

УДК 519.6+621.372

В.П. Долгин, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Предложен метод анализа электрических линейных и нелинейных цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами во временной области при воздействии входных сигналов произвольной формы. Рассмотрены примеры реализации вычислений переходных режимов цепей, включающих указанные элементы.

При вычислении выходного сигнала электрической цепи стремятся к получению аналитического выражения, связывающего входной и выходной сигналы. Это приводит к сложным аналитическим преобразованиям, особенно в случаях нелинейных цепей. Существенные осложнения возникают при необходимости анализа выходного сигнала цепи при входном сигнале произвольной формы. В процессе анализа приходится прибегать к упрощениям аналитической модели, поскольку получение выходного сигнала для нелинейной цепи при произвольном характере входного сигнала в большинстве случаев не представляется возможным. Упрощения аналитической модели приводят к погрешностям, оценка которых в ряде случаев оказывается затруднительной. В то же время параметры цепей могут быть заданы с известной точностью (чаще всего это единицы процентов) и точный расчет выходного сигнала не имеет особого смысла. В этой связи целесообразно производить расчеты с заданной погрешностью. Применяемые пакеты прикладных программ (Matlab, Simulink и другие) из-за сложности процедур реализации численных методов обладают малым быстродействием.

Рассмотрим возможность решения задачи разностным методом для получения выходного сигнала звена произвольной структуры при произвольном входном воздействии и оценим допускаемую при этом погрешность. Таким образом, задача состоит в синтезе разностного оператора, связывающего вход и выход участка цепи, при заданных электрических параметрах этого участка.

Произвольный участок электрической цепи может быть описан интегро-дифференциальным уравнением. Описание процесса прохождения сигнала по цепи связано с представлением реакции входящих в нее элементов: сопротивления R , индуктивности L и емкости C . Зависимости напряжения заряда емкости u_C при известной величине тока i_C и тока индуктивности i_L , определяющего напряжение u_L , могут быть представлены выражениями (1) и (2) соответственно.

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt \quad \text{и} \quad u_L = \frac{di_L}{dt} L \quad \text{или} \quad (1)$$

$$i_C = \frac{du_C}{dt} C \quad \text{и} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt . \quad (2)$$

Получение точного значения решения уравнений (1) и (2) возможно на основании теоремы о среднем, если известны подынтегральные функции. В противном случае можно получить приближенные значения, сходящиеся к результату точного решения при уменьшении шага. Действительно, определенный интеграл равен произведению области интегрирования (a, b) на значение подынтегральной функции в некоторой точке ξ , принадлежащей (a, b) :

$$\int_a^b f'(x) dx = (b - a) f'(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

Поскольку $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, то $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$ — одна из форм теоремы о среднем (Лагранжа), которая позволяет перейти к разностной схеме при заданном значении шага $h = b - a$ и получить последующее значение $f(b)$ при известном предыдущем $f(a)$: $f(b) = f(a) + h \cdot f'(\xi)$; $\xi = [a, b]$, или, наоборот, найти $f(a)$ при известном $f(b)$.

Рассмотрим задачу вычисления тока в контуре, содержащем последовательно соединенные R , L и C элементы. Необходимо вычислить ток $i(t)$, протекающий в контуре при эдс на его входе, равной $E = 1(t)$, и заданных величинах R , L и C .

Как известно, сумма падений напряжений на участках цепи равна приложенной эдс

$$E = iR + \frac{di}{dt} L + \frac{1}{C} \int_0^t i dt, \quad (3)$$

где принято $i = i(t)$.

Применив теорему Лагранжа о среднем и решив уравнение (3) относительно производной $i' = (E - iR - u_C)/L$, можно прийти к рекуррентным соотношениям вида

$$\begin{aligned} u_C(k) &= u_C(k-1) + i(\xi) \cdot h / C; \\ i(k) &= i(k-1) + (E - u_C(k) - R \cdot i(\xi)) h / L, \end{aligned} \quad (4)$$

где ξ — корень среднего ($k-1 \leq \xi \leq k$), реализованным рекурсивной Qbasic-процедурой

2 ' REC_RLC-Q.bas. Рекурсивная модель

$u = u + i \cdot h / C$; $i = i + (E - u - R \cdot i) \cdot h / L$; RETURN

Значение ξ можно вычислить для известной функции $i(t)$, где $t = kh$, k – номер шага. При неизвестном характере функции $i(t)$ значение ξ определено быть не может. По теореме Лагранжа о корне среднего его значение может быть принято равным приближенно среднему арифметическому значений k и $k-1$ ($\xi \approx k - 1/2$).

