

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кафедра информатики и управления в технических системах

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ САУ С ЦИФРОВЫМ LQ-РЕГУЛЯТОРОМ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по дисциплине "Цифровые системы управления"
для студентов направления подготовки
27.03.04 Управление в технических системах



Севастополь
СевГУ
2019

УДК 681.513:004.9 (076.5)
ББК 32.965.8
И87

Р е ц е н з е н т:

В.А. Крамарь – профессор кафедры "Информатика и управление в технических системах", доктор техн. наук, профессор

Составитель: В.А. Карапетьян

И87 Исследование оптимальной САУ с цифровым LQ-регулятором:
метод. указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине
"Цифровые системы управления" для студентов направления подготов-
ки 27.03.04 Управление в технических системах / Сост.
В.А. Карапетьян. – Севастополь: СевГУ, 2019. – 24 с.

В методических указаниях приведено описание лабораторных работ, предназна-
ченных для изучения принципов построения систем оптимального управления
линейными динамическими объектами с оптимальными дискретными регулятора-
ми и наблюдателями состояния, методов расчёта и проектирования таких систем с
помощью пакета Matlab.

Методические указания предназначены для студентов направления подготов-
ки 27.03.04 Управление в технических системах, владеющих основами метода ли-
нейно-квадратической оптимизации детерминированных объектов, а также
основами программирования в системах Matlab и Simulink.

УДК 681.513:004.9 (076.5)
ББК 32.965.8

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании ка-
федры "Информатика и управление в технических системах", протокол № 6
от 14 февраля 2019 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на
заседании ученого совета Института информационных технологий и управ-
ления в технических системах, протокол № 4 от 28 февраля 2019 г.

Изд. № 73/19. Объём 1,5 п. л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет"

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ САУ С ЦИФРОВЫМ LQ-РЕГУЛЯТОРОМ И НАБЛЮДАТЕЛЕМ	4
1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	4
2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	4
2.1 Основная задача ЛКО дискретным стационарным объектом	4
2.2 Задача стабилизация управляемого выхода объекта	5
2.3 Модальный наблюдатель состояния	6
2.4 Объект управления	8
2.5 Описание некоторых функций системы Matlab	12
3 ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ	13
3.1. Порядок выполнения работы и защиты работы	13
3.2 Варианты заданий	14
4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	16
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	16

ИССЛЕДОВАНИЕ САУ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ СТОХАСТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ	17
1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	17
2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	17
2.1 LQG-задача дискретного стационарного объекта	17
2.2 Задача стабилизация управляемого выхода	18
2.3 Описание некоторых функций системы Matlab	20
3 ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ	21
3.1. Порядок выполнения работы и защиты работы	21
3.2 Варианты заданий	22
4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	24
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	24

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ САУ С ЦИФРОВЫМ LQ-РЕГУЛЯТОРОМ И НАБЛЮДАТЕЛЕМ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является исследование алгоритмов синтеза дискретных оптимальных регуляторов и модальных наблюдателей для управления линейными динамическими объектами, возможностей программных средств Matlab и Simulink для реализации указанных задач.

2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 Основная задача ЛКО дискретным стационарным объектом

Объект исследования задаётся системой конечно-разностных уравнений:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k), \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, а A и B – постоянные матрицы соответствующих размерностей. Поведение объекта рассматривается на полубесконечном интервале $[0; \infty)$. Необходимо построить управление в виде обратной связи, которое переводит систему (2.1) из начального состояния $x(0) = x^0$ в окрестность начала координат $x(k) \rightarrow 0$, причём так, чтобы достигался минимум функционала качества

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)], \quad (2.2)$$

где вещественные симметрические матрицы штрафов являются соответственно $R > 0$, $Q \geq 0$.

Решением этой задачи является управляющая последовательность

$$u(k) = -[B^T P B + R]^{-1} B^T P A \cdot x(k), \quad (2.3)$$

в которой постоянная положительно определённая матрица P находится из алгебраического уравнения Риккати:

$$P = A^T \{P - P B [B^T P B + R]^{-1} B^T P\} A + Q \quad (2.2)$$

Для существования решения данной задачи достаточно, чтобы пара (A, B) была полностью управляемой.

Представляет интерес также задача управления выходами объекта:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + B u(k), \\ y(k) &= C x(k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $y \in \mathbb{R}^p$ (обычно $p \leq n$), а C – матрица соответствующей размерности.

В этом случае функционал качества рассматривается в виде

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [y^T(k) M y(k) + u^T(k) R u(k)], \quad (2.6)$$

где $R > 0$, $M \geq 0$. Функционал (2.6) сводится к функционалу (2.2), а $Q = C^T M C$. Достаточными условиями решения данной задачи являются полная управляемость и полная наблюдаемость объекта (2.5).

2.2 Задача стабилизация управляемого выхода объекта

Рассматривается задача стабилизации – удержания выходных переменных объекта управления в окрестности заданных постоянных значений. Потребуем от оптимальной САУ нулевой установившейся (статической) ошибки по выходу. Как известно из ТАУ в таком случае САУ должна обладать свойством астатизма первого порядка. Этого эффекта в полной мере достигают установкой в прямую цепь САУ интегрирующего звена. Для дискретной системы аналогом интегратора является сумматор. Структурная схема системы стабилизации на основе ЛК-регулятора имеет вид

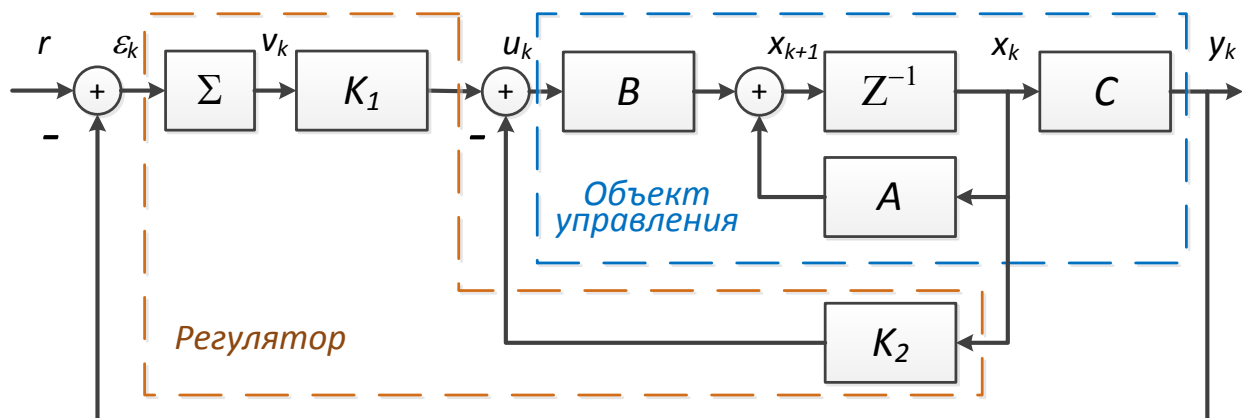


Рисунок 2.1 – Структурная схема оптимальной САУ

На схеме использованы следующие обозначения:

- A , B , C – матрицы коэффициентов математической модели объекта (2.5);
- Z^{-1} – звено временной задержки на один шаг;
- Σ – дискретный накопительный сумматор;
- K_1 , K_2 – матрицы коэффициентов оптимального LQ-регулятора;
- r – p -мерный вектор постоянных задающих воздействий.

