

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий
и управления в технических системах

Кафедра информатики и управления в технических системах

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Методические указания

к выполнению лабораторных работ по дисциплине
для студентов направления подготовки
27.03.04 «Управление в технических системах»
очной и заочной форм обучения.



Севастополь
СевГУ
2019

УДК 681.515:004.9 (076.5)
ББК 32.965.6
М54

Рецензент:

Б.А. Скороход – профессор кафедры "Информатика и управление
в технических системах", доктор техн. наук, профессор

Составитель: С.А. Дубовик

М54 Методы идентификации: метод. указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине для студентов направления подготовки 27.03.04 Управление в технических системах / Сост. С.А. Дубовик. – Севастополь: СевГУ, 2019. – 33 с.

В методических указаниях приводится краткое введение в статистическую теорию идентификации и описание лабораторных работ, целью которых является освоение принципов оценивания параметров статических и динамических линейных непрерывных и дискретных систем с применением средств пакета Matlab&Simulink.

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах.

УДК 681.515:004.9 (076.5)
ББК 32.965.6

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 11 от 17 июня 2019 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании ученого совета Института информационных технологий и управления в технических системах, протокол № 6 от 18 июня 2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Основные понятия вероятностной теории идентификации	
1.1 Испытания, дискретная случайная величина и смежные понятия	4
1.2 Дискретные и непрерывные распределения, числовые характеристики, ковариация и коэффициент корреляции случайных величин	7
1.3 Методы наименьших квадратов и максимального правдоподобия, регрессия	9
1.4 Применения к идентификации динамических систем	13
1.5 Идентификация состояния: дискретный фильтр Калмана	14
1.6 Непрерывный фильтр Калмана	19
2 Лабораторные работы	
2.1 Статистическая обработка одномерной выборки	21
2.2 Идентификация статических объектов на основе полиномиальной регрессии	23
2.3 Идентификация динамических систем апериодического типа методом наименьших квадратов	25
2.4 Идентификация параметров и оценка колебательных движений масштабной модели судна по данным экспериментальных исследований в опытном бассейне СевГУ	27
Литература	33

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящего методического пособия – ознакомление студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах, с базовыми понятиями вероятностной теории оценивания и ее приложений к идентификации систем, что составляет первую часть пособия. На базе этого материала студенты выполняют лабораторные работы, методические указания к которым представлены во второй части пособия.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ТЕОРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Здесь вводятся основные понятия статистической теории оценивания и идентификации и методы, лежащие в основе построения статических и динамических моделей объектов управления по экспериментальным данным. Из имеющегося широкого спектра компьютерных средств идентификации динамических систем основное внимание уделяется Matlab & Simulink как наиболее приемлемому в смысле компромисса возможных требований и критериев.

1.1 Испытания, дискретная случайная величина и смежные понятия

1. Рассмотрим эксперимент с конечным числом исходов:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N.$$

Исходы также называются элементарными событиями, а их совокупность

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} -$$

(конечным) пространством элементарных событий (ПЭС).

Пример 1. Однократное подбрасывание монеты. Исходы:

$$\omega_1 = 1 \text{ (или Г-«герб»)}, \quad \omega_2 = 0 \text{ (или Р-«решетка»)},$$

то есть $N = 2$,

$$\text{ПЭС: } \Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{1, 0\} = \{Г, Р\}.$$

Пример 2. n -кратное подбрасывание монеты. Исходы:

$$\omega_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i), i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = \omega_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i), \quad a_j^i = 0 \text{ или } 1 \}.$$

Упражнение 1. Чему равно N в примере 2?

Пример 3. Распределение трех шаров (a, b, c) по трем емкостям: все исходы – в табл.1

Таблица 1

1. $\{abc \text{—} \text{—}\}$	10. $\{a bc \text{—}\}$	19. $\{\text{—} a bc\}$
2. $\{\text{—} abc \text{—}\}$	11. $\{b ac \text{—}\}$	20. $\{\text{—} b ac\}$
3. $\{\text{—} \text{—} abc\}$	12. $\{c ab \text{—}\}$	21. $\{\text{—} c ab\}$
4. $\{ab c \text{—}\}$	13. $\{a \text{—} bc\}$	22. $\{a b c\}$
5. $\{ac b \text{—}\}$	14. $\{b \text{—} ac\}$	23. $\{a c b\}$
6. $\{bc a \text{—}\}$	15. $\{c \text{—} ab\}$	24. $\{b a c\}$
7. $\{ab \text{—} c\}$	16. $\{\text{—} ab c\}$	25. $\{b c a\}$
8. $\{ac \text{—} b\}$	17. $\{\text{—} ac b\}$	26. $\{c a b\}$
9. $\{bc \text{—} a\}$	18. $\{\text{—} bc a\}$	27. $\{c b a\}$

то есть, в данном случае, $N = 27$.

Пример 4. Выбор с возвращением упорядоченный (ВВУ), $(()$ – размещения):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_j = 1, 2, \dots, M \}, \\ N = N(\Omega) = M^n; \end{aligned} \quad (1)$$

– неупорядоченный (ВВН) - $[]$ (сочетания):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad a_j = 1, 2, \dots, M \}, \\ N = N(\Omega) = C_{M+n-1}^n, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пример 5. Выбор без возвращения упорядоченный (ВБВУ) - $()$ (размещения):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_k \neq a_l, k \neq l, \quad a_i = 1, 2, \dots, M \}, \\ N = N(\Omega) = (M)_n = A_M^n = M(M-1) \cdots (M-n+1); \end{aligned} \quad (3)$$

– неупорядоченный (ВБВН) - $[]$ (сочетания):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad a_k \neq a_l, k \neq l, \quad a_i = 1, 2, \dots, M \} \\ N = N(\Omega) = C_M^n = (M)_n / n!. \end{aligned} \quad (4)$$

Количества исходов (мощности) ПЭС из примеров 3, 4 сведены в табл. 2, а структуры ПЭС для случая $M = 3, n = 2$ – в табл. 3 [1].

Таблица 2

Набор (тип шаров) Выбор (размещение)	Упорядоченный (различимые)	Неупорядоченный (неразличимые)
С возвращением (без запрета)	M^n	C_{M+n-1}^n
Без возвращения (с запретом)	$(M)_n = A_M^n$	$C_M^n = (M)_n / n!$

Таблица 3

Набор Выбор	Упорядоченный	Неупорядоченный
С возвращением	$(1,1) \quad (1,2) \quad (1,3)$ $(2,1) \quad (2,2) \quad (2,3)$ $(3,1) \quad (3,2) \quad (3,3)$	$[1,1] \quad [2,2] \quad [3,3]$ $[1,2] \quad [1,3]$ $[2,3]$
Без возвращения	$(1,2) \quad (1,3)$ $(2,1) \quad (2,3)$ $(3,1) \quad (3,2)$	$[1,2] \quad [1,3]$ $[2,3]$

Упражнение 2. Проверить мощности N ПЭС в таблице 3.

Пример 6. Размещение r шаров по m емкостям (см. пример 3).

Упражнение 3. Как изменится мощность в предыдущем примере, если число емкостей увеличить на 1?

Упражнение 4. (О совпадениях) Пусть урна содержит M шаров, занумерованных числами $1, 2, \dots, M$. Производится выбор с возвращением упорядоченного набора в количестве n шаров. Какова вероятность события $A = \{\omega : a_i \neq a_j, i \neq j\}$, то есть, отсутствия повторений?

Упражнение 5. (О совпадениях) В группе n студентов. Какова вероятность P_n того, что в какой-то из дней обычного (невисокосного) года в аудитории найдутся по крайней мере 2 студента, дни рождения которых совпадают? Вычислить P_n для $n = 4, 16, 22, 40, 64$.

Упражнение 6. (О лотереях) Пусть из M билетов n – выигрышные ($M \geq 2n$) и приобретено также n билетов. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету?

