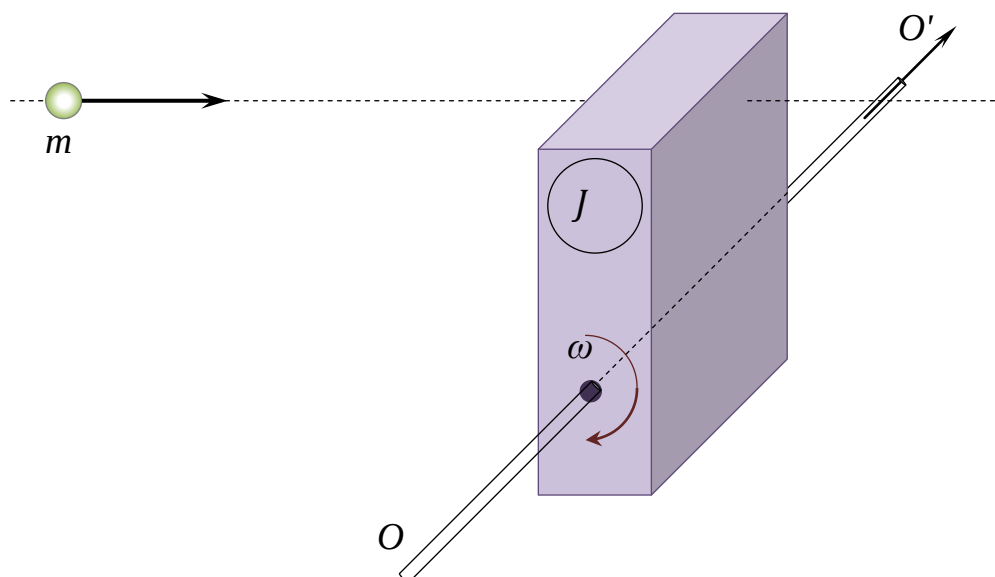


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Г. Рипп, Е.В. Мирошниченко



## Теорема Штейнера

**Учебное пособие**  
по общей физике  
для студентов технических  
и естественно-научных специальностей

Севастополь  
СевГУ  
2019

УДК 53.08 (075.8)  
P537

**Рецензент:**

**А.Н. Бакулина** - кандидат технических наук, доцент

**Рипп А.Г.**

**P537** Теорема Штейнера: учеб. пособие по общей физике / А.Г. Рипп, Е.В. Мирошниченко. – Севастополь: СевГУ, 2018. – 19 с.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «физика» и «физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с теоремой Штейнера и со способом её экспериментальной проверки для конкретного твёрдого тела в виде прямоугольной призмы. Кроме того, студентам предлагается измерить координаты центра инерции призмы и её главный момент инерции. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 53.08 (075.8)

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 6 от 28 февраля 2019 г.

## Работа 16. Теорема Штейнера

### Цели работы

1. Исследовать зависимость момента инерции призмы от координат её оси вращения и убедиться в справедливости теоремы Штейнера.
2. Измерить координаты центра инерции призмы.
3. Измерить главный момент инерции призмы.

### 1. Краткая теория

#### 1.1. Абсолютно твёрдое тело и момент инерции

Физическое тело считается *абсолютно твердым*, если расстояние между любой парой материальных точек этого тела с течением времени не изменяется. При этом в процессе движения тело не меняет ни формы, ни размеров.

Любое движение абсолютно твердого тела (АТТ) можно представить, как суперпозицию (наложение) двух движений: поступательного и вращательного.

При *поступательном* движении все точки АТТ движутся с одинаковой по величине и направлению скоростью. Эта скорость может меняться со временем, но для любого произвольно выбранного момента времени скорости всех точек АТТ одинаковы. При этом любая прямая линия, связанная с АТТ, – например, линия, проходящая через произвольно выбранную пару точек АТТ, в процессе движения не меняет своей ориентации, то есть остаётся параллельной самой себе.

Движение, при котором все точки АТТ движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой линии  $OO'$ , называется *вращательным*. Линия  $OO'$  называется *осью вращения*. Ось вращения может с течением времени перемещаться в пространстве и менять свою ориентацию (поворачиваться). В частном случае ось вращения может быть неподвижной (фиксированной). В данной лабораторной работе именно этот частный случай и реализован.

При описании вращательного движения АТТ полезной является физическая величина, называемая *моментом инерции*, которая, как и масса, является мерой инертности материального объекта.

Моментом инерции  $J$  системы материальных точек (в частности, АТТ) *относительно оси*  $AA'$  называется сумма произведений масс  $m_i$  всех материальных точек системы на квадраты расстояний  $R_i$  от этих точек до оси  $AA'$ :

$$J = \sum_{(i)} m_i R_i^2. \quad (1.1)$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма превращается в интеграл:

$$J = \int R^2 dm = \int_{(V)} R^2 \rho dV, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  – плотность вещества.

С моментом инерции связаны две важные характеристики вращающегося тела. Это кинетическая энергия вращательного движения  $T_{\text{вр}}$  и момент импульса  $\mathbf{L}$ . В том случае, если ось вращения неподвижная (фиксированная), выполняются равенства:

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}, \quad \mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega},$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращения тела.

Из определения момента инерции следует, что его значение зависит от оси  $AA'$ . Эта ось может совпадать с осью вращения  $OO'$ , но может быть и совсем другой осью. Если ось, относительно которой определён момент инерции, проходит через центр инерции системы (центр масс), то такая ось называется *главной осью*, при этом и момент инерции тоже называется *главным*.

Момент инерции  $J$  относительно произвольной оси  $AA'$  всегда *больше* главного момента инерции  $J_0$  относительно главной оси, *параллельной* оси  $AA'$ . Связь между  $J$  и  $J_0$  определяется *теоремой Штейнера*:

$$J = J_0 + md^2, \quad (1.3)$$

где  $d$  – расстояние между параллельными осями (осью  $AA'$  и главной осью).

Рисунок 1.1. поясняет теорему Штейнера. На нём показано тело (для конкретности – цилиндрическое), центр инерции этого тела и две оси. Первая ось – это некая произвольная ось  $AA'$ , относительно которой определён момент инерции  $J$ , вторая ось  $CC'$  проведена параллельно оси  $AA'$  и при этом через центр инерции тела, это – *главная ось*, момент инерции тела относительно данной главной оси равен  $J_0$ , и называется *главным*.

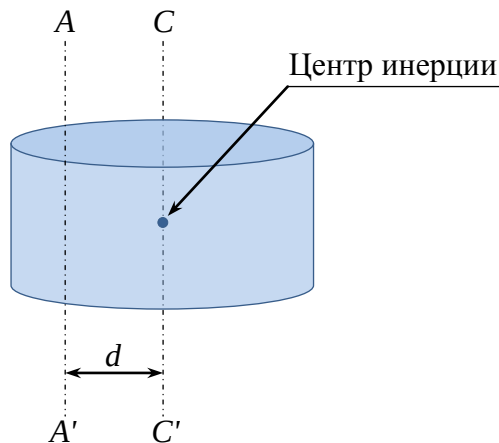


Рис. 1.1. К теореме Штейнера

Одной из целей экспериментов, предлагаемых в данной лабораторной работе, является проверка теоремы Штейнера. Естественно, для того, чтобы указанную проверку осуществить, надо знать способ измерения момента инерции.

## 1.2. Методика измерения момента инерции

В данной лабораторной работе для измерения момента инерции АТТ предлагается следующий эксперимент. Образец АТТ надевается на горизонтальную фиксированную ось  $OO'$ , вокруг которой он может вращаться практически без трения – см. рис. 1.2.

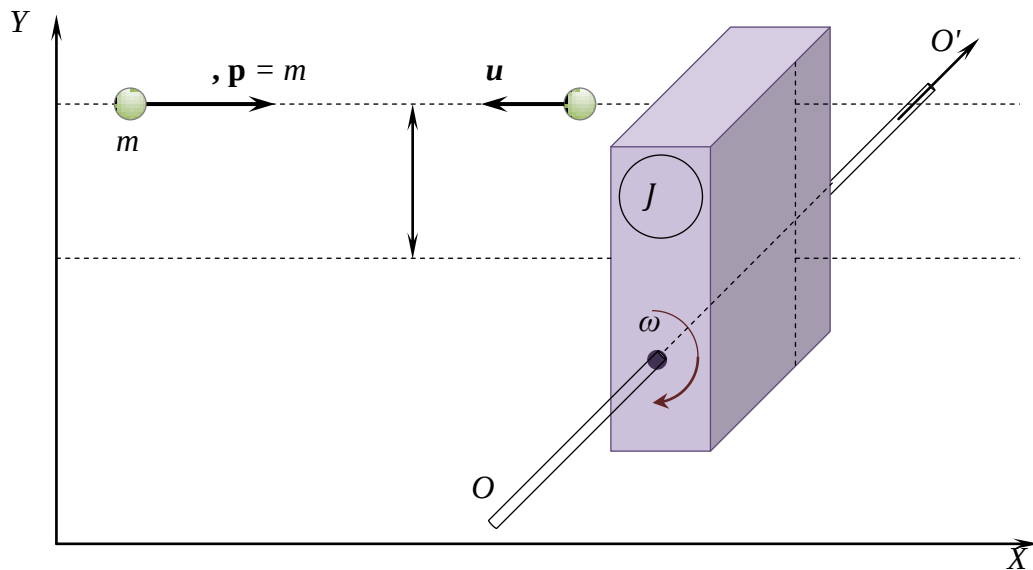


Рис. 1.2. Схема эксперимента

Образец имеет форму твёрдой упругой пластинки (будем её называть «призма»), две грани которой перпендикулярны оси вращения, остальные – параллельны. В исходном положении призма неподвижна, и на её вертикальную грань (будем эту грань называть «торец») налетает со скоростью упругий шарик массой  $m$ . Шарик летит в горизонтальном направлении перпендикулярно торцу. После удара по торцу шарик отскакивает от него со скоростью  $u$ , направленной против скорости. Призма после удара начинает вращаться вокруг оси  $OO'$  с угловой скоростью  $\omega$ . Эта скорость зависит от момента инерции призмы  $J$ , поэтому, измерив значение  $\omega$ , можно измерить и момент инерции  $J$ . Выясним связь между  $\omega$  и  $J$ .

Шарик и призма изготовлены из упругих материалов, поэтому удар шарика по призме является упругим, и шарик отскакивает от призмы. Будем считать удар *абсолютно упругим*. В этом случае выполняется *закон сохранения кинетической энергии*. Кроме того, удар – *разумеется, кратковременный*, так что выполняется ещё и *закон сохранения момента импульса*. Итак,

$$T_1 = T_2, \quad L_1 = L_2. \quad (1.4)$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  – это кинетические энергии системы до удара и после удара, а  $L_1$  и  $L_2$  – проекции момента импульса системы на ось  $OO'$  до удара и после удара.

Выясним сначала, что даёт закон сохранения кинетической энергии. До удара вся кинетическая энергия системы – это кинетическая энергия шарика, который движется поступательно со скоростью  $v$ . Поэтому

$$T_1 = \frac{mv^2}{2}.$$

После удара кинетическая энергия системы состоит из двух частей: кинетической энергии поступательного движения шарика и кинетической энергии вращательного движения призмы:

$$T_2 = \frac{mu^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$mv^2 = mu^2 + J\omega^2. \quad (1.5)$$

Теперь обратимся к закону сохранения момента импульса. Прежде всего, выберем направление оси  $OO'$  и систему координат. Пусть ось  $OO'$  направлена так, как показано на рисунке, то есть *за* чертёж. Оси  $OX$  и  $OY$  показаны на рисунке 1.2:  $OY$  перпендикулярна траектории шарика и перпендикулярна оси  $OO'$ ,  $OX$  параллельна траектории шарика. До удара призма неподвижна, поэтому момент импульса системы равен моменту импульса шарика. По определению, момент импульса шарика относительно оси  $OO'$  равен произведению импульса шарика  $p_1 = mv$  на плечо импульса  $\ell$ , которое равно расстоянию от траектории шарика до оси  $OO'$ . Вектор момента импульса  $\mathbf{L}_1$  направлен, в соответствии с правилом правого винта, в направлении оси  $OO'$ , поэтому проекция вектора  $\mathbf{L}_1$  на ось  $OO'$  положительна:

$$L_1 = mv\ell.$$

Момент импульса системы после удара состоит из момента импульса отскочившего шарика и момента импульса вращающейся призмы:

$$L_2 = -mu\ell + J\omega.$$

Первое слагаемое отрицательно, так как скорость  $u$  отскочившего шарика направлена против скорости налетающего шарика  $v$ . Второе слагаемое положительно, так как вектор  $\omega$  является осевым, поэтому он направлен вдоль оси  $OO'$ . Приравняв  $L_1$  и  $L_2$ , получаем:

$$mv\ell = -mu\ell + J\omega. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5) и (1.6) образуют систему двух уравнений:

$$\begin{cases} mv^2 = mu^2 + J\omega^2, \\ mv\ell = -mu\ell + J\omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

Для того чтобы эту систему можно было решить, надо, чтобы в ней было не более двух неизвестных. Если при проведении опыта измерять массу шарика  $m$ , скорость налетающего шарика  $v$ , плечо импульса  $\ell$  и угловую скорость  $\omega$ ,

призмы  $\omega$ , то система (1.7) содержит как раз две неизвестные: момент инерции призмы  $J$  и скорость отлёта шарика  $u$ .

Итак, решим систему уравнений (1.7) относительно  $J$ . Скорость отлёта  $u$  нам не нужна, поэтому надо её из системы исключить. Для этого запишем систему в виде

$$\begin{cases} m(v^2 - u^2) = J\omega^2, \\ m\ell(v + u) = J\omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Разделим первое уравнение этой системы на второе:

$$\frac{v-u}{\ell} = \omega.$$

Это уравнение совместно со вторым уравнением системы (1.8) даёт следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v + u = \frac{J\omega}{m\ell}, \\ v - u = \omega\ell. \end{cases}$$

Отсюда легко исключить скорость отлёта шарика  $u$ , для чего надо просто сложить уравнения этой системы:

$$2v = \frac{J\omega}{m\ell} + \omega\ell.$$

Получилось одно уравнение с одним неизвестным  $J$ . Решение этого уравнения следующее:

$$J = m\ell \left( \frac{2v}{\omega} - \ell \right) = m\ell \left( \frac{vT}{\pi} - \ell \right). \quad (1.9)$$

где  $T$  – период вращения призмы после удара.

Формула (1.9) определяет способ измерения момента импульса призмы.

**Обобщение.** Все проделанные выкладки и полученная в результате формула (1.9) справедливы не только для случая, когда образец представляет собой плоскопараллельную пластинку. Главное, чтобы он был призмой, основания которой перпендикулярны оси вращения  $OO'$ . А во-вторых, надо, чтобы та часть боковой поверхности призмы, на которую налетает шарик (торец), была плоской и перпендикулярной скорости шарика – см. рис. 1.2.

Для измерения плеча импульса в данной лабораторной работе предлагается измерять  $Y$ -координаты шарика и оси вращения  $OO'$ : соответственно  $y$  и  $y_0$ . В этом случае, как видно из рис. 1.3,

$$\ell = (y - y_0). \quad (1.10)$$

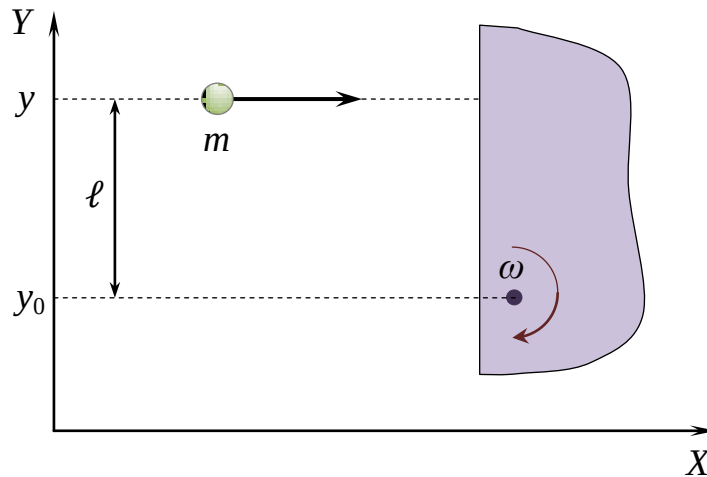


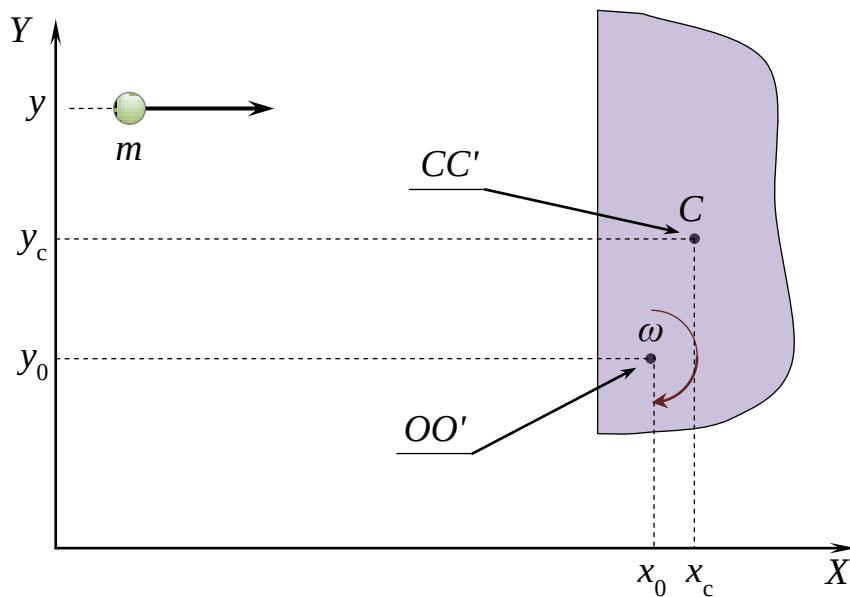
Рис. 1.3. Сечение призмы в общем случае

Для измерения периода вращения призмы после удара заметим, что при достаточно малом трении в оси вращения можно считать вращение призмы *равномерным* – с постоянным периодом. Поэтому, если измерить время  $t$ , в течение которого призма совершает некоторое небольшое количество оборотов  $n$ , то период вращения можно измерить так:

$$T = \frac{t}{n}. \quad (1.11)$$

### 1.3. Зависимость момента инерции от координат оси вращения

Пусть  $(x_0, y_0)$  – координаты оси вращения призмы  $OO'$ ,  $(x_c, y_c)$  – координаты центра инерции призмы  $C$ , см. рисунок 1.4.

Рис. 1.4. Ось вращения  $OO'$ , центр инерции  $C$  и главная ось  $CC'$



Вспомните – всякая ось, проходящая через  $(x_c, y_c)$ , называется *главной* осью, а момент инерции тела относительно этой оси называется *главным*. Обозначим буквой  $d$  расстояние между осью  $OO'$  и параллельной ей главной осью призмы  $CC'$ . Тогда, согласно теореме Штейнера, момент инерции призмы  $J$  относительно оси  $OO'$  связан с её главным моментом инерции  $J_0$  формулой

$$J = J_0 + Md^2, \quad (1.12)$$

где  $M$  – масса призмы. Значение  $d$  равно:

$$d = \sqrt{(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2}.$$

При этом теорему Штейнера можно записать так:

$$J = J_0 + M(x_0 - x_c)^2 + M(y_0 - y_c)^2. \quad (1.13)$$

Анализ этого выражения показывает, что при *любом* фиксированном значении  $y_0$  момент инерции зависит от  $x_0$  немонотонно:  $J$  достигает минимума при  $(x_0 - x_c) = 0$ , то есть при  $x_0 = x_c$ . Графиком функции  $J(x_0)$  является парабола, вершина которой смещена вверх на  $J_0 + M(y_0 - y_c)^2$  и вправо на  $x_c$  – см. рисунок 1.5.

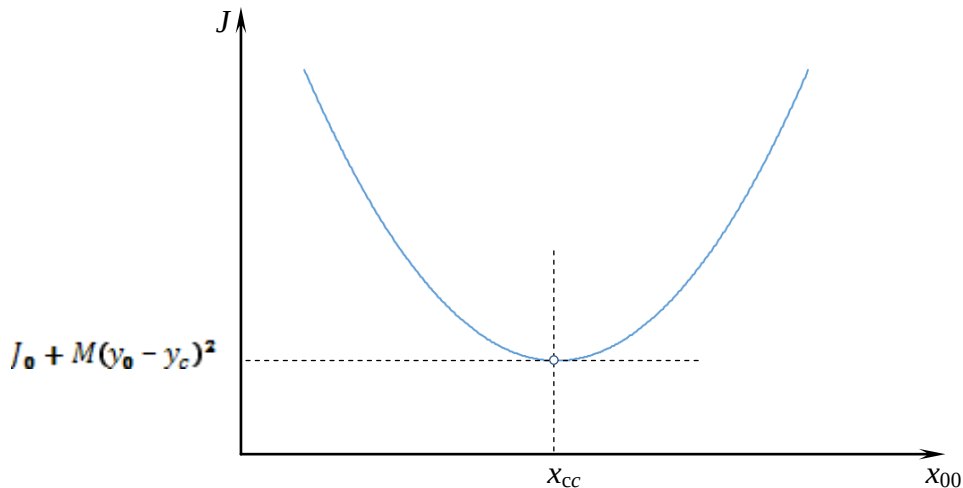


Рис. 1.5. Зависимость момента инерции призмы  $J$  от  $X$ -координаты оси вращения  $x_0$

Итак, абсцисса вершины параболы равна  $x_c$ . Следовательно, получив экспериментально зависимость  $J(x_0)$  при любом значении  $y_0$ , можно узнать, где находится вершина параболы и измерить  $x_c$ .

Аналогично зависит момент инерции от  $y_0$ : при любом значении  $x_0$  функция  $J(y_0)$  достигает минимума при  $y_0 = y_c$ , и график функции  $J(y_0)$  – это парабола, вершина которой смещена вверх на  $J_0 + M(x_0 - x_c)^2$  и вправо на  $y_c$ . Поэтому, получив экспериментально зависимость  $J(y_0)$  при любом значении  $x_0$ , и определив абсциссу вершины параболы, можно измерить  $y_c$ .

## 2. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка – *виртуальная*. Она разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

При вызове программы открывается окно «Момент инерции твёрдого тела», а после нажатия кнопки «**Эксперимент**» открывается рабочий экран установки (окно «ЭКСПЕРИМЕНТ») – см. Рис. 2.1.

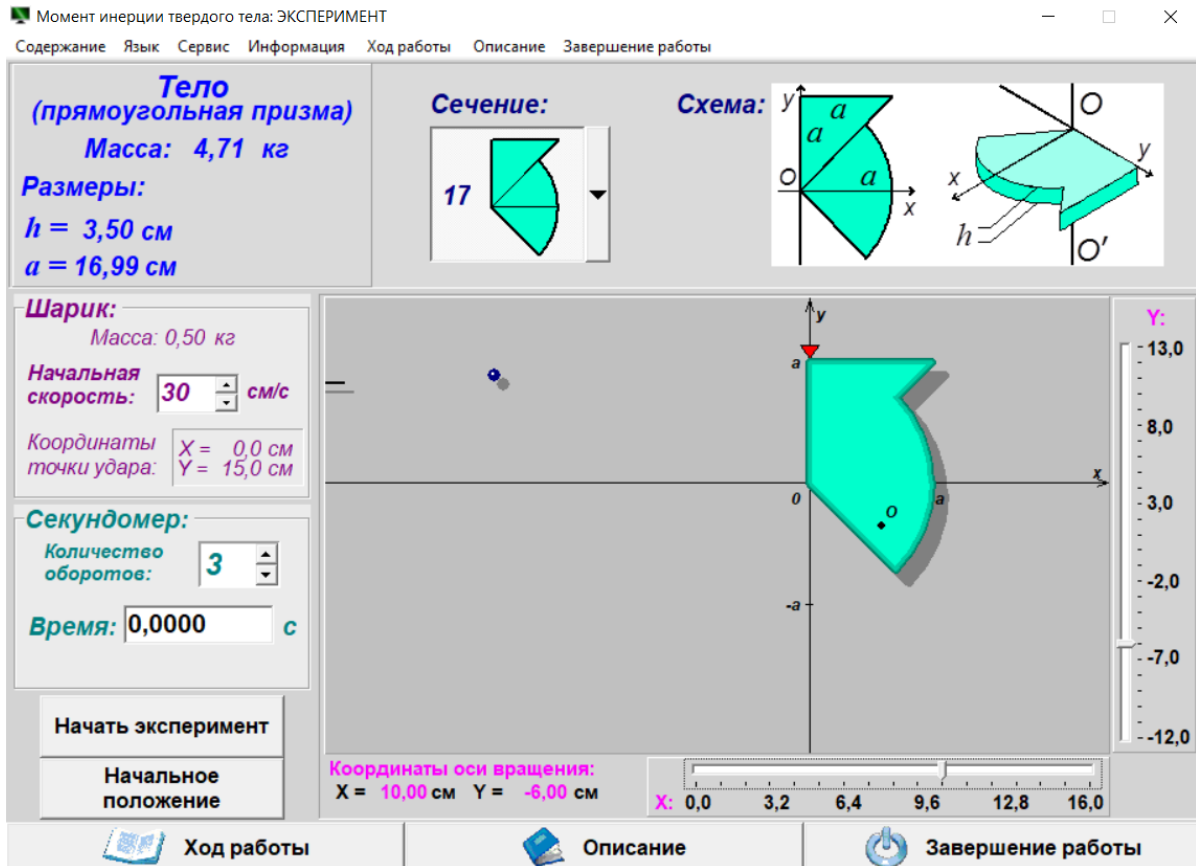


Рис. 2.1. «Окно ЭКСПЕРИМЕНТ»

Окно содержит три раздела: панель призмы (сверху), панель инструментов (слева) и окно визуализации (справа).

1. *Панель призмы* содержит окно «**Сечение**» для выбора формы основания призмы. Возможны 21 сечение, все они представляют комбинации равнобедренных прямоугольных треугольников и секторов с углом раствора  $45^\circ$ . Слева от окна «**Сечение**» расположено окно «**Тело**», в нём указываются масса призмы  $M$  и размеры призмы: высота  $h$  и размеры основания. Справа от окна «**Сечение**» расположено окно «**Схема**», в котором приведён чертёж основания призмы.

2. *Панель инструментов* содержит два окна: «**Шарик**» и «**Секундомер**» и две кнопки: «**Начать эксперимент**» и «**Начальное положение**».

В окне «**Шарик**» указана масса шарика (фиксированная):  $m = 0,50$  кг, начальная скорость шарика – её можно менять в интервале от 15 см/с до 45 см/с – и координаты точки удара  $x$  и  $y$ .

Окно «**Секундомер**» содержит два окна: окно «**Количество оборотов**», в котором можно задать количество наблюдаемых оборотов призмы  $n$  после удара шарика, и индикаторное окно секундомера «**Время**», в котором указывается время вращения призмы.

Кнопка «**Начать эксперимент**» запускает шарик. После нажатия этой кнопки шарик в окне визуализации начинает движение, а кнопка превращается в кнопку «**Остановить эксперимент**». Нажимать кнопку «**Остановить эксперимент**» нет смысла, надо просто дождаться, когда шарик долетит до призмы, ударит её, призма начнёт вращаться и после совершения назначенных  $n$  оборотов остановится.

При нажатии кнопки «**Начальное положение**» шарик оказывается в исходной позиции, в неподвижном состоянии.

3. В *окне визуализации* вы видите шарик, призму и систему координат  $XOY$ . Кроме того, там есть две линейки с бегунками (**X** и **Y**), позволяющие задавать координаты оси вращения ( $x_0$ ;  $y_0$ ). Зная координату  $y_0$  и координату точки удара  $y$ , можно определить плечо импульса – см. формулу (1.10):  $\ell = (y - y_0)$ .

### 3. Задания

**Задание 1.** Экспериментально исследовать влияние  $X$ -координаты оси вращения призмы на её момент инерции и измерить  $X$ -координату центра инерции  $x_c$ .

**Задание 2.** Экспериментально исследовать влияние  $Y$ -координаты оси вращения призмы на её момент инерции и измерить  $Y$ -координату центра инерции  $y_c$ .

**Задание 3.** Прямым способом проверить теорему Штейнера и измерить главный момент инерции призмы  $J_0$ .

### 4. Порядок выполнения работы

4.1. Нажмите кнопку «Эксперимент» и обратитесь к преподавателю для того, чтобы он выбрал для вас форму основания призмы, начальную скорость шарика и количество оборотов призмы. После этого заполните таблицу 1 «Условия экспериментов».

Таблица 1

## Условия экспериментов

|                           |                             |      |  |
|---------------------------|-----------------------------|------|--|
| Номер основания призмы    |                             |      |  |
| Масса призмы              | $M$                         | кг   |  |
| Число оборотов призмы     | $n$                         |      |  |
| Масса шарика              | $m$                         | кг   |  |
| Начальная скорость шарика |                             | см/с |  |
| У-координата точки удара  | $y$                         | см   |  |
| Погрешности               | $\Delta(x_0) = \Delta(y_0)$ | см   |  |
|                           | $\Delta(M)$                 | кг   |  |
|                           | $\Delta(m)$                 | кг   |  |
|                           | $\varepsilon(m)$            |      |  |
|                           | $\Delta(\quad)$             | см/с |  |
|                           | $\Delta(y)$                 | см   |  |
|                           | $\Delta(\ell)$              | см   |  |

## Выполнение задания 1

- 4.2. Выберите с помощью бегунка на линейке **У** значение У-координаты оси вращения  $y_0$  минимальное или близкое к минимальному. Запишите выбранное значение во все ячейки столбца  $y_0$  в таблице 2.
- 4.3. Выберите с помощью бегунка на линейке **Х** значение Х-координаты оси вращения  $x_0 = 0$ . Запишите это число в первой строке таблицы 2.
- 4.4. Нажмите кнопку «**Начать эксперимент**». Шарик начнёт движение, а после его удара призма начнёт вращаться и включится секундомер. После того, как призма совершит заданное число оборотов, она остановится, и одновременно выключится секундомер. Запишите показание секундомера в таблицу 2.

Таблица 2

Первая серия опытов: при  $y_0 = \dots$  см

| Номер опыта | $y_0$ |    | $x_0$ | $t$ | $T$ | $J$                | $\Delta(J)$        |
|-------------|-------|----|-------|-----|-----|--------------------|--------------------|
|             | см    | см | см    | с   | с   | кг·см <sup>2</sup> | кг·см <sup>2</sup> |
| 1           |       |    |       |     |     |                    |                    |
| 2           |       |    |       |     |     |                    |                    |
| ...         |       |    |       |     |     |                    |                    |
| ...         |       |    |       |     |     |                    |                    |
| 8           |       |    |       |     |     |                    |                    |

- 4.5. Повторите опыт (пункт 4.4) ещё 7 раз, увеличивая каждый раз значение Х-координаты оси вращения  $x_0$ . Шаг изменения выберите равным примерно  $\frac{1}{8}$  от максимального значения, которое содержит линейка **Х**. Он не обязательно должен быть одним и тем же.
- 4.6. Прделайте ещё две серии опытов. Во второй серии выберите значение  $y_0$  примерно в середине интервала на линейке **У**, в третьей серии выберите

значение  $y_0$  максимальное или близкое к максимальному. Результаты опытов запишите в таблицах 3 и 4, аналогичных таблице 2.

4.7. Заполните остальные столбцы таблиц 2, 3 и 4.

• Для определения плеча импульса используйте формулу (1.10):

$$\ell = (y - y_0).$$

• Период вращения определяйте по формуле (1.11):  $T = \frac{t}{n}$ .

• Момент инерции призмы определяйте по формуле (1.9):  $I = m\ell \left( \frac{vT}{\pi} - \ell \right)$ .

4.8. На основании данных таблиц 2 – 4 постройте три графика зависимости  $J(x_0)$  – на одном рисунке. Не забудьте про планки погрешностей.

4.9. Как указывалось в разделе 1.3, из теоремы Штейнера, записанной в виде (1.13):  $I = I_0 + M(x_0 - x_c)^2 + M(y_0 - y_c)^2$ , следует, что теоретически графиком функции  $J(x_0)$  должна быть парабола. Убедитесь, что экспериментальные точки всех трёх серий опытов в самом деле ложатся на параболы, для чего нанесите на графиках линии тренда, причём в параметрах линий тренда выбирайте «Полиномиальная», «Степень» = 2, «показывать уравнение на диаграмме».

4.10. Прокомментируйте построенные графики.

4.11. Измерьте X-координату центра инерции призмы  $x_c$ , используя тот факт, что абсцисса вершины параболы как раз равна  $x_c$ . Для этого воспользуйтесь известной формулой координаты вершины параболы

$$x = -\frac{B}{2A},$$

где  $A$  и  $B$  – это параметры уравнения параболы  $y = Ax^2 + Bx + C$ , которые вам покажут уравнения тренда. Результаты занесите в таблицу 5.

Таблица 5  
X-координата центра инерции призмы

| Номер<br>серии | $y_0$ | $A$ | $B$   | $x_c$ |
|----------------|-------|-----|-------|-------|
|                | см    | кг  | кг·см | см    |
| 1              |       |     |       |       |
| 2              |       |     |       |       |
| 3              |       |     |       |       |

4.12. Запишите результат измерения X-координата центра инерции призмы в стандартной форме:

$$x_c = (\dots \pm \dots) \text{ см}, \quad \varepsilon(x_c) = \dots \%$$

### Выполнение задания 2

4.13. Выберите с помощью бегунка на линейке  $X$  значение X-координаты оси вращения призмы  $x_0 = 0$ . Запишите это значение во все ячейки столбца  $y_0$  в таблице 6.

- 4.14. Выберите с помощью бегунка на линейке **Y** минимальное значение  $Y$ -координаты оси вращения  $y_0$  и запишите это число в первой строке таблицы 6.
- 4.15. Нажмите кнопку «Начать эксперимент». После того, как призма после удара совершит заданное число оборотов и остановится, запишите показание секундомера в таблицу 6.
- 4.16. Выберите шаг изменения  $y$ -координаты оси вращения  $y_0$  так, чтобы можно было проделать 8 опытов с различными значениями  $y_0$  во всём диапазоне значений  $y_0$ . Шаг не обязательно должен быть неизменным.
- 4.17. Повторите опыт (пункт 4.15) ещё 7 раз, каждый раз увеличивая на шаг значение  $y$ -координаты оси вращения  $y_0$ .

Таблица 6

Первая серия опытов: при  $x_0 = \dots$  см

| Номер<br>опыта | $x_0$<br>см | $y_0$<br>см |  | $t$<br>с | $T$<br>с | $J$<br>кг·см <sup>2</sup> | $\Delta(J)$<br>кг·см <sup>2</sup> |
|----------------|-------------|-------------|--|----------|----------|---------------------------|-----------------------------------|
| 1              |             |             |  |          |          |                           |                                   |
| 2              |             |             |  |          |          |                           |                                   |
| ...            |             |             |  |          |          |                           |                                   |
| ...            |             |             |  |          |          |                           |                                   |
| 8              |             |             |  |          |          |                           |                                   |

- 4.18. Проделайте ещё две серии опытов. Во второй серии выберите значение  $x_0$  примерно в середине интервала на линейке **X**, в третьей серии выберите значение  $x_0$  максимальное или близкое к максимальному. Результаты опытов запишите в таблицах 7 и 8, аналогичных таблице 6.
- 4.19. Заполните остальные столбцы таблиц 6, 7 и 8.
- 4.20. На основании данных таблиц 6 – 8 постройте три графика зависимости  $J(y_0)$  – на одном рисунке. Не забудьте про планки погрешностей.
- 4.21. Убедитесь, что экспериментальные точки всех трёх серий опытов ложатся на параболы, для чего нанесите на графиках линии тренда, причём в параметрах линий тренда выбирайте «Полиномиальная», «Степень» = 2, «показывать уравнение на диаграмме».
- 4.22. Прокомментируйте построенные графики.  
Измерьте  $Y$ -координату центра инерции призмы  $y_c$ , используя тот факт, что абсцисса вершины параболы равна  $y_c$ . Для этого воспользуйтесь формулой координаты вершины параболы  $x = -\frac{B}{2A}$ . Результаты занесите в таблицу 9.

Таблица 9  
Y-координата центра инерции призмы

| Номер<br>серии | $y_0$ | $A$ | $B$   | $x_c$ |
|----------------|-------|-----|-------|-------|
|                | см    | кг  | кг·см | см    |
| 1              |       |     |       |       |
| 2              |       |     |       |       |
| 3              |       |     |       |       |

4.23. Запишите результат измерения Y-координата центра инерции призмы в стандартной форме:

$$y_c = (\dots \pm \dots) \text{ см}, \quad \varepsilon(y_c) = \dots \%$$

### Выполнение задания 3

Как указывалось в пункте 1.3, основная форма теоремы Штейнера следующая:

$$J = J_0 + Md^2, \quad (1.12)$$

где  $J_0$  – главный момент инерции призмы,  $M$  – масса призмы,  $d$  – расстояние между параллельными осями (осью вращения  $OO'$  и главной осью).

Из этой формулы видно, что момент инерции призмы  $J$  относительно оси вращения  $OO'$  зависит линейно от  $d^2$ . В том, что эксперименты подтверждают данный факт, вам и надлежит убедиться в задании 3. Для этого новые опыты проводить не обязательно – достаточно данных, приведённых в таблицах 2 – 4 и 6 – 8.

4.24. Из таблиц 2 – 4 и 6 – 8 необходимо собрать следующую таблицу 10.

Таблица 10

Зависимость момента инерции призмы  $J$   
от расстояния  $d$  между осью вращения и главной осью призмы

| Номер<br>опыта | $x_0$ | $y_0$ | $d^2$           | $\Delta(d^2)$   | $J$                | $\Delta(J)$        |
|----------------|-------|-------|-----------------|-----------------|--------------------|--------------------|
|                | см    | см    | см <sup>2</sup> | см <sup>2</sup> | кг·см <sup>2</sup> | кг·см <sup>2</sup> |
| 1              |       |       |                 |                 |                    |                    |
| 2              |       |       |                 |                 |                    |                    |
| ...            |       |       |                 |                 |                    |                    |
| ...            |       |       |                 |                 |                    |                    |

4.25. Отсортируйте таблицу по столбцу  $J$ , а затем уберите из таблицы строки, в которых значения  $J$  мало отличаются друг от друга. Достаточно оставить в таблице 10 не более 10 – 15 строчек.

4.26. На основании данных таблицы 10 постройте график экспериментальной зависимости  $J(d^2)$  вместе с линией тренда и уравнением этой линии.

4.27. Прокомментируйте график: о чём говорит результат прямой экспериментальной проверки теоремы Штейнера?

4.28. Измерьте массу призмы и её собственный момент инерции.

Из теоремы Штейнера  $J = J_0 + Md^2$  следует, что угловой коэффициент зависимости  $J(d^2)$  есть масса призмы  $M$ , а свободный член – главный

момент инерции  $J_0$ . Поэтому измерив параметры линейной зависимости  $J(d^2)$ , можно тем самым измерить  $M$  и  $J_0$ .

Для этого заполните следующую таблицу 11. Определить значения  $M$  и  $J_0$  и оценить абсолютные погрешности их измерения вам позволит функция ЛИНЕЙН.

Таблица 5  
Масса призмы  $M$  и её главный момент инерции  $J_0$

| Величина                  | $M$ | $J_0$              |
|---------------------------|-----|--------------------|
| Размерность               | кг  | кг·см <sup>2</sup> |
| Значение                  |     |                    |
| Абсолютная погрешность    |     |                    |
| Относительная погрешность |     |                    |

4.29. Запишите результаты измерения массы призмы  $M$  и главного момента инерции призмы  $J_0$  в стандартной форме:

$$M = (\dots \pm \dots) \text{ кг}, \quad \varepsilon(M) = \dots \%$$

$$J_0 = (\dots \pm \dots) \text{ кг·м}^2, \quad \varepsilon(J_0) = \dots \%$$

4.30. Прокомментируйте результаты. В частности, сравните измеренное и заданное значения массы призмы и напишите, о чём говорит это сравнение.

4.31. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

## 5. Оценка погрешностей измерений

5.1. Погрешности прямых измерений.

В данной лабораторной работе прямым способом измеряются три величины: координаты оси вращения призмы  $x_0$  и  $y_0$  и время вращения призмы  $t$ .

Координаты оси вращения измеряются по линейкам и указываются внизу окна визуализации в сантиметрах в виде чисел с одним знаком после запятой. Это означает, что  $\Delta(x_0) = \Delta(y_0) = 0,1 \text{ см}$ .

Время вращения призмы показывает цифровой секундомер в секундах в виде числа с четырьмя знаками после запятой, поэтому  $\Delta(t) = 0,0001 \text{ с} = 0,1 \text{ мс}$ .

5.2. Погрешности заданных величин.

Заданными величинами, значения которых необходимы в данной работе, являются четыре величины: масса призмы  $M$ , масса шарика  $m$ , начальная скорость шарика и координата точки удара шарика по призме  $y$ . Оцените сами погрешности этих величин, исходя из того, с какой точностью они заданы.

5.3. Погрешность измерения момента инерции.

Эта величина измеряется косвенно, способ её измерения определяется следующими рабочими формулами.



$$\ell = (y - y_0), \quad (1.10)$$

$$T = \frac{t}{n}, \quad (1.11)$$

$$J = m\ell \left( \frac{vT}{\pi} - \ell \right). \quad (1.9)$$

Из формулы (1.9) следует, что абсолютная погрешность  $\Delta(J)$  равна сумме четырёх частных погрешностей:

$$\Delta(J) = \Delta_m(J) + \Delta_\ell(J) + \Delta_v(J) + \Delta_T(J).$$

Эти частные погрешности равны:

$$\Delta_m(J) = \left| \frac{\partial J}{\partial m} \right| \Delta(m) = \frac{J}{m} \Delta(m) = J\varepsilon(m),$$

$$\Delta_\ell(J) = \left| \frac{\partial J}{\partial \ell} \right| \Delta(\ell) = m \left| \left( \frac{vT}{\pi} - \ell \right) - \ell \right| \Delta(\ell) = \left| \frac{J}{\ell} - m\ell \right| \Delta(\ell),$$

$$\Delta_v(J) = \left| \frac{\partial J}{\partial v} \right| \Delta(v) = m\ell \frac{T}{\pi} \Delta(v),$$

$$\Delta_T(J) = \left| \frac{\partial J}{\partial T} \right| \Delta(T) = m\ell \frac{v}{\pi} \Delta(T).$$

В данной лабораторной установке погрешность измерения времени вращения призмы  $\Delta(t)$  очень мала, погрешность измерения периода вращения  $\Delta(T)$  ещё меньше, поэтому четвертой частной погрешностью  $\Delta_T(J) = m\ell \frac{v}{\pi} \Delta(T)$  можно пренебречь.

Погрешность  $\Delta(\ell)$  можно оценить, основываясь на формуле (1.10):  $\ell = (y - y_0)$ , из которой следует, что

$$\Delta(\ell) = \Delta(y) + \Delta(y_0),$$

#### 5.4. Погрешность измерения величины $d^2$ .

Квадрат расстояния между осью вращения призмы и центром инерции – величина, измеряемая косвенно. Способ её измерения определяется формулой

$$d^2 = (x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2.$$

Из этой формулы следует:

$$\Delta(d^2) = \Delta[(x_0 - x_c)^2] + \Delta[(y_0 - y_c)^2].$$

Погрешности измерения  $x$ -координат и  $y$ -координат одинаковы, поэтому

$$\Delta(d^2) = 2\Delta[(x_0 - x_c)^2].$$

Так как, в соответствии с общим правилом,  $\Delta(x^2) = 2x\Delta(x)$ , то

$$\Delta(d^2) = 4|x_0 - x_c|\Delta(x_0 - x_c) = 4|x_0 - x_c|[\Delta(x_0) + \Delta(x_c)].$$

Причиной погрешности измерения координаты центра инерции  $x_c$  является только погрешность измерения координаты оси вращения  $x_0$ , поэтому можно считать, что  $\Delta(x_c) = \Delta(x_0)$ . Тогда

$$\Delta(d^2) = 8|x_0 - x_c|\Delta(x_0).$$

## 6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что такое «момент инерции»?
- 6.2. Что такое «главная ось»?
- 6.3. Что такое «главный момент инерции»?
- 6.4. Что такое «плечо импульса»?
- 6.5. В чём состоит теорема Штейнера?
- 6.6. Какой вид имеет график зависимости момента инерции призмы относительно её оси вращения от  $x$ -координаты оси вращения?
- 6.7. Что измеряет в данной лабораторной работе секундомер?
- 6.8. Каково назначение линеек с бегунками  $X$  и  $Y$ ?
- 6.9. Как в данной лабораторной работе измеряется плечо импульса шарика?
- 6.10. Как в данной лабораторной работе измеряется период вращения призмы?
- 6.11. В чём состоит в данной лабораторной работе процедура измерения координат центра инерции призмы?
- 6.12. В чём состоит в данной лабораторной работе процедура измерения собственного момента инерции призмы?

## **7. Литература**

- 7.1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989.
- 7.2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1989.
- 7.3. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск: Издательство НИ ТПУ, 2007.
- 7.4. Рипп А.Г. Обработка измерений: метод. пособие. – Севастополь: СНУЯЭП, 2012.

У ч е б н о е и з д а н и е

**Рипп Александр Гешелевич  
Мирошниченко Евгения Владимировна**

## **Теорема Штейнера**

*Учебное пособие*

*В авторской редакции*

Изд. № 70/19. Объем 1,25 п.л.

РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»