

УДК 658.52.011.56.012.3

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ КОНТРОЛЯ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ **Литвинова Л.А.**

Рассмотрены вопросы использования аналитических моделей надежности сложных технических систем в процессе гарантийного надзора. Изложена методика получения количественных оценок параметров систем гарантийного надзора.

Создание и эксплуатация современных технических систем (СТС) связаны со значительными затратами, что определяет необходимость количественного обоснования принимаемых технических решений и требует поиска новых форм организации контроля за их состоянием [1,2]. Организация гарантийного надзора за техническим состоянием СТС – одно из перспективных направлений повышения эффективности их функционирования. Под гарантийным надзором понимается комплекс мероприятий по обеспечению заданных технических характеристик СТС в процессе эксплуатации.

Среди множества задач, возникающих при реализации гарантийного надзора, значительный интерес представляют задачи, связанные с моделированием процессов технического обслуживания и с оптимизацией эксплуатационно-технических характеристик СТС. Несомненно, что решение указанных задач позволит повысить эффективность системы гарантийного надзора (СГН), в рамках которой обычно выполняется весь комплекс работ по гарантийному обслуживанию СТС.

Рассмотрим формальную постановку задачи. Положим, что в составе СГН имеется n ресурсов, необходимых для выполнения всего комплекса работ по гарантийному обслуживанию некоторого числа СТС. Функционирование СГН будем рассматривать как процесс ее взаимодействия с обслуживаемыми системами. Это взаимодействие в общем случае сводится к выполнению разовых заявок на ремонтно-восстановительные работы и проведение регулярных профилактических проверок.

Пусть промежуток времени между поступлениями заявок от систем является случайной величиной β с функцией распределения $G(x) = 1 - e^{-bx}$. Пусть также время обслуживания k -ым ресурсом поступившей заявки – случайная величина α_k с функцией распределения $F_k(x), k = 1, n$.

Положим, что поступившая заявка с равной вероятностью начинает использовать один из имеющихся ресурсов или теряется, если их нет. При этом будем полагать, что в случае, когда свободных ресурсов нет, СГН на-

ходится в состоянии отказа. Случайные величины α_k и β предполагаются независимыми в совокупности, имеющие конечные математические ожидания m_{α_k} и m_β .

Необходимо выбрать такие режимы использования ресурсов в СГН, чтобы количество их было минимально, затраты каждой обслуживаемой системы на ремонт и профилактические проверки были минимальны, для каждой системы был создан режим “мгновенного” обслуживания и суммарное время работы было максимальным.

Реализация первого требования позволит, с одной стороны, уменьшить штрафы за неиспользованные ресурсы, с другой стороны, уменьшение общего объема ресурсов может привести к снижению качества обслуживания и увеличению времени простоя СТС, т.е. не будет выполняться третье требование. Выполнение второго требования не должно осуществляться за счёт уменьшения объема профилактических работ, так как это может привести к увеличению времени простоя систем.

В описанной выше ситуации в качестве основного показателя эффективности функционирования СГН, достаточно точно выражающего ее целевое назначение может быть принято, например, суммарное время безотказной работы СГН ($T_{\text{раб.}}$), либо вероятность безотказной работы ($P_{\text{раб.}}$). При этом необходимо учитывать ограничения на стоимость ремонтно-профилактических работ, штрафы за неиспользованные ресурсы. Таким образом, задача выбора режима использования ресурсов является многокритериальной и с учётом вышесказанного может быть математически записана в виде

$$W(m_{\alpha_1}, \dots, m_{\alpha_n}) = P(m_{\alpha_1}, \dots, m_{\alpha_n}) \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях на стоимость гарантийного обслуживания

$$\sum_{j=1}^n c_j m_{\alpha_j} \leq b_i, \quad i=1, m; \quad (2)$$

$$m_{\alpha_j} \leq t_j, \quad j=1, n; \quad (3)$$

$$m_{\alpha_j} \geq 0, \quad j=1, n. \quad (4)$$

Для количественной оценки вероятности безотказной работы $P_{\text{раб.}}$ будем использовать методы теории массового обслуживания. Исследованию систем массового обслуживания (СМО) посвящено множество работ, например [1,2]. В большинстве из них предполагается, что время между поступающими заявками или время обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение, что существенно ограничивает область практического использования моделей СМО. Использование теории полумар-

ковских процессов для описания систем и количественной оценки их характеристик позволяет в ряде случаев отказаться от предположения об экспоненциальном распределении некоторых случайных величин. Здесь для построения модели гарантийного обслуживания используется СМО типа $M|G|N|0$.

Для описания состояний СГН вводится двоичный вектор d размерности n , компоненты которого зависят от времени и определяются следующим образом: $d_k=0$, если k -ый ресурс свободен и $d_k = 1$, если k -ый ресурс используется при обслуживании заявки, где $k=1, n$. Обозначим через $|d|$ число компонент вектора d , равных нулю, т.е. $|d|$ равно объёму свободных ресурсов. Пусть D – множество всех двоичных векторов d , задающих состояния СГН в различные моменты времени; D_0 – некоторое подмножество множества D . Например, посредством подмножества D_0 будем описывать события, которые связаны с функционированием СМО, представляющие практический интерес. Для описания функционирования СГН типа $M|G|n|0$ будем использовать полумарковский процесс с дискретно-непрерывным фазовым пространством. Использование предельных теорем теории полумарковских процессов показывает, что стационарная вероятность $P(D_0)$ того, что СГН находится в состояниях, принадлежащих выделенному подмножеству D_0 , и вычисляется по формуле [1,2]

$$P(D_0) = \frac{\sum_{d \in D_0} |d|! (m_\beta)^{|d|} \prod_{k: d_k=1} m_{\alpha_k}}{\sum_{d \in D} |d|! (m_\beta)^{|d|} \prod_{k: d_k=1} m_{\alpha_k}}, \quad (5)$$

где $m_\beta = 1/\beta$ – математическое ожидание случайной величины β ; m_{α_k} – математическое ожидание случайной величины α_k , $k=1, n$. В работе [1] показано, что стационарная вероятность P^k того, что для обслуживания заявок выделено ровно k ресурсов из n , имеет вид [1,2]

$$P_k = \frac{(n-k)! \sum_{\{l_1 \dots l_m\}} m_{\alpha_{l_1}} \dots m_{\alpha_{l_k}}}{\sum_{m=0}^n (n-m)! m_\beta^{n-m} \sum_{\{l_1 \dots l_m\}} m_{\alpha_{l_1}} \dots m_{\alpha_{l_m}}}, \quad (6)$$

где $\{l_1 \dots l_m\}$ – сочетания из $\{1 \dots n\}$ по m , а суммирование ведётся по всем возможным сочетаниям.

Практический интерес представляют такие характеристики СГН как среднее стационарное время пребывания системы в выделенном подмно-

жестве состояний. Пусть D – множество всех состояний СГН в виде объединения двух непересекающихся подмножеств D^+ и D^- , для которых выполняются условия $D = D_+ \sqcup D_-$, $D_+ \cap D_- = \emptyset$.

В этом случае среднее стационарное время $T(D_+)$ пребывания СГН в подмножестве D_+ вычисляется по формуле (7)

$$T(D_+) = \frac{\sum_{d \in D_+} |d|! (m_\beta)^{|d|} \prod_{k: d_k=1} m_{\alpha_k}}{\sum_{d \in D_-} [T(m_\beta^{|d|}) + T(m_\beta^{|d|-1})]}, \quad (7)$$

$$T(m_\beta^{|d|}) = \sum_{\substack{j: d_j=1, \\ d^j \in D_+}} |d|! m_\beta^{|d|} \cdot \prod_{\substack{k: d_k=1, \\ k \neq j}} m_{\alpha_k}, \quad (8)$$

$$T(m_\beta^{|d|-1}) = \sum_{\substack{j: d_j=1, \\ d^j \in D_+}} (|d|-1)! m_\beta^{|d|-1} \cdot \prod_{k: d_k=1} m_{\alpha_k}, \quad (9)$$

где вектор $d(j)$ отличается от вектора d только $j=0$ компонентой.

Таким образом, формулы (5)–(9) позволяют получить оценки показателей эффективности и получить математическое описание задачи (1)–(4). Представленные здесь результаты носят достаточно общий характер и не позволяют сделать выбор метода решения задачи (1)–(4). Покажем на конкретном примере все особенности сформулированной задачи. Пусть число количества ресурсов n в СГН равно 3. Тогда множество D состояний, в которых может находиться система, состоит из следующих элементов $\{(000), (001), (100), (010), (110), (011), (101), (111)\}$.

Элемент (011) кодирует состояние СГН, при котором два ресурса используются, а один свободен. Элемент множества D (111) соответствует состоянию, когда все ресурсы использованы, и система не принимает вновь поступившие заявки. Тогда стационарные характеристики для случая $n=3$ определяются по следующим формулам. Всё множество D разбивается на подмножества $D_1 = \{111\}$ и $D_2 = \{000, 010, 011\}$. Используя формулы (5)–(9), получаем формулу для вычисления $P(D_1)$.

Тогда задача (1)–(4) записывается в виде

$$W = 1 - \frac{m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} m_{\alpha_3}}{6(m_\beta)^3 + 2(m_\beta)^2 \sum_{i=1}^3 m_{\alpha_i} + m_\beta (m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} + m_{\alpha_2} m_{\alpha_3} + m_{\alpha_1} m_{\alpha_3}) + m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} m_{\alpha_3}} \quad (10)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n c_j m_{\alpha_j} \leq b_i, i=1, n(2); \quad (11)$$

$$m_{aj} \leq t_j, \quad j=1, n; \quad (12)$$

$$m_{aj} \geq 0, \quad j=1, n. \quad (13)$$

Целевая функция (10) не линейна относительно параметров m_{a_k} , $k=1, n$, m_{β} , а ограничения (11)-(13) являются линейными относительно их. Поэтому для решения задачи был использован выпуклый симплекс – метод.

Таким образом, рассмотрена аналитическая модель выбора режима использования ресурсов. Определены стационарные вероятность и времена пребывания СГН в рабочих состояниях. Приведен пример использования модели при решении многокритериальной задачи. В заключение отметим, что модели полумарковских процессов могут с успехом использоваться при решении достаточно большого класса инженерных задач.

Библиография

1 Скатков А.В. Модели проектирования высокоэффективных систем вычислительной техники и автоматизированного управления: Учеб. пособие / А.В.Скатков. — К.: Изд-во УМК ВО, 1992. — 80 с.

2 Гарантийный надзор за сложными техническими системами / Г.Е. Алпаидзе, Л.Г.Романов, А.А.Червоный, Ф.К.Шахтарин. — М.: Машиностроение, 1988. — 232 с.

Поступила в редакцию 25.09.2000 г.