Испытания Бернулли, биномиальное распределение.

Рассмотрим эксперимент (испытание Я. Бернулли) ВВУ (пример 2): каждому элементарному событию (исходу) $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ припишем вероятность

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n a_i} q^{n - \sum_{i=1}^n a_i}, \quad (5)$$

где неотрицательные p, q таковы, что $p + q = 1$. Все исходы можно разделить на группы Ω_k , для которых $\sum_{i=1}^n a_i = k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда число исходов в экс-

перименте $N = \sum_{k=0}^n N(\Omega_k)$.

Упражнение 7. (О биномиальных вероятностях) Доказать, что распределение (5) на ПЭС Ω является вероятностным, т.е. удовлетворяет аксиомам вероятности.

Вероятности $P_k = P(\Omega_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, и соответствующее распределение называются биномиальными.

Дискретной случайной величиной (ДСВ) называется всякая числовая функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на ПЭС Ω и имеющая конечное или счетное число действительных значений.

Пример 7. Простейшая ДСВ – индекс I_A события (множества) $A \subset \Omega$:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \Omega / A \end{cases}.$$

Пример 8. ДСВ, имеющая r значений $x_1, x_2, \dots, x_r$, может быть представлена следующим образом:

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^r x_k I_{A_k}(\omega), \quad (6)$$

где $A_k = \{\omega : \omega \in \Omega, \xi(\omega) = x_k\}$ – все множество исходов, при которых ДСВ принимает значение x_k (иначе говоря, A_k есть прообраз x_k). Так как в (6) перебор всех значений индекса суммирования исчерпывает все значения ДСВ, то при попарно различных $x_1, x_2, \dots, x_r$ ПЭС есть объединение непересекающихся (то есть, разбиение Ω) прообразов x_k :

$$P(\Omega) = P\left\{\bigcup_{k=1}^r A_k\right\} = 1.$$

1.2 Дискретные и непрерывные распределения, числовые характеристики, ковариация и коэффициент корреляции случайных величин

Рассмотрим ДСВ ξ , принимающую r значений $x_1, x_2, \dots, x_r$ из промежутка $X \subset R$ действительной прямой R (то есть $\xi : \Omega \rightarrow X \subset R$). Обозначим вероятность p_k прообраза x_k :

$$p_k = P(A_k), \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

То, что это вероятность, следует из аддитивности P и того, что это разбиение ПЭС Ω :

$$\sum_{k=1}^r p_k = \sum_{k=1}^r P(A_k) = P\left\{\bigcup_{k=1}^r A_k\right\} = P(\Omega) = 1.$$

Распределением ДСВ $\xi : \Omega \rightarrow X$ называется совокупность r пар (x_k, p_k) , $k = 1, 2, \dots, r$, $\sum_{k=1}^r p_k = 1$. По распределению легко вычисляется **математическое ожидание (среднее) ξ** :

$$M\xi = \sum_{k=1}^r p_k x_k, \quad (7)$$

а также **функция распределения ДСВ ξ** :

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \sum_{\{k: x_k < x\}} p_k. \quad (8)$$

Еще одной числовой характеристикой ДСВ ξ является **дисперсия** $D\xi$ – усредненная интенсивность отклонения ДСВ ξ от ее среднего:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (9)$$

Упражнение 8. Показать, что

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad (10)$$

Упражнение 9. Пусть случайная величина ξ имеет среднее $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ и для заданных чисел a и b определена случайная величина $y = a + b\xi$. Вычислить среднее и дисперсию для y .

Для непрерывной случайной величины (НСВ) $\xi: \Omega \rightarrow X \subset R$ аналогично (7) вводится функция распределения:

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(s) ds,$$

где под интегралом записана функция плотности распределения (аналог распределения ДСВ). Для гладкой и монотонно неубывающей на R функция распределения $F_{\xi}(x)$, получаем:

$$f_{\xi}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi}(x),$$

причем (доказать!):

$$F_{\xi}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(s) ds = 1.$$

Наконец, по аналогии с (7) имеем формулу для среднего $\xi: \Omega \rightarrow X$:

$$M\xi = \int_X x f_{\xi}(x) dx. \quad (11)$$

Ковариация двух случайных величин ξ и η определяется как

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\}.$$

Если дисперсии случайных величин ξ и η положительны ($D\xi > 0$ и $D\eta > 0$), то для таких случайных величин определяется **коэффициент корреляции**:

$$\rho(\xi, \eta) = \text{cov}(\xi, \eta) / \sqrt{D\xi D\eta}.$$

Упражнение 10. Показать, что для случайных величин ξ и $y = a + b\xi$, о которых идет речь в условии упражнения 9, имеем в соответствии со знаком a :

$$\rho(\xi, y) = \pm 1.$$

Если же случайные величины ξ и η независимы в вероятностном смысле [1-3], то они некоррелированы:

$$\rho(\xi, \eta) = 0.$$

При этом, из некоррелированности совсем не обязательно следует независимость [1,2] (это так для гауссовских величин).

1.3 Методы наименьших квадратов и максимального правдоподобия, регрессия

Для статического объекта, относительно которого имеются данные экспериментов на входе: $\vec{u} \in R^n$, и на выходе: $\vec{y} \in R^n$, уравнение регрессии, интерпретирующее эти данные с помощью вектора параметров $\vartheta \in R^m$, имеет вид:

$$\vec{y} = \Gamma(\vec{u}) \vartheta, \quad (12)$$

где $\Gamma = \Gamma(\vec{u})$ – $n \times m$ -матрица следующего вида (A^T – матрица, транспонированная по отношению к A):

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_1^T(\vec{u}_1) \\ \vec{\gamma}_2^T(\vec{u}_2) \\ \vdots \\ \vec{\gamma}_n^T(\vec{u}_n) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Векторные аргументы в строках помечены стрелкой, чтобы отличать их от элементов u_i .

Замечание 1. Возможны различные зависимости векторной функции $\gamma \in R^m$ от элементов входного вектора. Для наших целей будет достаточно двух частных вариантов; чтобы описать их, введем следующее представление i -той строки матрицы (13):

$$\vec{\gamma}_i^T(\vec{u}_i) = \gamma^T(c_i(\vec{u}_i)), \quad (14)$$

в котором $c_i(\bar{u}_i)$ будет реализовано одним из способов:

$$1. \quad c_i(\bar{u}_i) = u_i, \quad \gamma^T(u) = (1, u, \dots, u^{m-1});$$

$$2. \quad c_i(\bar{u}_i) = \bar{u}_i, \quad \gamma(\bar{u}_i) = \bar{u}_i.$$

Первый вариант (14) будем называть *полиномиальной* регрессией, второй (условно) – *тождественной* регрессией.

Понятно, что в общем случае, при произвольном m , аппроксимировать данные моделью (12) без ошибок (то есть, при подстановке $\bar{u}$ в правую часть (12) получается в точности $\bar{y}$) невозможно, хотя при $m = n$ и при выполнении определенного условия **невыврожденности эксперимента (НЭ)** такая точная интерпретация данных эксперимента возможна и соответствующий метод называется **интерполяцией данных (ИД)**.

Упражнение 11. Показать, в чем состоит условие НЭ относительно матрицы (13) в задаче интерполяции.

Возвращаясь к общему случаю, введем критерий точности аппроксимации, равный половине квадрата невязки между правой и левой частями в (12):

$$I(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} (\bar{y} - \Gamma(\bar{u})\mathcal{G})^T (\bar{y} - \Gamma(\bar{u})\mathcal{G}). \quad (15)$$

Упражнение 12. Показать, что критерий (15), в котором $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, имеет вид:

$$I(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\gamma}_i^T(\bar{u}_i)\mathcal{G})^2. \quad (16)$$

Задача аппроксимации данных для регрессии (12) теперь может быть сформулирована как задача нахождения такого единственного значения векторного параметра $\mathcal{G}$, которое минимизирует величину критерия $I(\mathcal{G})$.

