

УДК 621.3.011.7

АНАЛИЗ ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ЗВЕНА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Гимпилевич Ю.Б., Чоков П.В.

Проведено исследование частотных и временных характеристик звена четвертого порядка. Показано, что на его основе возможна реализация высокоступенчатой системы с двумя полосами прозрачности. Получены формулы для инженерного расчета. Определены условия, при которых переходный процесс носит колебательный характер.

Многополосные фильтры находят применение в многоканальных приёмниках специального назначения с псевдослучайным изменением несущей частоты, в радиомодемах с частотным кодированием, в системах многоканальной проводной радиосвязи [1,2]. Наличие нескольких полос прозрачности может быть обеспечено путём применения колебательного звена высокого порядка. Ниже приводится анализ частотных и временных характеристик RLC звена четвертого порядка, схема которого изображена на рисунке 1. Звено реализовано в виде лестничной структуры и содержит две идентичные RLC цепочки, причем резистор R определяет затухание звена. Используя методы теории цепей [4], можно получить следующее выражение для комплексного коэффициента передачи данного звена

$$K(j\omega) = \frac{1}{\omega^4(LC)^2 - \omega^2(3LC + R^2C^2) + 1 + j(3R\omega C - 2\omega^3LC^2R)}, \quad (1)$$

где $\sqrt{j}$ – мнимая единица; ω – круговая частота.

Найдём амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ) характеристики:

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^4(LC)^2 - \omega^2(3LC + R^2C^2) + 1)^2 + (3R\omega C - 2\omega^3LC^2R)^2}}; \quad (2)$$

$$\phi(\omega) = \arg(K(j\omega)) = - \arctg\left(\frac{3R\omega C - 2\omega^3LC^2R}{\omega^4(LC)^2 - \omega^2(3LC + R^2C^2) + 1}\right). \quad (3)$$

Используя (2) и (3), построим графики АЧХ и ФЧХ. Для определенности при расчетах приняты следующие значения параметров элементов схемы: $C = 2,5$ нФ, $L = 0,4$ мГн, $R = 10$ Ом. Результаты расчетов иллюстрируются рисунком 2. Из графиков следует, что

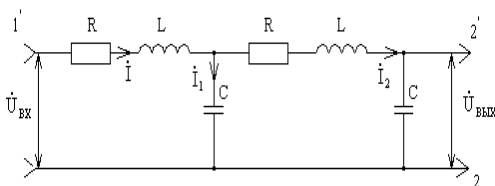


Рисунок 1 – Исследуемое звено

АЧХ звена имеет две полосы прозрачности, а ФЧХ изменяется от 0 до 2π , проходя через точки $\pi/2$ и $3\pi/2$ на резонансных частотах.

При проектировании необходимо иметь соотношения, связывающие резонансные частоты с параметрами схемы. Для определения резонансных частот необходимо исследовать функцию (2) на экстремумы. Точное решение этой задачи не представляется возможным, поэтому решим ее в предположении малости сопротивления R . С учетом этого, взяв производную от (2) и приравняв ее к нулю, приходим к следующему уравнению, которое является биквадратным относительно ω :

$$\omega^4 (LC)^2 - (\omega^2 3LC) + 1 = 0. \quad (4)$$

Данное уравнение имеет четыре корня, однако, физический смысл имеют только два из них, которые и определяют значения резонансных частот:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (5)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6)$$

При оговоренных ранее параметрах резонансные частоты равны:

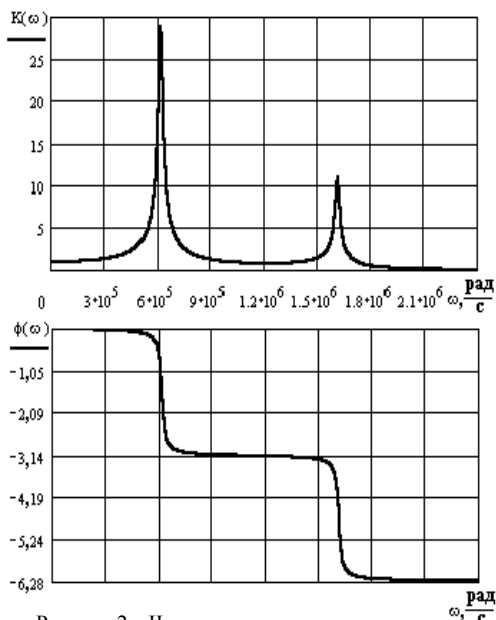


Рисунок 2 – Частотные характеристики

$$\omega_1 = 6.180339 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_2 = 1.618034 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

что соответствует графику на рисунке 2.

Это позволяет рекомендовать формулы (2) и (3) для инженерных расчетов.

Перейдём к анализу свойств передаточной функции. Заменяя $j\omega$ на p в формуле (1), получим выражение для передаточной функции звена в следующем виде:

$$K(p) = \frac{\frac{1}{L^2 C^2}}{p^4 + \frac{2R}{L} \cdot p^3 + \left(\frac{3}{LC} + \frac{R^2}{L^2} \right) \cdot p^2 + \frac{3R}{L^2 C} p + \frac{1}{L^2 C^2}}. \quad (7)$$

Определим полюсы передаточной функции. Для этого следует приравнять знаменатель передаточной функции к нулю и решить полученное характеристическое уравнение, которое для данного случая будет иметь вид:

$$p^4 + \frac{2R}{L} \cdot p^3 + \left(\frac{3}{LC} + \frac{R^2}{L^2} \right) \cdot p^2 + \frac{3R}{L^2 C} \cdot p + \frac{1}{L^2 C^2} = 0. \quad (8)$$

Как известно, корни уравнения четвертого порядка общего вида не могут быть определены аналитически [4]. Однако для нашего случая имеется взаимосвязь между коэффициентами полинома, что позволяет определить корни косвенным методом. Для упрощения выкладок введем следующие обозначения: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $\alpha = R/L$. С учетом этого (8) переписывается в виде

$$p^4 + 2\alpha p^3 + (3\omega_0^2 + \alpha^2) \cdot p^2 + 3\alpha \omega_0^2 p + \omega_0^4 = 0. \quad (9)$$

Как известно, корни уравнения 4-ой степени для наиболее общего случая представляют собой две комплексно-сопряженные пары. Причем для устойчивых цепей действительные части этих корней должны быть отрицательными [4]. Обозначим эти корни как

$$\begin{aligned} p1 &= -a + jb; & p3 &= -c + jd; \\ p2 &= -a - jb; & p4 &= -c - jd, \end{aligned} \quad (10)$$

где a, b, c, d – положительные числа.

Воспользовавшись разложением на простые множители, представим многочлен в уравнении (9) в виде

$$(p - p1) \cdot (p - p2) \cdot (p - p3) \cdot (p - p4). \quad (11)$$

Подставив (10) в (11) и раскрыв скобки, приведем (11) к канонической форме записи. Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в полученном многочлене и в многочлене (9). В итоге приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} a + c = \alpha ; \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4ac = 3\omega_0^2 + \alpha^2 ; \\ 2c(a^2 + b^2) + 2a(c^2 + d^2) = 3\alpha\omega_0^2 ; \\ (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = \omega_0^4 . \end{cases} \quad (12)$$

Выразим из второго и третьего уравнений этой системы член ω_0^2 , приравняем полученные выражения, и подставим в полученное равенство α из первого уравнения системы. В результате ряда преобразований приходим к равенству

$$(c - a) \cdot (b^2 - d^2) = 0 . \quad (13)$$

Можно показать, что решение этого уравнения $b = d$ не имеет физического смысла, поскольку приводит к вырождению данного звена. Остается единственное решение, имеющее физический смысл, которое выглядит следующим образом

$$c = a . \quad (14)$$

Таким образом, доказано следующее свойство передаточной функции рассматриваемого звена: все четыре полюса, оказывается, имеют равные действительные части. Это позволяет упростить исходную систему уравнений (12). Учитывая (14), легко доказать, что второе и третье уравнения линейно зависимы. При этом приходим к следующей системе из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2 \cdot c = \alpha ; \\ 2c^2 + b^2 + d^2 = 3\omega_0^2 ; \\ c^4 + c^2b^2 + c^2d^2 + b^2d^2 = \omega_0^4 . \end{cases} \quad (15)$$

Эта система уравнений разрешима относительно искомых параметров c, b, d . В результате решения получаем следующие выражения для полюсов передаточной функции исследуемого звена:

$$\begin{cases} p1 = -\frac{\alpha}{2} + j\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\alpha^2}{4}}; \\ p2 = -\frac{\alpha}{2} - j\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\alpha^2}{4}}; \\ p3 = -\frac{\alpha}{2} + j\sqrt{\omega_2^2 - \frac{\alpha^2}{4}}; \\ p4 = -\frac{\alpha}{2} - j\sqrt{\omega_2^2 - \frac{\alpha^2}{4}}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь ω_1 и ω_2 – резонансные частоты, определяемые соотношениями (5) и (6).

При приведенных ранее параметрах элементов схемы полюсы принимают следующие числовые значения:

$$\begin{cases} p1 = -1,25 \cdot 10^4 + j6,179076 \cdot 10^5; \\ p2 = -1,25 \cdot 10^4 - j6,179076 \cdot 10^5; \\ p3 = -1,25 \cdot 10^4 + j1,617986 \cdot 10^6; \\ p4 = -1,25 \cdot 10^4 - j1,617986 \cdot 10^6. \end{cases} \quad (17)$$

Перейдем к анализу временных характеристик звена. Импульсную характеристику найдем путем применения обратного преобразования Лапласа к (7). Для этого предварительно разложим выражение (7) на более простые составляющие, используя метод неопределенных коэффициентов [4]

$$K(p) = \frac{1}{L^2 C^2} \cdot \left(\frac{A}{p - p1} + \frac{B}{p - p2} + \frac{C}{p - p3} + \frac{D}{p - p4} \right), \quad (18)$$

где A, B, C, D – коэффициенты, которые следует определить в результате разложения.

Используя методику, изложенную в [4], после ряда преобразований получаем следующие формулы для этих коэффициентов:

$$\begin{cases} A = -\frac{j}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot \omega_1^2 - \alpha^2)}}; \\ B = \frac{j}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot \omega_1^2 - \alpha^2)}}; \\ C = \frac{j}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot \omega_2^2 - \alpha^2)}}; \\ D = -\frac{j}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot \omega_2^2 - \alpha^2)}}. \end{cases} \quad (19)$$

Как видно из (19), коэффициенты образуют две пары комплексно-сопряженных корней с нулевыми действительными частями. Для случая, когда значения полюсов определяются (17), получим следующие значения коэффициентов:

$$\begin{cases} A = -j3,619 \cdot 10^{-19}; \\ B = j3,619 \cdot 10^{-19}; \\ C = j1,382 \cdot 10^{-19}; \\ D = -j1,382 \cdot 10^{-19}. \end{cases} \quad (20)$$

Теперь, используя таблицу соответствия [4], запишем выражение для оригинала – импульсной характеристики

$$g(t) = \frac{1}{L^2 C^2} \cdot (Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} + Ce^{p_3 t} + De^{p_4 t}) . \quad (21)$$

Данная формула может быть существенно упрощена, если учесть комплексную сопряженность полюсов передаточной функции (16) и коэффициентов (19). С учетом этого после ряда преобразований получаем следующее выражение для импульсной характеристики

$$g(t) = 2\omega_0^4 \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) \cdot [|A| \cdot \sin(\omega_{1c\phi} t) - |D| \cdot \sin(\omega_{2c\phi} t)] , \quad (22)$$

где $\omega_{1c\phi}$ и $\omega_{2c\phi}$ – частоты свободных колебаний, которые определяются по формулам:

$$\omega_{1c\phi} = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{\alpha^2}{4}} ; \quad (23)$$

$$\omega_{2c\phi} = \sqrt{\omega_2^2 - \frac{\alpha^2}{4}} . \quad (24)$$

Переходная характеристика может быть определена путем интегрирования импульсной характеристики [3]. После ряда преобразований приходим к следующей формуле для переходной характеристики:

$$h(t) = 2\omega_0^4 \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) \times \left\{ \frac{|A|}{\sqrt{\omega_{1c\phi}^2 + \frac{\alpha^2}{4}}} \cdot \sin[\omega_{1c\phi} t + \varphi_1] - \frac{|D|}{\sqrt{\omega_{2c\phi}^2 + \frac{\alpha^2}{4}}} \cdot \sin[\omega_{2c\phi} t + \varphi_2] \right\} + 1 . \quad (25)$$

