.5

На втором участке радиус  $R \rightarrow \infty$ , что соответствует  $p \rightarrow \infty$ . Определим предел, к которому стремится при этом передаточная функция  $H(p)$ . С учетом (9.11) этот предел запишем в виде

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b_0}{a_0} p^{m-n}. \quad (13.25)$$

В физически реализуемых линейных цепях соблюдается условие:  $m < n$ . Поэтому предел (13.25) равен нулю, то есть окружность бесконечного радиуса на плоскости переменной  $p$  отображается в точку, соответствующую началу координат на плоскости переменной  $H$ .

Таким образом, вся правая полуплоскость переменной  $p$  отображается во внутреннюю область, а вся левая полуплоскость — во внешнюю область годографа.

Отсюда вытекает формулировка критерия устойчивости Найквиста: **линейная система в замкнутом состоянии устойчива, если годограф разомкнутой системы не охватывает точку с координатами (1; 0).**

В ряде случаев сложно судить о том, охватывает или не охватывает годограф точку с координатами (1; 0). В таких случаях следует применять модифицированный критерий Найквиста, основанный на подсчете числа пересечений годографом оси  $u$  на участке от 1 до  $+\infty$  (см. рис. 13.6). Для устойчивой работы необходимо, чтобы годограф либо вообще не пересекал этот

участок, либо пересекал его вверх и вниз одинаковое число раз.

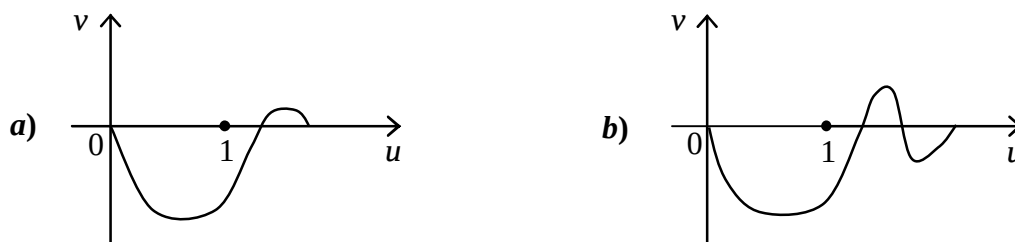


Рис. 13.6

На рис. 13.6,*a* приведен пример годографа устойчивой системы, а на рис. 13.6,*b* — неустойчивой.

### 13.9. Устойчивость неинвертирующего усилителя с мостом Вина в цепи обратной связи

В качестве примера исследуем на устойчивость широкополосный неинвертирующий усилитель, в цепь обратной связи которого включен так называемый мост Вина. Схема такого усилителя изображена на рис. 13.7. Комплексный коэффициент передачи широкополосного неинвертирующего усилителя в полосе пропускания можно считать равным чисто действительному положительному числу  $K_y(j\omega) = K_y = \text{const}$ . Это соответствует нулевому значению фазового сдвига во всей полосе рабочих частот:  $\varphi_y(\omega) = 0$ .

Применяя правило делителя напряжения, получаем выражение для комплексного коэффициента передачи моста Вина:

$$K_{oc}(j\omega) = \frac{\omega RC}{3\omega RC + j[(\omega RC)^2 - 1]}. \quad (13.26)$$

Из (13.26) получим формулы для АЧХ и ФЧХ цепи обратной связи:

$$K_{oc}(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{9(\omega RC)^2 + [(\omega RC)^2 - 1]^2}}; \quad (13.27)$$

$$\varphi_{oc}(\omega) = -\arctg \left[ \frac{(\omega RC)^2 - 1}{3\omega RC} \right]. \quad (13.28)$$

Графики АЧХ и ФЧХ моста Вина, построенные в соответствии с (13.27) и (13.28), изображены на рис. 13.8. Из этих графиков видно, что мост Вина — это низкочастотный полосно-пропускающий фильтр. Приравняв (13.28) к нулю, определим частоту  $\omega_0$ , на которой ФЧХ обращается в нуль, а коэффициент передачи максимален:

$$\omega_0 = 1/RC . \quad (13.29)$$

Определим коэффициент передачи на этой частоте, подставив (13.29) в (13.27). При этом получаем  $K_{oc}(\omega_0) = 1/3$ .

Комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы для данного случая равен  $H(j\omega) = K_y K_{oc}(j\omega)$ . С учетом (13.27) и (13.28) на рис. 13.9 построен годограф разомкнутой системы при некотором значении  $K_y$ .

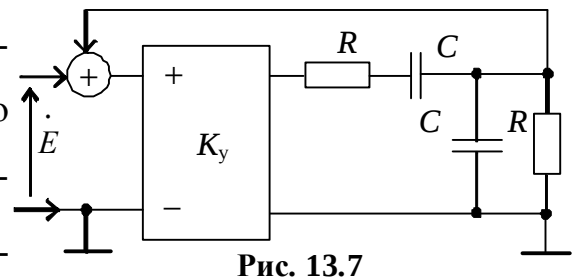


Рис. 13.7

Поскольку коэффициент передачи моста Вина обращается в нуль при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ , то годограф начинается и заканчивается в начале координат. Годограф пересекает ось абсцисс на частоте  $\omega = \omega_0$ , поскольку на этой частоте  $\varphi(\omega_0) = \varphi_{oc}(\omega_0) = 0$ .

При этом координата точки пересечения (М) равна  $K_{oc}(\omega_0) = 1/3 K_y$ . Отсюда следует, что годограф Найквиста не охватывает точку с координатами (1, 0) если выполняется условие:

$K_y/3 < 1$ . Решая это неравенство относительно  $K_y$ , приходим к следующему условию устойчивой работы

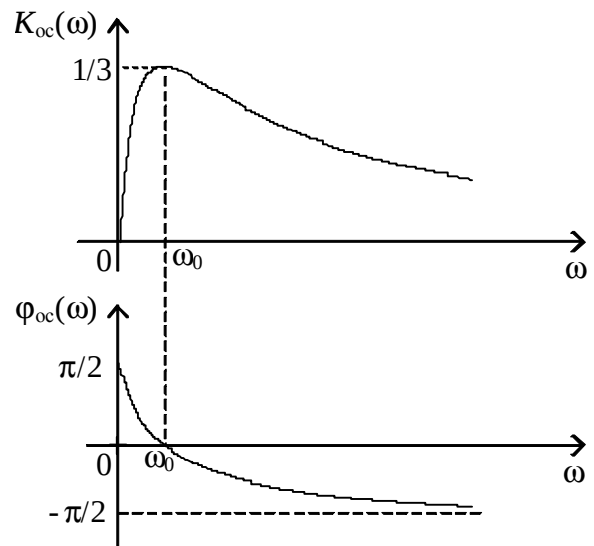


Рис. 13.8

$$K_y < 3 . \quad (13.30)$$

Годограф на рис. 13.9 построен для случая, при котором условие (13.30) выполняется.

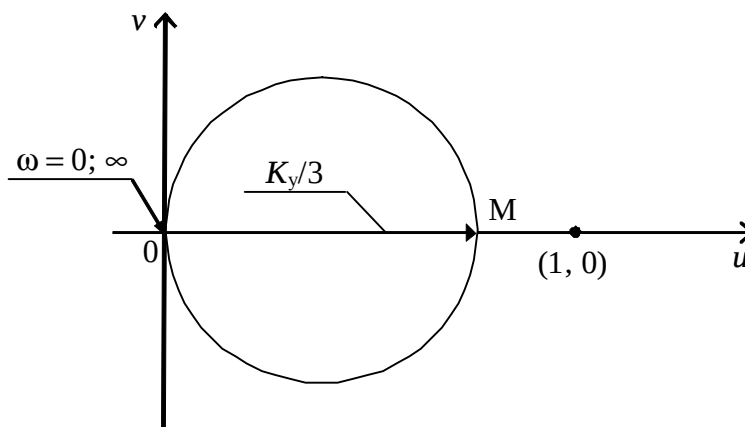


Рис. 13.9

Если же условие (13.30) не выполняется, то есть коэффициент усиления усилителя  $K_y$  выбирается больше трех, то годограф на рис. 13.9 будет охватывать точку с координатами  $(1, 0)$ , что приведет к потере устойчивости системы. В этом случае при замыкании цепи обратной связи усилитель потеряет устойчивость и превратится в автогенератор.

