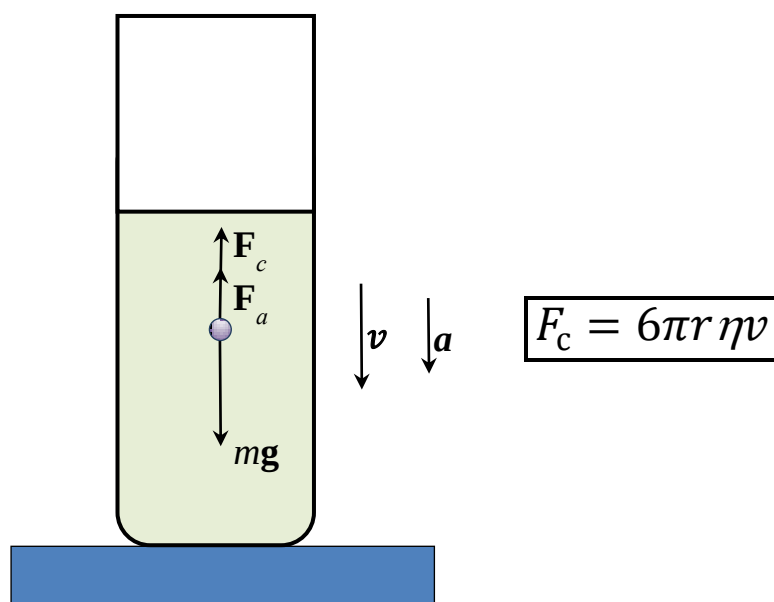


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Г. Рипп, О.В. Матузаева



Движение в слабо вязкой жидкости

Учебное пособие
по общей физике для студентов технических
и естественно-научных специальностей

Севастополь
СевГУ
2018

УДК 53.08 (075.8)
P537

Рецензент:

Л.В. Третьякова - доктор физико-математических наук, профессор

А.Г. Рипп

P537 Движение в слабо вязкой жидкости: учеб. пособие по общей физике / А.Г. Рипп, О.В. Матузаева. – Севастополь: СевГУ, 2018. – 20 с.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «физика» и «физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с особенностями движения твёрдого тела в среде – в частности, в слабо вязкой жидкости. Рассматриваются силы, действующие на тело – в первую очередь, сила внутреннего трения. Анализируется зависимость скорости и ускорения шарика, падающего в слабо вязкой жидкости, от времени. Рассматривается метод экспериментальной проверки характера движения шарика и методов измерения параметров жидкости – плотности и динамической вязкости. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 53.08 (075.8)

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 11 от 25 июня 2018 г.

Цель работы

Целью данной лабораторной работы является:

- изучение явления вязкости в жидкостях,
- исследование зависимости ускорения шарика от времени,
- измерение динамической вязкости и плотности жидкости.

1. Введение

Как известно, жидкости бывают вязкие и текучие. Иными словами, жидкости обладают некоторым свойством – *вязкостью*, и это свойство у разных жидкостей проявляется в разной степени. Например, если какой-либо предмет бросить в жидкость, то он будет либо плавать, либо тонуть. Плавает предмет в любой жидкости одинаково, а вот тонет по-разному: в вязкой жидкости – медленнее, в текучей – быстрее. Почему? – Самое очевидное объяснение состоит в том, что всякая жидкость оказывает на движущийся в ней предмет *сопротивление*, причём это сопротивление тем больше, чем более вязкой является жидкость. Газы тоже оказывают на движущиеся в них предметы сопротивление. Это сопротивление меньше, чем в жидкостях, но причина сопротивления – одна и та же. В дальнейшем будем называть и жидкости, и газы одним термином: «среда».

Так что же является причиной сопротивления в средах? – Разумеется, взаимодействие между молекулами. Молекулы предмета притягивают к себе молекулы среды, а так как предмет движется относительно среды, то он вовлекают в движение и среду. Это значит, что со стороны предмета на среду действует сила, направленная в сторону движения предмета. Тогда, согласно третьему закону Ньютона¹, среда действует на предмет с силой, направленной *против* его скорости, так что эта сила *тормозит* предмет и порождает сопротивление среды.

Важной особенностью сил взаимодействия между молекулами является то, что эти силы – *короткодействующие*. Это означает, что реально взаимодействуют друг с другом не все молекулы предмета и среды, а только ближайшие друг к другу, то есть молекулы предмета, находящиеся на его поверхности, и молекулы тонкого слоя среды (*элементарного слоя*), который непосредственно контактирует с предметом². Однако не следует думать, что только этот элементарный слой увлекается в движение вслед за предметом. Дело в том, что молекулы этого слоя взаимодействуют с молекулами предмета только с одной стороны слоя. С другой стороны слоя его молекулы взаимодействуют с такими же

¹ Сила действия равна силе противодействия, и эти силы направлены в противоположные стороны.

² Толщина этого слоя равна среднему расстоянию между молекулами в среде.

молекулами среды, принадлежащими соседнему элементарному слою. Молекулы этих слоёв тоже притягиваются друг к другу, поэтому пришедший в движение первый слой тянет за собой второй, а второй слой оказывает сопротивление движению первому слою. Точно так же взаимодействуют второй слой с третьим и так далее.

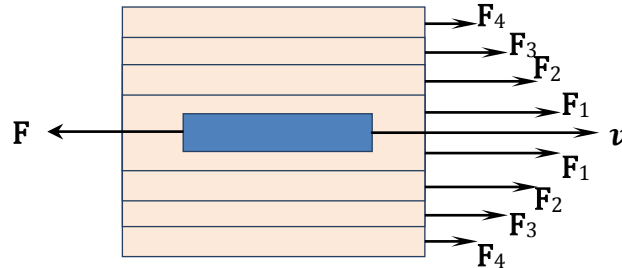


Рис. 1.1. Силы, действующие на тело и на слои среды

Обратите внимание на одну важную деталь этого «эффекта домино». На каждый из элементарных слоёв действуют две силы: ускоряющая сила – со стороны внутреннего слоя³ и тормозящая – со стороны внешнего.

Для того, чтобы слой пришёл в движение, ускоряющая сила должна быть больше тормозящей. Но по третьему закону Ньютона тормозящая сила, действующая на данный слой, равна ускоряющей силе, действующей на соседний внешний слой. Следовательно, по мере удаления элементарного слоя от предмета ускоряющая сила, действующая на него, *убывает* и на некотором расстоянии от предмета ℓ падает до нуля. Более наглядный физический смысл этого расстояния: величина ℓ – это толщина слоя среды, которая приходит в движение вследствие появления в среде движущегося предмета. Чем более вязкой является среда, тем большая её часть реагирует на предмет и увлекается в движение.