На основе структуры рисунка 2.1 можно составить математические соотношения, описывающие дискретную динамику данной системы стабилизации:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), & y(k) &= Cx(k), \\ u(k) &= K_1 v(k) - K_2 x(k), & v(k+1) &= v(k) + \varepsilon(k), \\ \varepsilon(k) &= r - y(k) = r - Cx(k) \end{aligned}$$

или, после исключения переменной ошибки $\varepsilon(k)$, получим

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ v(k+1) &= -Cx(k) + v(k) + r, \\ u(k) &= K_1 v(k) - K_2 x(k) \end{aligned}$$

В привычной, векторно-матричной форме, последние соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & O \\ -C & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} r, \\ u(k) &= -K \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = -[K_2 \quad -K_1] \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = -K_2 x(k) + K_1 v(k). \end{aligned} \quad (*)$$

Получив решение основной задачи ЛКО и выделив из полученной матрицы оптимальных коэффициентов K две подматрицы K_1 и K_2 , получим матричные коэффициенты прямой (K_1) и обратной (K_2) связи в структуре оптимальной САУ, представленной на рисунке 2.1.

2.3 Модальный наблюдатель состояния

Решение линейно-квадратической задачи синтеза регулятора состояния представляется соотношением, формирующим управляющее воздействие в виде обратной связи по состоянию

$$u(k) = -[B^T P B + R]^{-1} B^T P A \cdot x(k) = -G \cdot x(k), \quad (2.7)$$

$$\text{где} \quad G = [B^T P B + R]^{-1} B^T P A \quad (2.8)$$

матрица коэффициентов оптимальной обратной связи.

На практике в очень редких случаях предоставляется возможность измерения всех компонентов вектора состояния $x(k)$ в каждый дискретный момент времени. Обычно проводятся измерения либо нескольких компонентов вектора состояния, либо некоторой их линейной комбинации. Таким образом, чтобы практически реализовать закон (2.7) необходимо формировать в каждый дискретный момент времени t_k вектор $\hat{x}(k)$, близкий к истинному значению вектора состояния $x(k)$. Такой вектор $\hat{x}(k)$ называют вектором-оценкой состояния $x(k)$. Чем точнее оценка будет повторять истинный вектор состояния, тем меньше будет отличаться реальные значения управляющей последовательности $\hat{u}(k) = -G \cdot \hat{x}(k)$ от идеальной (2.7).

Для получения в реальном времени оценки вектора состояния $\hat{x}(k)$ необходимо сформировать динамическую систему (*наблюдатель*), которая на основе доступной текущей информации о системе (управление $u(k)$ и измеряемый выход $y(k)$) генерировала оценку, "близкую" к истинному вектору состояния $x(k)$. Математическое требование "близости" здесь подразумевается в виде $\hat{x}(k) \rightarrow x(k)$ при $k \rightarrow \infty$, асимптотическое приближение оценки к вектору состояния. Если ввести понятие ошибки оценки вектора состояния $e(k)$ как $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, то последнее требование можно сформулировать и так: $e(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Скорость приближения оценки к оригиналу также имеет немаловажное значение. Условие асимптотического приближения предполагает, что наблюдатель в установившемся режиме должен вести себя также как и объект. В качестве математической модели наблюдателя выбирают следующее динамическое соотношение

$$\hat{x}(k+1) = A \cdot \hat{x}(k) + B \cdot u(k) + L \cdot [y(k) - C \cdot \hat{x}(k)]. \quad (2.9)$$

где L – матрица коэффициентов усиления наблюдателя, которую требуется выбирать из условий, предъявляемых к наблюдателю.

Из этого конечно-разностного уравнения (модели наблюдателя) следует, что, когда оценка состояния $\hat{x}$ будет мало отличаться от самого вектора состояния x , то значение множителя в квадратной скобке в последнем слагаемом будет мало. Тогда наблюдатель (2.9) будет обладать той же динамикой, что и сам объект (2.1) (матрица динамических коэффициентов и у наблюдателя и у объекта одна и та же — A). Если в уравнении (2.9) раскрыть скобки и использовать уравнение для выхода из (2.5), то (2.9) можно переписать в виде

$$\hat{x}(k+1) = [A - L \cdot C] \hat{x}(k) + Bu(k) + L \cdot y(k). \quad (2.10)$$

Уравнение для ошибки $e(k)$ оценки можно получить вычитанием (2.10) из (2.1) с учётом выражения для выходов (2.5) и ошибки оценки

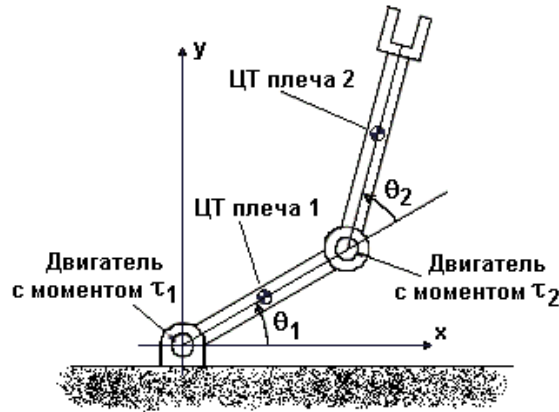
$$e(k+1) = [A - L \cdot C] e(k). \quad (2.11)$$

Из последнего уравнения следует, что требование асимптотического стремления ошибки к нулю ($e(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$) обеспечивается исключительно спектром матрицы динамики наблюдателя $A - L \cdot C$. Если эта матрица будет гурвицевой (асимптотически устойчивой, т.е., все её собственные числа будут иметь строго отрицательные вещественные части), стремление ошибки оценки к нулю будет обеспечено. Скорость стремления ошибки оценки $e(k)$ к нулю обусловлена соответствующим положением собственных чисел матрицы в левой полуплоскости – большая скорость стремления ошибки оценки к нулю определяется более далёким расположением собственных чисел от мнимой оси слева.

Требования асимптотической устойчивости и необходимой динамики наблюдателя (2.9) могут быть удовлетворены только соответствующим выбором значений матрицы L . Известно, что если система (2.5) *полностью наблюдаема*, то выбором вещественнозначной матрицы L можно обеспечить матрице наблюдателя $A - LC$ любой желаемый спектр (с учётом того, что каждому назначаемому комплексному собственному числу назначается так же и его комплексно сопряжённое).