### 13.10. Пример решения задачи

#### 13.10.1. Условие

Широкополосный неинвертирующий усилитель с коэффициентом усиления  $K_0 = 10$  охвачен цепью обратной связи (см. рис. 13.10), которая представляет собой линию задержки (время задержки равно  $\tau$ ). Определить диапазон допустимых значений коэффициента передачи линии задержки, в котором данная цепь устойчива.

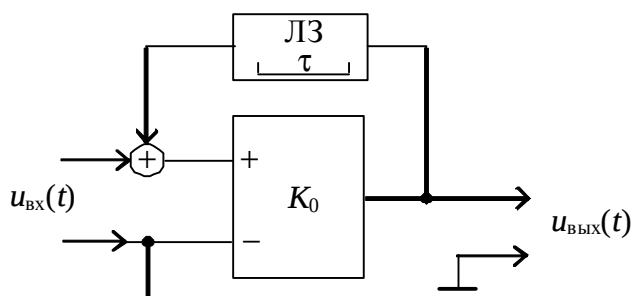


Рис. 13.10

### 13.10.2. Решение

Запишем выражение для передаточной функции данной цепи, воспользовавшись формулой (13.9)

$$K(p) = \frac{K_0}{1 - K_0 K_{\text{лз}} e^{-p\tau}}, \quad (13.31)$$

где  $K_{\text{лз}}$  — коэффициент передачи линии задержки.

Определим полюса передаточной функции, приравняв знаменатель выражения (13.31) к нулю, что дает

$$e^{-p\tau} = \frac{1}{K_0 K_{\text{лз}}}. \quad (13.32)$$

Решение полученного уравнения относительно  $p$  дает следующее выражение для полюсов

$$p_{\text{пк}} = \frac{1}{\tau} \ln(K_0 K_{\text{лз}}) + j \frac{2\pi}{\tau} k, \quad (13.33)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — целое число.

Таким образом, передаточная функция имеет бесчисленное множество полюсов. Для того чтобы система была устойчивой, необходимо чтобы все полюса передаточной функции находились в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ , то есть действительные части полюсов в формуле (13.33) были отрицательны. Из этого вытекает требование к коэффициенту передачи линии задержки:

$$K_{\text{лз}} < \frac{1}{K_0}. \quad (13.34)$$

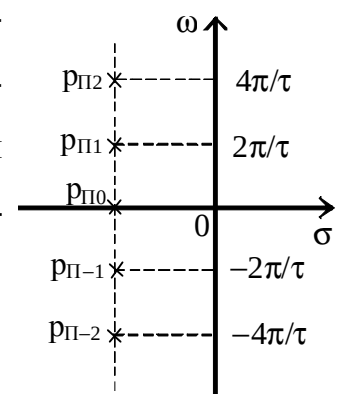


Рис. 13.11

При заданных исходных данных необходимо, чтобы в соответствии с (13.34) выполнялось условие:  $K_{\text{лз}} < 0,1$ . На рис. 13.11 показано расположение полюсов передаточной функции устойчивой цепи.

## 14. СОБСТВЕННЫЕ ШУМЫ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

### 14.1. Классификация собственных шумов

Собственными шумами называют случайные изменения тока или напряжения, которые возникают в электрических цепях под воздействием случайных факторов. Шумы оказывают вредное влияние на процесс передачи сообщений по каналу связи. Если бы не было шумов и помех, то дальность действия радиоэлектронных систем была бы неограниченной. Влияние шумов особенно проявляется при усилении слабых сигналов, поскольку они ограничивают чувствительность радиоприемных устройств. Действительно, сигналы, уровень которых соизмерим или ниже уровня собственных шумов, не могут быть уверенно обнаружены на их фоне.

Если шум суммируется с полезным сигналом, то его называют аддитивным, если перемножается — то мультипликативным. Мультипликативные свойства проявляются при случайном изменении коэффициента передачи канала связи.

В радиоэлектронной аппаратуре основными источниками аддитивных шумов является дискретная структура тока в электронных приборах (дробовый шум) и тепловое движение носителей заряда (тепловой шум).