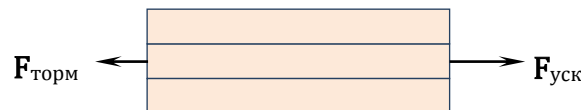


Рис. 1.2. Силы, действующие на отдельный слой

А от чего зависит значение ℓ ? – От силы притяжения друг к другу каждой пары соседних молекул. Чем больше эта сила, тем сильнее влияют друг на друга соседние элементарные слои и тем большее их количество увлекается в движение. Таким образом, для количественного описания явления вязкости необходимо, в первую очередь, получить формулы взаимодействия друг с другом соседних молекул и соседних элементарных слоёв.

Первым эту задачу решил Исаак Ньютон. В 17 веке, когда он жил и работал, молекулярной теории ещё не было, поэтому Ньютон заинтересовался силой, действующей между соседними элементарными слоями среды. Эту силу, которая ускоряет более медленный слой и тормозит более быстрый, в настоящее время называют *силой внутреннего трения*.

³ Того, который ближе к предмету.

2. Краткая теория

2.1. Закон Ньютона для внутреннего трения

Пусть в некотором направлении движется ламинарный⁴ поток жидкости – см. рисунок 2.1. Направим в направлении потока ось OX , а перпендикулярно ей – ось OY . Разобьём жидкость на элементарные (бесконечно тонкие) слои и рассмотрим взаимодействие двух произвольных соседних слоёв толщиной dy .

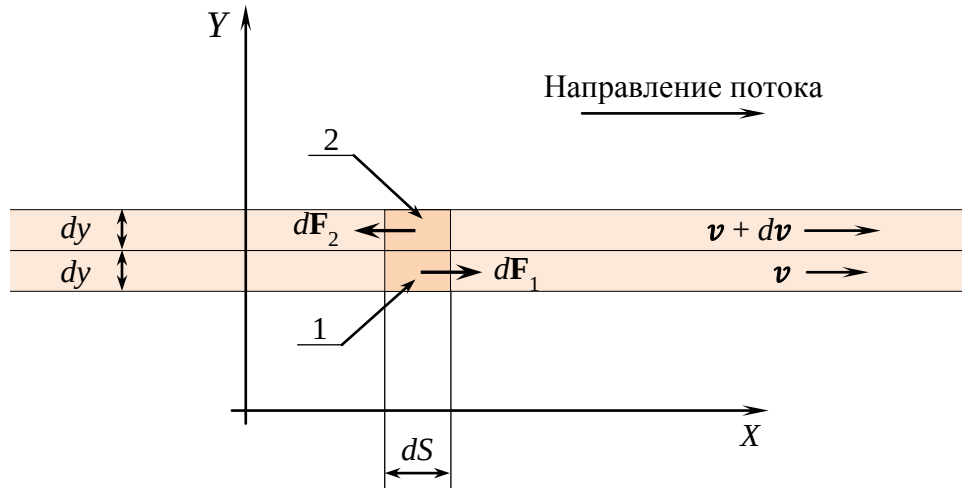


Рис. 2.1. Силы трения между слоями

Пусть для определённости верхний слой движется немного быстрее нижнего и поэтому увлекает его за собой. Нижний же слой оказывает на верхний тормозящее воздействие.

Силы взаимодействия между слоями зависят от площади поверхности контакта, поэтому выберем в рассматриваемых слоях два малых элемента 1 и 2 с площадью контакта dS . На нижний элемент 1 со стороны верхнего 2 действует ускоряющая сила dF_1 , направленная вдоль его скорости v , а на верхний элемент 2 со стороны нижнего 1 – тормозящая сила dF_2 , направленная против его скорости $v + dv$. Согласно третьему закону Ньютона,

$$dF_1 = -dF_2, \quad dF_1 = dF_2 = dF.$$

Ньютон предположил, что сила внутреннего трения dF пропорциональна площади поверхности контакта dS ⁵ и разности скоростей слоёв dv :

$$dF \sim dS \cdot dv \quad (2.1)$$

Дифференциал скорости dv можно представить в виде

⁴ В физике всевозможные движения среды делят на два типа: *ламинарное* (спокойное) движение и *турбулентное* (вихревое). Более простой является теория ламинарного движения.

⁵ Сейчас, когда у нас на вооружении есть молекулярно-кинетическая теория, это предположение нетрудно доказать. Каждый элементарный слой – мономолекулярен, поэтому число молекул в нём dN пропорционально площади слоя dS . С другой стороны, сила внутреннего трения dF порождается взаимодействием между молекулами контактирующих слоёв, так что dF пропорционально количеству молекул в каждом слое dN . Вот и выходит, что dF пропорционально dS .

$$dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (2.2)$$

Далее Ньютон, по всей вероятности, рассуждал так: именно вдоль оси ОУ, перпендикулярной скорости движения слоёв, скорость меняется *наиболее быстро*, поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial y} = |\text{grad}v|^6. \quad (2.3)$$

Подстановка (2.3) и (2.2) в (2.1) даёт:

$$dF \sim dS |\text{grad}v| dy. \quad (2.4)$$

Следующая идея: сила взаимодействия между слоями не должна зависеть от толщины слоёв dy . Как к этой мысли пришёл Ньютон, неизвестно, но с точки зрения молекулярно-кинетической теории это можно объяснить следующим образом. Элементарный слой среды – очень тонкий, но всё же он имеет конкретную толщину d_c , которая примерно равна диаметру молекулы среды. Слой толщиной dy – тоже тонкий, но не обязательно элементарный. Как отмечалось выше, взаимодействие между соседними слоями определяется только взаимодействием между ближайшими молекулами, расположенными по разные стороны от границы между слоями, то есть между молекулами элементарных слоёв. Поэтому, если толщина слоя dy больше d_c , то на силу dF влияют не все молекулы слоя, а только молекулы элементарного слоя, расположенного вдоль границы контакта. Вот и получается, что от величины dy сила dF не зависит. Итак, в формуле (2.4) множитель dy надо убрать. В итоге получается:

$$dF = \eta dS |\text{grad}v|. \quad (2.5)$$

Буквой η обозначен коэффициент пропорциональности, который может зависеть только от особенностей среды, то есть от состава и строения её молекул. Чем больше значение η , тем сильнее взаимодействуют между собой соседние слои среды, тем более вязкой является среда. Поэтому величину η называют *коэффициентом внутреннего трения* или *динамической вязкостью*.