2.4 Объект управления

Схема двухзвенного робота-манипулятора [6] показана на рисунке 2.2.



x, y – координатные оси; ЦТ – центр тяжести плеча манипулятора;
 θ_1 и θ_2 – углы поворота первого и второго плеча манипулятора;

Рисунок 2.2 – Схема двухзвенного робота-манипулятора

Положение плеч манипулятора определяется двумя углами – θ_1 и θ_2 . Длины, массы и моменты инерции каждого плеча характеризуются величинами m_1, m_2, l_1, l_2, J_1 и J_2 соответственно. Предполагается, что массы распределены по длинам плеч равномерно и центры масс располагаются в серединах каждого плеча. Управляемые вращения плеч манипулятора обеспечивают два двигателя, расположенные в сочленениях и развивающие соответствующие моменты τ_1 и τ_2 .

Уравнения движения манипулятора получены на основе применения метода Лагранжа [4]. Метод предполагает введение обобщённых координат, полностью и однозначно описывающих положение и скорости движения механического объекта. Здесь в качестве обобщённых координат выбраны углы поворота плеч манипулятора θ_1 и θ_2 . Лагранжиан определяется как разность кинетической и потенциальной энергий механической системы $L=K-P$. Кинетическая и потенциальная энергии задаются в виде функций обобщённых координат θ_1 и θ_2 и их производных $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$ – обобщённых скоростей.

Уравнения движения робота могут быть получены из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2. \quad (2.12)$$

Общая кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движений каждого плеча манипулятора:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2.$$

Если предположить, что центры масс располагаются в серединах каждого плеча, то координаты центров масс можно выразить следующим образом:

$$(x_{G_1}, y_{G_1}) = \left(\frac{l_1}{2} \cos \theta_1, \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right),$$

$$(x_{G_2}, y_{G_2}) = \left(l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2), l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right).$$

Здесь $x_{G_1}, y_{G_1}, x_{G_2}, y_{G_2}, v_{G_1}, v_{G_2}$ представляют декартовы координаты центров масс и векторы линейных скоростей центров масс плеч манипулятора.

С учётом последних обозначений и соотношений выражение для общей кинетической энергии манипулятора может быть записано в виде

$$K = \left(\frac{1}{2} m_1 \frac{l_1^2}{4} + \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2} m_2 \frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2} J_1 \right) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).$$

Потенциальная энергия P манипулятора выражается формулой

$$P = m_1 g \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 + m_2 g \left(l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right).$$

Систему уравнений движения (2.12), после подстановки в них полученных выше соотношений, можно записать так

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{\theta}_1 + M_{12} \ddot{\theta}_2 + K_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + G_1(\theta_1, \theta_2) &= \tau_1, \\ M_{21} \ddot{\theta}_1 + M_{22} \ddot{\theta}_2 + K_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + G_2(\theta_1, \theta_2) &= \tau_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь M_{ij} – элементы матрицы инерций M ; K_i – моменты центробежных и кориолисовых сил; G_i – моменты сил тяжести:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4} m_1 + m_2 \right) l_1^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 \end{bmatrix},$$

$$K_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2), \quad K_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_1^2,$$

$$G_1(\theta_1, \theta_2) = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 + m_2 g \left(l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right), \quad G_2(\theta_1, \theta_2) = m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2).$$

Определим векторы состояния $x(t)$, управления $u(t)$ и выхода $y(t)$ как

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix},$$

а также введём матрицу $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = M^{-1}$, обратную матрице инерций M .

Систему уравнений (2.13) теперь можно представить в виде нелинейных уравнений состояния в следующей форме

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -H_{11}(K_1 + G_1) - H_{12}(K_2 + G_2) \\ x_4(t) \\ -H_{21}(K_1 + G_1) - H_{22}(K_2 + G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \quad (2.14)$$

Выполним линеаризацию уравнений состояния (2.14) относительно некоторого стационарного состояния $\{\theta_{10}, \theta_{20}; \dot{\theta}_{10} = 0, \dot{\theta}_{20} = 0; \tau_{10}, \tau_{20}\}$.

Обозначим $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$, $u(t) = u_0 + \Delta u(t)$ и $y(t) = y_0 + \Delta y(t)$. Здесь векторы x_0 и u_0 определяют стационарный режим (заданное неподвижное положение плеч манипулятора), а векторные функции $\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$ и $\Delta y(t)$ – возмущённое движение в малой окрестности стационарного режима. Следует сразу заметить, что, так как моменты центробежных и кориолисовых сил являются квадратическими функциями угловых скоростей, то при линеаризации соответствующие члены разложения будут отсутствовать.

В скалярной форме для $x(t)$, $u(t)$ и $y(t)$ имеем представления:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ 0 \\ \theta_{20} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1(t) \\ \Delta\dot{\theta}_1(t) \\ \Delta\theta_2(t) \\ \Delta\dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_{10} \\ \tau_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\tau_1(t) \\ \Delta\tau_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1(t) \\ \Delta\theta_2(t) \end{bmatrix}.$$

В результате линеаризации получим модель в пространстве состояний в виде

$$\dot{\Delta x}(t) = A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t), \quad \Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t).$$

Здесь матрицы модели A , B и C имеют следующую структуру и состав:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial \theta_1}(H_{11}G_1 + H_{12}G_2)|_0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \theta_2}(H_{11}G_1 + H_{12}G_2)|_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial}{\partial \theta_1}(H_{21}G_1 + H_{22}G_2)|_0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \theta_2}(H_{21}G_1 + H_{22}G_2)|_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{11}|_0 & H_{12}|_0 \\ 0 & 0 \\ H_{21}|_0 & H_{22}|_0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем, как обычно, работая с линейной моделью, при написании векторов состояния, управления и выхода, будем опускать значок приращения Δ . Тогда уравнения модели состояния в линейной форме будут иметь стандартный вид

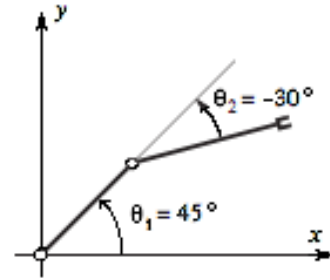
$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad y(t) = C \cdot x(t). \quad (2.15)$$

Рассмотрим численный пример для малого робота [4]. Значения параметров плеч робота следующие:

$$m_1=3 \text{ кг}, \quad l_1=0,6 \text{ м}, \quad J_1=0,12 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad m_2=2,5 \text{ кг}, \quad l_2=0,8 \text{ м}, \quad J_2=0,15 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Начальное угловое положение плеч манипулятора ($\theta_{10} = 45^\circ$, $\theta_{20} = -30^\circ$) изображено на рисунке 2.3. Для неподвижного положения плеч манипулятора уравнения (2.13) будут иметь следующий вид

$$G_1(\theta_{10}, \theta_{20}) = \tau_{10}, \quad G_2(\theta_{10}, \theta_{20}) = \tau_{20}.$$



Подстановка в эти соотношения исходных данных позволяет получить начальные значения моментов