Вычисление промежуточных значений $i(\xi)$ вызывает затруднения из-за необходимости применения интерполяционных процедур при неизвестном характере функции, что может привести в некоторых случаях к погрешности, выходящей за границы интервала приемлемых значений ξ . Поэтому целесообразно принять $\xi = k - 1$ и оценить возникающую при этом погрешность.

Для оценки погрешности можно воспользоваться предельной теоремой о корне среднего

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{\xi - a}{b - a} = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

где a и b – границы области ($b = a + h$). Тогда для достаточно малых значений h можно полагать на основании (5), что значение оценки погрешности будет ограничено величиной приращения функции на отрезке (a, ξ) , где $a = (k-1)h$, т.е.

$$\bar{\varepsilon}(k) = i'(t) \cdot h(\xi - k + 1) \approx \frac{h}{2} i'(t). \quad (6)$$

Полученное соотношение для оценки погрешности (6) позволяет утверждать, что

- погрешность вычисления по мере развития процесса стремится к нулю, т.к. $\lim_{t \rightarrow \infty} i'(t) = 0$,
- погрешность вблизи точек экстремума минимальна ввиду того, что значение производной функции в точке экстремума $i'(t)$ равно нулю,
- погрешность убывает по мере уменьшения шага h .

Это означает отсутствие искажений установившегося и амплитудных значений и позволяет обеспечить требуемую точность вычислений выбором шага h .

Для проверки приведенных соотношений произведено сравнение QBASIC– реализации соотношений (4) с решением средствами пакета Simulink. В обоих случаях вычисления выполнены с шагом $h=0,001$ с при значениях параметров $R=1$ Ом, $C=1$ Ф, $L=1$ Гн, $E=1$ В. Время вычислений на ПК с процессором Celeron–366 составило 0,248 с посредством процедуры (4) и 8,55 с – с помощью пакета Simulink при длительности процесса $t=10$ с.

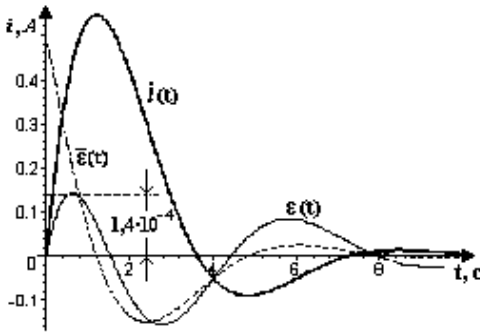


Рисунок 1- Кривые тока и погрешности

Графики процесса $i(t)$, погрешности $\varepsilon(t)$ и оценки погрешности $\bar{\varepsilon}(t)$ показаны на рисунке 1, из которых видно, что погрешность вычислений $\varepsilon(t)$ и оценка $\bar{\varepsilon}(t)$ уменьшаются по мере развития процесса. Погрешность вблизи точек экстремума процесса $i(t)$ близка к нулю, порядок и характер изменения погрешности $\varepsilon(t)$ и

оценки погрешности $\bar{\varepsilon}(t)$ совпадают, что дает возможность на основании выражения оценки погрешности (6) реализовать процедуру автоматического выбора шага вычислений для оптимизации вычислительного процесса.

Рассмотрим задачу моделирования нелинейного устройства на примере ключа на мощном транзисторе, эквивалентная схема которого [2] изображена на рисунке 2,а. Воспользовавшись представлениями (1) и (2), можно эквивалентную схему ключа описать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_{zu}}{dt} &= \frac{i_1 + i_2}{C_{11}}, \quad \frac{du_{cu}}{dt} = \frac{i_3}{C_{22}}, \quad \frac{di_4}{dt} = \frac{E_c - i_4 R_c - u_{cu}}{L}, \quad i_1 = \frac{u_{ex} - u_{zu}}{R_r}, \\ i_2 &= \frac{(i_4 - I_c)/C_{22} - i_1/C_{11}}{1/C_{11} + 1/C_{12} + 1/C_{22}}, \quad i_3 = i_4 - I_c - i_2, \end{aligned}$$

$$\text{где } I_c = M(1 - \exp(-K \cdot u_{cu} \cdot S/M)), \quad M = I_s \left[1 + th \frac{S(u_{zu} - U_s)}{I_s} \right],$$

$$C_{12} = C_{m12} + A \exp(-B \cdot u_{cu}), \quad C_{22} = C_{m22} + C \exp(-d \cdot u_{cu}),$$

$$U_{ex}(t) = \begin{cases} U_m (1 - \exp(-t/\tau_{ex})) & \text{при } 0 \leq t \leq t_u; \\ U_m (1 - \exp(-t_u/\tau_{ex})) \exp(-(t - t_u)/\tau_{ex}) & \text{при } t > t_u, \end{cases}$$

U_m – амплитуда, t_u – длительность и τ_{ex} – постоянная времени нарастания и спада входного импульса.

При заданных параметрах схемы и входном напряжении $u_{вх} = U_{вх}(t)$ требуется вычислить [2] напряжения u_{cu} и u_{zu} . Для этого составим систему рекуррентных соотношений, задав шаг дискретизации h

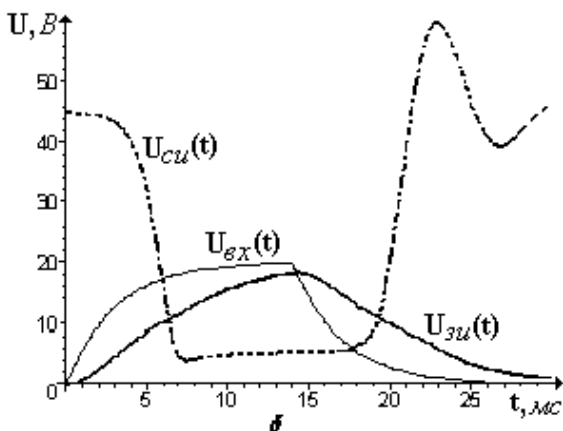
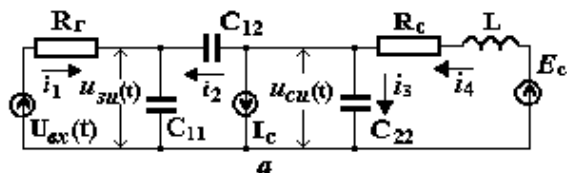


Рисунок 2- Эквивалентная схема (а) и расчетные зависимости ключа на У-МДП транзисторе (б)

$$\begin{aligned}
 u_{zu}(k) &= u_{zu}(k-1) + (i_1(k-1) + i_2(k-1)) \cdot h / C_{11}; \\
 u_{cu}(k) &= u_{cu}(k-1) + i_3(k-1) \cdot h / C_{22}; \\
 i_1(k) &= (u_{вх}(k) - u_{zu}(k)) / R_{г}; \\
 i_2(k) &= [(i_4(k) - I_c(k)) / C_{22} - i_1(k) / C_{11}] / (1/C_{11} + 1/C_{12} + 1/C_{22}); \\
 i_3(k) &= i_4(k) - I_c(k) - i_2(k); \\
 i_4(k) &= i_4(k-1) + (E_c - i_4(k-1)R_c - u_{cu}(k)) \cdot h / L,
 \end{aligned}$$

которая была реализована в форме MAPLE – рекурсивной процедуры.

> # Mdp.mws. Рекурсивная процедура вычисления $U_{cu}(t)$ и $U_{zu}(t)$
t1:=time();

for k to z do t:=k*h0:VAR(t,k):

Uzi:=Uzi+(i1+i2)*h0/C11:Uзи[k]:=Uzi:

Uci:=Uci+i3*h0/C22: Uси[k]:=Uci:

```

i4:=i4+(Ec-i4*Rc-Uci)*h0/L:
i1:=evalf((Ubx[k]-Uzi)/Rr):
i2:=((i4-Ic)/C22-i1/C11)/(1/C11+1/C22+1/C12):
i3:=i4-Ic-i2:
od:t1:=time()-t1;          t1 := 1.590

```

где VAR(t,k)– процедура вычисления нелинейных параметров модели

> # Процедура вычисления нелинейных параметров модели

VAR:=proc(t,k) local M: global Ubx,Ic,C12,C22:

if t<=Ti then Ubx[k]:=Um*(1-exp(-t/Tbx))

else Ubx[k]:=Um*(1-exp(-Ti/Tbx))*exp(-(t-Ti)/Tbx) fi:

M:=Is*(1+tanh(S*(Uzi-Us)/Is)): Ic:=M*(1-exp(-K*Uci*S/M)):

C12:=Cm12+A*exp(-B*Uci): C22:=Cm22+C*exp(-d*Uci): end:

Вычисления u_{ci} и u_{zi} выполнены для ключа на транзисторе КП913А с параметрами [2] $R_c=5$ Ом; $C_{11}=3,5 \cdot 10^{-10}$ Ф; $C_{m12}=8 \cdot 10^{-12}$ Ф; $C_{m22}=1,3 \cdot 10^{-10}$ Ф; $L=10^{-10}$ Гн; $A=3,5 \cdot 10^{-11}$; $B=0,088$; $d=0,33$; $C=6,59 \cdot 10^{-10}$ Ф; $I_s=11$ А; $U_s=12,6$ В; $S=2,72$ А/В; $K=0,7$; $E_c=45$ В; $R_c=5$ Ом; $R_r=10$ Ом; $E_c=45$ В; $U_m=20$ В; $\tau_{bx}=3 \cdot 10^{-9}$ с; $\tau_{и}=14 \cdot 10^{-9}$ с.

Результаты вычислений представлены в форме графиков на рисунке 2,б. Для оценки достоверности результата получены оценки погрешности вычисления u_{ci} и u_{zi} , составившие 2,25% и 0,55%, что можно считать удовлетворительным при допустимой погрешности [2], составляющей 15% ... 20%. Время вычислений при шаге $h=10^{-10}$ с составило 1,148 с при длительности процесса 30 нс.

Рассмотрим задачу моделирования нелинейной автоколебательной цепи (рисунок 3,а) с двухполусником, имеющим N-образную вольтамперную характеристику (ВАХ). Требуется вычислить $u(t)$ и $i(t)$ при известных значениях $R=5$ Ом, $L=50 \cdot 10^{-9}$ Гн, $C=100 \cdot 10^{-12}$ Ф, $E=0,5$ В и характеристики двухполусника, которая задана для туннельного диода 3И202К [2] узлами интерполяции

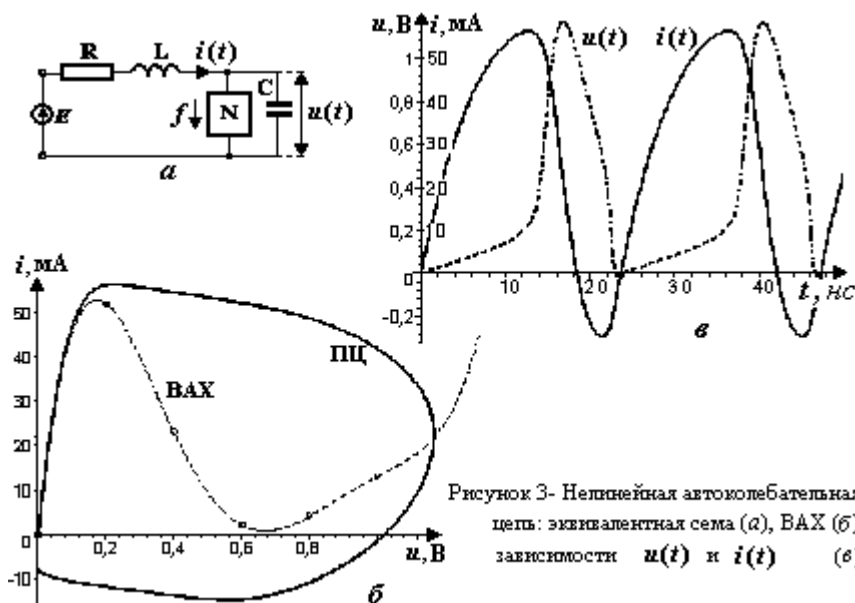


Рисунок 3- Нелинейная автоколебательная цепь: эквивалентная схема (а), ВАХ (б), зависимости $u(t)$ и $i(t)$ (в)

$$U = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0\} \text{ В}, \quad I_T = \{0; 52; 23; 2; 4; 13\} \text{ мА}.$$

Описание цепи можно представить дифференциальными уравнениями

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - iR - u}{L}; \quad \frac{du}{dt} = \frac{i - I_T(u)}{C},$$

где $I_T(u)$ - зависимость тока двухполюсника от приложенного напряжения U , которая реализована с помощью стандартной MAPLE – процедуры интерполяции с узлами $U \{ \circ \}$, $I_T \{ \circ \}$ в виде полиномиальной, представленной по схеме Горнера функции $f(x)$

$$f := (.7463333328 + (-3.420833328 + (5.734374983 + (-4.166666647 + 1.119791659 \cdot x) \cdot x) \cdot x) \cdot x) \cdot x.$$

Для вычисления $u(t)$ и $i(t)$ составим систему рекуррентных соотношений по описанию процесса

$$i(k) = i(k-1) + [E - Ri(k-1) - u(k-1)]h/L;$$

$$u(k) = u(k-1) + [i(k) - I_T(u(k-1))]h/C,$$

которая оформлена в виде MAPLE – процедуры REK(k), где k – значение текущего шага.

> # N.mws.Рекуррентная процедура

Rek:= proc(k) global i,u,x: x:= u[k-1]:

i[k]:= i[k-1]+(E-R*i[k-1]-u[k-1])*h/L:

u[k]:= u[k-1]+(i[k]-f)*h/C: end:

Результат вычислений представлен графиками ВАХ с совмещенной кривой предельного цикла колебаний (ППЦ) на рисунке 3,б и графиками за-

висимостей $u(t)$ и $i(t)$ на рисунке 3, в при шаге $h=0,1$ нс и длительности процесса $t_n=50$ нс. Характер и формы кривых процесса совпадают с рассчитанными методом Рунге-Кутты-Мерсона [2] для тех же значений параметров цепи. Время вычислений зависимостей $u(t)$ и $i(t)$ составило $t=0,28$ с.

Представляют интерес задачи исследования линий передачи и задержки, которые решаются по различным методикам в зависимости от типа линии. Наиболее общим случаем является схема [1,2], содержащая индуктивность L , сопротивление R , емкость C и шунтирующую ее проводимость G (рисунок 4,а). Для длинных линий с распределенными параметрами перечисленные параметры задаются на единицу длины. Рассмотрим процедуру вычисления тока и напряжения в любой точке линии, представив ее совокупностью n элементарных участков $\Delta X = X/n$ линии длиной X . При известных значениях сопротивления нагрузки R_n , эдс входного единичного сигнала E , его внутреннего сопротивления R_r и параметров линии R_l , L_l , C_l и G_l можно найти значения параметров $R=R_l/n$, $L=L_l/n$, $C=C_l/n$ и $G=G_l/n$ для элементарного участка ΔX и составить систему дифференциальных уравнений:

для любого j -го элементарного участка линии

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{u_{j-1} - u_j - Ri_j}{L}; \quad \frac{du_j}{dt} = \frac{i_j - i_{j+1} - Gu_j}{C}; \quad j=[2; n-1],$$

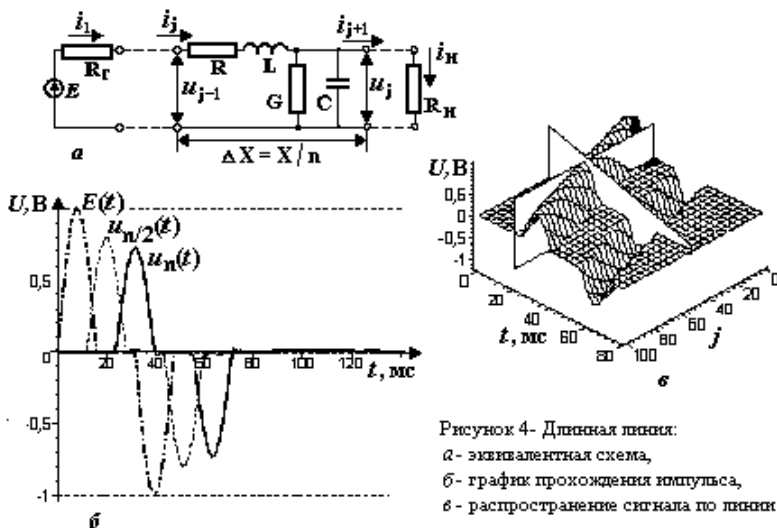


Рисунок 4- Длинные линии:
а- эквивалентная схема,
б- график прохождения импульса,
в- распространение сигнала по линии

конечного n -го участка

$$\frac{di_n}{dt} = \frac{u_{n-1} - u_n - Ri_n}{L}; \quad \frac{du_n}{dt} = \frac{i_n - (G + 1/R_n)u_n}{C}$$

и начального 1-го участка

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{u_0 - u_1 - Ri_1}{L}; \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{i_1 - i_2 - Gu_1}{C}; \quad u_0 = E - R_{\Gamma}i_1,$$

которая реализована с помощью MAPLE – рекуррентной процедуры REC(k), где k – номер шага, h – величина шага. Этот же алгоритм может быть применен для вычислений токов и напряжений искусственных линий с сосредоточенными параметрами.

> # RLCG-SINGL.mws. Рекуррентная процедура

REC: = proc(k) local j: global i,u:

u[0,k]: = E[k]-Rr*i[1,k-1]:

for j from 1 to n-1 do

i[j,k]: = evalf(i[j,k-1]+(u[j-1,k]-u[j,k-1]-R*i[j,k-1])*h/L):

u[j,k]: = evalf(u[j,k-1]+(i[j,k]-i[j+1,k-1]-u[j,k-1]*G)*h/C): od:

i[n,k]: = evalf(i[n,k-1]+(u[n-1,k]-u[n,k-1]-R*i[n,k-1])*h/L):

u[n,k]: = evalf(u[n,k-1]+(i[n,k]-u[n,k-1]*(G+1/Rn))*h/C): end:

Вычисления выполнены при значениях параметров линии $C_l = 10^{-6}$ Ф, $L_l = 10^{-3}$ Гн, $R_l = 10$ Ом, $G_l = 10^{-3}$ Ом⁻¹ для $n = 100$; $h = 0,08$ мс; $\square = 31,6$ мс; $R_{\Gamma} = 5$ Ом; сопротивлении нагрузки $R_n = 31,7$ Ом, равном сопротивлению линии.

На рисунке 4, б,в показаны результаты вычисления сигналов $u_n(t)$ и $u_{n/2}(t)$ линии при импульсе $E(t)$ сложной формы :

$$E(t) = \begin{cases} + A \sin(\omega t), & \text{если } t \leq \tau / 2; \\ - A \sin(\omega t), & \text{если } \tau \leq t \leq 1,5\tau; \\ 0, & \text{если } \tau / 2 < t < \tau, t > 1,5\tau, \end{cases}$$

где $\omega = 2\pi/\tau$, $u_n(t)$ – напряжение на сопротивлении нагрузки R_n , $u_{n/2}(t)$ – напряжение в середине линии.

Таким образом, показано, что предлагаемый рекуррентный метод упрощает анализ линейных и нелинейных цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами во временной области при воздействии входных сигналов произвольной формы, позволяя получить результаты с требуемой точностью.

Рассмотренный подход может быть применен для решения систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, например, при анализе состояний систем массового обслуживания.

Для повышения точности вычислений необходимо представить подынтегральную функцию полиномиальной с весовыми коэффициентами, что является предметом дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров: Пер. с франц. / А. Анго. — М.: Наука, 1965. — 780 с.

2. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ / В.П. Дьяконов. — М.: Наука, 1989. — 204 с.

Поступила в редакцию 11.06.2002 г.