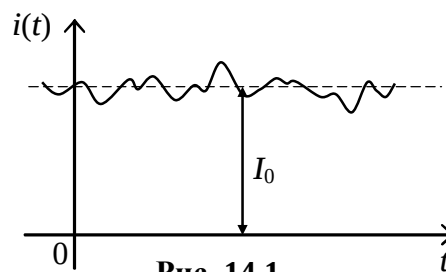


Рис. 14.1

Дробовый шум вызывается тем, что ток, протекающий через электронный прибор (электронная лампа, транзистор), даже при постоянных напряжениях на электродах не является постоянным. Этот ток представляет собой суперпозицию огромного числа очень коротких импульсов, каждый из кото-

рых обусловлен одним элементарным носителем заряда (электрона, дырки). Из-за влияния множества случайных факторов (температуры, нестабильности источников питания, старения и т. д.) поток носителей заряда неравномерен и суммарный ток случайным образом изменяется в районе некоторого среднего значения  $I_0$ , которое называют постоянной составляющей. Характер реализации дробового тока иллюстрируется рис. 14.1. Рассмотренный случайный процесс формирования тока называют дробовым эффектом.

Тепловой шум вызывается хаотическим тепловым движением электронов. Если на резистор не подавать внешнего напряжения, то из-за теплового движения электронов на его выводах создается случайная разность потенциалов, поскольку количество электронов, перемещающихся в противоположных направлениях в различные моменты времени, различны. Характер реализации теплового напряжения на выводах резистора тот же, что и дробового тока, только среднее значение этого процесса равно нулю. Интенсивность теплового шума зависит от температуры и сопротивления резистора.

## 14.2. Характеристики дробового тока

Выше указывалось, что имеется множество взаимно-независимых случайных факторов, определяющих суммарный ток, протекающий через электронный прибор. Поэтому в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей можно считать распределение этого тока нормальным. Плотность вероятности этого процесса имеет вид

$$p(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} \exp\left(-\frac{(i - I_0)^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad (14.1)$$

где  $I_0$  — математическое ожидание (постоянная составляющая) процесса;  $\sigma_i$  — среднеквадратическое отклонение.

Рассмотрим элементарный импульс тока, вызываемый переносом заряда одного элементарного носителя, например электрона  $i_e(t)$  (рис. 14.2). Длительность этого импульса зависит от геометрии электронного прибора, а

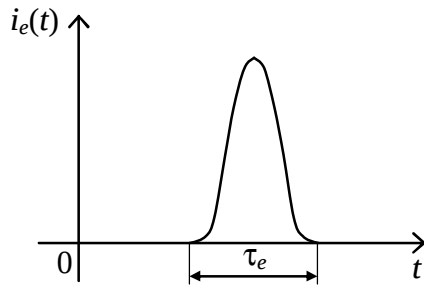


Рис. 14.2

тока  $|I_e(jf)|$  изображена на рис. 14.3.

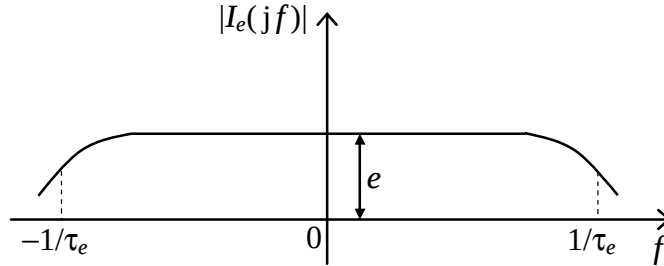


Рис. 14.3

Как указывалось ранее, эффективная ширина спектра такого импульса может быть оценена величиной  $\Delta f \approx 1/\tau_e$  Гц. Поэтому ширина спектра импульса достигает значений  $\Delta f = 10^9 \dots 10^{11}$  Гц. Известно, что независимо от формы импульса спектральная плотность на частоте  $f = 0$  равна площади этого импульса. В данном случае площадь импульса тока равна

$$|I_e(jf)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i_e(t) dt = e, \quad (14.2)$$

где  $e$  — заряд электрона.

Пусть за одну секунду переносится в среднем  $k$  элементарных носителей. Тогда постоянная составляющая тока равна

$$I_0 = ke. \quad (14.3)$$

Определим энергию одного импульса тока, используя равенство Парсеваля:

$$\mathfrak{E}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |I_e(jf)|^2 df. \quad (14.4)$$

С учетом (14.4) определим среднюю мощность процесса

$$M[i^2] = I_0^2 + k\mathfrak{D}_1 = I_0^2 + \int_{-\infty}^{\infty} k|I_e(jf)|^2 df, \quad (14.5)$$

где  $I_0^2$  — мощность постоянной составляющей.