Рисунок 2.3 – Начальное положение плеч манипулятора

$$\tau_{10} = G_{10}(45^\circ, -30^\circ) = 26,124 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad \tau_{20} = G_{20}(45^\circ, -30^\circ) = 9,476 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Матрица инерций M , обратная к ней H и матрицы G_i принимают вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1,84 + 1,2 \cos \theta_2 & 0,55 + 0,6 \cos \theta_2 \\ 0,55 + 0,6 \cos \theta_2 & 0,55 \end{bmatrix};$$

$$H = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} 0,55 & -0,55 - 0,6 \cos \theta_2 \\ -0,55 - 0,6 \cos \theta_2 & 1,84 + 1,2 \cos \theta_2 \end{bmatrix};$$

$$\det(M) = -0,36 \cos^2 \theta_2 + 0,7095;$$

$$G_1(\theta_1, \theta_2) = 23,544 \cos \theta_1 + 9,81 \cos(\theta_1 + \theta_2); \quad G_2(\theta_1, \theta_2) = 9,81 \cos(\theta_1 + \theta_2).$$

Окончательно, для $\theta_{10} = 45^\circ$ и $\theta_{20} = -30^\circ$, получим значения элементов для матриц A , B и C модели пространства состояний (2.15)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17,832 & 0 & -3,366 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30,062 & 0 & 16,415 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,2514 & -2,4337 \\ 0 & 0 \\ -2,4337 & 6,5512 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все приведённые выше расчёты, начиная от выражений (2.13) и заканчивая получением матриц **A** и **B** модели пространства состояний для линеаризованной системы, можно выполнить исключительно средствами Matlab. Приведём соответствующую Matlab-программу.

```
m1=3; l1=0.6; J1=0.12; m2=2.5; l2=0.8; J2=0.15; g=9.81; % 1
syms tet1 tet2; % 2
M_sym(1,1)=(1/4*m1+m2)*l1^2+1/4*m2*l2^2+J1+J2+m2*l1*l2*cos(tet2); % 3
M_sym(1,2)=1/4*m2*l2^2+J2+1/2*m2*l1*l2*cos(tet2); % 4
M_sym(2,1)=M_sym(1,2); % 5
M_sym(2,2)=1/4*m2*l2^2+J2; % 6
G_sym(1)=m1*g*l1/2*cos(tet1)+m2*g*(l1*cos(tet1)+l2/2*cos(tet1+tet2)); % 7
G_sym(2)=m2*g*l2/2*cos(tet1+tet2); % 8
H_sym=M_sym^-1; % 9
temp1_sym=diff(H_sym*[G_sym(1); G_sym(2)], 'tet1', 1); % 10
temp2_sym=diff(H_sym*[G_sym(1); G_sym(2)], 'tet2', 1); % 11
teta1=deg2rad(45); teta2=deg2rad(-30); % 12
M=subs(M_sym,{tet1,tet2},{teta1 teta2}); % 13
G=subs(G_sym,{tet1,tet2},{teta1 teta2}); % 14
H=subs(H_sym,{tet1,tet2},{teta1 teta2}); % 15
temp_sym=[temp1_sym temp2_sym]; % 16
temp=- (subs(temp_sym,{tet1 tet2},{teta1 teta2})); % 17
A=zeros(n); A([2 4],[1 3])=temp; A(1,2)=1; A(3,4)=1; % 18
B=zeros(n,m); B([2 4],:)=H; % 19
```

Прокомментируем программу по её строкам:

- 1 – задание параметров плеч манипулятора (численный пример [6]);
- 2 – определение двух символьных переменных, обозначающих углы θ_1 и θ_2 ;
- 3 ÷ 6 – задание в символьической форме матрицы инерций **M**;
- 7, 8 – задание в символьической форме матрицы гравитационных моментов **G**;
- 9 – вычисление в символьической форме обратной матрицы инерций **H**;
- 10, 11 – вычисление в символьной форме производных по θ_1 и θ_2 матрицы **H·G**;
- 12 – перевод в радианную меру начальных значений углов $\theta_{10}=45^\circ$ и $\theta_{20}=-30^\circ$;
- 13 ÷ 15 – определение численных значений матриц **M**, **G** и **H**;
- 16, 17 – определение численных значений матрицы производных;
- 18, 19 – определение матриц **A** и **B** для модели пространства состояний.

Задавая произвольное положение равновесия (θ_{10} , θ_{20}) с помощью данной программы (значения переменных **teta1** и **teta2**) можно легко получить соответствующие матрицы **A** и **B** линейной модели пространства состояний.

2.5 Описание некоторых функций системы Matlab

Для решения заданий лабораторной работы предлагается воспользоваться следующими функциями Matlab и пакета Control System Toolbox:

- ss – формирует модель линейного стационарного непрерывного или дискретного объекта управления (LTI-объект);
- c2d – преобразует непрерывную модель в дискретную;
- place – формирует матрицу коэффициентов модального регулятора или наблюдателя полного порядка;
- dlqr – решает задачу синтеза LQ-регулятора состояния для дискретного LTI-объекта управления.

3 ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

В лабораторной работе необходимо построить оптимальную систему стабилизации управляемым выходом непрерывного объекта управления (двухзвенного робота-манипулятора). Линейно-квадратический регулятор состояния и модальный наблюдатель состояния следует реализовать в дискретной форме. Провести исследование влияния параметров синтеза на динамические свойства оптимальной системы стабилизации на основе модели оптимальной САУ в Simulink.

3.1. Порядок выполнения работы и защиты работы

1. Сформировать в пространстве состояний математическую модель непрерывного объекта управления в виде LTI-объекта Matlab.
2. Сформировать вектор начального состояния объекта управления.
3. Провести дискретизацию LTI-модели объекта управления, положив такт дискретизации равным 0.02 секунды.
4. Проверить свойства управляемости и наблюдаемости для непрерывной и дискретной моделей объекта управления.
5. Определить собственные числа матриц динамических коэффициентов непрерывной и дискретной моделей объекта управления.
6. Сформировать расширенную (*) дискретную модель объекта управления и дискретного сумматора, расположенного в прямой цепи.
7. Задать матрицы штрафов в критерии качества с учётом расширения размерности объекта управления.
8. Решив задачу синтеза LQ-регулятора, получить матрицу оптимальных коэффициентов и выделить из неё подматрицы K_1 и K_2 (рисунок 2.1).
9. Задать собственные числа для наблюдателя состояния дискретного объекта управления.
10. Синтезировать дискретный модальный наблюдатель состояния полного порядка для дискретного объекта управления.
11. Сформировать в Simulink схему оптимальной системы стабилизации. В схеме должна быть предусмотрена возможность моделирования системы как с наблюдателем, так и без него, считая, что весь вектор состояния объекта управления доступен для измерения. Значения параметрам блоков схемы присвоить по результатам расчётов, проведённых по вышеизложенным пунктам.

12. Исследования, согласно варианту задания, провести с программой расчёта параметров оптимальной системы и проводя модельные эксперименты с Simulink-схемой.