Подставляя в (16) для $\mathcal{G} \in R^m$ компоненты $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m)^T$, выполняя действия и вычисляя частные производные $\partial I(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m) / \partial \mathcal{G}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, получим в качестве необходимых условий экстремума систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n [\bar{\gamma}_i(\bar{u}_i)]_j (y_i - \bar{\gamma}_i^T(\bar{u}_i)\mathcal{G}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где индекс при векторе в квадратных скобках обозначает соответствующий элемент указанного вектора. Понятно, что эта система эквивалентна одному m -векторному уравнению:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i(\bar{u}_i)(y_i - \tilde{\gamma}_i^T(\bar{u}_i)\vartheta) = 0,$$

которое с учетом (13) приобретает особенно простой вид:

$$\Gamma^T \bar{y} - \Gamma^T \Gamma \vartheta = 0. \quad (17)$$

При условии невырожденности данных:

$$\det \Gamma^T \Gamma \neq 0, \quad (18)$$

имеем оценку **метода наименьших квадратов (МНК)** искоемых параметров:

$$\vartheta_{МНК} = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \bar{y}. \quad (19)$$

Запишем теперь уравнение регрессии с векторной ошибкой $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{y} = \Gamma(\bar{u}) \vartheta + \bar{\varepsilon}, \quad (20)$$

где элементы $\bar{\varepsilon} \in R^n$ представляют собой гауссовские случайные величины с нулевым средним, то есть $\bar{\varepsilon}$ – гауссовский вектор, $M \bar{\varepsilon} = 0$, имеющий матрицу ковариаций $D = \text{cov}(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}) = M(\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}^T) > 0$ (где знак неравенства означает положительную определенность D). Эти дополнительные предположения об ошибке $\bar{\varepsilon}$ позволяют по другому взглянуть на задачу интерпретации данных: поскольку из (20) следует для ошибки:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{y} - \Gamma(\bar{u}) \vartheta, \quad (21)$$

то есть, для правой части этого равенства имеется параметризованная плотность распределения $f_{\bar{\varepsilon}}(x; \vartheta)$, то в соответствии с **методом максимального правдоподобия** ([2], с.232) в качестве выборки x нужно взять значения правой части (21) на данных $\bar{u}$, $\bar{y}$. Вспоминая, что плотность – это аналог распределения ДСВ и характеризует вероятность этих данных, то естественной представляется мысль – так выбрать параметр ϑ , чтобы максимизировать эту вероятность:

$$f_{\bar{\varepsilon}}(x; \vartheta) \Big|_{x=\bar{\varepsilon}(\bar{u}, \bar{y})} \rightarrow \max_{\vartheta \in R^m}. \quad (22)$$

Для упрощения предположим, во первых, независимость (некоррелированность в гауссовском случае) компонент $\vec{\varepsilon}$, для каждой i -ой из которых известно среднеквадратическое отклонение $\sigma_i > 0$. Тогда, обозначая плотность для i -ой компоненты $\vec{\varepsilon}$ как $f_i(x; \mathcal{G})$, будем иметь:

$$f_{\vec{\varepsilon}}(x; \mathcal{G}) = \prod_{i=1}^n f_i(x; \mathcal{G}). \quad (23)$$

Во вторых, для семейства экспоненциальных распределений, к которому принадлежит и гауссовская плотность, в качестве функционала правдоподобия L в задаче (22) может быть взята не сама плотность, а ее логарифм (почему?), поэтому метод **максимального правдоподобия (МП)** в итоге приводит к задаче:

$$L(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} (y_i - \vec{\gamma}_i^T(\vec{u}_i) \mathcal{G})^2 \rightarrow \min_{\mathcal{G} \in R^m}. \quad (24)$$

В случае взаимной корреляции измерений имеем задачу

$$L(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} (\vec{y} - \Gamma(\vec{u}) \mathcal{G})^T D^{-1} (\vec{y} - \Gamma(\vec{u}) \mathcal{G}) \rightarrow \min_{\mathcal{G} \in R^m},$$

которая, впрочем, содержит и задачу (24) как частный случай диагональной матрицы ковариаций. Сравнивая (24) и (16), замечаем, что МНК-оценки являются частным случаем МП-оценок при равноточных измерениях. Для МП-оценок (maximum likelihood) имеем (сравнить с (19)):

$$\mathcal{G}_{ML} = G \vec{y}, \quad G = (\Gamma^T D^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T D^{-1}. \quad (25)$$

Упражнение 13. Пусть случайный вектор ξ имеет ковариационную матрицу X и для заданных матрицы A и вектора b имеем $y = A\xi + b$. Показать, что $\text{cov } y = A X A^T$.

В связи с оценкой (25) удобно ввести понятие **информационной матрицы**:

$$M = \Gamma^T D^{-1} \Gamma,$$

так что в (25):

$$G = M^{-1} \Gamma^T D^{-1}.$$

Оказывается, что с помощью этой матрицы можно преобразовать $\vec{\varepsilon}$ в ошибку оценивания e :

$$e = \mathcal{G}_{ML} - \mathcal{G}$$

и это тесно связано с информационной матрицей, которая таким образом определяет точность оценивания. В наших предположениях $\bar{y}$, также как и $\bar{\varepsilon}$, является гауссовской случайной величиной (векторной). Поэтому в силу (25) $\mathcal{G}_{ML}$ – тоже случайный вектор с математическим ожиданием $\mathcal{G}$. Действительно, из (25) и (20) имеем:

$$\mathcal{G}_{ML} = G(\Gamma \mathcal{G} + \bar{\varepsilon}) = M^{-1} \Gamma^T D^{-1} (\Gamma \mathcal{G} + \bar{\varepsilon}) = M^{-1} M \mathcal{G} + G \bar{\varepsilon},$$

то есть

$$e = \mathcal{G}_{ML} - \mathcal{G} = G \bar{\varepsilon}.$$

Отсюда и из упражнения 13 для ковариационной матрицы e следует:

$$\text{cove} = P = G D G^T. \quad (26)$$

В результате справедлива

Лемма1. Ковариационная матрица ошибки оценивания $P = \text{cove}$ и информационная матрица $M > 0$ связаны соотношением:

$$P = M^{-1}.$$

Доказательство: следует из (26), где нужно подставить $G = M^{-1} \Gamma^T D^{-1}$ и выполнить действия.

Замечание 2. Про вектор $\mathcal{G}_{ML}$ в соответствии с упражнением 13 можно написать

$$\mathcal{G}_{ML} \propto N(\mathcal{G}, G D G^T),$$

что означает, что этот случайный вектор распределен по нормальному закону (гауссовский) с параметрами среднего и матрицы ковариаций, указанными в скобках (показать!).

1.4 Применения к идентификации динамических систем

Поскольку идентификация параметров динамических систем происходит по дискретным данным, полученным с тактом дискретности Δ , то даже в случае линейной непрерывной системы, заданной тройкой матриц (A, B, C) , естественно перейти к соответствующему дискретному представлению:

$$x_{i+1} = A^* x_i + B^* u_i, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y_i = C^* x_i, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (27)$$

где для малых Δ справедливы представления (I - единичная матрица):

$$A^* \approx I + A \Delta, \quad B^* \approx B \Delta, \quad C^* \approx C, \quad (28)$$

([4], сс.510, 511, где надо воспользоваться простейшей асимптотикой для экспоненты).

Чтобы применить результаты теории оценивания из предыдущего подраздела, необходимо привести систему (27) к одному уравнению «вход-выход» относительно оператора z сдвига на шаг:

$$R(z)y_i = Q(z)u_i. \quad (29^*)$$

Это уравнение уже может быть представлено в форме регрессии (14), вариант 2 (тождественная регрессия), для данных размерности $\mu = n + m + 1$ (n, m – размерности полиномов (соответственно) $R(z), Q(z)$):

$$y_{i+n} = \gamma^T(\bar{u}_i) \vartheta = \bar{u}_i^T \vartheta, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^T &= (y_{i+n-1}, \dots, y_{i+1}, y_i; u_{i+m}, \dots, u_i), \quad \bar{u}_i \in R^\mu, \\ \vartheta^T &= (\rho_{n-1}, \dots, \rho_1, \rho_0; q_m, \dots, q_0), \quad \vartheta \in R^\mu. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее это может быть использовано в рамках методов наименьших квадратов или максимального правдоподобия.