Из (14.5) следует, что энергетический спектр переменной составляющей процесса тока определяется соотношением

$$W_{i\approx}(f) = k|I_e(jf)|^2. \quad (14.6)$$

Выразив  $k$  из (14.3) и подставив в (14.6), получим

$$W_{i\approx}(f) = \frac{I_0}{e}|I_e(jf)|^2. \quad (14.7)$$

Приближенный график энергетического спектра дробового тока изображен на рис. 14.4. При  $f = 0$  значение энергетического спектра с учетом (14.2) равно:  $W_{i\approx}(0) = eI_0$ .

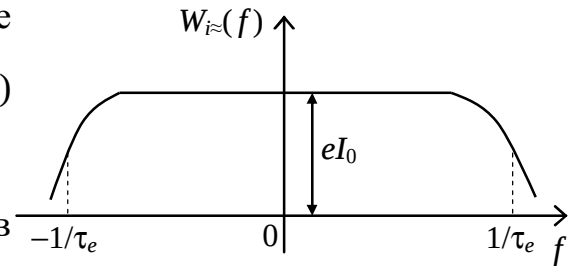


Рис. 14.4

Из вышесказанного следует, что в весьма широкой полосе частот (вплоть до десятков гигагерц) дробовый шум можно рассматривать как процесс с равномерным энергетическим спектром, величина которого равна

$$W_i(f) \cong eI_0 = const. \quad (14.8)$$

Таким образом, дробовый ток проявляет себя в указанной полосе частот как белый шум.

Этот же вывод можно сделать и для теплового шума, создаваемого резистивным элементом. Энергетический спектр теплового напряжения следует определять по известной из курса физики формуле

$$W_u(f) \cong 2kTR = const, \quad (14.9)$$

где  $R$  — сопротивление резистора, который порождает шум;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана;  $T$  — абсолютная температура.

С учетом этого все дальнейшие выводы могут быть отнесены и к тепловому шуму.

### 14.3. Дробовый шум на выходе апериодического усилителя

Рассмотрим апериодический усилитель (рис. 10.6), на вход которого не подается внешнее воздействие. В этом случае транзистор  $VT$  является источником дробового тока, который, создает на выходе случайное (дробовое) напряжение.

Определим энергетический спектр выходного напряжения, воспользовавшись формулой (11.24). При этом учтем, что роль коэффициента передачи между напряжением и током выполняет модуль комплексного сопротивления нагрузки усилителя  $\underline{Z}_H$ :

$$W_u(\omega) = W_i(\omega) |\underline{Z}_H|^2. \quad (14.10)$$

Используя формулы (14.8) и (10.33), получаем

$$W_u(\omega) = eI_0 \frac{R^2}{1 + \omega^2 R^2 C_0^2}. \quad (14.11)$$

Энергетический спектр напряжения (14.11), порождаемого дробовым током, на выходе апериодического усилителя изображен на рис. 14.5. Из (14.11) следует, что шумовая полоса (ширина спектра на уровне 0,5 по мощности) равна полосе пропускания апериодического усилителя,  $\omega_c = 1/\tau_0 = 1/RC_0$ .

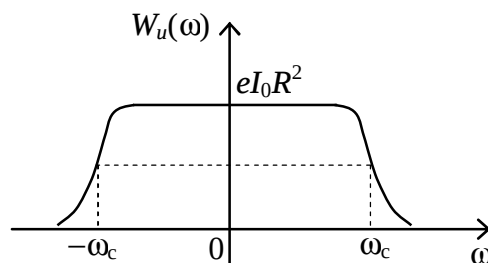


Рис. 14.5

Определим корреляционную функцию дробового напряжения, воспользовавшись теоремой Винера - Хинчина. Применив (9.29), получим

$$B_u(\tau) = \frac{eI_0 R^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega\tau)}{1 + \omega^2 R^2 C_0^2} d\omega = \frac{eI_0 R}{2C_0} \exp(-|\tau|/RC_0). \quad (14.12)$$