Выполнение и защита лабораторной работы производится каждым студентом индивидуально. Защита результатов лабораторной работы осуществляется при наличии работающих программ, полностью оформленного отчёта и состоит в следующем: предъявление полного отчёта, оформленного в соответствии с указанными требованиями; представление работающих программ и схем на компьютере; ответы на вопросы по теоретической и практической части работы; выполнение дополнительных заданий.

3.2 Варианты заданий

Номер варианта	Начальное состояние объекта управления x^0 (градусы)	Номер варианта	Начальное состояние объекта управления x^0 (градусы)
1	[45 0 -30 0]	2	[-45 0 -30 0]
3	[45 0 30 0]	4	[-45 0 30 0]
5	[50 0 -30 0]	6	[-50 0 -30 0]
7	[50 0 30 0]	8	[-50 0 30 0]
9	[60 0 -30 0]	10	[-60 0 -30 0]
11	[60 0 30 0]	12	[-60 0 30 0]
13	[40 0 -30 0]	14	[-40 0 -30 0]
15	[40 0 30 0]	16	[-40 0 30 0]
17	[30 0 -30 0]	18	[-30 0 -30 0]
19	[30 0 30 0]	20	[-30 0 30 0]
21	[20 0 30 0]	22	[-20 0 30 0]
23	[20 0 -30 0]	24	[-20 0 -30 0]

Постоянные значения задающего воздействия (вектора r) выбираются студентом самостоятельно. Диапазон значений компонентов вектора $r - \pm 10^0$.

Необходимо исследовать влияние значений матриц штрафов Q и R функционала (2.2) на качество переходных процессов в оптимальной САУ. Для нечётных вариантов задания следует изменять матрицу штрафов Q функционала качества при состоянии, а для чётных вариантов – матрицу штрафов R в функционале при управлении. Для произвольных фиксированных значений матриц штрафов требуется также провести исследования влияния динамики наблюдателя состояния на качество управления.

Результаты исследований должны быть сформулированы словесно и проиллюстрированы в числовом и графическом видах.

Примерная Simulink-схема моделирования оптимальной системы стабилизации непрерывного объекта управления с дискретным LQ-регулятором и дискретным модальным наблюдателем состояния приведена ниже.

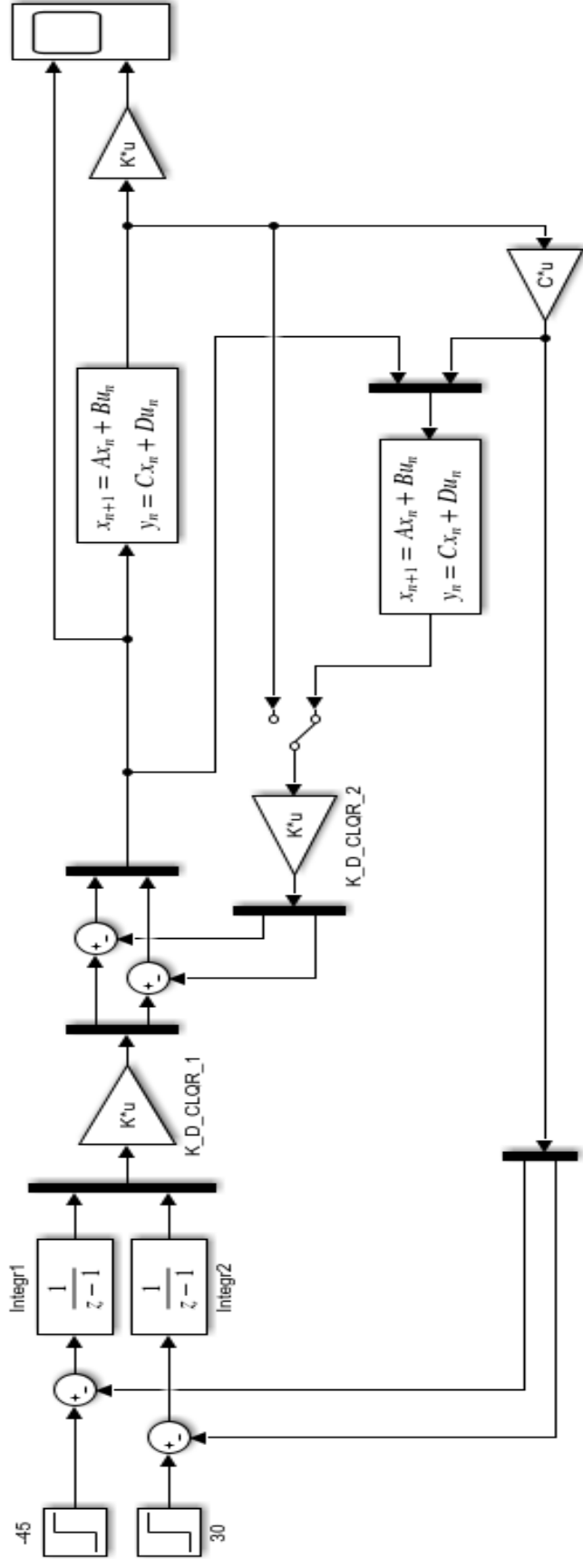


Рисунок 3.1 – Simulink-схема моделирования оптимальной САУ

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Поясните процесс преобразования модели непрерывного LTI-объекта в соответствующую модель дискретного LTI_объекта.
2. Какими соображениями следует руководствоваться при выборе такта дискретизации непрерывного LTI-объекта?
3. Каким математическим соотношением связаны собственные числа матриц динамических коэффициентов непрерывной и дискретной систем?
4. Для каких целей в Simulink-схему включён наблюдатель состояния полного порядка?
5. Поясните идею и процедуру синтеза наблюдателя.
6. Какой следует задавать динамику наблюдателя состояния известного динамического объекта?
7. Укажите отличительные свойства и особенности структуры системы стабилизации с нулевой статической ошибкой?
8. Какие функции системы Matlab необходимо использовать для формирования линейно-квадратического регулятора состояния и выхода?
9. Детально поясните структуру и состав схемы на рисунке 3.1.
10. Каким образом следует настраивать параметры Simulink-блока квантования сигнала по уровню?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
3. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
4. Hendricks E. Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods / E. Hendricks, O. Jannerup, P. Sorensen. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 556 p.
5. Ogata K. Discrete-time control system / K. Ogata. – Prentice-Hall, Inc., 1995. – 756 p.
6. Fadali M. Sami. Digital control engineering: analysis and design / M. Sami Fadali, A. Visioli. – Elsevier Inc., 2013. – 600 p.
7. Control System Toolbox™. Getting Started Guide. Matlab R2014a – The MathWorks, Inc., 2014. – 314 p.
8. Лазарев Ю.Ф. Моделирование процессов и систем в Matlab. Учебный курс / Ю.Ф. Лазарев. – СПб.: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с.
9. Перельмутер В.М. Пакеты расширения Matlab. Control System Toolbox и Robust Control Toolbox / В.М. Перельмутер. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. – 224 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ САУ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ СТОХАСТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является исследование методов построения оптимальных дискретных стохастических регуляторов и возможностей программных средств Matlab и Simulink для их реализации, синтеза оптимальных наблюдателей, моделирование движения линейных стохастических динамическими САУ (LQG-задача).

2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 LQG-задача дискретного стационарного объекта

Объект исследования задаётся системой конечно-разностных уравнений:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k), \quad (2.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k), \quad (2.2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ – векторы состояния, управления и выхода; A , B , C и G – постоянные матрицы соответствующих размерностей; $w \in \mathbb{R}^l$, $v \in \mathbb{R}^p$ – векторы внешних случайных последовательностей в динамике объекта управления и каналах измерений соответственно. Предполагается, что случайные последовательности $w(k)$ и $v(k)$ являются стационарными центрированными нормальными последовательностями типа белого шума с известными матрицами интенсивностей W и V . Также предполагается, что внешние шумы некоррелированы между собой и с вектором начального состояния объекта управления x^0 . Вектор x^0 является нормальным случайным вектором с известным математическим ожиданием $\bar{x}^0$ и матрицей ковариаций Q_0 . Поведение объекта рассматривается на полубесконечном интервале $[0; \infty)$.

Необходимо построить управление в виде обратной связи, которое переводит систему (2.1) из начального состояния $x(0) = x^0$ в окрестность начала координат $x(k) \rightarrow 0$, причём так, чтобы достигался минимум функционала качества

$$J = M \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \right\}, \quad (2.3)$$

где вещественные симметрические матрицы штрафов обладают необходимой знакоопределённостью – являются соответственно $R > 0$, $Q \geq 0$. Буквой M обозначена операция вычисления математического ожидания.

Решение задачи определяется взаимодействием оптимального детерминированного регулятора и оптимального стохастического наблюдателя (теорема разделения [1]). Оптимальная управляющая последовательность формируется в виде

$$u(k) = -[B^T K B + R]^{-1} B^T K A \cdot \hat{x}(k), \quad (2.4)$$

где постоянная положительно определённая матрица K находится из матричного алгебраического уравнения Риккати:

$$K = A^T \left\{ K - KB \left[B^T KB + R \right]^{-1} B^T K \right\} A + Q, \quad (2.5)$$

а оптимальная стохастическая оценка вектора состояния $\hat{x}(k)$ генерируется фильтром Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L[y(k) - C\hat{x}(k)], \quad (2.6)$$

$$L = APC^T [V + CPC^T]^{-1}, \quad (2.7)$$

$$P = APA^T + GWG^T - APC^T [V + CPC^T]^{-1} CPA^T. \quad (2.8)$$

Для существования решения данной задачи достаточно, чтобы пара (A, B) была полностью управляемой, а пара (A, C) – полностью наблюдаемой.

2.2 Задача стабилизация управляемого выхода

Рассматривается задача стабилизации – удержания выходных переменных объекта управления в окрестности заданных постоянных значений. Потребуем от оптимальной САУ нулевой (в среднем) установившейся (статической) ошибки по выходу. Как известно из ТАУ в таком случае САУ должна обладать свойством астатизма первого порядка. Этого эффекта в полной мере достигают установкой в прямую цепь САУ интегрирующего звена. Для дискретной системы аналогом интегратора является сумматор. Структурная схема системы стабилизации на основе LQG-регулятора приведена на рисунке 2.1.

В лабораторной работе в качестве объекта управления принят робот-манипулятор, линеаризованная математическая модель которого подробно описана в [4] и [8]. В зависимости от варианта задания (начального состояния углов поворота плеч робота-манипулятора), следует рассчитать значения коэффициентов математической модели робота по Matlab-программе, приведённой ниже. В программе определяются и формируются матрицы коэффициентов A и B . Матрицы C и G выбираются одинаковыми для всех вариантов:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = C^T.$$

```
m1=3; l1=0.6; J1=0.12; m2=2.5; l2=0.8; J2=0.15; g=9.81; % 1
syms tet1 tet2; % 2
M_sym(1,1)=(1/4*m1+m2)*l1^2+1/4*m2*l2^2+J1+J2+m2*l1*l2*cos(tet2); % 3
M_sym(1,2)=1/4*m2*l2^2+J2+1/2*m2*l1*l2*cos(tet2); % 4
M_sym(2,1)=M_sym(1,2); % 5
M_sym(2,2)=1/4*m2*l2^2+J2; % 6
G_sym(1)=m1*g*l1/2*cos(tet1)+m2*g*(l1*cos(tet1)+l2/2*cos(tet1+tet2)); % 7
G_sym(2)=m2*g*l2/2*cos(tet1+tet2); % 8
H_sym=M_sym^-1; % 9
temp1_sym=diff(H_sym*[G_sym(1); G_sym(2)], 'tet1', 1); % 10
```

```

temp2_sym=diff(H_sym*[G_sym(1); G_sym(2)], 'tet2', 1); % 11
teta1=deg2rad(45); teta2=deg2rad(-30); % 12
M=subs(M_sym,{tet1,tet2},{teta1 teta2}); % 13
G=subs(G_sym,{tet1,tet2},{teta1 teta2}); % 14
H=subs(H_sym,{tet1,tet2},{teta1 teta2}); % 15
temp_sym=[temp1_sym temp2_sym]; % 16
temp=-(subs(temp_sym,{tet1 tet2},{teta1 teta2})); % 17
A=zeros(n); A([2 4],[1 3])=temp; A(1,2)=1; A(3,4)=1; % 18
B=zeros(n,m); B([2 4],:)=H; % 19

```

Прокомментируем программу по её строкам:

- 1 – задание параметров плеч манипулятора (численный пример [6]);
- 2 – определение двух символьных переменных, обозначающих углы θ_1 и θ_2 ;
- 3 ÷ 6 – задание в символьической форме матрицы инерций M ;
- 7, 8 – задание в символьической форме матрицы гравитационных моментов G ;
- 9 – вычисление в символьической форме обратной матрицы инерций H ;
- 10, 11 – вычисление в символьной форме производных по θ_1 и θ_2 матрицы $H \cdot G$;
- 12 – перевод в радианную меру начальных значений углов $\theta_{10}=45^0$ и $\theta_{20}=-30^0$;
- 13 ÷ 15 – определение численных значений матриц M , G и H ;
- 16, 17 – определение численных значений матрицы производных;
- 18, 19 – определение матриц A и B для модели пространства состояний.

Задавая произвольное положение равновесия (θ_{10} , θ_{20}) с помощью данной программы (значения переменных **teta1** и **teta2**) можно легко получить соответствующие матрицы A и B линейной модели пространства состояний.

Значения параметров исходного положения равновесия **teta1** и **teta2** указываются в строке 12 программы.

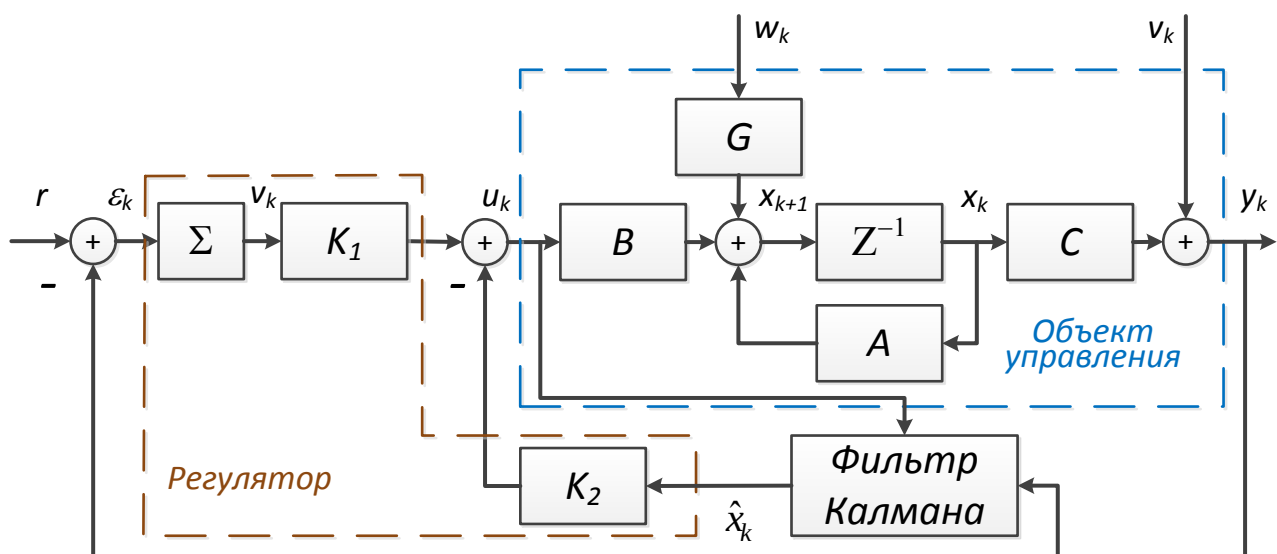


Рисунок 2.1 – Структурная схема оптимальной системы стабилизации

На схеме использованы следующие обозначения:

– A , B , C , G – матрицы числовых коэффициентов математической модели объекта управления (2.1), (2.2);

- Z^{-1} – звено временной задержки на один шаг;
- Σ – дискретный накопительный сумматор;
- K_1, K_2 – матрицы коэффициентов оптимального LQ-регулятора;
- *Фильтр Калмана* – оптимальный стохастический наблюдатель состояния объекта управления (2.6)÷(2.8);
- r – p -мерный вектор постоянных задающих воздействий;
- w_k, v_k – шумы объекта и измерителя.

На основе структуры рисунка 2.1 можно составить математические соотношения, описывающие дискретную динамику данной системы стабилизации:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), & y(k) &= Cx(k), \\u(k) &= K_1 v(k) - K_2 \hat{x}(k), & v(k+1) &= v(k) + \varepsilon(k), \\ \varepsilon(k) &= r - y(k) = r - Cx(k)\end{aligned}$$

или, после исключения переменной ошибки $\varepsilon(k)$, получим

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\v(k+1) &= -Cx(k) + v(k) + r, \\u(k) &= K_1 v(k) - K_2 \hat{x}(k)\end{aligned}$$

В привычной, векторно-матричной форме, последние соотношения примут вид

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & O \\ -C & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} r, \\ u(k) &= -K \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = -[K_2 \quad -K_1] \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = -K_2 \hat{x}(k) + K_1 v(k).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Получив решение основной задачи ЛКО и выделив и полученной матрицы оптимальных коэффициентов K две подматрицы K_1 и K_2 , получим матричные коэффициенты прямой (K_1) и обратной (K_2) связи в структуре оптимальной САУ, представленной на рисунке 2.1.

2.3 Описание некоторых функций системы Matlab

Для решения заданий лабораторной работы предлагается воспользоваться следующими функциями Matlab и пакета Control System Toolbox:

- **ss** – формирует модель линейного стационарного непрерывного или дискретного объекта управления (LTI-объект);
- **c2d** – преобразует непрерывную модель в дискретную;
- **kalman** – формирует оптимальный стохастический наблюдатель (фильтр Калмана) в форме непрерывного или дискретного LTI-объекта;
- **dlqr** – решает задачу синтеза LQ-регулятора состояния для дискретного LTI-объекта управления.

3 ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

В лабораторной работе необходимо построить оптимальную стохастическую систему стабилизации управляемым выходом непрерывного объекта управления (двухзвенного робота-манипулятора). Линейно-квадратический (ЛК, LQ) регулятор состояния и оптимальный стохастический наблюдатель состояния (фильтр Калмана) следует реализовать в дискретной форме. Провести исследование влияния параметров синтеза на динамические свойства стохастической оптимальной системы стабилизации на основе модели оптимальной САУ в Simulink.

3.1. Порядок выполнения работы и защиты работы

1. Определить значения матриц модели объекта управления в соответствии с вариантом задания.
2. Сформировать в пространстве состояний математическую модель непрерывного объекта управления в виде LTI-объекта Matlab.
3. Задать значения математического ожидания вектора начального состояния $\bar{X}^0$ объекта управления, матриц интенсивностей шумов объекта W и измерений V .
4. Провести дискретизацию LTI-модели объекта управления, положив такт дискретизации T равным 0.02 секунды.
5. Проверить свойства управляемости и наблюдаемости для непрерывной и дискретной моделей объекта управления.
6. Сформировать расширенную (2.9) дискретную модель объекта управления и дискретного сумматора, расположенного в прямой цепи.
7. Задать матрицы штрафов в критерии качества (2.3) с учётом расширения размерности объекта управления.
8. Решив задачу синтеза LQ-регулятора (2.4), (2.5); получить матрицу оптимальных коэффициентов и выделить из неё подматрицы K_1 и K_2 (рисунок 2.1).
9. Синтезировать дискретный оптимальный стохастический наблюдатель состояния полного порядка для дискретного объекта управления (2.6)÷(2.8).
10. Сформировать в Simulink схему оптимальной стохастической системы стабилизации (рисунок 3.1). В схеме должна быть предусмотрена возможность моделирования системы как с оптимальным наблюдателем, так и без него, считая, что весь вектор состояния объекта управления доступен для измерения. Значения параметрам блоков схемы следует присвоить в соответствии с результатами расчётов, проведённых по вышеизложенным пунктам.
11. Исследования, согласно варианту задания, провести с использованием программы расчёта параметров оптимальной системы и проводя модельные эксперименты с Simulink-схемой.

Выполнение и защита лабораторной работы производится каждым студентом индивидуально. Защита результатов лабораторной работы осуществляется

при наличии работающих программ, полностью оформленного отчёта и состоит в следующем:

- предъявление полного отчёта, оформленного в соответствии с указанными требованиями;
- представление работающих программ и схем на компьютере;
- ответы на вопросы по теоретической и практической части работы;
- выполнение дополнительных заданий.

3.2 Варианты заданий

Номер варианта	Математическое ожидание начального состояния объекта управления x^0 (градусы)	Номер варианта	Математическое ожидание начального состояния объекта управления x^0 (градусы)
1	[45 0 -30 0]	2	[-45 0 -30 0]
3	[45 0 30 0]	4	[-45 0 30 0]
5	[50 0 -30 0]	6	[-50 0 -30 0]
7	[50 0 30 0]	8	[-50 0 30 0]
9	[60 0 -30 0]	10	[-60 0 -30 0]
11	[60 0 30 0]	12	[-60 0 30 0]
13	[40 0 -30 0]	14	[-40 0 -30 0]
15	[40 0 30 0]	16	[-40 0 30 0]
17	[30 0 -30 0]	18	[-30 0 -30 0]
19	[30 0 30 0]	20	[-30 0 30 0]
21	[20 0 30 0]	22	[-20 0 30 0]
23	[20 0 -30 0]	24	[-20 0 -30 0]

Постоянные значения задающего воздействия (вектора r) выбираются студентом самостоятельно. Диапазон значений компонентов вектора $r - \pm 10^0$.

Необходимо исследовать влияние значений матриц штрафов Q и R функционала (2.3) на качество переходных процессов в оптимальной САУ. Для нечётных вариантов задания следует изменять матрицу штрафов Q функционала качества при состоянии, а для чётных вариантов – матрицу штрафов R в функционале при управлении. Для произвольных фиксированных значений матриц штрафов требуется также провести исследования влияния значений матриц интенсивностей шумов модели – для нечётных вариантов – W , для чётных – V .

Результаты исследований должны быть сформулированы словесно и проиллюстрированы в числовом и графическом видах.

Примерная Simulink-схема моделирования оптимальной системы стабилизации непрерывного стохастического объекта управления с дискретным LQ-регулятором и дискретным фильтром Калмана приведена ниже.

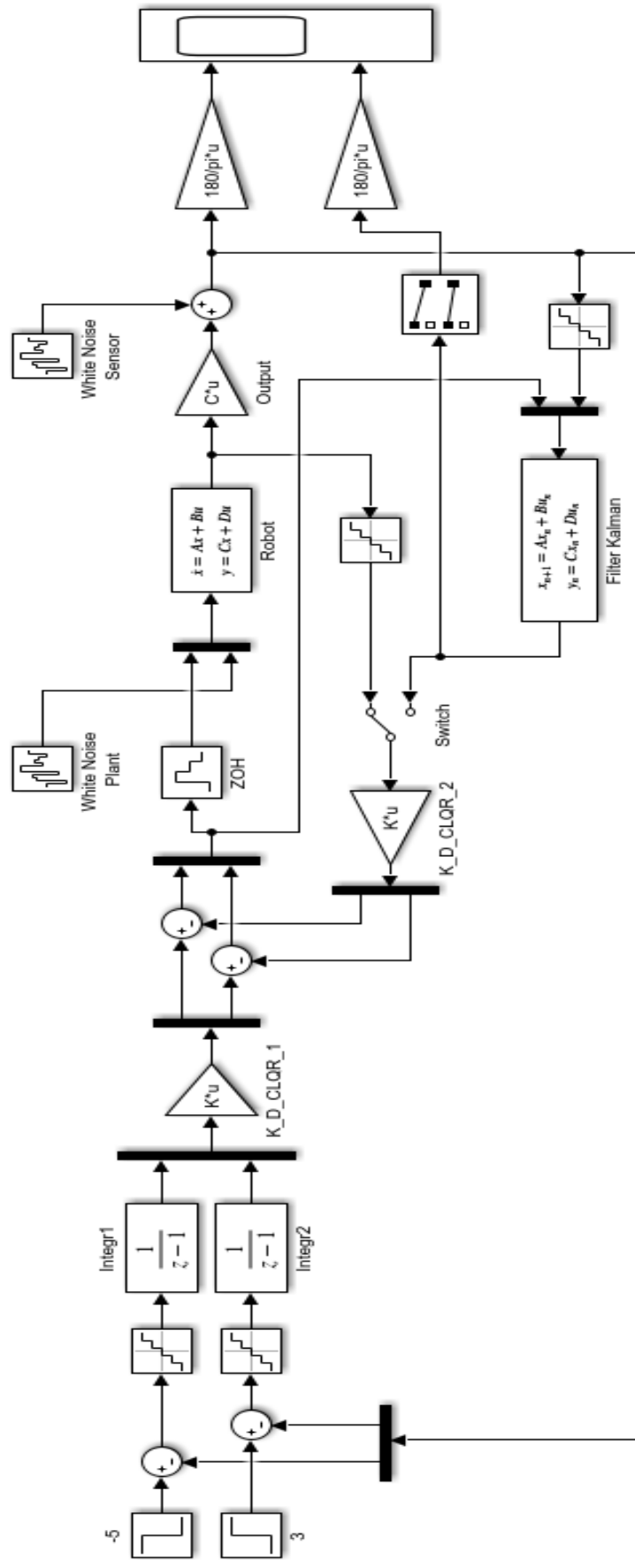


Рисунок 3.1 – Simulink-схема моделирования оптимальной САУ

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Поясните процесс преобразования модели непрерывного LTI-объекта в соответствующую модель дискретного LTI_объекта.
2. Какими соображениями следует руководствоваться при выборе такта дискретизации непрерывного LTI-объекта?
3. Каким математическим соотношением связаны собственные числа матриц динамических коэффициентов непрерывной и дискретной систем?
4. Для каких целей в Simulink-схему включён оптимальный стохастический наблюдатель состояния полного порядка?
5. Поясните идею и процедуру синтеза фильтра Калмана.
6. Можно ли произвольно задавать динамику оптимального наблюдателя состояния динамического объекта?
7. Укажите отличительные свойства и особенности структуры системы стабилизации с нулевой статической ошибкой?
8. Какие функции системы Matlab необходимо использовать для формирования линейно-квадратического регулятора состояния и дискретного фильтра Калмана?
9. Детально поясните структуру и состав схемы на рисунке 3.1.
10. Каким образом следует настраивать параметры Simulink-блока генератора случайных чисел?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления /Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления /Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
3. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления /В. Стрейц. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
4. Hendricks E. Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods /E. Hendricks, O. Jannerup, P. Sorensen. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 556 p.
5. Control System Toolbox™. Getting Started Guide. Matlab R2014a – The MathWorks, Inc., 2014. – 314 p.
6. Лазарев Ю.Ф. Моделирование процессов и систем в Matlab. Учебный курс / Ю.Ф. Лазарев. – СПб.: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с.
7. Перельмутер В.М. Пакеты расширения Matlab. Control System Toolbox и Robust Control Toolbox / В.М. Перельмутер. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. – 224 с.