Формулу (2.5) удобно переписать так, чтобы в ней не было дифференциалов. Для этого надо поделить левую и правую часть на dS и обозначить

$$f = \frac{dF}{dS}.$$

В результате получается формула, которую называют *законом Ньютона для внутреннего трения*:

$$\boxed{f = \eta |\text{grad}v|}. \quad (2.6)$$

Физический смысл величины f – это сила внутреннего трения, действующая между соседними слоями единичной площади, поэтому её называют *удельной силой внутреннего трения*.

⁶ Градиентом скалярной функции координат φ называется вектор $\text{grad}\varphi$, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания функции φ . Численное значение градиента равно производной $\frac{d\varphi}{d\ell}$, где $d\ell$ – бесконечно малое перемещение в направлении градиента.

Итак, удельная сила внутреннего трения зависит только от двух факторов: от градиента скорости в потоке среды и от динамической вязкости среды.

Примечание. Формула (2.6) применима и в том случае, когда взаимодействующие слои находятся по разным сторонам поверхности контакта среды и находящегося в ней тела. В этом случае формула (2.6) позволяет определить силу, действующую на тело со стороны среды. В зависимости от направления этой силы, она может выполнять разные роли: например, может быть силой сопротивления или подъёмной силой.

2.2. Формула Стокса

Закон Ньютона для внутреннего трения позволяет решить многие задачи, связанные с движением жидкости и газа, а также с движением твёрдых тел в жидкой и в газообразной среде. Эти задачи и методы их решения подробно рассмотрены в курсах гидродинамики и аэродинамики. Задача данной лабораторной работы – исследование характера падения твёрдого шарика в некоторой среде. Если бы никакой среды не было, то шарик падал бы равноускоренно – с ускорением свободного падения. Среда меняет характер движения, так как к силе гравитации добавляются ещё две силы: сила Архимеда и сила сопротивления. Сила Архимеда равна

$$F_a = \rho V g, \quad (2.7)$$

где ρ – плотность среды, V – объём шарика, g – ускорение свободного падения.

А как найти силу сопротивления среды? – Решим эту задачу, опираясь на закон Ньютона для внутреннего трения.

Сила сопротивления F_c складывается из сил внутреннего трения dF , действующих со стороны жидкости на каждый элемент поверхности шарика dS – см. рис. 2.2. Каждая такая элементарная сила действует вдоль поверхности контакта, то есть по касательной к шарика. Итак,

$$\mathbf{F}_c = \int d\mathbf{F}.$$

Для того чтобы от этого векторного равенства перейти к скалярному, запишем его в проекциях на вертикальную ось OX , при этом учтём, что сила сопротивления F_c направлена вертикально вверх.

$$F_c = \int dF_x = \iint_{(S)} f dS \cos \alpha.$$

Интегрирование в этой формуле ведётся по всей поверхности шарика.

Используем теперь формулу Ньютона для удельной силы внутреннего трения (2.6).

$$F_c = \iint_{(S)} \eta |\text{grad} v| dS \cos \alpha.$$

Динамическая вязкость η является количественной характеристикой среды, которая во всех точках среды имеет *одно и то же значение*, поэтому η можно вынести из-под интеграла.

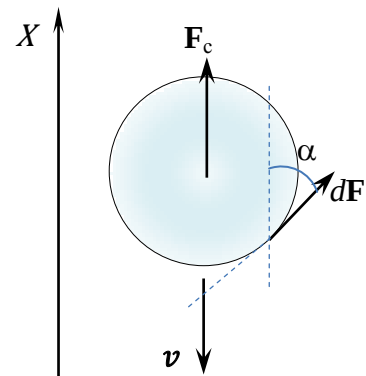


Рис. 2.2. Сила сопротивления и её составляющие

$$F_c = \eta \iint_{(S)} |\operatorname{grad} v| dS \cos \alpha.$$

Градиент скорости в разных точках поверхности шарика разный, но так как $|\operatorname{grad} v| = \frac{dv}{d\ell}$, а скорость среды по мере удаления от поверхности шарика изменяется от v до 0, то для каждой точки можно подобрать такое число L , что

$$|\operatorname{grad} v| = \frac{v}{L},$$

где L – некоторая величина, имеющая размерность длины. Эта величина примерно равна толщине слоя среды ℓ , который увлекает движущийся шарик. Естественно, что на градиент скорости, а значит, и на величину L влияют форма и размеры сосуда, в котором находится среда. Учёт влияния сосуда усложняет задачу, но, к счастью, это влияние тем меньше, чем дальше от стен сосуда находится шарик. Будем считать, что сосуд достаточно велик и его влияние на движение шарика незначительно. Итак,

$$F_c = \eta \iint_{(S)} \frac{v}{L} dS \cos \alpha.$$

Скорость шарика v можно вынести из-под интеграла, так что

$$F_c = \eta v \iint_{(S)} \frac{\cos \alpha}{L} dS.$$

Интеграл в этой формуле зависит только от размеров шарика. Вычисление его – задача, выходящая за рамки общей физики. Один из основателей гидродинамики Дж.Г. Стокс⁷ показал, что этот интеграл равен $6\pi r$, где r – радиус шарика. Таким образом,

$$F_c = 6\pi r \eta v. \quad (2.8)$$

Эта формула называется *формулой Стокса*. Она даёт достаточно точный результат при выполнении следующих двух условий.

- В среде при падении шарика не возникает турбулентности. Это условие выполняется, если шарик движется не слишком быстро. Для этого надо опускать его в среду плавно, без броска, то есть с нулевой начальной скоростью. Высота сосуда тоже не должна быть слишком большой, так как при не очень вязкой среде шарик может сильно разогнаться.
- Горизонтальный размер сосуда должен быть как минимум в 5 – 10 раз больше диаметра шарика. В этом случае влиянием формы и размера сосуда на величину L можно пренебречь.