1.5 Идентификация состояния: дискретный фильтр Калмана

Для того чтобы сформулировать задачу фильтрации (восстановления состояния), обратимся к системе (27), несколько видоизменив ее: во-первых, для упрощения не будем помечать звездочкой матрицы, хотя речь и будет идти о дискретных системах – других здесь не будет, во-вторых, добавим в систему в качестве возмущений дискретные «белые шумы» – последовательности независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним:

$$x_{i+1} = Ax_i + v_i, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$z_i = C x_i + r_i, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

где «белые шумы» v_i, r_i считаем стационарными, то есть их ковариации

$$\text{cov}(v_i, v_i) = V \geq 0, \text{cov}(r_i, r_i) = R > 0 \quad (32)$$

не зависят от времени, причем v_i и r_i не коррелируют: $\text{cov}(v_i, r_i) = 0$; матрицы A, C также не зависят от времени. Аналогичным образом вектор x_0 – гауссовский (см. замечание 2):

$$x_0 \propto N(\bar{x}_0, X_0). \quad (33)$$

Не имея точных данных о векторе состояния x_i в каждый текущий момент, мы хотим по всем имеющимся к моменту i измерениям $\{z_j, 0 \leq j \leq i\}$ определить оценку $\hat{x}_i$, относительно которой надлежит сформулировать условия, гарантирующие ей целесообразные свойства. Понятно, что эти свойства нужно формулировать применительно к ошибке оценивания

$$e_i = \hat{x}_i - x_i \in R^n.$$

Понятно, что в среднем оценка должна совпадать с точным значением состояния, то есть оценка должна быть несмещённой. Кроме того, поскольку оценка является линейной функцией наблюдений, остается потребовать минимальности дисперсии, но e_i – это вектор, поэтому речь должна идти о всевозможных линейных комбинациях дисперсий ее компонент. Для дальнейшего обозначим:

$$P_i = \text{cove}_i = \text{cov}(e_i, e_i).$$

Итак, **требования к оценке:**

1. несмещенность:

$$M e_i = M \hat{x}_i - M x_i = 0;$$

2. оптимальность: для любой $W = W^T > 0$

$$M \{e_i^T W e_i\} \rightarrow \min_{\hat{x}_j, 0 \leq j \leq i}.$$

Требование оптимальности далее будет конкретизировано. Дело в том, что процедура минимизации в момент i происходит, когда уже совершена аналогичная для $i-1$, то есть уже имеется оценка $\hat{x}_{i-1}$. Кроме того, эту оценку $\hat{x}_{i-1}$

можно оптимальным образом экстраполировать на момент i без использования текущего измерения z_i – это сразу следует из первого уравнения (31). При этом получаем результат экстраполяции x_i^* ; остается только *оценку экстраполяции* x_i^* с учетом z_i преобразовать в $\hat{x}_i$; это ключевой момент всей **рекуррентной процедуры** – он повторяется на каждом шаге, то есть при $i = 0, 1, \dots$. Как запускается эта рекурсия из (33), уточним чуть ниже, а здесь этот ключевой момент « x_i^* с учетом z_i преобразовать в $\hat{x}_i$ » представим с помощью матричных коэффициентов K_i^* и K_i (оценка линейная!):

$$\hat{x}_i = K_i^* x_i^* + K_i z_i. \quad (34)$$

Теперь оптимальность можно представить

$$M \{e_i^T W e_i\} \rightarrow \min_{K_i^*, K_i}, \quad i = 0, 1, \dots. \quad (35)$$

Достаточно показать, как из оценки $\hat{x}_i$ сформировать оценку $\hat{x}_{i+1}$. Представим соответствующий *алгоритм*.

1. Экстраполяция на шаг:

$$x_{i+1}^* = A \hat{x}_i.$$

2. Подставим в это уравнение $\hat{x}_i = e_i + x_i$ и из первого уравнения (31)

$Ax_i = x_{i+1} - v_i$, в результате получим (вместе со вторым уравнением) уравнение регрессии (20):

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= x_{i+1} - v_i + A e_i, \\ z_{i+1} &= C x_{i+1} + r_{i+1}. \end{aligned} \quad (36)$$

где $\bar{y}_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{i+1}^* \\ z_{i+1} \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} I_n \\ C \end{pmatrix}$ – $(n+m) \times n$ - матрица полного ранга (почему?),

$$\mathcal{G} = x_{i+1}, \quad \bar{\varepsilon}_{i+1} = \begin{pmatrix} A e_i - v_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i+1}^* - x_{i+1} \\ r_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Обозначим $P_{i+1}^* = \text{cov}(x_{i+1}^* - x_{i+1})$. Из (37) следует, что

$$M\vec{\varepsilon}_{i+1} = \begin{pmatrix} AMe_i \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

а в соответствии с упражнением 13:

$$D_{i+1} = \text{cov} \vec{\varepsilon}_{i+1} = \begin{pmatrix} AP_i A^T + V & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В силу (37)

$$D_{i+1} = \begin{pmatrix} P_{i+1}^* & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}. \quad (38^*)$$

3. Информационную матрицу M , входящую в (25), в данном случае удобно обозначить $M = M_i$ и для нее имеем в силу (38):

$$M_{i+1} = \Gamma^T D_{i+1}^{-1} \Gamma = (I_n, C^T) \begin{pmatrix} (AP_i A^T + V)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ C \end{pmatrix},$$

или, выполняя действия:

$$M_{i+1} = (P_{i+1}^*)^{-1} + C^T R^{-1} C \quad (39)$$

и эта матрица не вырождена (доказать!), поэтому, в силу леммы 1:

$$M_{i+1} = (P_{i+1})^{-1}. \quad (40)$$

4. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Gamma^T D_{i+1}^{-1} &= (I_n, C^T) \begin{pmatrix} (AP_i A^T + V)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = (I_n, C^T) \begin{pmatrix} (P_{i+1}^*)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= ((P_{i+1}^*)^{-1}, C^T R^{-1}), \end{aligned}$$

из (25) с учетом (36),(37), а также (40), которое представим как $(M_{i+1})^{-1} = P_{i+1}$, получим:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} = \hat{x}_{i+1} &= P_{i+1} \Gamma^T D_{i+1}^{-1} \bar{y}_{i+1} = P_{i+1} ((P_{i+1}^*)^{-1}, C^T R^{-1}) \begin{pmatrix} x_{i+1}^* \\ z_{i+1} \end{pmatrix} = \\ &= P_{i+1} ((P_{i+1}^*)^{-1} x_{i+1}^* + C^T R^{-1} z_{i+1}). \end{aligned} \quad (41)$$

Сравнивая это с (34), получаем, что

$$K_{i+1} = P_{i+1} C^T R^{-1}. \quad (42)$$

Здесь следует учитывать, что матрица ковариаций ошибки оценивания P_{i+1} (в отличие от P_{i+1}^*) на данном шаге алгоритма еще не определена.

