

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Г. Рипп, В.В. Довгаленко

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Учебное пособие
по общей физике для студентов технических
и естественно-научных специальностей

Севастополь
СевГУ
2019

УДК 53.082.14:621.8.034.2 (075.8)

ББК 22.213я73

P537

Р е ц е н з е н т:

С.Е. Кравцова – кандидат технических наук, доцент

Рипп А.Г.

P537 Затухающие колебания: учеб. пособие по общей физике / А.Г. Рипп, В.В. Довгаленко. – Севастополь: СевГУ, 2019. – 14 с.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «Физика» и «Физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с методами теоретического исследования затухающих колебаний и экспериментальной проверки теоретических зависимостей частоты и коэффициента затухания пружинного маятника. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 53.082.14:621.8.034.2 (075.8)

ББК 22.213я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 6 от 28 февраля 2019 г.

Работа 54. Затухающие колебания

Цель работы

1. Изучение характера затухающих колебаний пружинного маятника.
2. Измерение частоты колебаний и коэффициента затухания колебаний.

1. Краткая теория

Если осциллятор совершает колебания без внешнего периодического воздействия, то его колебания называются *свободными*. В частности, если осциллятор – это замкнутая система, то свободные колебания называются *собственными*.

Реальный осциллятор не является замкнутой системой. Это означает, что он взаимодействует с окружающей средой. Типичное взаимодействие сопровождается *диссипацией* энергии (рассеянием), в этом случае осциллятор постепенно теряет свою энергию, и амплитуда его колебаний постепенно уменьшается, пока не упадёт до нуля. Это означает, что колебания через некоторое время после начала прекратятся – как говорят, *затухнут*. Такие колебания называются *затухающими*. Рассмотрим затухание колебаний конкретного осциллятора – пружинного маятника. Этот маятник показан на рисунке 1.1.

Будем считать, что маятник совершает только вертикальные колебания. Для этого надо при запуске колебаний маятника воздействовать на него только в вертикальном направлении – оттянуть или толкнуть маятник вниз или вверх. Тогда в качестве системы координат достаточно выбрать одну вертикальную ось Ox . Направим её вниз, а начало координат выберем в положении равновесия маятника, то есть в таком положении, в котором он может висеть в неподвижном состоянии и не колебаться. В этом состоянии на маятник действуют две равные, но противоположные силы: сила тяжести $G = mg$ и сила упругости растянутой пружины $F_{уп}$. Обозначим растяжение пружины положением равновесия Δ_0 . Если это растяжение не слишком велико, то для силы упругости можно использовать закон Гука:

$F_{уп} = k\Delta\ell_0$, где k – упругость пружины. Тогда условие равновесия маятника имеет вид:

$$k\Delta\ell_0 = mg,$$

причём координата маятника x при этом равна нулю.

А теперь выясним характер колебаний маятника. Для этого рассмотрим его в произвольном неравновесном состоянии и применим к нему основной закон динамики – Второй закон Ньютона:

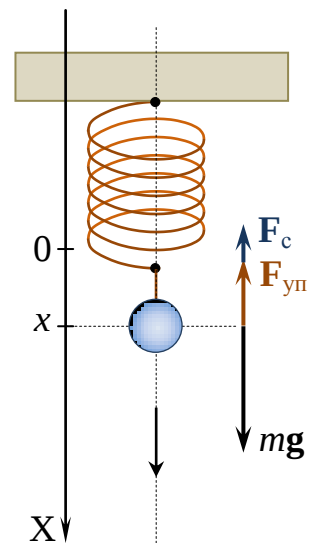


Рис. 1.1. Пружинный маятник

$$a_x = \frac{F_x}{m}.$$

На шарик действуют три силы.

- 1) Сила тяжести $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$.
- 2) Сила упругости $\mathbf{F}_{\text{уп}}$. Она зависит от величины деформации пружины и направлена вниз, если пружина сжата, и вверх, если пружина растянута. Согласно закону Гука,

$$F_{\text{уп},x} = -k\Delta\ell = -k(\Delta\ell_0 + x),$$

где $\Delta\ell$ – деформация пружины, а x – координата шарика.

- 3) Сила сопротивления среды $\mathbf{F}_c$. Она тем больше, чем больше скорость маятника и направлена всегда против скорости. Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости маятника. Тогда можно записать:

$$F_{c,x} = -rv_x = -r\dot{x},$$

где r – коэффициент сопротивления, который зависит от динамической вязкости среды η и от формы движущегося в среде тела. В данном случае телом является шарик, и для него Д.Г. Стокс получил формулу¹

$$r = 6\pi R\eta, \tag{1.1}$$

где R – радиус шарика.

Подставим все три силы во Второй закон Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mg - k(\Delta\ell_0 + x) - r\dot{x}}{m} \quad \ddot{x} = \frac{mg - k\Delta\ell_0 - kx - r\dot{x}}{m} = 0.$$

Из условия равновесия следует, что $(mg - k\Delta\ell_0) = 0$, поэтому получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введём обозначения:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{1.2}$$

Здесь ω_0 – это уже знакомая вам собственная частота маятника, а величину β называют *коэффициентом затухания*. В результате дифференциальное уравнение колебаний маятника имеет компактный вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0.$$

¹ Формула Стокса верна, если движение шарика в среде происходит не слишком быстро и поэтому не вызывает турбулентных (вихревых) движений среды.

Решением этого уравнения² является следующая функция:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

в которой

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1.3)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.4)$$

По форме $x(t)$ выглядит точно так же, как гармоническая функция. Отличие только в том, что амплитуда колебаний $A(t)$ – это не константа, а *функция времени*, которая экспоненциально убывает от начального значения A_0 до нуля. Поэтому функция $x(t)$ – не периодическая, а только похожа на периодическую – её можно назвать *квазипериодической*. Периодом этой функции можно назвать время, в течение которого фаза колебаний (аргумент косинуса) изменяется на 2π .

Итак, координата маятника совершает квазипериодические колебания. Циклическая частота этих колебаний ω не меняется с течением времени и немного меньше собственной частоты маятника ω_0 , а амплитуда колебаний экспоненциально убывает со временем. График функции $x(t)$ показан на рисунке 1.2.

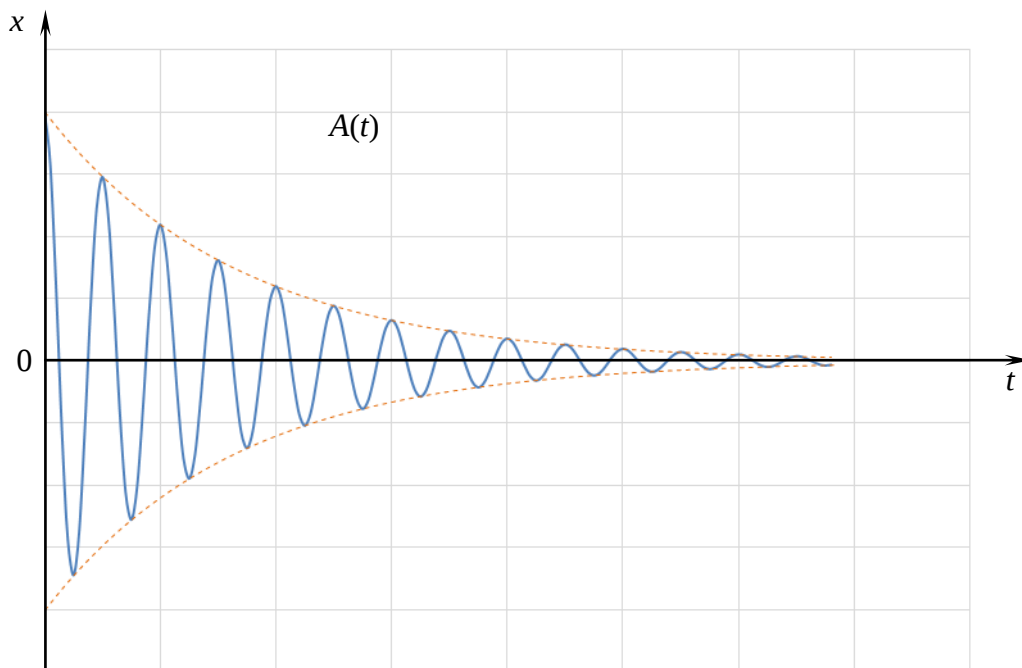


Рис. 1.2. График затухающих колебаний

² Оно в математике называется линейным однородным ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

2. Задачи эксперимента

Основная задача эксперимента – проверить теорию одномерных затухающих колебаний пружинного маятника. Эту задачу можно разделить на следующие конкретные задачи.

1. Убедиться, что циклическая частота колебаний маятника ω , а значит, и период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *не меняются* в процессе колебаний. Измерить частоту и период.
2. Убедиться, что колебания маятника являются *экспоненциально затухающими*, то есть амплитуда колебаний маятника A убывает по экспоненциальному закону (1.3): $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$. Измерить коэффициент затухания β .

Измерив частоту колебаний и коэффициент затухания колебаний β , интересно сравнить результаты измерений с теоретическими значениями, которые можно рассчитать так.

А. Коэффициент затухания β определяется формулой

$$\beta = \frac{r}{2m}.$$

где r – коэффициент сопротивления среды. Его можно узнать из формулы Стокса (1.1)

$$r = 6\pi R\eta.$$

В результате получаем:

$$\beta = \frac{r}{2m} = 3\pi \frac{R}{m} \eta. \quad (1.5)$$

Б. Частота колебаний ω определяется формулой (1.4)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где ω_0 – собственная частота колебаний маятника, равная

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3. Методика исследований

3.1. Если циклическая частота колебаний маятника ω и период колебаний T не меняются с течением времени, то число колебаний маятника N пропорционально времени колебаний t :

$$N(t) = \nu t,$$

где ν – частота колебаний. Поэтому следует экспериментально измерить время t , в течение которого совершается 1 колебание, 2 колебания, 3 колебания и так далее, то есть получить экспериментальную зависимость $N(t)$, а затем постро-

ить по результатам измерений график этой зависимости. Если точки на графике лягут на прямую линию, проходящую через начало координат, то это будет доказательством пропорциональности между N и t и подтверждением постоянства частоты и периода колебаний.

Измерение коэффициента пропорциональности между N и t даёт значение линейной частоты колебаний ν , и тогда можно узнать период колебаний T и циклическую частоту ω :

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

3.2. Для проверки экспоненциального закона затухания колебаний, то есть формулы $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$, целесообразно сначала эту формулу линеаризовать. Это можно сделать так:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \Rightarrow \frac{A_0}{A} = e^{\beta t} \Rightarrow \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \beta t.$$

Таким образом, введя вспомогательную величину $y = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$, мы получаем прямо пропорциональную зависимость:

$$y = \beta t.$$

Для экспериментальной проверки этой зависимости надо сначала получить экспериментальную зависимость $A(t)$. Это значит, надо измерить моменты времени t , когда координата маятника x достигает амплитудных значений (максимальных и минимальных). Затем надо, используя формулу $y = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$, получить экспериментальную зависимость $y(t)$ и построить график этой зависимости. Если точки на графике лягут на прямую линию, проходящую через начало координат, то это будет подтверждением экспоненциального закона затухания колебаний.

Измерение коэффициента пропорциональности между y и t даёт значение коэффициента затухания колебаний β .

4. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

Установка позволяет наблюдать и исследовать затухающие колебания пружинного маятника разных масс, с разными пружинами и в разных средах. При включении установки (при запуске программы) открывается начальное окно с названием работы и кнопками «Ход работы», «Эксперимент», «Завершение работы». Вам надо нажать на кнопку «Эксперимент», и тогда откроется

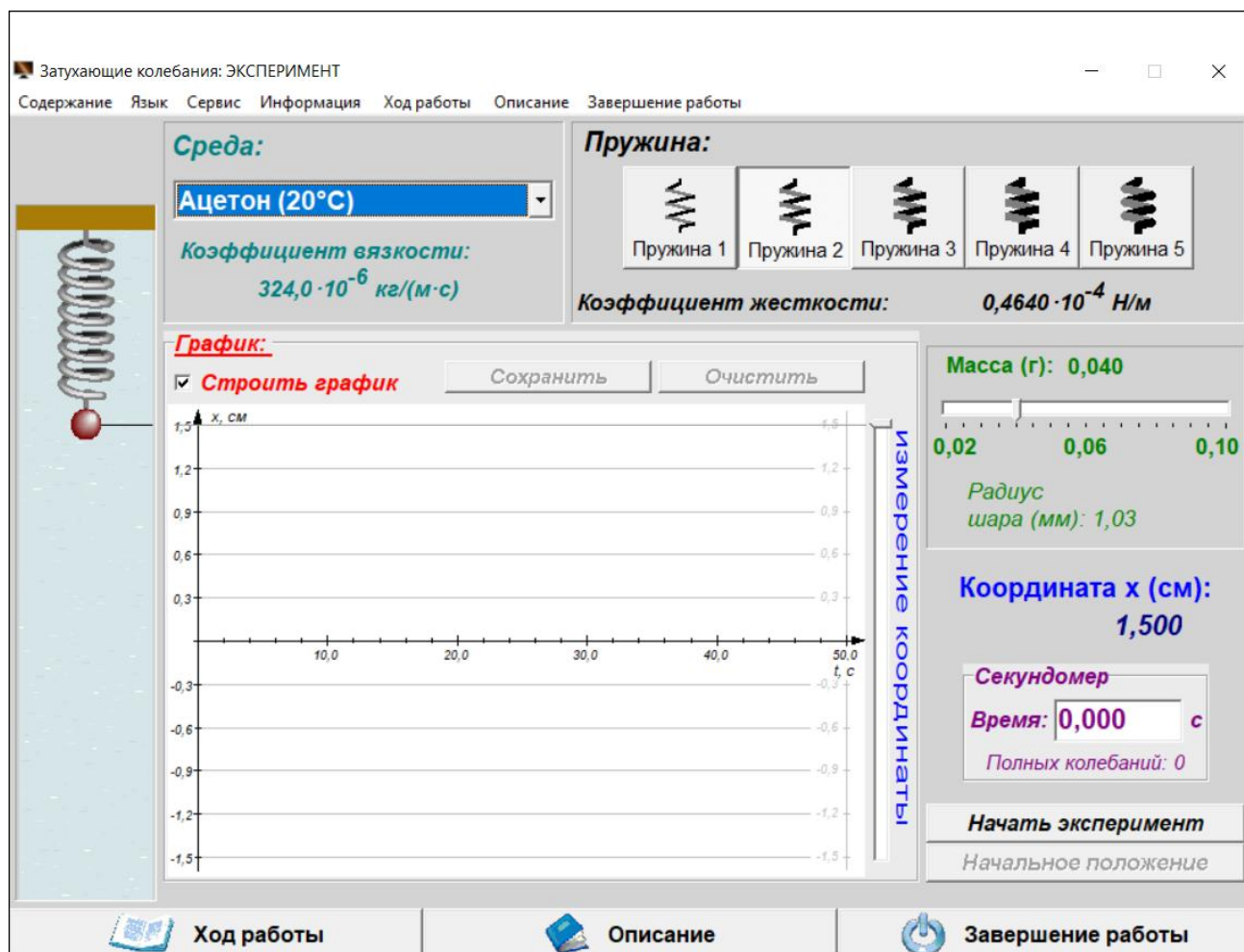


Рис. 4.1. Окно «Эксперимент»

окно, показанное на рисунке 4.1.

В левой части окна вы видите качающийся маятник, в центре окна строится график зависимости координаты маятника от времени. Построенный график можно сохранить в буфере для того, чтобы затем вставить его в отчет.

В верхней части окна расположены кнопки выбора среды и пружин, в правой части – окно с бегунком для выбора массы маятника, секундомер и кнопка «Начать эксперимент». После нажатия на эту кнопку начинается движение маятника и синхронное с ним построение графика, а надпись на кнопке превращается в «Остановить эксперимент».

5. Порядок выполнения работы

- 5.1. Выберите по согласованию с преподавателем среду, пружину и массу маятника. Результаты запишите в таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Масса маятника	m	г	
Радиус маятника	R	мм	
Пружина			
Упругость пружины	k	Н/м	
Среда			
Динамическая вязкость среды	η	Па·с	
Погрешности прямых измерений и заданных величин	$\Delta(t)$		
	$\Delta(A)$	см	
	$\Delta(m)$	см	
	$\Delta(R)$		
	$\Delta(k)$		
	$\Delta(\eta)$		

- 5.2. Поставьте флажок в окошке «**Строить график**».
- 5.3. Нажмите на кнопку «**Начать эксперимент**». Маятник начнёт колебаться, а в центре окна будет строиться *красным* цветом график зависимости $x(t)$. Когда движение маятника окончится (это произойдёт автоматически через 50 секунд), сохраните график в файле, для чего нажмите кнопку «**Сохранить**». Вам будут предложены имя файла и папка «Рисунки и графики», расположенная на рабочем столе, но вы, разумеется, можете выбрать другие имя и папку.
- 5.4. Откройте файл с графиком, скопируйте график и вставьте его в свой отчёт.
- 5.5. Далее вам надо измерить моменты времени, когда маятник находится в амплитудном положении (то есть в верхнем или нижнем). Для этого снова нажмите на кнопку «**Начать эксперимент**». На этот раз график будет строиться *другим* цветом по уже построенному красному. Как только новый график первый раз достигнет амплитудного значения (нижней точки), нажмите кнопку «**Остановить эксперимент**». Будьте *внимательны* – не пропустите момент! Показание секундомера t запишите во вторую строку таблицы 2 (опыт 1). Затем измерьте амплитудное значение координаты маятника. Для этого пользуйтесь бегунком в окошке справа от графика и связанной с бегунком горизонтальной планкой. После того, как вы совместите горизонтальную планку с амплитудным положением, вы увидите значение амплитуды в окошке «**Координата x (см)**». Измеренную амплитуду A запишите в виде *положительного* (!) числа в таблицу 2.
- 5.6. Повторите пункт 5.5 ещё 9 раз, при этом каждый раз кнопку «**Остановить эксперимент**» нажимайте в момент прохождения графиком очередного

экстремума – см. рисунок 5.1. На этом рисунке показан момент прохождения строящимся графиком (синим) пятого экстремума (третьего минимума). Обратите внимание: во время построения графика, если он не первый, секундомер автоматически остановится в момент прохождения строящимся графиком *десятого* экстремума (*пятого* максимума), поэтому в десятом опыте вам можно кнопку «**Остановить эксперимент**» не нажимать, а опыт 11 вы просто не сможете провести.

Таблица 2

Зависимость количества колебаний и амплитуды колебаний от времени

Номер опыта	N	t с	A см	y	$\Delta(y)$
	0	0	1,50		
1	0,5				
2	1				
3	1,5				
...					
...					
9	4,5				
10	5				

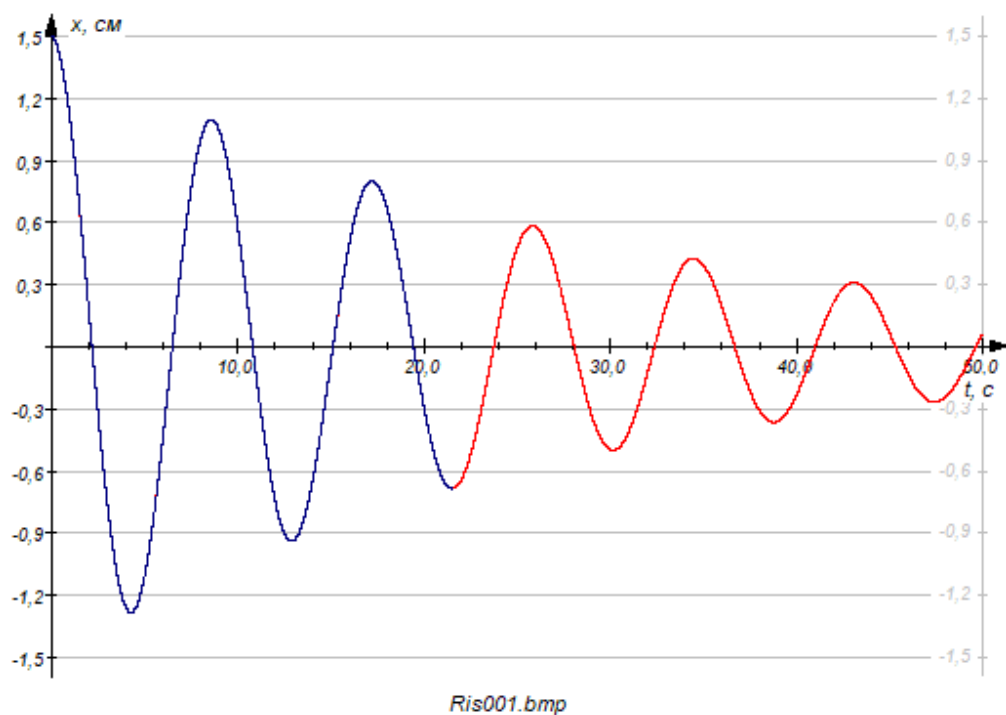


Рис. 5.1. Построенный график (красный) и строящийся (синий)

5.7. Постройте по результатам эксперимента, записанным в таблице 2, график зависимости числа колебаний от времени $N(t)$. Нанесите на график планки погрешностей и линию тренда. Напишите в отчёте свой комментарий к графику.

- 5.8. Постройте по результатам эксперимента график зависимости вспомогательной величины $y = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$ от времени t . Нанесите на график планки погрешностей и линию тренда. Напишите в отчёте свой комментарий к графику.
- 5.9. Измерьте значения частот колебаний ν и ω и коэффициента затухания β . Результаты впишите в таблицу 3. Для измерения ν и β используйте функцию ЛИНЕЙН.
- 5.10.

Таблица 3

Измерение частоты и коэффициента затухания колебаний

Величина	ν	ω	β
Размерность	Гц	рад/с	с ⁻¹
Значение			
Абсолютная погрешность			
Относительная погрешность			

- 5.11. Дайте оценку точности измерений.
- 5.12. Рассчитайте теоретические значения частоты колебаний и коэффициента затухания колебаний. Для расчётов используйте формулы (1.2), (1.4) и (1.5):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = 3\pi \frac{R}{m} \eta.$$

Результаты запишите в таблицу 4.

Таблица 4

Расчёт частоты и коэффициента затухания колебаний

Коэффициент затухания	β	с ⁻¹	
Собственная частота колебаний	ω_0	рад/с	
Частота затухающих колебаний	ω	рад/с	
Погрешности расчётов	$\Delta(\beta)$	с ⁻¹	
	$\Delta(\omega_0)$	рад/с	
	$\Delta(\omega)$	рад/с	

- 5.13. Сравните расчётные значения частоты колебаний маятника и коэффициента затухания колебаний с измеренными значениями.
- 5.14. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

6. Оценка погрешностей измерений

- 6.1. Погрешности прямых измерений и заданных величин.
- Амплитуда колебаний A . Она измеряется с помощью бегунка с горизонтальной планкой, значение амплитуды выдаётся в окошке «**Координата x (см)**» и шкалы на оси Ox в виде числа с тремя знаками после запятой. Однако нельзя считать погрешность измерения амплитуды равной 0,001

см. Она определяется тем, как точно вы можете подводить горизонтальную планку к амплитудной точке графика. Средний человеческий глаз может отличить две точки, если расстояние между ними не менее (0,2 – 0,5) мм. График строится в увеличенном масштабе, увеличение равно примерно 3, поэтому каждый миллиметр, который вы видите на графике, это в действительности примерно 0,3 мм. Значит ошибка в установке горизонтальной планки, равная (0,2 – 0,5) мм, означает, что погрешность измерения амплитуды $\Delta(A)$ равна $\frac{0,2-0,5}{3} = (0,1 - 0,2)$ мм.

- Момент времени достижения маятником амплитудного положения. Этот момент выдаётся в окне «**Секундомер**» в секундах в виде числа с тремя знаками после запятой. Однако считать погрешность измерения времени равной 0,001 с нельзя, так как главный вклад в погрешность вносит не приборная погрешность секундомера, а случайная погрешность, равная времени вашей реакции. У каждого человека время реакции разное. Среднее время реакции считается равным (0,1 – 0,2) с.
- Остальные погрешности оцените самостоятельно.

6.2. Погрешность измерения вспомогательной величины $y = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$.

Применение общего правила и правила оценки погрешности дроби даёт:

$$\Delta(y) = |y'| \Delta\left(\frac{A_0}{A}\right) = \frac{A}{A_0} \Delta\left(\frac{A_0}{A}\right) = \frac{A}{A_0} \frac{A_0}{A} \varepsilon\left(\frac{A_0}{A}\right) = \varepsilon(A_0) + \varepsilon(A).$$

Начальная амплитуда известна с точностью до тысячных долей см, поэтому её погрешностью можно пренебречь. В результате получаем:

$$\Delta(y) = \varepsilon(A) = \frac{\Delta(A)}{A}.$$

6.3. Погрешность измерения циклической частоты затухающих колебаний.

Для измерения циклической частоты ω сначала измеряется линейная частота ν (с помощью функции ЛИНЕЙН), а затем используется формула $\omega = 2\pi\nu$. Из этой формулы следует:

$$\Delta(\omega) = 2\pi\Delta(\nu).$$

6.4. Погрешности расчётных значений.

- Коэффициент затухания колебаний маятника β . Для расчёта используется формула $\beta = 3\pi \frac{R}{m} \eta$. Применение правила оценки погрешности дроби даёт:

$$\varepsilon(\beta) = \frac{1}{2} (\varepsilon(R) + \varepsilon(m) + \varepsilon(\eta)), \quad \Delta(\beta) = \beta \varepsilon(\beta).$$

- Собственная частота колебаний маятника ω_0 . Для расчёта используется формула $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Применение правил оценки погрешности степени и дроби даёт:

$$\varepsilon(\omega_0) = \frac{1}{2} \varepsilon\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{1}{2} (\varepsilon(k) + \varepsilon(m)), \quad \Delta(\omega_0) = \omega_0 \varepsilon(\omega_0).$$

- Частота затухающих колебаний маятника ω . Для расчёта используется формула (1.4) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Применим общее правило:

$$\Delta(\omega) = |\omega'| \Delta(\omega_0^2 - \beta^2) = \frac{1}{2\omega} (2\omega_0 \Delta(\omega_0) + 2\beta \Delta(\beta)) = \frac{\omega_0 \Delta(\omega_0) + \beta \Delta(\beta)}{\omega}.$$

7. Контрольные вопросы

- 7.1. Какие колебания называются свободными?
- 7.2. Какие колебания называются затухающими?
- 7.3. Каким дифференциальным уравнением описываются затухающие колебания пружинного маятника?
- 7.4. Какую величину называют периодом затухающих колебаний?
- 7.5. Какую величину называют коэффициентом сопротивления среды?
- 7.6. Запишите формулу Стокса.
- 7.7. Что такое коэффициент затухания колебаний?
- 7.8. Почему затухающие колебания нельзя считать периодическими?
- 7.9. Как зависит от времени период затухающих колебаний пружинного маятника?
- 7.10. Как зависит от времени амплитуда затухающих колебаний пружинного маятника?
- 7.11. Как связана циклическая частота колебаний пружинного маятника с его собственной частотой?
- 7.12. Какая вспомогательная величина и для чего используется при исследовании зависимости амплитуды колебаний маятника от времени?

8. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 8.1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3.– М.: Наука, 1977–1985г.
- 8.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М., Наука, 1989.
- 8.3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., Высшая школа, 2003.
- 8.4. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск, Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
- 8.5. Рипп А.Г. Обработка измерений. Методическое пособие. – СНУЯЭП, 2012.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Довгаленко Владимир Васильевич**

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 65/19. Объем 1 п.л.

РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»