В данной лабораторной работе оба условия выполняются. Во-первых, используемые шарики падают с нулевой начальной скоростью. Во-вторых, высота сосуда равна 4 м, так что шарики даже в газообразной среде разгоняются до скорости, не большей 8 м/с, а в жидкости скорость шарика может достигать всего несколько см/с. В-третьих, диаметр шариков не более 10 см, а сосуд – это цилиндрический резервуар диаметром более 1 м.

⁷ Джордж Габриель Стокс – английский физик и математик 19 века, член Лондонского королевского общества.

2.3. Уравнение движения шарика

На рисунке 2.3 показаны все три силы, действующие на падающий шарик.

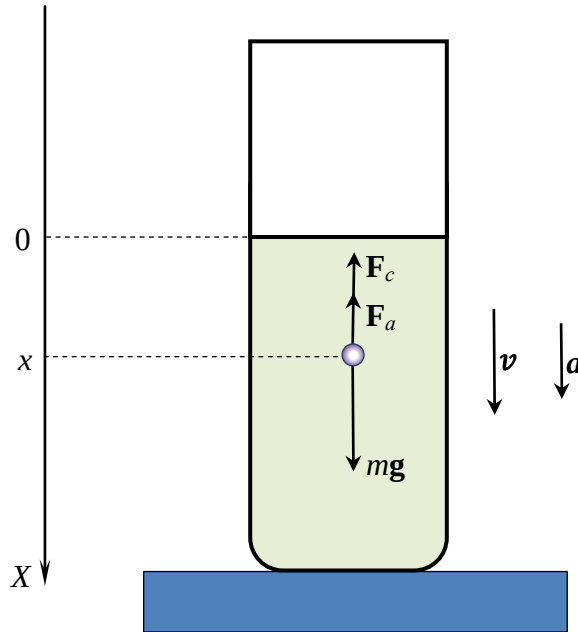


Рис. 2.3. Силы, действующие на шарик

Сложим эти силы и запишем для шарика второй закон Ньютона в проекциях на ось OX – с учётом формулы (2.7) для силы Архимеда и формулы Стокса для силы сопротивления (2.8).

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - F_a - F_c}{m} = \frac{mg - \rho V g - 6\pi r \eta v}{m}. \quad (2.9)$$

Это – дифференциальное уравнение для скорости шарика $v(t)$. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\frac{mg - \rho V g - 6\pi r \eta v}{m} = g \left(1 - \frac{\rho V}{m} \right) - \frac{6\pi r \eta}{m} v.$$

Массу шарика m можно выразить через его плотность ρ_0 и объём V : $m = \rho_0 V$. Кроме того, введём обозначение:

$$\tau = \frac{m}{6\pi r \eta}. \quad (2.10)$$

Величина τ имеет размерность времени, поэтому будем называть её *постоянной времени*. Какой у неё физический смысл, мы выясним позже.

Итак, дифференциальное уравнение (2.9) приводится к следующему виду:

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{v}{\tau}. \quad (2.11)$$

Для дальнейшего упрощения дифференциального уравнения сделаем замену переменной v на переменную u :

$$v = u + v_s,$$

где v_s – некоторая константа⁸. В этом случае из (2.11) следует:

$$\frac{du}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{u}{\tau} - \frac{v_s}{\tau}. \quad (2.12)$$

Выберем константу v_s так, чтобы постоянное слагаемое в правой части этого уравнения оказалась равной нулю:

$$g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{v_s}{\tau} = 0.$$

Тогда получаем:

$$v_s = g\tau \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (2.13)$$

при этом дифференциальное уравнение (2.12) приводится к совсем простому виду:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau}.$$

Это уравнение легко решается методом разделения переменных:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}, \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dt}{\tau}, \quad \ln u = -\frac{t}{\tau} + \ln C,$$

где C – произвольная постоянная. Из последнего равенства следует:

$$u = Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \quad v(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + v_s.$$

Для определения произвольной постоянной C используем начальное условие: шарик отпускают без толчка, то есть $v(0) = 0$. Это условие даёт:

$$v(0) = Ce^0 + v_s = C + v_s \quad v_s = -C.$$

В итоге получаем следующую формулу для $v(t)$:

$$v(t) = v_s \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (2.14)$$

Анализ этой формулы говорит о том, что шарик набирает скорость сначала быстро, но потом всё медленнее, так что спустя некоторое время скорость становится практически постоянной и равной числу v_s . Итак, введённая нами формально величина v_s имеет ясный физический смысл: максимальная скорость, до которой может разогнаться в данной среде свободно падающий шарик. Мы будем называть её *стационарной скоростью*.

Из формулы (2.14) следует ещё физический смысл постоянной времени τ : это время, за которое шарик набирает 63 % стационарной скорости. За время 2τ шарик набирает 86 % стационарной скорости, за время 3τ – 95 % стационарной скорости. Параметр 3τ логично назвать *временем разгона* и обозначить t_p .

График функции $v(t)$ показан на рисунке 2.4.

⁸ В дальнейшем мы выясним физический смысл этой константы.

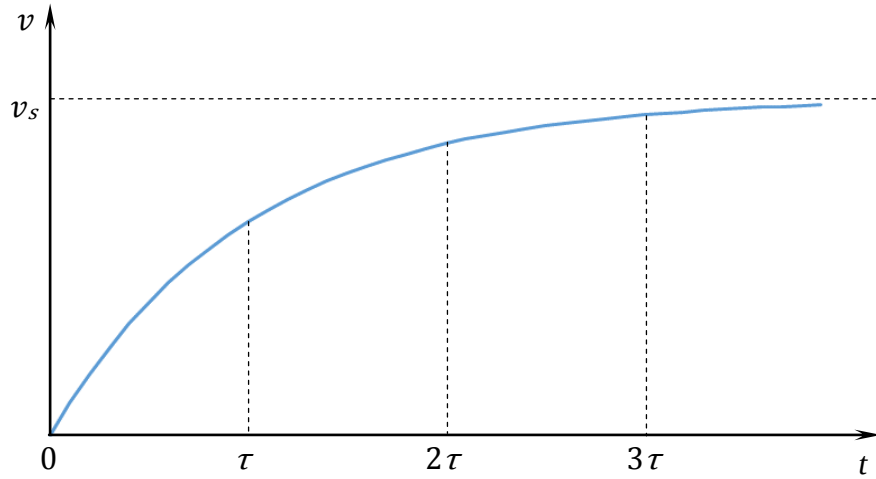


Рис. 2.4. Зависимость скорости шарика от времени

Продифференцировав скорость по времени, можно получить формулу для ускорения шарика:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad a_0 = \frac{v_s}{\tau} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right). \quad (2.15)$$

Здесь a_0 — это начальное ускорение: $a_0 = a(t = 0)$.