5. Коэффициент K_i^* в (34) выражается через K_{i+1} . Действительно, умножая слева в (39) обе части равенства на P_{i+1} , учитывая при этом (40) и (42), получаем:

$$I_n = P_{i+1}(P_{i+1}^*)^{-1} + P_{i+1}C^TR^{-1}C = P_{i+1}(P_{i+1}^*)^{-1} + K_{i+1}C. \quad (43)$$

Поскольку из сравнения (41) и (34) следует, что

$$K_i^* = P_{i+1}(P_{i+1}^*)^{-1},$$

то из (43) имеем:

$$K_{i+1}^* = I_n - K_{i+1}C,$$

и тогда из (41) следует:

$$\hat{x}_{i+1} = (I_n - K_{i+1}C) x_{i+1}^* + K_{i+1}z_{i+1}. \quad (44)$$

Учитывая п.1 алгоритма, это рекуррентное соотношение, позволяющее последовательно, синхронно с поступлением измерений, вычислять оптимальную оценку состояния, начиная с (см. (33)):

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0. \quad (45)$$

Теперь можно получить способ вычисления K_{i+1} , альтернативный (42).

6. Домножим в (43) справа на $P_{i+1}^*C^T$ и учтем (42):

$$P_{i+1}^*C^T = P_{i+1}C^TR^{-1}R + K_{i+1}C P_{i+1}^*C^T = K_{i+1}(R + C P_{i+1}^*C^T),$$

где в скобках стоит положительно определенная и, следовательно, невырожденная матрица, поэтому из этого уравнения следует:

$$K_{i+1} = P_{i+1}^*C^T (R + C P_{i+1}^*C^T)^{-1}. \quad (46)$$

7. Наконец, заметим еще раз, что в основе всех вычислений на шаге рекурсии лежит матрица ковариаций

$$P_{i+1}^* = \text{cov}(x_{i+1}^* - x_{i+1}),$$

которая определяется в начальной фазе каждого шага через матрицу ковариаций ошибки *предыдущего шага*:

$$P_{i+1}^* = AP_i A^T + V,$$

поэтому перед переходом к следующему шагу алгоритма, необходимо вычислить P_{i+1} для осуществимости этого следующего шага. Опять обращаясь к (43), домножим справа на P_{i+1}^* :

$$P_{i+1}^* = P_{i+1} + K_{i+1} C P_{i+1}^*,$$

откуда имеем:

$$P_{i+1} = (I_n - K_{i+1} C) P_{i+1}^* \quad (47)$$

с начальным условием (см. (33)):

$$P_0 = X_0. \quad (48)$$

Таким образом, получаем алгоритм *дискретного фильтра Калмана*, включающий рекуррентные уравнения для оценки (44), (46), (47) с начальными условиями (45), (48).

1.6 Непрерывный фильтр Калмана

Постановка задачи оптимальной фильтрации в случае непрерывной системы аналогична дискретному варианту. Несколько усложняется только понятие «белого шума», в результате чего место ковариационных матриц (32) занимают соответствующие матрицы интенсивностей. Более детальное изложение, затрагивающее обобщенные функции, можно найти в [4] (параграф 1.11). Пусть задана линейная стационарная система:

$$\dot{x} = Ax + v, \quad x(0) = x_0 \propto N(\bar{x}_0, X_0),$$

$$z = Cx + r,$$

где v, r - «белые шумы» с интенсивностями (соответственно) $V \geq 0, R > 0$. Вводя векторы оценки состояния $\hat{x} = \hat{x}(t)$ и ошибки оценивания e , абсолютно аналогично предыдущему пункту, можно сформулировать задачу оптимального восстановления состояния по текущим измерениям. Запишем результат ее решения в том виде, как он совершенно естественным образом следует из вышеизло-

женного. Для этого представим уравнение дискретного фильтра в несколько преобразованной форме: из (44) с учетом п.1 алгоритма имеем

$$\hat{x}_{i+1} = A^* \hat{x}_i + K_{i+1}(z_{i+1} - z_{i+1}^*),$$

а для матрицы коэффициентов фильтра

$$K_{i+1} = P_{i+1} C^T R^{-1}.$$

По этим уравнениям записываются уравнения фильтра:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(t)(z(t) - \hat{z}(t)), \quad \hat{z}(t) = C\hat{x}(t), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}, \quad (49)$$

$$K = K(t) = P(t)C^T R^{-1}. \quad (50)$$

В непрерывном случае нет необходимости в промежуточной операции экстраполяции, но нужно еще представить уравнение для матрицы $P(t)$ ковариации ошибки оценивания e . Для $e = e(t)$, обозначая

$$\bar{A} = A - KC \quad (51)$$

имеем (показать):

$$\dot{e} = \bar{A}e + \xi, \quad \xi = Kr - v,$$

и тогда для матрицы ковариаций получим [4]:

$$\dot{P} = \bar{A}P + P\bar{A}^T + \Lambda, \quad P(0) = X_0.$$

Подставляя здесь (51) и учитывая, что для $\text{cov} \xi = \Lambda$

$$\Lambda = KRK^T + V,$$

имеем:

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + V, \quad P(0) = X_0. \quad (52)$$

Таким образом, получаем для непрерывного фильтра Калмана уравнения (49), (50), (52).

2 ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

2.1 Статистическая обработка одномерной выборки

Цель работы: 1) приобретение практических навыков по статистической обработке результатов наблюдений одномерной случайной величины (СВ); 2) изучение возможностей системы MATLAB по статистической обработке результатов наблюдений одномерной СВ.

Порядок выполнения работы [3]:

1. Переписать данные своего варианта N (см. приведенные в таблице 4 варианты заданий к лабораторной работе №1, выборка объемом 50) и выполнить следующие задания:

- построить вариационный и статистический ряды, найти размах выборки;
- построить таблицу частот группированной выборки, сделав семь интервалов одинаковой длины;
- провести статистическую обработку результатов наблюдений, включающую построение (для интервально группированной выборки) полигона и гистограммы частот, эмпирической функции распределения;
- найти оценки математического ожидания, дисперсии (смещенную и несмещенную), медианы и моды для исходной (негруппированной) и интервально группированной выборок.

2. Провести первичную статистическую обработку одномерной выборки при помощи пакета МАТЛАБ, для чего необходимо:

- ввести в созданном m-файле данные своего варианта в виде вектор-строки (или вектор-столбца);
- дополнить m-файл операторами построения вариационного и статистического рядов (см. sort [3]);
- дополнить m-файл операторами построения гистограмм и полигонов частот для интервально группированной выборки (см. bar, hist, plot), совместить в одном графическом окне графики соответствующих полигонов и гистограмм (см. axis, hold [7,8]);

- дополнить m-файл операторами построения графиков эмпирической функции распределения для исходной (негруппированной) и интервально группированной выборок (см. stairs [3]);
- дополнить m-файл операторами вывода на экран числовых характеристик для исходной (негруппированной) и интервально группированной выборок: размах, мода, медиана, выборочное среднее, дисперсия (см. min, max, mode, median, mean, std, var [3,7,8]);
- запустить m-файл, убедиться в совпадении результатов, полученных вручную и на компьютере, отчитаться перед преподавателем за проделанную работу.

Таблица 4.