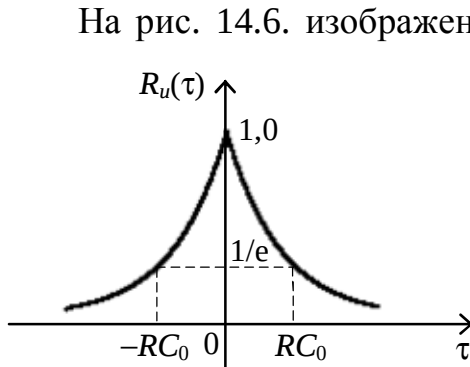


Рис. 14.6

На рис. 14.6. изображена нормированная корреляционная функция выходного процесса. Интервал корреляции выходного шума, определим как интеграл от нормированной корреляционной функции. В результате получим:  $\tau_{\text{кор}} = 2RC_0 = 2\tau_0$ . Таким образом, чем меньше постоянная времени выходной цепи (чем больше полоса пропускания), тем меньше интервал корреляции.

Определим дисперсию и среднеквадратическое отклонение выходного шума:

$$D_u = B_u(0) = \frac{eI_0 R}{2C_0}; \quad (14.13)$$

$$\sigma_u = \sqrt{D_u} = \sqrt{\frac{eI_0 R}{2C_0}}. \quad (14.14)$$

Из (14.14) следует, что снизить уровень шума на выходе апериодического усилителя можно путем уменьшения постоянной составляющей тока  $I_0$ . Именно поэтому при проектировании малозумящих усилителей рекомендуется работать в режиме микротоков. Возможно также увеличить  $C_0$ , либо уменьшить  $R$ , однако следует помнить, что это приведёт в первом случае к сужению полосы пропускания, а во втором случае — к уменьшению коэффициента усиления.

#### 14.4. Дробовый шум на выходе резонансного усилителя

Рассмотрим резонансный усилитель (рис. 10.10), на вход которого не подается внешнее воздействие. Тогда напряжение на выходе представляет собой шум, порождаемый дробовым током.

Определим энергетический спектр выходного напряжения, воспользовавшись формулой (14.10). С учетом (10.41) находим

$$W_u(\omega) = eI_0 \frac{R_{03}^2}{1 + \xi_3^2}. \quad (14.15)$$

Используя (10.47), получаем

$$W_u(\omega) = eI_0 \frac{R_{03}^2}{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_{кз}^2}. \quad (14.16)$$

Энергетический спектр напряжения (14.16), порождаемого дробовым током, на выходе резонансного усилителя изображен на рис. 14.7. Из формулы (14.16) следует, что шумовая полоса (на уровне 0,5 по мощности) равна полосе пропускания резонансного усилителя:  $\Delta\omega = 2/\tau_{кз}$ .

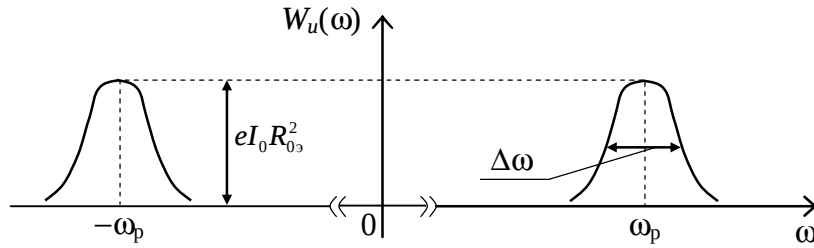


Рис. 14.7

Определим корреляционную функцию дробового напряжения, воспользовавшись теоремой Винера - Хинчина. Применяя (9.29), получаем

$$B_u(\tau) = \frac{eI_0 R_{03}^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\omega\tau)}{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_{кз}^2} d\omega = \frac{eI_0 R_{03}}{2C} \exp(-|\tau|/\tau_{кз}) \cos(\omega_p \tau). \quad (14.17)$$

Нормированная корреляционная функция выходного процесса изображена на рис. 14.8. Определим дисперсию и среднеквадратическое отклонение

$$D_u = B_u(0) = \frac{eI_0 R_{03}}{2C}; \quad (14.18)$$

$$\sigma_u = \sqrt{D_u} = \sqrt{\frac{eI_0 R_{03}}{2C}}. \quad (14.19)$$

Из (14.19) следует, что уменьшение уровня шума на выходе резонансного усилителя возможно так же, как и в случае апериодического усилителя путем уменьшения постоянной составляющей тока  $I_0$ . Этого можно также достичь уменьшением  $R_{03}$ , однако следует помнить, что такое решение приведёт к уменьшению коэффициента усиления.

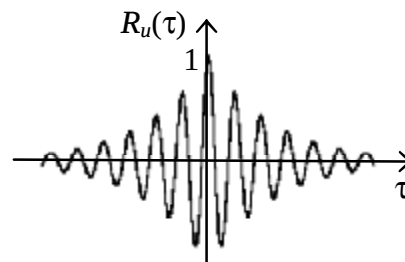


Рис. 14.8

## 14.5. Пример решения задачи

### 14.5.1. Условие

Рассчитать среднеквадратическое значение теплового шума на выходе резонансного усилителя с идеальной П-образной АЧХ и оценить действующее значение сигнала на входе усилителя, при котором обеспечивается заданное отношение сигнал/шум. Исходные данные: эквивалентное сопротивление источника входного теплового шума  $R = 75 \text{ Ом}$ ; полоса пропускания усилителя  $\Delta f = 9 \text{ кГц}$ ; коэффициент усиления усилителя  $K_{\max} = 2 \cdot 10^6$ ; температура окружающей среды  $T = 293^0 \text{ К}$ ; отношение сигнал-шум  $C/\text{Ш} = 5$ .

### 14.5.2. Решение

Энергетический спектр шума на выходе резонансного усилителя рассчитаем по формуле (11.24). С учетом выражения (14.9) для энергетического спектра теплового шума, создаваемого резистором, и выражения для АЧХ идеальной частотно-избирательной цепи (10.39), запишем:

$$W_y(\omega) = W_x(\omega)K^2(\omega) = \begin{cases} 2kTRK_{\max}^2 & \text{if } \omega_p - \Delta\omega/2 < |\omega| < \omega_p + \Delta\omega/2; \\ 0 & \text{if } |\omega| > \omega_p + \Delta\omega/2; |\omega| < \omega_p - \Delta\omega/2. \end{cases} \quad (14.20)$$

Тогда дисперсию шума на выходе усилителя определим по формуле (13.26), подставляя в нее соотношение (14.20). С учетом того, что этот про-

цесс обладает нулевым средним значением, получаем

$$D_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_y(\omega) d\omega = \frac{2kTRK_{max}^2}{\pi} \int_{\omega_p - \Delta\omega/2}^{\omega_p + \Delta\omega/2} d\omega = \frac{2kTRK_{max}^2}{\pi} \Delta\omega = 4kTRK_{max}^2 \Delta f. \quad (14.21)$$

Соотношение (14.21) часто используют для оценки чувствительности приемных устройств, несмотря на то, что реальная АЧХ радиоканала приемника отличается от П - образной.

Среднеквадратическое значение шума на выходе усилителя равно

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = 2K_{max} \sqrt{kTR\Delta f} = 2 \cdot 10^6 \sqrt{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 75 \cdot 9 \cdot 10^3} \approx 0,010 \text{ В}.$$

Рассчитаем среднеквадратическое значение шума, приведенное к входу усилителя

$$\sigma_y^{BX} = \frac{\sigma_y}{K_{max}} = 2\sqrt{kTR\Delta f} = \frac{0,010}{10^5} = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ В} = 0,1 \text{ мкВ}.$$

Тогда действующее значение входного напряжения, при котором обеспечивается заданное отношение сигнал-шум равно

$$U_{BX} = \sigma_y^{BX} \cdot (C/\Pi) = 0,5 \text{ мкВ}.$$

Полученное значение называют чувствительностью приемника.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Таблица соответствия оригиналов и изображений по Лапласу**

| $F(p)$                           | $f(t)$                                             |
|----------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1                                | $\delta(t)$                                        |
| $1/p$                            | $1(t)$                                             |
| $1/p^2$                          | $t \cdot 1(t)$                                     |
| $1/p^n$<br>( $n = 1, 2, \dots$ ) | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot 1(t)$                |
| $1/\sqrt{p}$                     | $1/\sqrt{\pi t}$                                   |
| $\frac{1}{p+a}$                  | $e^{-at} \cdot 1(t)$                               |
| $\frac{p}{p+a}$                  | $\delta(t) - a e^{-at} \cdot 1(t)$                 |
| $\frac{1}{p(p+a)}$               | $\frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$             |
| $\frac{1}{(p+a)(p+b)}$           | $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \cdot 1(t)$     |
| $\frac{p}{(p+a)(p+b)}$           | $\frac{1}{a-b} (a e^{-at} - b e^{-bt}) \cdot 1(t)$ |