Как следует из формулы (2.15), ускорение движения шарика экспоненциально убывает от начального значения a_0 до нуля. При этом $a(\tau) = 0,37a_0$, то есть составляет 37% от начального ускорения, а ускорение в момент времени разгона t_p равно $a(t_p) = a(3\tau) = 0,05a_0$, то есть только 5% от начального ускорения a_0 .

График функции $a(t)$ показан на рисунке 2.5.

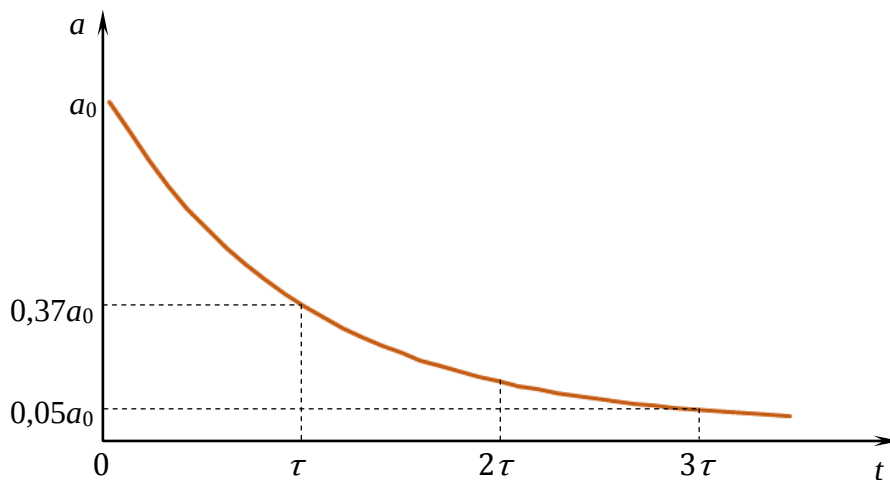


Рис. 2.5. Зависимость ускорения шарика от времени

Обратите внимание на две формулы (2.10) и (2.13):

$$\tau = \frac{m}{6\pi r \eta}, \quad v_s = g\tau \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Из них видно, как влияет динамическая вязкость среды η на характер движения шарика.

- В вязких средах с большим значением η время разгона $t_p = 3\tau$ мало и поэтому мала стационарная скорость v_s . Это значит, что большую часть времени шарик движется *равномерно* со сравнительно небольшой скоростью v_s . Ясно, что такими средами являются плотные жидкости – их в данной лабораторной работе называют *тяжёлыми жидкостями*.
- Другой предельный случай: движение в газе, где динамическая вязкость η мала. В газе время разгона t_p велико по сравнению с временем падения шарика, поэтому шарик к концу падения разгоняется до скорости, много меньшей, чем стационарная скорость v_s , а ускорение шарика за время падения не успевает существенно уменьшиться, так что шарик движется фактически равноускоренно с ускорением

$$a_0 = \frac{v_s}{\tau} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

- Третий случай – промежуточный. Среда является не слишком вязкой, но и не слабо вязкой, такую среду в данной работе называют *лёгкой жидкостью*. Движение в этой жидкости и не равномерное, и не равноускоренное.

В данной лабораторной работе вам придётся иметь дело именно с этим третьим случаем, когда ни скорость падающего шарика, ни его ускорение не являются константами, а изменяются с течением времени в соответствии с формулами (2.14) и (2.15).

2.4. Методика эксперимента

Из теоретически полученных формул (2.14) и (2.15)

$$v(t) = v_s \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad a_0 = \frac{v_s}{\tau} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

следует, что скорость шарика с течением времени нарастает, а ускорение падает – это наглядно показывают рисунки 2.4 и 2.5.

Задача лабораторной работы – экспериментальная проверка формул (2.14) и (2.15). Так как эти формулы вытекают друг из друга, то достаточно проверить одну из них. Более простой является формула для ускорения (2.15), и очень важно, что её можно линеаризовать. Для этого достаточно прологарифмировать обе части формулы:

$$\ln a = \ln a_0 - \frac{t}{\tau}. \quad (2.16)$$

Теперь введём вспомогательную величину $u = \ln a$ и введём обозначения:

$$k = -\frac{1}{\tau}, \quad b = \ln a_0. \quad (2.17)$$

В результате получаем следующую линейную зависимость вспомогательной величины u от времени t :

$$y = kt + b. \quad (2.18)$$

Если данный факт подтвердится экспериментальным путём, то это будет подтверждением теоретических формул (2.15) и (2.14).

Кроме того, измерив параметры линейной зависимости (2.18) k и b , можно измерить постоянную времени τ и начальное ускорение a_0 , а затем – динамическую вязкость жидкости η и плотность жидкости ρ . Из формул (2.17) следует:

$$\tau = -\frac{1}{k}, \quad a_0 = e^b. \quad (2.19)$$

Далее преобразуем формулу (2.10) $\tau = \frac{m}{6\pi r \eta}$, так как входящие в эту формулу масса шарика m и его радиус r связаны друг с другом следующим образом:

$$m = \rho_0 V = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

В результате получаем:

$$\tau = -\frac{2\rho_0 r^2}{9\eta}.$$

Теперь из этой формулы и из (2.15) получаем формулы, определяющие способ измерения η и ρ :

$$\eta = -\frac{2\rho_0 r^2}{9\tau}, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{a_0}{g}\right). \quad (2.20)$$

Проблема только в том, как измерять ускорение шарика a . Экспериментальная установка позволяет получить зависимость координат шарика от времени $x(t)$, при этом шаг изменения координат постоянен. По определению скорости, $v = \frac{dx}{dt}$. Если промежутки времени Δt между измерениями координат достаточно малы, то скорость движения шарика между соседними замерами координат можно измерить, используя формулу

$$v_n = v(t'_n) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{s}{t_n - t_{n-1}}, \quad (2.21)$$

где s – шаг изменения координат, n – порядковый номер замера координат, t'_n – момент времени, для которого определена скорость v_n . Значение t'_n можно считать средним между t_n и t_{n-1} :

$$t'_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}. \quad (2.22)$$

Измерив скорость шарика в моменты времени t'_n , можно аналогичным образом измерить и ускорение шарика между каждой парой соседних моментов времени t'_n . Так как, по определению ускорения, $a = \frac{dv}{dt}$, то

$$a_n = a(t''_n) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_n - v_{n-1}}{t'_n - t'_{n-1}}, \quad t''_n = \frac{t'_n + t'_{n-1}}{2}. \quad (2.23)$$

3. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка – виртуальная. Она разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

При вызове программы открывается окно «Движение тела в вязкой среде». В центральной части окна приведены цель работы и краткое описание работы. Внизу окна – три управляющие кнопки:

- **Ход работы.** При нажатии этой кнопки открывается окно, в котором показан порядок выполнения работы. Эту кнопку нажимать *не надо*, так как в данном пособии вам предлагается порядок выполнения лабораторной работы, который несколько отличается от того, который предлагают разработчики программы.
- **Эксперимент.** При нажатии на эту кнопку открывается окно с экспериментальной установкой.
- **Завершение работы.** Эта кнопка вызывает выход из программы.

Окно «Эксперимент» показано на рис. 3.1.

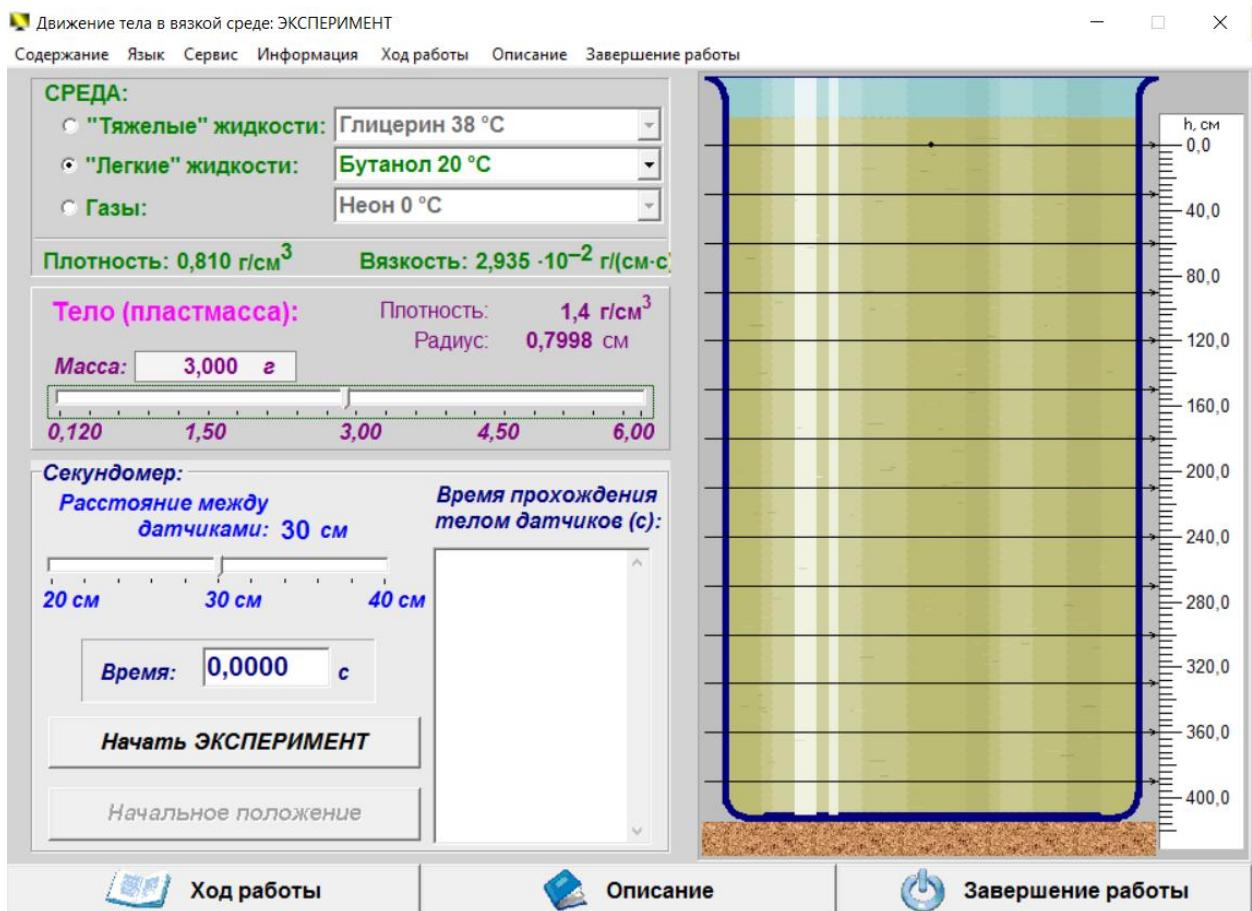


Рис. 3.1. Окно «Эксперимент»

Оно содержит три раздела: панель условий эксперимента (слева вверху), инструментальная панель (слева внизу) и окно визуализации (справа).

1. *Панель условий эксперимента* содержит окно «СРЕДА» для выбора типа среды: «Тяжёлые жидкости», «Лёгкие жидкости», «Газы» и линейку с бегунком «Масса» для выбора массы шарика. Кроме того, на этой панели указано вещество, из которого изготовлен шарик (пластмасса плотностью $\rho = 1,4 \text{ г/см}^3$) и радиус шарика в сантиметрах.

2. В окне *визуализации* вы видите сосуд с жидкостью, падающий шарик и линейку (h , см). Рядом с сосудом (справа) расположены на одинаковом расстоянии друг от друга датчики, реагирующие на пролетающий мимо них шарик. Датчики не показаны, но показаны горизонтальными линиями уровни, на которых находятся датчики.

3. *Инструментальная панель* содержит линейку с бегунком «**Расстояние между датчиками**», окно «**Время**», окно «**Время прохождения телом датчиков**» и две кнопки: «**Начать ЭКСПЕРИМЕНТ**» и «**Начальное положение**».

- Расстояние между датчиками можно изменять в диапазоне от 20 до 40 см.
- В окне «**Время**» отображается полное время движения шарика, то есть время его падения на дно сосуда.
- В окне «**Время прохождения телом датчиков**» отображаются моменты прохождения шарика мимо всех датчиков.
- Кнопка «**Начать ЭКСПЕРИМЕНТ**» запускает шарик. После нажатия этой кнопки шарик в окне визуализации начинает движение, а кнопка превращается в кнопку «**Остановить ЭКСПЕРИМЕНТ**».

4. Порядок выполнения работы

4.1. Нажмите кнопку «**Эксперимент**» и обратитесь к преподавателю для того, чтобы он выбрал для вас среду и шарик. После этого заполните таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Жидкость			
Плотность жидкости	ρ	г/см ³	
Масса шарика	m	г	
Радиус шарика	r	см	
Плотность шарика	ρ_0	г/см ³	
Динамическая вязкость жидкости	η	г/(см·с)	
		Па·с	
Расстояние между датчиками	s	см	
Ускорение свободного падения	g	м/с ²	
Погрешности прямых измерений и заданных величин	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(x)$	см	
	$\Delta(m)$	г	
	$\Delta(r)$	см	
	$\Delta(s)$	см	
	$\Delta(\rho_0)$	г/см ³	
	$\Delta(g)$	м/с ²	

Расстояние между датчиками выберите самостоятельно.

Плотность шарика ρ_0 , указанная на панели условий эксперимента (1,4 г/см³), задана с низкой точностью – всего 2 значащие цифры, но её

можно узнать точнее, так как заданы радиус и масса шарика. Для этого используйте формулу

$$\rho_0 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

- 4.2. Нажмите кнопку **«Начать ЭКСПЕРИМЕНТ»**. Шарик начнёт падать, а в окне **«Время прохождения телом датчиков»** будут появляться числа. После окончания эксперимента, то есть после падения шарика на дно сосуда перенесите информацию из окна **«Время прохождения телом датчиков»** в столбец « t » таблицы 2.
- 4.3. Нажмите кнопку **«Завершение работы»**.

Таблица 2

Зависимость координат, скорости и ускорения шарика от времени

n	t	$x(t)$	t'	$v(t')$	$\Delta(v)$	t''	$a(t'')$	$y = \ln a$	$\Delta(y) = \varepsilon(a)$	$\Delta(a)$
	с	см	с	см/с	с ²	с	см/с ²		с ²	
1	0	0								
2										
3										
...										
...										

- 4.4. Заполните в таблице 2 столбец « $x(t)$ ».
- 4.5. Заполните в таблице 2 столбцы « t' » и « $v(t')$ », используя формулы (2.22): $t'_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$ и (2.21): $v_n = \frac{s}{t_n - t_{n-1}}$. В соответствии с этими формулами, значения t' и $v(t')$ в таблице 2 начинаются со *второй* строки.
- 4.6. Заполните в таблице 2 столбцы « t'' » и « $a(t'')$ », используя формулы (2.23): $t''_n = \frac{t'_n + t'_{n-1}}{2}$ и $a_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{t'_n - t'_{n-1}}$. В соответствии с этими формулами, значения t'' и $a(t'')$ в таблице 2 начинаются с *третьей* строки.
- 4.7. Заполните в таблице 2 столбец « $y = \ln a$ » и столбец погрешностей $\Delta(y)$.
- 4.8. На основании данных таблицы 2 постройте 4 графика: зависимость координаты шарика от времени, зависимость скорости шарика от времени, зависимость ускорения шарика от времени и зависимость вспомогательной величины y от времени. Не забудьте нанести на график планки погрешностей.
На графике $a(t)$ нанесите линию тренда, причём в параметрах линии тренда выберите «Экспоненциальная», и «Показывать уравнение на диаграмме».
На графике $y(t)$ тоже нанесите линию тренда, только в параметрах линии тренда выберите «Линейная», и «Показывать уравнение на диаграмме».
- 4.9. Прокомментируйте графики.
- 4.10. Для измерения плотности жидкости ρ и динамической вязкости жидкости η заполните таблицу 3. Определить значения параметров k и b линейной

зависимости $y(t)$ и оценить абсолютные погрешности их измерения $\Delta(k)$ и $\Delta(b)$ вам позволит функция ЛИНЕЙН.

Значения постоянной времени τ и начального ускорения a_0 определите по формулам (2.19):

$$\tau = -\frac{1}{k}, \quad a_0 = e^b. \quad (2.19)$$

Значения ρ и η определите с помощью формул (2.20):

$$\eta = -\frac{2\rho_0 r^2}{9\tau}, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{a_0}{g}\right). \quad (2.20)$$

Таблица 3

Постоянная времени, начальное ускорение и параметры жидкости

Величина	k	b	τ	a_0	ρ	η
Размерность	с^{-1}		с	$\text{см}/\text{с}^2$	$\text{г}/\text{см}^3$	$\text{Па}\cdot\text{с}$
Значение						
Абсолютная погрешность						
Относительная погрешность						

4.11. Запишите результат измерения плотности жидкости и динамической вязкости жидкости в стандартной форме:

$$\rho = (\dots \pm \dots) \text{ г}/\text{см}^3, \quad \varepsilon(\rho) = \dots \%$$

$$\eta = (\dots \pm \dots) \text{ Па}\cdot\text{с}, \quad \varepsilon(\eta) = \dots \%$$

4.12. Сравните измеренные и заданные значения плотности и вязкости и напишите в отчёте, о чём говорит это сравнение.

4.13. Отметьте в отчёте точности измерения плотности и вязкости.

4.14. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

5. Оценка погрешностей измерений

5.1. Погрешности прямых измерений.

Прямым способом в данной работе измеряются четыре величины: радиус шарика r , масса шарика m , координата шарика x и время движения шарика t .

Радиус шарика r высвечивается на панели условий эксперимента в сантиметрах в виде числа с четырьмя знаками после запятой. Следовательно, $\Delta(r) = 0,0001$ см.

Массу шарика m вы видите в окне «**Масса**» в граммах в виде числа с тремя знаками после запятой. Следовательно, $\Delta(m) = 0,001$ г.

Координата шарика x определяется расстоянием между датчиками, которое задаётся в сантиметрах с помощью линейки с бегунком и высвечивается над линейкой в виде целого числа. Поэтому $\Delta(x) = 1$ см. Однако числа на линейке в окне визуализации указаны с точностью до десятых долей см, так что можно принять погрешность координаты шарика $\Delta(x) = 0,1$ см. Та-

кой же является и погрешность *расстояния между датчиками*: $\Delta(s) = 0,1$ см.

Время прохождения шарика мимо датчиков t вы видите в соответствующем окне в секундах в виде числа с четырьмя знаками после запятой. Таким образом, $\Delta(t) = 0,0001$ с.

5.2. Погрешности заданных величин.

На панели условий эксперимента заданы три величины: плотности среды и шарика ρ и ρ_0 и динамическая вязкость среды η .

Погрешности $\Delta(\eta)$ и $\Delta(\rho)$ вам не понадобятся.

Плотность шарика ρ_0 задана с низкой точностью, поэтому вам предложено определять её по формуле $\rho_0 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$. Из этой формулы следует, что

$$\varepsilon(\rho_0) = \varepsilon(m) + 3\varepsilon(r), \quad \Delta(\rho_0) = \rho_0 \varepsilon(\rho_0).$$

Плотность среды ρ задана в г/см³ в виде числа с тремя знаками после запятой. Поэтому $\Delta(\rho) = 0,001$ г/см³.

Ускорение свободного падения. В районе Севастополя оно равно $(9,807 \pm 0,002)$ м/с².

5.3. Погрешность измерения моментов времени t' и t'' .

Величина t' измеряется в соответствии с формулой (2.22): $t'_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$. Из этой формулы следует:

$$\Delta(t'_n) = \frac{1}{2}(\Delta(t_n) + \Delta(t_{n+1})) = \frac{1}{2}(\Delta(t) + \Delta(t)) = \Delta(t).$$

5.4. Погрешность измерения скорости шарика v_n .

Скорость измеряется с использованием формулы (2.21) $v_n = v(t'_n) = \frac{s}{t_n - t_{n-1}}$. Из этой формулы следует

$$\varepsilon(v_n) = \varepsilon(s) + \varepsilon(t_n - t_{n-1}) = \frac{\Delta(s)}{s} + \frac{\Delta(t_n - t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = \frac{\Delta(s)}{s} + \frac{2\Delta(t)}{t_n - t_{n-1}},$$

$$\Delta(v_n) = v_n \varepsilon(v_n).$$

5.5. Погрешность измерения ускорения шарика a_n .

Для измерения ускорения используется формула (2.23): $a_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{t'_n - t'_{n-1}}$. Из этой формулы следует:

$$\varepsilon(a_n) = \varepsilon(v_n - v_{n-1}) + \varepsilon(t'_n - t'_{n-1}) = \frac{\Delta(v_n - v_{n-1})}{v_n - v_{n-1}} + \frac{\Delta(t'_n - t'_{n-1})}{t'_n - t'_{n-1}} = \frac{2\Delta(v)}{v_n - v_{n-1}} + \frac{2\Delta(t)}{t'_n - t'_{n-1}}.$$

В качестве значения $\Delta(v)$ достаточно выбрать минимальное значение погрешности измерения скорости – при $n = 2$.

$$\Delta(a_n) = a_n \varepsilon(a_n).$$

5.6. Погрешность измерения вспомогательной величины y .

По определению, $y = \ln a$. Применим общее правило:

$$\Delta(y) = \left| \frac{d \ln a}{da} \right| \Delta(a) = \frac{1}{a} \Delta(a) = \varepsilon(a).$$

- 5.7. Погрешности измерения постоянной времени τ и начального ускорения a_0 .
Постоянная времени и начальное ускорение связаны с параметрами k и b линейной зависимости $y(t)$ формулами (2.19):

$$\tau = -\frac{1}{k}, \quad a_0 = e^b. \quad (2.19)$$

Из этих формул следует, что

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(k), \quad \Delta(\tau) = \tau \varepsilon(\tau),$$

$$\Delta(a_0) = \left| \frac{da_0}{db} \right| \Delta(b) = e^b \Delta(b) = a_0 \Delta(b), \quad \varepsilon(a_0) = \Delta(b).$$

- 5.8. Погрешность измерения динамической вязкости жидкости η и плотности жидкости ρ .

Для измерения η и ρ используются формулы (2.20):

$$\eta = -\frac{2\rho_0 r^2}{9\tau}, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{a_0}{g}\right). \quad (2.20)$$

Из них следует:

$$\varepsilon(\eta) = \varepsilon(\rho_0) + 2\varepsilon(r) + \varepsilon(\tau), \quad \Delta(\eta) = \eta \varepsilon(\eta),$$

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\rho_0) + \varepsilon\left(1 - \frac{a_0}{g}\right),$$

$$\varepsilon\left(1 - \frac{a_0}{g}\right) = \frac{\Delta\left(1 - \frac{a_0}{g}\right)}{1 - \frac{a_0}{g}} = \frac{\Delta\left(\frac{a_0}{g}\right)}{1 - \frac{a_0}{g}} = \frac{\frac{a_0}{g} \varepsilon\left(\frac{a_0}{g}\right)}{1 - \frac{a_0}{g}} = \frac{\varepsilon(a_0) + \varepsilon(g)}{1 - \frac{a_0}{g}},$$

$$\Delta(\rho) = \rho \varepsilon(\rho).$$

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что является причиной силы сопротивления жидкости и газа?
- 6.2. От чего зависит сила взаимодействия между двумя соседними слоями жидкости?
- 6.3. Что называется коэффициентом внутреннего трения (динамической вязкостью)?
- 6.4. Что такое удельная сила внутреннего трения?
- 6.5. Напишите формулу Стокса и назовите величины, входящие в неё.
- 6.6. Напишите формулы зависимости скорости и ускорения шарика от времени и назовите величины, входящие в них.
- 6.7. Что такое стационарная скорость шарика?
- 6.8. Что такое постоянная времени и время установления?
- 6.9. Как влияет динамическая вязкость жидкости η на характер движения шарика?
- 6.10. Какие физические закономерности требуется экспериментально проверить в данной лабораторной работе?
- 6.11. Каким образом измеряются скорость и ускорение шарика в данной лабораторной работе?

6.12. Каким образом в данной лабораторной работе измеряются плотность жидкости и динамическая вязкость жидкости?

7. Рекомендуемая литература

- 7.1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989.
- 7.2. Кикоин А.К. Кикоин И.К. Молекулярная физика, – М.: Наука, 1976.
- 7.3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2003.
- 7.4. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск: Издательство НИ ТПУ, 2007.
- 7.5. Рипп А.Г. Обработка измерений: метод. пособие. – Севастополь: СКУАЭП, 2012.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Матузаева Ольга Вячеславовна**

Движение в слабо вязкой жидкости

Учебное пособие по общей физике

В авторской редакции

Изд. № 142/18. Объем 1,25 п.л.

РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»