Варианты заданий к лабораторной работе №1										
№ п/п	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9	N = 10
1	5	3	7	12	4	7	6	2	10	9
2	2	8	6	10	9	9	7	7	2	5
3	7	14	5	9	6	9	0	10	2	7
4	5	4	7	14	7	13	13	7	2	4
5	6	1	3	1	10	6	6	7	3	2
6	2	4	6	7	6	4	5	8	1	7
7	2	7	3	4	8	7	8	4	1	4
8	6	7	8	1	3	11	12	7	4	7
9	5	11	5	7	8	12	2	8	6	13
10	4	10	5	14	7	13	11	6	2	4
11	3	6	4	7	1	9	12	6	5	6
12	6	8	3	5	3	9	10	11	2	8
13	3	6	5	3	10	8	9	7	3	4
14	2	8	5	13	10	12	8	6	6	7
15	2	6	5	5	6	12	16	5	3	7
16	4	1	5	6	8	13	11	12	4	8
17	2	8	5	4	8	13	13	8	4	1
18	4	10	6	1	9	8	8	10	1	3
19	6	14	5	3	6	5	11	2	3	3
20	5	9	5	13	8	10	10	12	2	2
21	1	6	3	5	7	13	8	7	6	7
22	7	13	8	3	7	5	9	11	3	10
23	4	1	1	2	8	5	5	5	6	9
24	5	0	5	13	7	8	11	12	4	9
25	3	13	8	9	10	5	5	7	7	7
26	3	2	6	13	7	12	10	2	5	5
27	3	5	8	11	5	9	6	4	3	5
28	2	14	5	7	9	2	6	7	4	6
29	4	3	7	11	8	7	7	13	5	7
30	6	12	6	5	4	8	3	12	3	11
31	1	1	6	11	8	3	12	4	7	6
32	2	12	9	6	11	5	9	11	1	3
33	3	6	4	4	4	4	9	5	2	8
34	3	11	3	13	10	5	7	6	1	10
35	3	7	4	4	9	11	13	5	6	7
36	5	3	2	2	12	4	8	8	4	0
37	1	4	9	2	12	6	5	6	6	-1
38	4	11	7	8	4	11	7	5	2	6
39	4	8	5	7	4	4	12	6	2	5
40	4	3	7	4	5	9	5	11	5	5
41	11	12	6	6	6	8	6	5	2	4
42	8	4	4	13	7	6	5	6	4	-1
43	7	5	4	8	5	7	10	6	2	6
44	3	9	6	10	4	12	4	10	6	5
45	0	9	6	10	7	10	10	4	3	4
46	6	10	5	7	6	6	6	4	8	2
47	1	10	6	10	6	13	5	6	2	6
48	5	8	8	14	4	5	6	3	6	6
49	4	8	7	3	8	6	13	8	1	7
50	3	0	8	7	5	5	7	5	6	6

В отчете по лабораторной работе необходимо представить:

1. все требуемые таблицы, графики (гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения);
2. результаты расчетов числовых характеристик выборки.

Контрольные вопросы

1. Что такое вариационный ряд; статистический ряд; гистограмма; полигон?
2. Как вычисляются среднее, дисперсия, мода, медиана?
3. Как определяются функция и плотность распределения, эмпирическая функция распределения?

2.2 Идентификация статических объектов на основе полиномиальной регрессии

Цель работы: исследование методов и компьютерных средств аппроксимации данных с помощью полиномиальной регрессии.

Краткая характеристика методов. Исходные данные – пара n -векторов –

вход (регрессор): $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, выход: $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.

Уравнение полиномиальной регрессии (п.1.3):

$$y_t = \gamma^T(x_t) \theta + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $\gamma(x) = (1, x, x^2, \dots, x^{m-1})^T$, $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})^T$ – m - векторы, содержащие (соответственно) степени входа и параметры (коэффициенты полинома). Обозначим:

$$\Gamma = \Gamma(\bar{x}) = (\gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots, \gamma(x_n))^T \in R^{n \times m}.$$

Критерий аппроксимации:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [y_t - \gamma^T(x_t) \theta]^2. \quad (2)$$

Оценка метода наименьших квадратов (МНК), минимизирующая (2) по компонентам вектора параметров в случае невырожденности информационной матрицы

$$M = \Gamma^T(\bar{x}) \Gamma(\bar{x}) \in R^{m \times m},$$

имеет вид (19):

$$\theta_{МНК} = M^{-1} \Gamma^T (\bar{x}) \bar{y}. \quad (3)$$

В случае гауссовских независимых ошибок ε_t в (1) с нулевым средним критерий и оценка, обобщающие (2),(3), получаются в рамках метода максимального правдоподобия (ММП) (п.1.3).

План работы.

1. Исходные данные, полученные в результате пяти измерений ($n=5$) взять из таблиц 5 ($\bar{x}^T$) и 6 ($\bar{y}^T$) в соответствии с вариантом (номер строки).
2. Убедиться в невырожденности данных применительно к квадратической регрессии ($m=3$).
3. Вычислить оценку наименьших квадратов и построить аппроксимирующий полином для квадратической регрессии [9].
4. Определить коэффициенты оптимальной квадратичной интерполяции (п. 1.3, с.10).
5. По данным из файла data_mi3 и с помощью функций polyfit, polyval [7] вычислить МНК-оценки для $n=10, 15$.
6. На основании проведенных расчетов (пп. 3, 5) построить графики $\theta_{МНК}(n)$.
7. Сделать выводы по работе.

Таблица 5. Входные данные

	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	4
2	1	2	3	4	5
3	2	3	4	5	6
4	3	4	5	6	7
5	0	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5
7	2	3	4	5	6
8	3	4	5	6	7
9	0	1	2	3	4
10	1	2	3	4	5

Таблица 6. Выходные данные

	1	2	3	4	5
1	-7.4623	1.8339	1.7412	4.8622	0.3188
2	-7.3077	-10.4336	-9.6574	-2.4216	4.7694
3	-19.3499	-14.9651	-11.2746	-0.0631	18.7147
4	-4.2050	-0.1241	9.4897	21.4090	37.4172
5	-5.3285	-3.2075	-5.2828	-16.3698	-37.5111
6	-8.9653	-18.2731	-26.3034	-30.7061	-34.7873
7	-0.1116	7.8529	25.9311	52.1905	84.0557
8	8.4384	16.3252	28.2451	47.3703	65.2885
9	2.8978	2.7586	9.3192	21.3129	38.1351
10	0.9699	-1.1649	-6.3723	-15.9067	-29.8907

Контрольные вопросы

1. Показать оптимальность (3) в смысле критерия (2).
2. Сформулировать задачу полиномиальной регрессии (ПР).
3. Указать отличие оценок МНК и ММП.
4. Указать отличие оценок МНК $\theta_{\text{МНК}}$ и интерполяционных $\theta_{\text{ИНТ}}$.
5. Какое значение принимает критерий (2) при $\theta = \theta_{\text{ИНТ}}$?
6. Сформулируйте условие невырожденности экспериментальных данных для ПР.
7. В чем состоят условия существования и единственности решения задачи оптимизации (2)?

2.3 Идентификация динамических систем апериодического типа методом наименьших квадратов

Цель работы: оценить параметры апериодического звена 2 порядка по измерениям выхода $Y(t) = \{y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$, который предварительно сформировать как реакцию звена на гармонический сигнал (см. п.1.4). Параметры T_1, T_2 звена и частота ω сигнала $u(t) = \cos(\omega t)$ определяются вариантом, $k = 10$.

Считаем моменты $N = 15$ измерений $t_1 = t_0 + \Delta t, \dots, t_N$ равномерно расположенными на промежутке $0 = t_0 \leq t \leq t_N$ с постоянным шагом Δt и

имеем соответствующий набор измерений Y_N как сужение $Y(t_N)$ на указанные $t_1, \dots, t_N$. Варианты заданы в таблице 7.

Для всех вариантов расчеты провести для двух значений: $\Delta = 0.1$ и $\Delta = 0.25$.

Таблица 7.

Номер варианта	T_1	T_2	ω
1	5.0	1.0	0.25
2	3.0	1.0	0.25
3	5.0	1.0	0.5
4	3.0	1.0	0.5
5	5.0	1.0	1.0
6	5.0	1.5	0.25
7	3.0	1.5	0.25
8	5.0	1.5	0.5
9	3.0	1.5	0.5
10	5.0	1.5	1.0

Указание

Для идентификации параметров воспользоваться методом наименьших квадратов (МНК, см. п.1.3), для чего исходное представление непрерывной системы в форме передаточной функции

$$y(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} u(s) \quad (1)$$

преобразовать к дискретной форме «вход-выход» (тождественная регрессия, п.1.3)

$$y_{k+2} = \rho_1 y_{k+1} + \rho_0 y_k + q_0 u_k = \bar{u}_k^T \theta, \quad (2)$$

где обозначено:

$$\theta = (\rho_1, \rho_0, q_0)^T, \quad \bar{u}_k = (y_{k+1}, y_k, u_k)^T, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда для

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_v^T \end{pmatrix}$$

при условии невырожденности данных:

$$\det \Gamma^T \Gamma \neq 0, \quad (3)$$

имеем оценку МНК искомых параметров:

$$\theta_{МНК} = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \vec{y}. \quad (4)$$

Здесь $\vec{y}$ представляет собой v -вектор выходных данных:

$$\vec{y} = (y_{1+2}, y_{2+2}, \dots, y_{v+2})^T,$$

для формирования которого использовать МАТЛАБ-функцию *LSIM*.