Здесь $\varphi_1 = \arctg\left(\frac{2\omega_{1c\phi}}{\alpha}\right)$; $\varphi_2 = \arctg\left(\frac{2\omega_{2c\phi}}{\alpha}\right)$.

Графики импульсной и переходной характеристик изображены на рисунке 3. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что временные характеристики звена четвертого порядка существенно отличаются от характеристик звена второго порядка [3]. Осцилляции в данном случае носят немонотонный характер, что объясняется биениями, возникающими из-за наличия в переходном процессе двух осциллирующих функций с различными частотами $\omega_{1св}$ и $\omega_{2св}$. Выясним условия, при которых процесс будет колебательным. Колебательный характер процесса соответствует комплексно-сопряженным полюсам передаточной функции. Из (16) следует, что эти условия для каждой из составляющих будут различными. Для составляющей с частотой $\omega_{1св}$

$$\alpha < 2 \cdot \omega_1, \quad (26)$$

а для составляющей с частотой $\omega_{2св}$

$$\alpha < 2 \cdot \omega_2. \quad (27)$$

Поскольку $\omega_2 > \omega_1$, то при выполнении (26) обе составляющие процесса будут носить колебательный характер. При ранее приведенных параметрах L и C это будет соответствовать $R < 494,43$ Ом. Если коэффициент α находится в интервале $2\omega_1 < \alpha < 2\omega_2$, то первая составляющая процесса носить аperiodический ха-

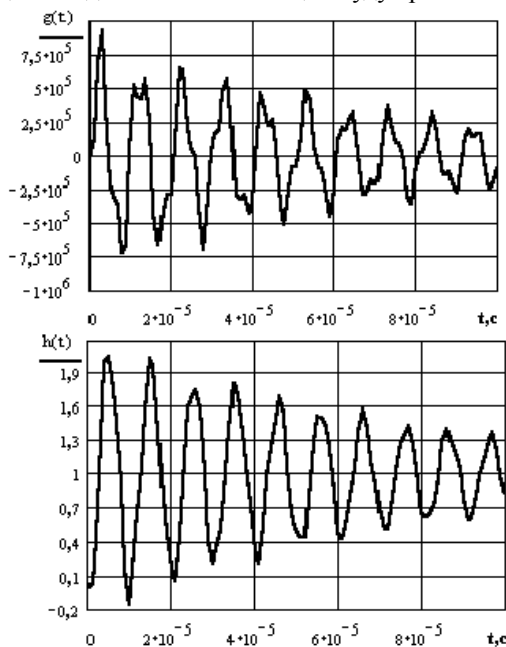


Рисунок 3 – Временные характеристики звена

актер, а вторая – колебательный. Наконец при $\alpha > 2\omega_2$ обе составляющие процесса имеют аperiodический характер. При ранее приведенных параметрах L и C это соответствует $R > 1294,27$ Ом. Проверка этих условий проводилась путем компьютерного моделирования и подтвердила полученные результаты.

Библиография

1 Лев А.Ю. Теоретические основы многоканальной связи / А.Ю. Лев. — М.: Связь, 1978. — 192 с.

2 Бабковский А.П. Современная приемопередающая аппаратура для передачи данных в узкополосных системах технологической радиосвязи / А.П. Бабковский, Н.Е. Селезнев, Д.Н. Хохлихин // СВЧ техника и телекоммуникационные технологии: Материалы X междунар. микроволновой конф., Севастополь, сентябрь 2000 г. — Севастополь, 2000 г. — С. 226–227.

3 Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М., 1973. — 832 с.

4 Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с.

Поступила в редакцию 20.11.2000 г.