|                                              |                                                                                      |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{p^2}{(p+a)(p+b)}$                     | $\delta(t) + \frac{1}{b-a}(a^2e^{-at} - b^2e^{-bt}) \cdot 1(t)$                      |
| $\frac{1}{(p+a)^2}$                          | $te^{-at} \cdot 1(t)$                                                                |
| $\frac{1}{(p+a)^n}$<br>( $n = 1, 2, \dots$ ) | $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \cdot 1(t)$                                          |
| $\frac{p}{(p+a)^2}$                          | $(1-at)e^{-at} \cdot 1(t)$                                                           |
| $\frac{1}{p^2 + \omega^2}$                   | $\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cdot 1(t)$                                         |
| $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$                   | $\cos(\omega t) \cdot 1(t)$                                                          |
| $\frac{1}{(p+a)^2 + \omega^2}$               | $\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t) \cdot 1(t)$                                 |
| $\frac{p}{(p+a)^2 + \omega^2}$               | $e^{-at} \left[ \cos(\omega t) - \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) \right] \cdot 1(t)$ |
| $\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$             | $e^{-at} \cos(\omega t) \cdot 1(t)$                                                  |
| $\frac{1}{p^2 - a^2}$                        | $\frac{1}{a} \text{sh}(at) \cdot 1(t)$                                               |
| $\frac{p}{p^2 - a^2}$                        | $\text{ch}(at) \cdot 1(t)$                                                           |
| $\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$                      | $\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right] \cdot 1(t)$      |
| $\frac{1}{p^2(p+a)}$                         | $\frac{1}{a^2} [at - (1 - e^{-at})] \cdot 1(t)$                                      |
| $\frac{1}{p(p+a)^2}$                         | $\frac{1}{a^2} [1 - (1 + at)e^{-at}] \cdot 1(t)$                                     |

|                                     |                                                                                                          |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{p[(p+a)^2 + \omega^2]}$   | $\frac{1}{a^2 + \omega^2} \{1 - e^{-at} [\cos(\omega t) + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t)]\} \cdot 1(t)$ |
| $\frac{1}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$   | $\frac{1}{a^2 + \omega^2} [e^{-at} - \cos(\omega t) + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t)] \cdot 1(t)$       |
| $\frac{p}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$   | $\frac{1}{a^2 + \omega^2} [-ae^{-at} + a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)] \cdot 1(t)$             |
| $\frac{p^2}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$ | $\frac{1}{a^2 + \omega^2} [a^2 e^{-at} - a\omega \sin(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t)] \cdot 1(t)$   |

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006. — 720 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. — М.: Высшая школа, 2005. — 464 с.
3. Попов В.П. Основы теории цепей / В.П. Попов. — М.: Высш. шк., 1985. — 496 с.
4. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1974. — 832 с.
5. Каганов В.И. Радиотехнические цепи и сигналы: компьютеризированный курс [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по напр. подгот. дипломир. спец. «Радиотехника» / В.И. Каганов. — М. : Форум : Инфра — М, 2012. — 432 с. : ил.
6. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов / Д.В. Васильев, М.Р. Витольд, Ю.Н. Горщенков, и др.; Под ред. К.А. Самойло. — М.: Радио и связь, 1982. — 528 с.
7. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи: Учеб. пособие для вузов / Г.Г. Галустов, И.С. Гоноровский, М.П. Демин и др.; Под ред. И.С. Гоноровского. — М.: Радио и связь, 1989. — 248 с.
8. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач: Учеб. пособие для радиотехн. спец. вузов / С.И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 1987. — 207 с.
9. Трохименко Я.К. Условия существования обратной связи / Я.К. Трохименко // Изв.вузов. Радиоэлектроника. — 1997. — № 9. — С.3 — 11.
10. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.

Учебное издание

**Гимпилевич Юрий Борисович**

**СИГНАЛЫ И ПРОЦЕССЫ  
В РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ**

*Учебное пособие*

*Научно-технический редактор  
канд. техн. наук, доцент А.А. Савочкин*

*Компьютерная верстка  
Ю.Б. Гимпилевич*

Изд. № 186/18. Объем 15,5 п.л.  
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»