Содержание отчета по лабораторной работе

1. Преобразования исходного описания системы в требуемые непрерывные и дискретное (2) представления.
2. Формирование матрицы Γ и проверку условия (3).
3. Графики процессов, полученные с помощью МАТЛАБа.
4. Расчёты параметров объекта управления по формуле (4).
5. Анализ полученных результатов: пересчет оценки (4) в параметры модели (1) и сравнение с исходными данными, анализ точности.
6. Проанализировать результаты в зависимости от дискретности.
7. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Эквивалентные формы представления звена 2-го порядка.
2. Что такое матрица Грама?
3. В чем состоит метод наименьших квадратов?

2.4 Оценка колебательных движений модели судна на основе экспериментальных исследований в опытовом бассейне

1. Описание эксперимента

Рассматривается алгоритм оценки бортовой качки [12,13] в рамках бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС).

Для проведения эксперимента использовался опытовый бассейн СевНТУ, оборудованный волнопродуктором. На модель судна 2х0.4х0.5 м устанавливались датчики и самописец. В качестве датчиков использовались поверхностный интегральный трёхосный акселерометр ADXL330 фирмы Analog Devices и двухосный гироскоп IDG-300 фирмы InvenSense, дающий на выходе угловую скорость. Аналоговый выход датчиков оцифровывался с частотой 100 Гц и сохранялся при помощи регистратора данных Logomatic v2 Serial SD Datalogger. Измерения совершались на тихой воде, хотя некоторое волнение малой интенсивности присутствовало. Модель отклонялась на заданный угол крена и отпускалась: последующие затухающие колебания фиксировались датчиками.

2. Идентификация модели колебательного движения

В связи с представленным экспериментом рассматривается следующая линейная система:

$$\dot{x} = Ax + bv,$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $x_1 = \Theta$ – крен, $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\Theta} = \omega_x$ – угловая скорость. Параметры ξ (относительное затухание) и ω_0 (собственная частота) определяются по кривой переходного процесса.

В нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1 + v \end{aligned} \quad (1c)$$

Здесь v – малый шум, возникающий из-за ветро-волновых возмущений, который будем считать белым центрированным с малой интенсивностью Q . В задаче идентификации будем считать $Q=0$, а в качестве возмущения будем рассматривать начальное условие по крену.

Представленные результаты опыта позволяют вычислить затухание и собственную частоту колебания модели посредством измерения условного периода и логарифмического декремента затухания [5- 7]).

Нас будет интересовать передаточная функция от начального условия x_0 до выходной координаты $Sx = x_2 = \omega_x$ для системы (1) (или в скалярной форме (1с)) при $v=0$ может быть представлена (уметь это сделать, определить k_0) в виде:

$$W(s) = W_{x_2 x_0}(s) = \frac{k_0 \omega_0^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2}.$$

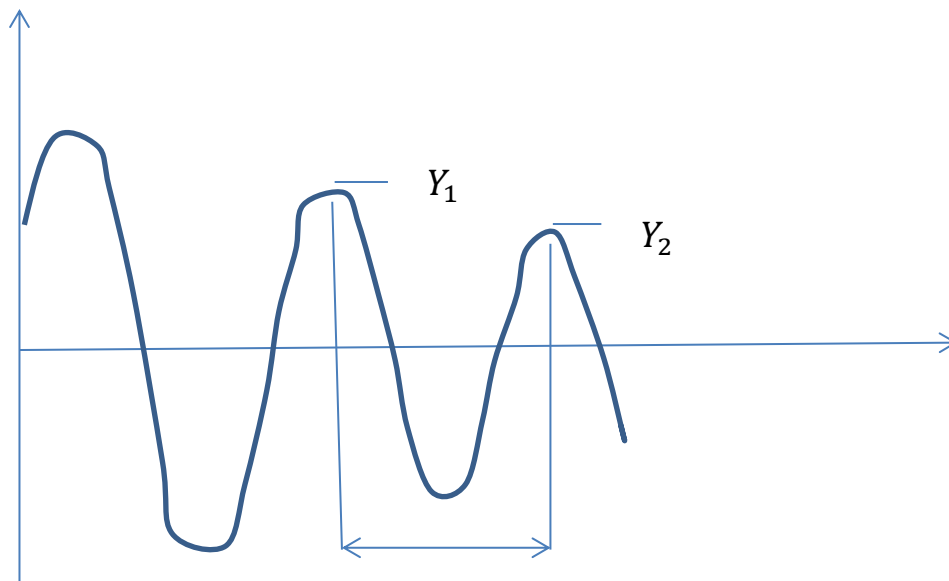


Рисунок 1 – Данные для идентификации колебательного звена

Поскольку реакция колебательного звена на начальное условие указанного типа имеет вид (см. рис.1):

$$x_2(t) = Ve^{-ht} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где частота и коэффициент затухания $h = \xi \omega_0$ являются действительной и мнимой частями комплексно сопряженной пары корней характеристического уравнения системы (1): $s_{1,2} = -h \pm j\omega$, $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2$ (уметь показать это!). Указанные параметры могут быть определены посредством измерения следующих данных (рис.1):

условный период:
$$T_y = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega},$$

логарифмический декремент затухания (ЛДЗ):

$$D = \ln \frac{Y_1}{Y_2}, \quad \text{где } Y_i = x_2(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Из (2) имеем:

$$Y_2 = x_2(t_1 + T_y) = Ve^{-ht_2} \sin[\omega(t_1 + \frac{2\pi}{\omega}) + \varphi] = Ve^{-ht_2} \sin(\omega t_1 + \varphi + 2\pi),$$

следовательно,

$$Y_2 = Ve^{-ht_2} \sin(\omega t_1 + \varphi),$$

поэтому для ЛДЗ имеем:

$$\frac{Y_1}{Y_2} = Ve^{-ht_2} \sin(\omega t_1 + \varphi + 2\pi) / Ve^{-ht_1} \sin(\omega t_1 + \varphi + 2\pi) = e^{-ht_1} / e^{-h(t_1 + T_y)},$$

$$D = hT_y. \quad (3)$$

3. Постановка задачи фильтрации и варианты задания

Представленная в п.2 однородная колебательная система (осциллятор) с передаточной функцией $W(s) = W_{x_2 x_0}(s)$ теперь рассматривается как слабо возмущенная (неоднородная) система (1) (или (1с)). Эксперименту с этой системой (п.1) соответствуют измерения:

$$y(t) = Cx + w, \quad (4)$$

где

$$C = (0 \quad 1),$$

w – ошибка измерений – также белый центрированный шум, интенсивность которого $R > 0$.

Задача оптимальной непрерывной фильтрации (п. 1.6, с.19) состоит в том, чтобы в каждый момент времени t из промежутка $t_0 \leq t \leq t_1$ сформировать наилучшую в смысле $e(t) = E\{(\hat{x}(t) - x(t))^T (\hat{x}(t) - x(t))\}$ оценку $\hat{x}(t)$ вектора $x = x(t)$ по имеющимся к этому моменту измерениям $Y(t) = \{y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$. В дискретном случае будем считать моменты $N+1$ измерений $t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_1$ равномерно расположенными на промежутке $t_0 \leq t \leq t_1$ с шагом $\Delta t = (t_1 - t_0)/N$ и имеем соответствующий набор измерений Y_N как сужение $Y(t_1)$ на указанные $t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_1$. При указанной выше частоте оцифровки данных эксперимента $\Delta t = 0.01$ с. Варианты задания в виде имени файла Y_N

Таблица 8.

Номер варианта	Число изме- рений N	Имя файла Y_N
1	16000	TestDown30_1
2	16000	TestDown30_2
3	16000	TestDown45_1
4	16000	TestDown45_2
5	15000	TestDown45_3
6	16000	TestUp45_1
7	20000	TestUp50_1
8	16000	TestDown30_1
9	14000	TestDown30_2
10	14000	TestDown45_1

приведены в таблице 8. Эти имена указывают на структуры файла **data2.mat**, которые и содержат соответствующие данные измерений.

4. Математическое моделирование фильтра

Результаты моделирования фильтра представляются в виде оценок угловой скорости (рад/с) и угла (рад) крена модели судна (кривые различаются цветом); одновременно на рисунках представляется входная информация фильтра, т.е. измеренная демпфирующим гироскопом угловая скорость крена (рад/с). Для фильтрации измерений использовать стационарный фильтр (функция KALMAN [8]) с интенсивностями шумов в динамике и в измерениях соответственно $Q=1$ и $R=0.1$ [4].

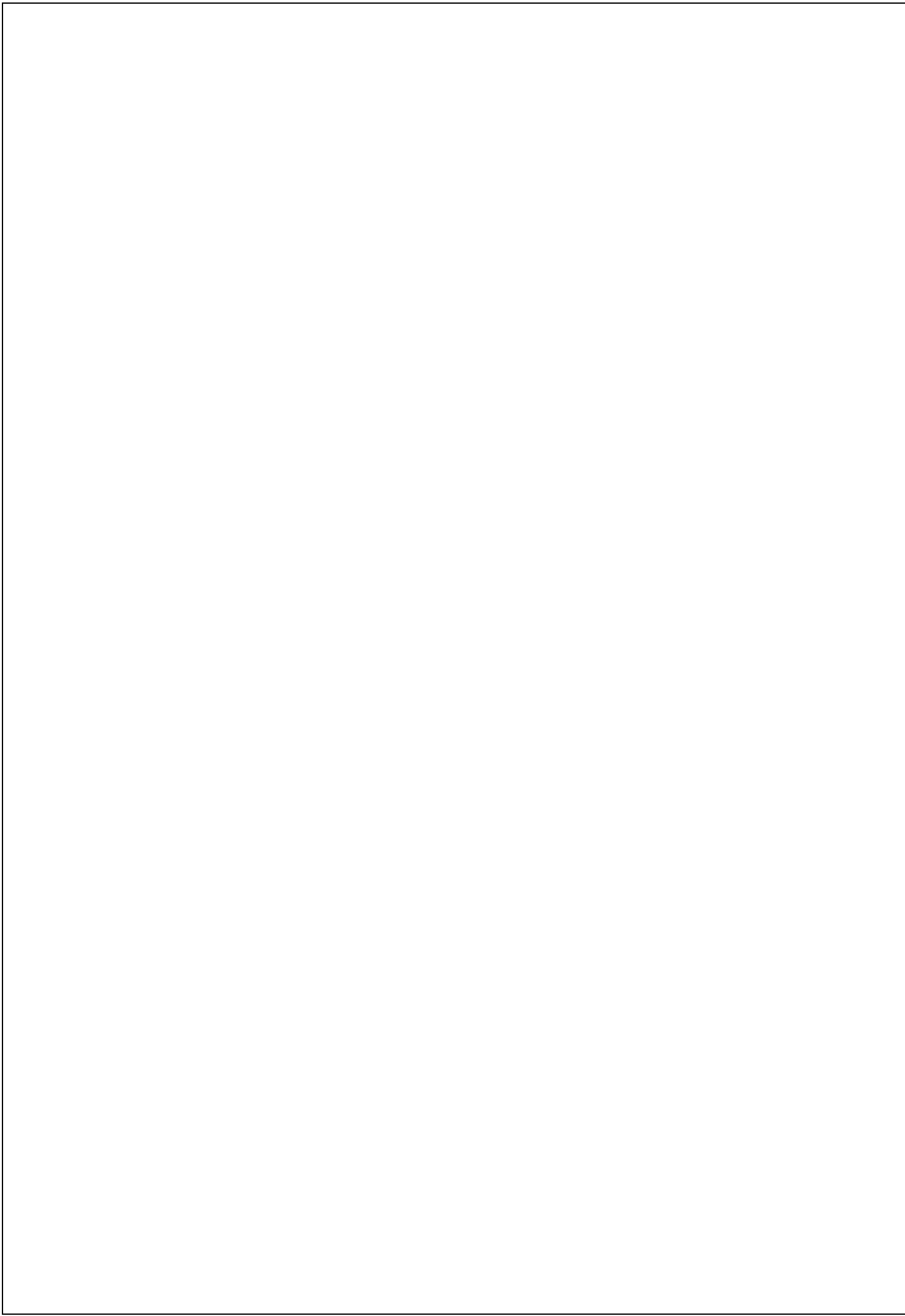
Из рисунков должно следовать, что оценки достаточно быстро сходятся и могут быть использованы в алгоритме прогноза.

5. Порядок расчёта параметров модели (идентификации) и моделирования фильтра Калмана для оценок состояния

1. Определить собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания модели ξ по осциллограмме колебательного процесса и руководствуясь методом ЛДЗ (п.2), для чего на начальном (затухающем) участке осциллограммы выбрать фрагмент в соответствии с рис.1
2. Сформировать систему (1),(4), сформулировать задачу оптимальной фильтрации (пп. 1.5,1.6), проверить для нее выполнение условий управляемости и наблюдаемости для тройки (A, b, C) , то есть существование стационарного фильтра Калмана [4].
3. Построить фильтр Калмана с помощью Matlab-функции KALMAN [8].
4. Провести моделирование фильтра (подключить файл измеренных данных к фильтру) с помощью Matlab-функции LSIM [8] и получить оценки угла (рад) и скорости крена (рад/с) на затухающем участке осциллограммы, а также на промежутке стационарных колебаний.
5. Исследовать зависимость оценки от интенсивности шумов в динамике и измерениях на указанных промежутках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам /Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288с.
3. Бардушкин В.В. Задания для выполнения лабораторных и индивидуальных работ по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика». – М: НИУ МИЭТ, 2009. – 60с.
4. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650с.
5. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1989.–302с.
6. Рей У. Методы управления технологическими процессами/ У. Рей. – М.:Мир,1983.– 350с.
7. Коткин Г.Л. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием МАТЛАБ: Учебное пособие / Г.Л. Коткин, В.С. Черкасский.– Новосибирск: Изд-во НГУ, 2001. – 170с.
8. Медведев В.С. Control System Toolbox. MatLAB 5 для студентов / В.С. Медведев, В.Г. Потёмкин. – М.: «Диалог – МИФИ», 1999. – 288с.
9. Льюнг Л. Идентификация систем: пер. с англ. /Под ред. Я.З.Цыпкина. –М.: Наука, 1991. – 432 с.
10. Кожевникова, И. А. Стохастическое моделирование процессов : учеб. пособие для вузов / И. А. Кожевникова, И. Г. Журбенко. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 148 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: [https:// biblio-online.ru/bcode/439020](https://biblio-online.ru/bcode/439020).
11. Буре, В.М. Методы прикладной статистики в R и Excel [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.М. Буре, Е.М. Парилина, А.А. Седаков. —Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 152 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/112057>.
12. Лукомский Ю.И. Навигация и управление движением судов / Ю.И. Лукомский, Д.А. Пешехонов, Д.А. Скороходов. – СПб.: Элмор, 2002. – 350с.
13. Fossen T.I. Guidance and Control of Ocean Vehicles. – John Wiley & Sons, 1999. – 480pp.



МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

*Методические указания
к выполнению лабораторных работ по дисциплине*

Составитель: Дубовик Сергей Андреевич

В авторской редакции

Изд. № 224/19. Объем 2,25 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет"