

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Кафедра «Радиоэлектроника и телекоммуникации»

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

для обучающихся очной и заочной форм обучения

направления 11.03.01 — Радиотехника

и специальности 11.05.01 — Радиоэлектронные системы и комплексы

Севастополь

СевГУ

2019

УДК 629.056.8: 656.22
Р15

Р е ц е н з е н т:

И. Л. Афонин – д-р техн. наук, профессор

Ответственный за выпуск:

И. Л. Афонин - зав. кафедрой «Радиоэлектроника и телекоммуникации»,
д-р техн. наук, профессор

Составитель: В.Г. Слёзкин

Р15 Радиотехнические системы: учеб.-метод. пособие по дисциплине для обучающихся очной и заочной форм обучения направления 11.03.01 — Радиотехника и специальности 11.05.01 — Радиоэлектронные системы и комплексы [Электронный ресурс] / Сост. В.Г. Слёзкин. — Севастополь: СевГУ, 2019. — 154 с.

Цель учебно-методического пособия: помочь обучающимся в изучении принципов построения радиотехнических систем передачи и извлечения информации.

УДК 629.056.8: 656.22

Учебно-методическое пособие утверждено на заседании кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации», протокол № 13 от 14 июня 2019 г.

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании методической комиссии Института радиоэлектроники и информационной безопасности, протокол № 20 от 19 июня 2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Радиоэлектронные средства и системы	5
1.1. Стандартная терминология	5
1.2. Виды задач, решаемых РЭС	5
2. Основные понятия	8
2.1. Информация, сигнал, помеха	8
2.2. Классификация сигналов по физической природе.....	8
2.3. Основные виды радиотехнических систем	9
2.4. Телекоммуникационные системы.....	9
2.5. Радиолокационные системы (РЛС).....	11
2.6. Радионавигационные системы	16
2.7. Сигналы, применяемые в РТС	20
2.8. Объекты теории вероятностей и математической статистики.....	23
2.9. Применение теории случайных событий к теории информации	28
2.10. Случайные величины и их статистические характеристики	29
2.11. Случайные процессы	32
3. Дальность действия РТС	34
3.1. Общие положения.....	34
3.2. Мощность излучаемого сигнала в свободном пространстве.....	34
3.3. Мощность принимаемого сигнала в РТС ПИ.....	37
3.4. Мощность принимаемого сигнала в РЛС.....	38
3.5. Критерии ограничения дальности действия РТС.....	42
3.6. Дополнительные потери в радиолинии	43
4. Описание сигналов и помех во временной и частотной областях	51
4.1. Пара преобразований Фурье	51
4.2. Специальные функции.....	52
4.3. Временные и спектральные характеристики помехи типа шума.....	59
4.4. Прохождение шума через линейную цепь	61
5. Статистическая оптимизация РТС	65
5.1. Основные задачи.....	65
5.2. Критерии поиска и оптимизации решения основных задач.....	66
5.3. Подход к решению задачи обнаружения.....	69
5.4. Обнаружение сигналов, известных полностью.....	73
5.5. Обнаружение сигналов с неизвестной начальной фазой.....	79

5.6. Обнаружение сигналов с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой	82
5.7. Обнаружение пачек радиоимпульсов	85
5.8. Оптимальная линейная фильтрация	88
5.9. Синтез согласованных фильтров во временной области.....	93
6. Разрешение сигналов	103
6.1. Понятие разрешающей способности	103
6.2. Разрешающая способность по времени	104
6.3. Разрешающая способность по частоте	106
6.4. Совместная разрешающая способность по времени и по частоте	107
6.5. Повышение разрешающей способности систем	112
7. Различение сигналов.....	130
7.1. Постановка задачи	130
7.2. Общее решение задачи различения	130
7.3. Различение в стационарном когерентном канале	132
7.4. Анализ качественных показателей различителей СИП.....	135
7.5. Различение сигналов с неизвестной фазой (некогерентный приём).....	143
8. Измерение параметров сигналов на фоне помех	144
8.1. Постановка задачи	144
8.2. Анализ задачи	144
Библиографический список.....	148
Приложение А. Некоторые свойства преобразования Фурье	149
Приложение Б. Анализ рассказа Эдгара По «Золотой жук»	150

1. РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА И СИСТЕМЫ

1.1. Стандартная терминология

Основываясь на интуитивном понятии «Информация», обратимся к стандартным определениям из ГОСТ Р 52003-2003 «Уровни разукрупнения радиоэлектронных средств. Термины и определения».

Радиоэлектронным средством (РЭС) называется изделие и его составные части, в основу функционирования которых положены принципы радиотехники и электроники.

По функциональной сложности различают:

- **радиоэлектронный функциональный узел (РЭФУ):** РЭС, представляющее собой функционально и конструктивно законченную сборочную единицу, выполняющее радиотехническую и/или электронные функции(ию) и не имеющее самостоятельного применения;
- **радиоэлектронное устройство (РЭУ):** РЭС, представляющее собой совокупность функционально и конструктивно законченных сборочных единиц и используемое для решения технической задачи в соответствии с его назначением (функции передачи, приема и преобразования информации);
- **радиоэлектронный комплекс (РЭК):** РЭС, представляющее собой функционально законченную совокупность радиоэлектронных устройств, не соединенных на предприятии-изготовителе сборочными операциями, выполненное с использованием интерфейсов и обладающее свойством перестроения своей структуры для сохранения работоспособности при решении тактических и/или технических задач в различных условиях эксплуатации.
- **радиоэлектронная система (РЭ система):** РЭС, представляющее собой функционально законченную совокупность радиоэлектронных комплексов и устройств, обладающее свойством перестроения своей структуры для рационального решения тактических и/или технических задач при изменении условий эксплуатации.

Подчеркнём, что стандартное сокращение РЭС относится только к понятию «**Радиоэлектронное средство**»: в термине «**Радиоэлектронная система**» можно использовать только аббревиатуру РЭ, слово «**система**» не сокращается.

На практике применяют понятия «**Электронное средство**» и «**Электронная система**», чтобы отличить технические средства, не использующие электромагнитные волны как основного переносчика информации.

Радиотехнической системой (РТС) называют разновидность радиоэлектронной системы, в которой существенно используются радиоволны.

1.2. Виды задач, решаемых РЭС

В зависимости от характера решаемых задач выделяют **информационные** (табл. 2.1) и **энергетические** РЭС (табл.2.2).

Таблица 2.1 — Задачи, решаемые информационными РЭС

Задача	Область применения
Извлечение информации	Навигация, локация, дефектоскопия и интроскопия, научные исследования, медицинская техника, криминалистика
Передача информации на расстояние	Связь, телевизионное вещание, радиовещание, телеметрия, телекоммуникационные сети
Избирательное разрушение добываемой или передаваемой противником информации	Радиоэлектронное подавление, радиоэлектронная борьба
Сохранение общих информационных возможностей в условиях массового применения взаимно мешающих РЭС	Обеспечение электромагнитной совместимости РЭС, противодействие системам радиоэлектронного подавления и радиоэлектронной борьбы
Перехват и защита информации	Электронный шпионаж (радиоэлектронная разведка), средства поиска и подавления устройств несанкционированного перехвата
Управление объектами	Радиоэлектронная автоматика, телемеханика, дистанционное управление
Обработка информации	Цифровые и аналоговые средства обработки, восстановления и хранения информации
Преобразование сигнала	Усилители, аттенюаторы, преобразователи частоты и видов сигналов (в том числе датчики), модемы, кодеки
Генерация сигнала с заданными характеристиками	Измерительные приборы, музыкальные инструменты, медицинская аппаратура, средства научных исследований
Электронная идентификация и аутентификация	Системы опознавания «свой-чужой», государственной принадлежности, «электронный замок — ключ», <i>RFID</i> обнаружения и позиционирования.
Запись и воспроизведение информации	Средства записи-воспроизведения аудио- или видеоинформации, цифровая фотография, средства объективного контроля пространства и помещений

Таблица 2.2 — Задачи, решаемые энергетическими РЭС

Задача	Область применения
Дистанционное разрушение объектов	Лазерное поражение (например, баллистических ракет)

Задача	Область применения
Частичное разрушение объектов	Лазерное поражение отдельных технических средств (например, оптики ИСЗ), поражение мощными радиоимпульсами РЭС (например, бортовой РЭА самолётов и кораблей)
Передача энергии на расстояние	Энергетические радиолнии (например, между космическими аппаратами)
Биологическое воздействие	Лазерная, электромагнитная и ультразвуковая хирургия, лазерная, световая, электромагнитная и ультразвуковая терапия
Технологическая обработка материалов	Лазерная резка, лазерная, электромагнитная и ультразвуковая сварка
Кулинарная обработка продуктов	СВЧ нагрев (печи)
Уничтожение вредных и опасных веществ	СВЧ сжигание (например, бытовых и химических отходов)

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

2.1. Информация, сигнал, помеха

Предположим, что имеется два пространственно разнесённых объекта, каждый из которых может находиться в различных состояниях, однако объекты неравноправны: первый должен оценивать состояния второго и принимать в отношении его решения (например, управляющие решения). Такой объект принято называть **субъектом** (рис. 2.1.).

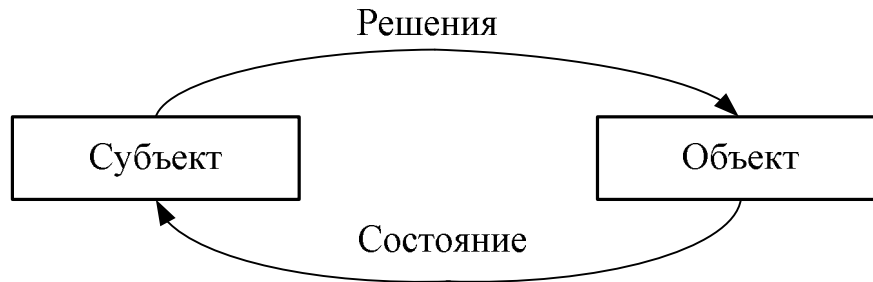


Рис. 2.1 — Схема взаимодействия субъекта и объекта

Только те сведения о состоянии объекта, которые необходимы для принятия в отношении него решений субъектом и называют **информацией**.

Если же задаться вопросом, в какой момент субъект имеет достаточно информации для принятия конкретного решения, то мы, во-первых, приходим к пониманию того, что информация может оцениваться **количественно**, а во-вторых, целесообразно ввести понятие «**сообщение**» (*message*) как конкретный объем информации, достаточный для принятия решения.

Физический процесс или явление природы — носитель сообщения называется **сигналом** (*signal*).

Сигнал, не несущий полезной информации называется **помехой** (*disturbance, interference*).

2.2. Классификация сигналов по физической природе

Информацию могут передавать любые явления и процессы, связанные с изменением состояния объектов.

Химические сигналы: изменение химического состояния (например, состава воды в реке ниже по течению от предприятия).

Биологические сигналы (например, бегство крыс с тонущего корабля).

Нас больше интересуют физические сигналы:

- механические, линейных и вращательных перемещений;
- механические, изменения линейных размеров (выключатель электрочайника; датчики диаметра ствола растения в радиосистеме управления поливом растений);
- акустические (колебания воздуха);
- гидроакустические (колебания воды);
- пневматические (направленное движение воздуха);
- гидравлические (направленное движение воды).

- оптические (поле зрения глаза, подвижное и неподвижное изображение);
- температурные (пример: измерение скорости потока воздуха методом «тепловой метки»);
- гравитационные;
- ядерного взаимодействия;

Особую роль играют **электрические** и связанные с ними сигналы:

- токи, напряжения в цепях;
- магнитные сигналы (низкочастотное магнитное поле);
- электростатические сигналы (низкочастотные электрические поле);
- электромагнитные сигналы (электромагнитное поле — ЭМ поле, радиоволны).

2.3. Основные виды радиотехнических систем

По информационной сущности РТС делятся на РТС передачи информации (РСТ ПИ) и РТС извлечения информации (РТС ИИ).

В первых информация возникает и используется **вне системы**, т.е. РТС служит только **переносчиком** информации.

В РТС ИИ источником информации является среда распространения радиоволн (РРВ), а система обеспечивает формирование сообщений в нужной форме.

Среди РТС ПИ выделяют:

- системы связи или телекоммуникационные системы (ТКС): два пункта, передача произвольных сообщений от одного к другому, односторонняя либо двусторонняя);
- системы вещания (от одного — многим).

По характеру сообщений различают РТС ПИ:

- для передачи речи (телефонные).
- для передачи пакетных сообщений (телеграфные).
- для передачи неподвижных изображений (факсимильные).
- для передачи подвижных изображений (ТВ).
- для передачи данных (например, телеметрии).

2.4. Телекоммуникационные системы

В состав РТС ПИ или ТКС входят источник сообщений ИС, получатель сообщений ПС, технические средства и среда распространения радиоволн (рис. 2.2.).

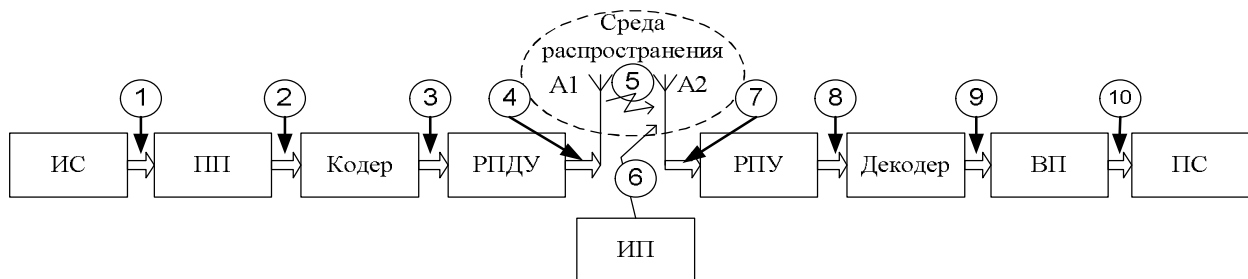


Рис. 2.2 — Структурная схема телекоммуникационной системы (системы связи)

Источник сообщений (ИС) создаёт сообщения в **естественной форме** (1), например, акустического сигнала (речь, музыка).

Первичный преобразователь (ПП) преобразует сообщения в форму **электрического видеосигнала** естественного вида (2).

Кодер преобразует **электрический видеосигнал** (3) в соответствии с особенностями данной системы (простейшее — ограничить полосу видеосигнала; в цифровых — АЦП и специальное кодирование).

Радиопередающее устройство (РПДУ) обеспечивает формирование **радиосигнала** во **внутренней форме** (4).

Антенна передающая (А1) преобразует **радиосигнал** из внутренней формы во **внешнюю форму** (5) — электромагнитные волны или радиоволны.

Источник помех (ИП) создает электромагнитные волны, не несущие полезной информации — **помехи** (6).

Антенна приёмная (А2) преобразует радиоволны — смесь радиосигнала и помехи во внутреннюю форму принятого радиосигнала (7).

Радиоприёмное устройство (РПУ) выполняет преобразование радиосигнала в форму принятого видеосигнала (8).

Декодер производит преобразование принятого видеосигнала в сигнал, переносящий **оценку сообщения** (9).

Выходной преобразователь (ВП) преобразует оценку сообщения в форму, естественную для **получателя сообщений (ПС)**: звук, изображение, отпечатанный текст (10) и т.п.

Часть РТС ПИ между входом кодера и выходом декодера называют **каналом связи**.

Среда распространения с ИП образуют **радиоканал связи**.

Многоканальные ТКС: от нескольких ИС — каждый своему ПС.

Видеосигналы наделяются отличительными признаками и мультиплексируются в один радиосигнал, затем передаются через один радиоканал (рис. 2.3).

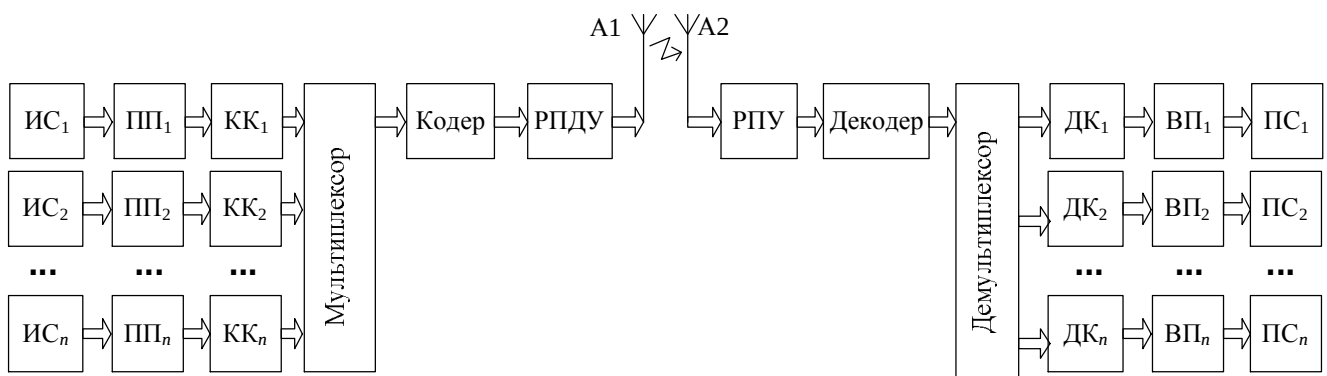


Рис. 2.3 — Структурная схема многоканальной системы связи

Основные виды разделения каналов (доступа к каналам):

— временное разделение каналов (ВРК) или *TDMA (Time Division Multiplex Access)*;

— частотное разделение каналов (ЧРК) или *FDMA (Frequency Division Multiplex Access)*;

— кодовое разделение каналов (КРК) или *CDMA* (*Code Division Multiplex Access*).

2.5. Радиолокационные системы (РЛС)

РЛС предназначены для обнаружения объектов, которые принято называть **РЛ целями** (*taget*), и определения их параметров: местонахождения, скорости, направления движения и т.п.

Термин *RADAR* означает следующее: *Radio Aided Detecting And Ranging*. — обнаружение и определение расстояния с помощью радио.

В оптическом диапазоне применяется термин «Оптический локатор» или *LIDAR: Light Detection And Ranging* — световое обнаружение и определение расстояния.

2.5.1. Основные разновидности РЛС

Активные РЛС.

РПДУ создаёт **зондирующий радиосигнал 1** (*probing signal*), не несущий информации. Он осуществляет «подсветку» цели. Информация о цели накладывается на **отраженный** (*reflected*) от неё сигнал. На приёмной стороне **решающее устройство РУ** определяет необходимые параметры (рис. 2.4).

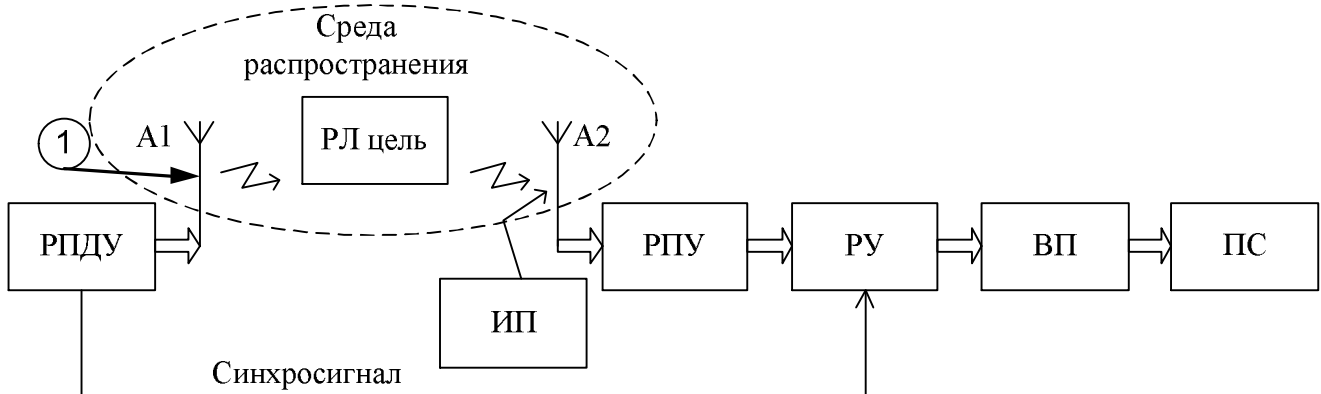


Рис. 2.4 — Структурная схема системы активной радиолокации

В пассивных РЛС подсветку обеспечивают посторонние работающие радиосредства, например, передатчики ТВ вещания.

По месту расположения приёмной и предающей частей различают **однопозиционные** (*monostatic*) и **двухпозиционные** (*bistatic*) РЛС, в которых передающая и приёмная части пространственно разнесены.

По виду РЛ целей различают системы с активным ответом (специальные приборы-ответчики например, *SART — Search And Rescue Transponder*) и с пассивным ответом.

По виду применяемых сигналов РЛС разделяют на:

- импульсные.
- моноимпульсные (непрерывный импульсно-модулированный сигнал).

2.5.2. Определение дальности до цели в импульсных РЛС

РПДУ излучает зондирующий импульс (*probing pulse, pilot pulse*) длительностью τ периодически через тактовый интервал (*timing period*) $T_{\text{т}}$. При скорости распространения радиоволны, равной скорости света c , время запаздывания (*delay*

time) Δt пропорционально удвоенному значению дальности (distance, range) D (рис. 2.5).

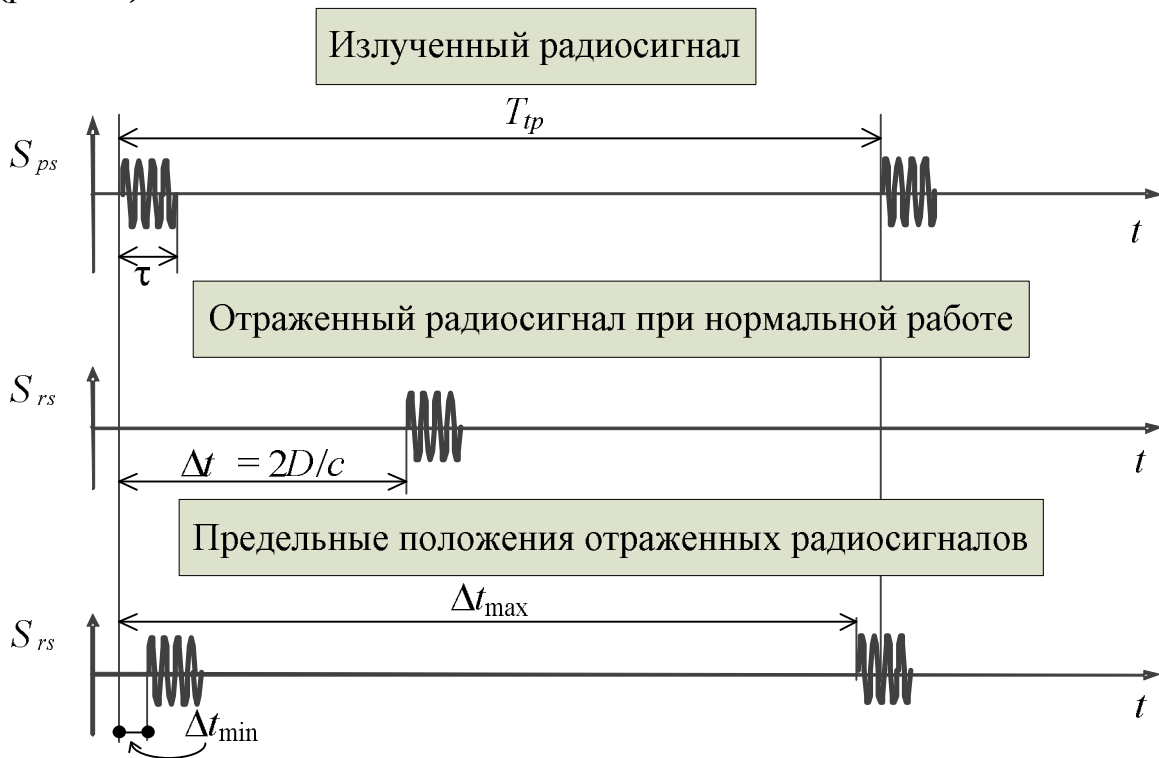


Рис. 2.5 — К пояснению принципа определения дальности в импульсной РЛС

Предельные возможности импульсной РЛС определяются длительностью импульса t и величиной тактового интервала T_{tp} :

Минимальная дальность D_{min} определяется длительностью импульса:

$$D_{min} = \frac{c\Delta t_{min}}{2} \approx \frac{c\phi}{2};$$

Максимальная дальность D_{max} ограничивается величиной тактового интервала:

$$D_{max} = \frac{c\Delta t_{max}}{2} \approx \frac{cT_{tp}}{2}.$$

Примеры.

1. Оценить длительность импульса РЛС для контроля причаливания морских судов.

Пусть $D_{min} = 30$ м. За 1 нс свет пролетает 0,3 м. Значит, 30 м свет пролетит за 100 нс, а в обе стороны — за 200 нс. Следовательно, t должен быть не более 0,2 мкс.

2. Максимальная дальность обнаружения РЛ прицела истребителя *Fantom 4С* равна 150 км, МиГ-21 — 90 км. Чему равны тактовые частоты этих РЛС?

Расстояние $2D_{max} = 300$ км свет пролетает за 10^{-3} с, следовательно, тактовая частота РЛС *Fantom 4С* равна 1 кГц. Для МиГ-21 она равна 1,7 кГц.

2.5.3. Определение дальности до цели в моноимпульсных РЛС

В моноимпульсных РЛС применяют **шумоподобные сигналы**: модуляцию несущей псевдослучайной последовательностью ПСП (*PseudoRandom Sequence* —

PRS или PRN — PseudoRandom number): сочетания нулей и единиц не повторяются в течение тактового интервала. Длительность каждого импульса может быть малой. Обработка: путем **накопления** принятой последовательности и оценки её запаздывания относительно переданной. Энергия накопленного сигнала во много раз больше энергии отдельного импульса. Недостаток: решение принимается с запаздыванием (рис. 2.6).

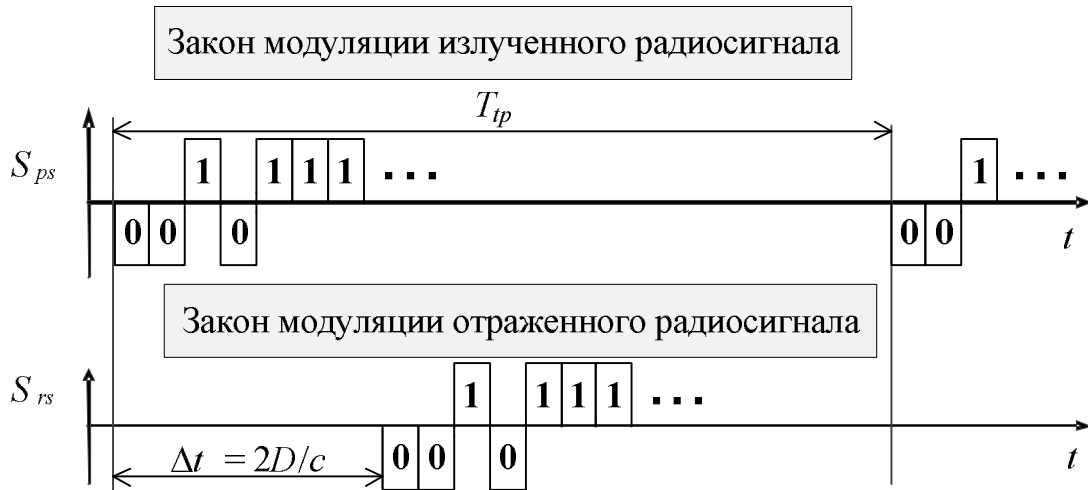


Рис. 2.6 — К пояснению принципа определения дальности в моноимпульсной РЛС

2.5.4. Определение углового положения цели

Диаграмма направленности (ДН) антенны играет принципиальную роль.

Пример 1: судовая РЛС, цели находятся на поверхности моря.

В горизонтальной плоскости ДН должна быть узкой (рис. 2.7 а): ширина определяется маневренными свойствам судна. Обычно оценивают ширину главного лепестка по половинной мощности или уровню -3 дБ (рис. 2.7 б).

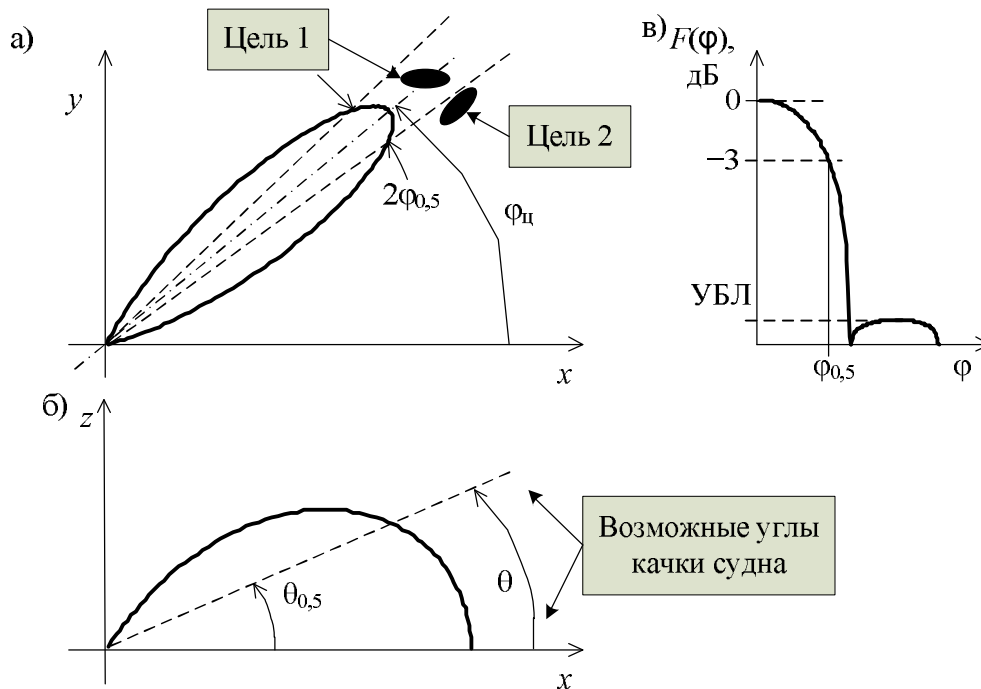


Рис. 2.7 — Вид ДН судовой РЛС кругового обзора

В вертикальной плоскости ширина ДН определяется возможными углами качки судна, так как при узкой ДН пришлось бы применять сложную систему стабилизации положения антенны.

Пример 2: РЛС обнаружения воздушных целей.

Варианты:

- единая антенна с «игольчатой ДН» (недостаток: малый сектор обзора, т.е. трудность наведения);
- антенная система с двумя различными лучами (рис. 2.8 а): обзорным (широким) и измерительным (узким);
- антенная система с двумя одинаковыми лучами веерообразного сечения (рис. 2.8 б).

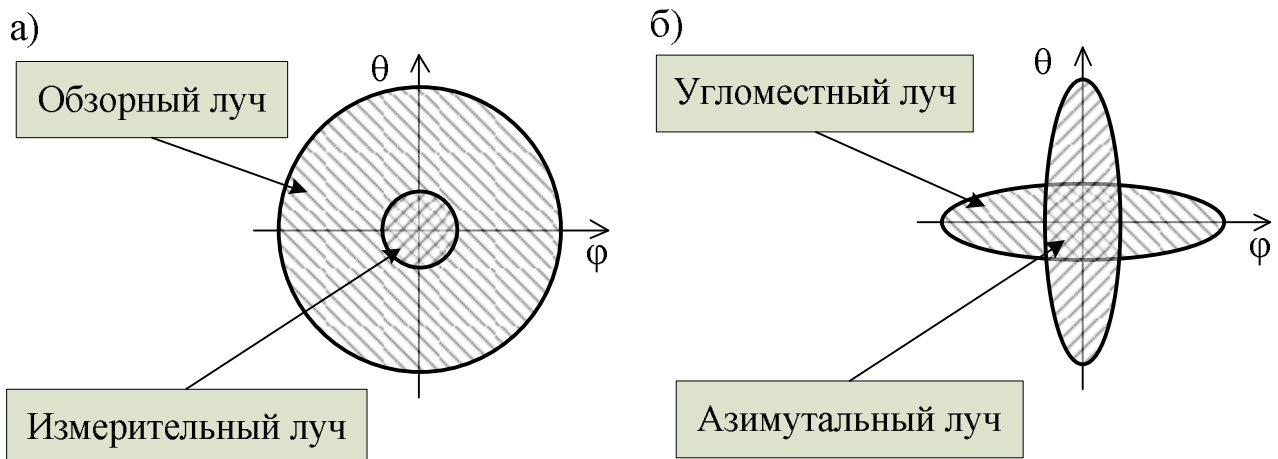


Рис. 2.8 — Сечения ДН антенной системы РЛС воздушных целей с расширенным лучом (а) и с двумя одинаковыми лучами (б)

2.5.5. Определение скорости цели

Обычно используется эффект Доплера.

Если источник волн (акустических или радио) движется относительно наблюдателя, то для несущей частоты f_0 длина волны λ_v как расстояние между гребнями волн **уменьшается при сближении** объектов и **увеличивается при удалении**. Эффект можно выразить количественно как изменение скорости распространения волн на величину скорости взаимного перемещения v

$$\lambda_v = \frac{c \mp v}{f_0},$$

Верхний знак соответствует сближению, а нижний — удалению.

Вместо изменения длины волны можно считать, что изменяется несущая частота f_v

$$\frac{c(1 \mp \delta_v)}{f_0} \approx \frac{c}{f_0(1 \pm \delta_v)} = \frac{c}{f_v};$$

$$f_v = f_0 \pm F_d,$$

где δ_v — относительное изменение скорости РРВ,

$$F_{\text{Д}} = f_0 \frac{v}{c} \text{ — частота Доплера.}$$

Примеры.

1. Скорость движения автомобиля с включённой сиреной $v = 120$ км/ч. Можно ли на слух обнаружить изменение частота звука сирены?

Решение. Скорость звука $c_s \approx 330$ м/с.

Выразим скорость автомобиля в тех же единицах

$$v = 120 / 3,6 = 33 \text{ м/с.}$$

Найдём относительное изменение частоты акустического сигнала

$$\delta_v = \frac{v}{c_s} \cdot 100 \% = \frac{33}{330} \cdot 100 \% = 10 \ \%.$$

Вывод. Так как считается, что человек на слух способен различать относительное изменение частоты сигнала на 1 %, большинство людей обнаружат изменение частоты звука сирены и при меньших скоростях.

2. Самолёт приближается со скоростью звука $M = 1200$ км/ч. Какую стабильность частоты приёмника РЛС необходимо обеспечить, чтобы измерить эту скорость с относительной погрешностью δ_m не более 10 %?

Решение. Найдём относительное изменение частоты радиосигнала

$$\delta_v = \frac{v}{c} = \frac{0,3}{300000} = 10^{-6}.$$

Если считать, что погрешность измерения скорости определяется только нестабильностью частоты гетеродина приёмника, то относительная нестабильность этой частоты δ_f не должна превышать

$$\delta_f \leq \delta_v \delta_m = 10^{-6} \cdot 0,1 = 10^{-7}.$$

Вывод. Так как относительная нестабильность кварцевых генераторов составляет 10^{-6} — 10^{-7} , для высокоточного измерения скорости самолётов доплеровским методом требуются специальные меры повышения стабильности частоты гетеродинов приёмных устройств.

3. Аналогичная задача для низкоорбитальных ИСЗ. Характерное значение скорости приближения к наземному объекту или удаления от него составляет $v \approx 3$ км/с.

Решение. Найдём относительное изменение частоты радиосигнала

$$\delta_v = \frac{v}{c} = 3/300000 = 10^{-5}.$$

Общий вывод: практическое использование эффекта Доплера требует высокой стабильности частоты.

2.6. Радионавигационные системы

Радионавигационные системы (РНС) предназначены для определения местоположения объекта. Существуют две основные разновидности РНС по виду решаемых задач:

- 1) объект и получатель находятся в одном месте определения координат.
- 2) получатель удален от объекта определения координат.

В настоящее время основными видами РНС являются спутниковые ГНСС.

2.6.1. Спутниковые системы позиционирования

Для решения **первой задачи** используются Глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС), прежде всего это американская *GPS* (*Global Positioning System*) и российская ГЛОНАСС (ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система).

Первые ИСЗ *GPS* запущены в 1974 году, полная группировка из 24 ИСЗ закончена в 1993 г. Сейчас в системе насчитывается 31 ИСЗ (часть находится в резерве). Круговые орбиты с высотой 20 200 км, 6 плоскостей по 4 ИСЗ. Наклонение 55° : охват приполярных областей плохой.

ГЛОНАСС: первые ИСЗ были запущены в 1983 году, группировка из 24 ИСЗ получена к 2011 году. Круговые орбиты с высотой 19 400 км, 3 плоскости по 8 ИСЗ. Наклонение $64,8^\circ$ — больше, чем у *GPS*, поэтому охват приполярных областей лучше, чем у *GPS*.

Бортовые комплексы ИСЗ (БК ИСЗ) излучают идентифицирующую информацию и опорные радиосигналы, синхронизированные по сигналам точного времени и промодулированные по фазе псевдослучайной последовательностью (ПСП). Синхронизацию осуществляет наземный комплекс точного времени (НК ТВ). На объекте находится абонентское оборудование, в решающем устройстве (РУ) которого содержатся данные о всех ИСЗ и программа, позволяющая отслеживать их местоположение (рис. 2.10).

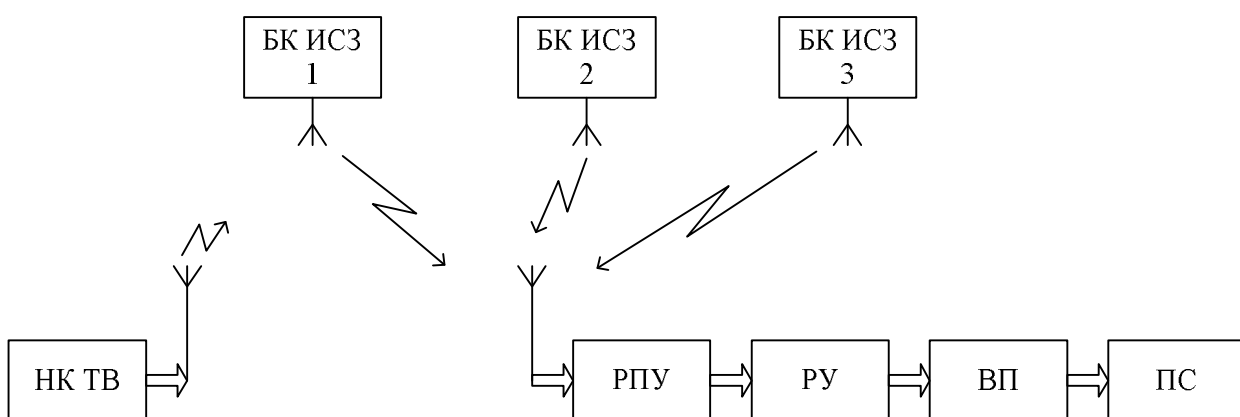


Рис. 2.10 — Структурная схема ГНСС

Если на объекте принимаются сигналы от трёх ИСЗ, то РУ определяет расстояния от каждого ИСЗ до объекта, затем методом триангуляции решается геометрическая задача по определению местоположения объекта на поверхности Земли (рис. 2.11). Если объект находится на некоторой высоте над землёй, то трех ИСЗ для определения высоты недостаточно: нужно 4 ИСЗ.

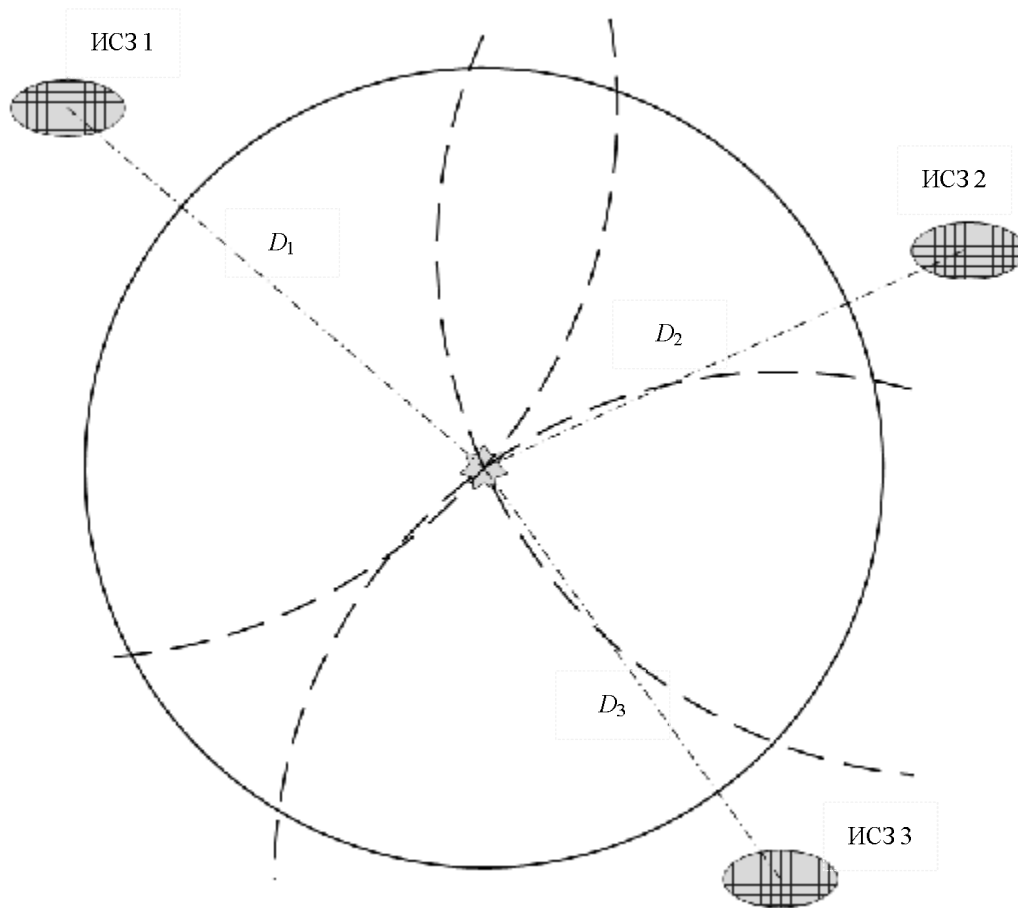


Рис. 2.11 — Триангуляция в спутниковой ГНС

В ГНСС определение местоположения ПС происходит **одновременно** при **пространственном** разнесении источников опорных радиосигналов.

2.6.2. Системы удалённого отслеживания местоположения

В случае аварии на морском или воздушном судне, либо если человек потерялся в труднодоступной местности, требуется доставить информацию о местоположении объекта поиска **удалённому получателю**.

Источник опорного сигнала должен находиться в определяемом месте, а сигнал должен фиксироваться либо одновременно несколькими ИСЗ (пространственный разнос), либо одним ИСЗ, но в несколько моментов времени.

Второй метод реализован в системе КОСПАС-SARSAT (Космическая Система Поиска Аварийных Судов — *Search And Rescue Satellite Aided Tracking*).

В месте поиска должно находиться одно из следующих устройств:

- аварийный радиобуй АРБ или *EPIRB (Emergency Position Indicating Radio Beacon)* — для морских судов;
- персональный радиобуй ПР или *PLB (Personal Locator Beacon)* — для людей;
- аварийный передатчик местоуказания АПМ или *ELT (Emergency Locator Transmitter)* — для воздушных судов.

На сегодняшний день в состав системы входят:

- космический сегмент из четырёх низкоорбитальных (от 800 км до 1000 км) и трёх геостационарных спутников;
- местные пользовательские терминалы — МПТ (*Local User Terminals — LUT*), которые имеют право создавать государства на своей территории;
- центр управления системой (*Mission Control Centre — MCC*) — единственный.

Связь с низколетящими спутниками обеспечивают *LEOLUT — Low Earth Orbit LUT*, с геостационарными — *GEOLUT — Geostationary Earth Orbit LUT*.

Принцип действия основан на эффекте Доплера.

В ПЗУ аварийного передатчика при регистрации закладывается идентифицирующая информация (ИИ): индивидуальный номер пользователя и серийный номер буя. РПД излучает ИИ, затем высокостабильный сигнал на частоте около 406 МГц в течение 0,44 с. Передачи повторяются примерно через 50 с. Этот интервал **отличается** для разных буёв, чтобы в случае одновременной активации их различить.

Первый сеанс (в момент t_0) используется для подстройки частоты РПУ ИСЗ.

После приема второй посылки (в момент t_1) в системе возникает состояние тревоги: известно, кто терпит бедствие, но нет координат. Нужно принять еще 3 посылки для их определения (рис. 2.12).

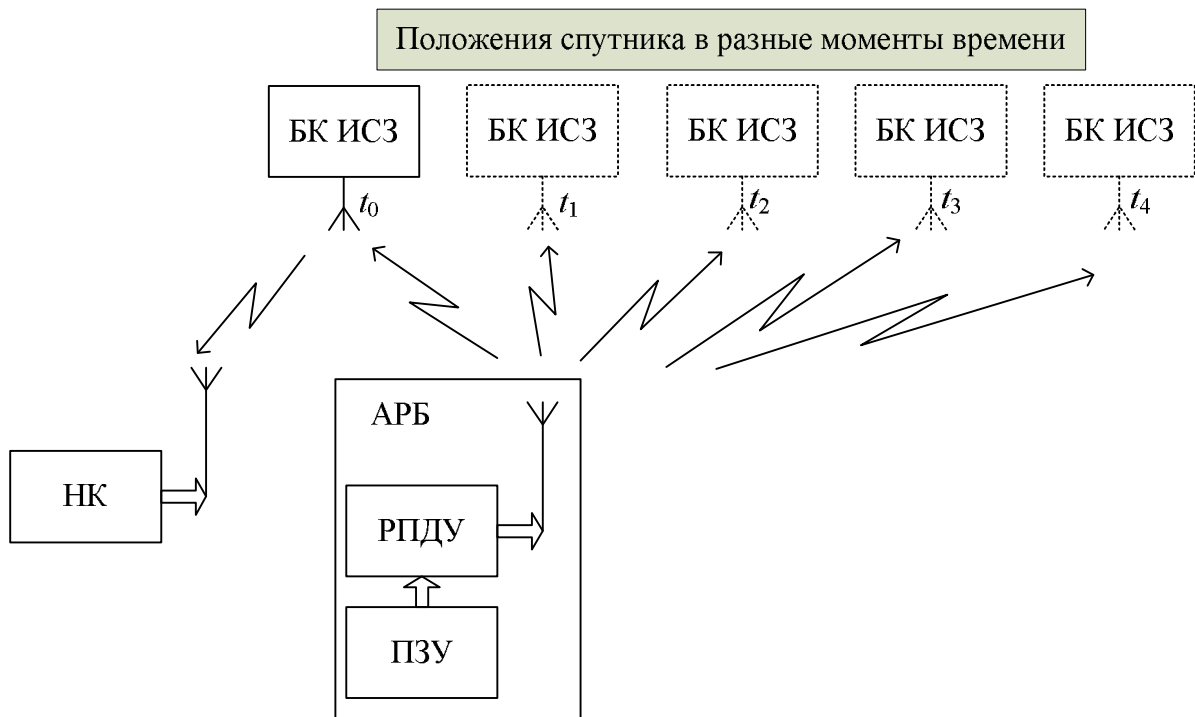


Рис. 2.12 — Структурная схема спутниковой системы КОСПАС-SARSAT

В системе измеряется не сама частота Доплера F_d , и её **изменение** от посылки к посылке ΔF_d (рис. 2.13).

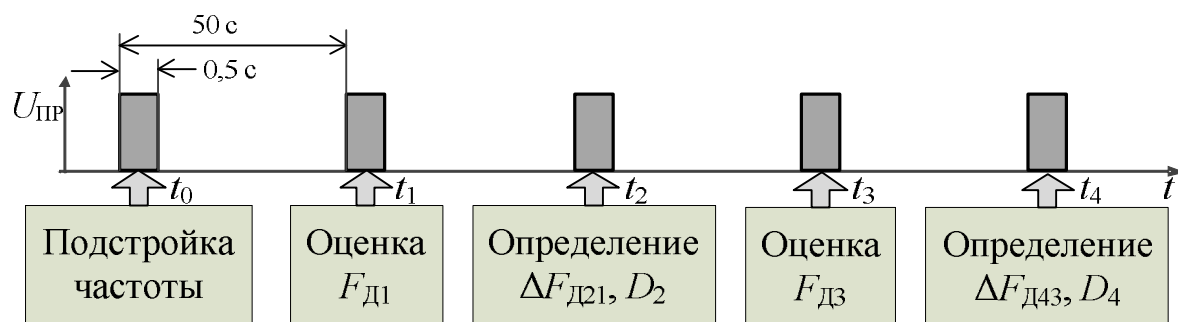


Рис. 2.13 — Временная диаграмма обработки сигнала на ИСЗ

Зная положения ИСЗ в моменты t_2 и t_4 , дальности D_2 и D_4 , можно на поверхности Земли графически определить две точки возможного положения АРБ, одна из которых будет ложной (2.14).

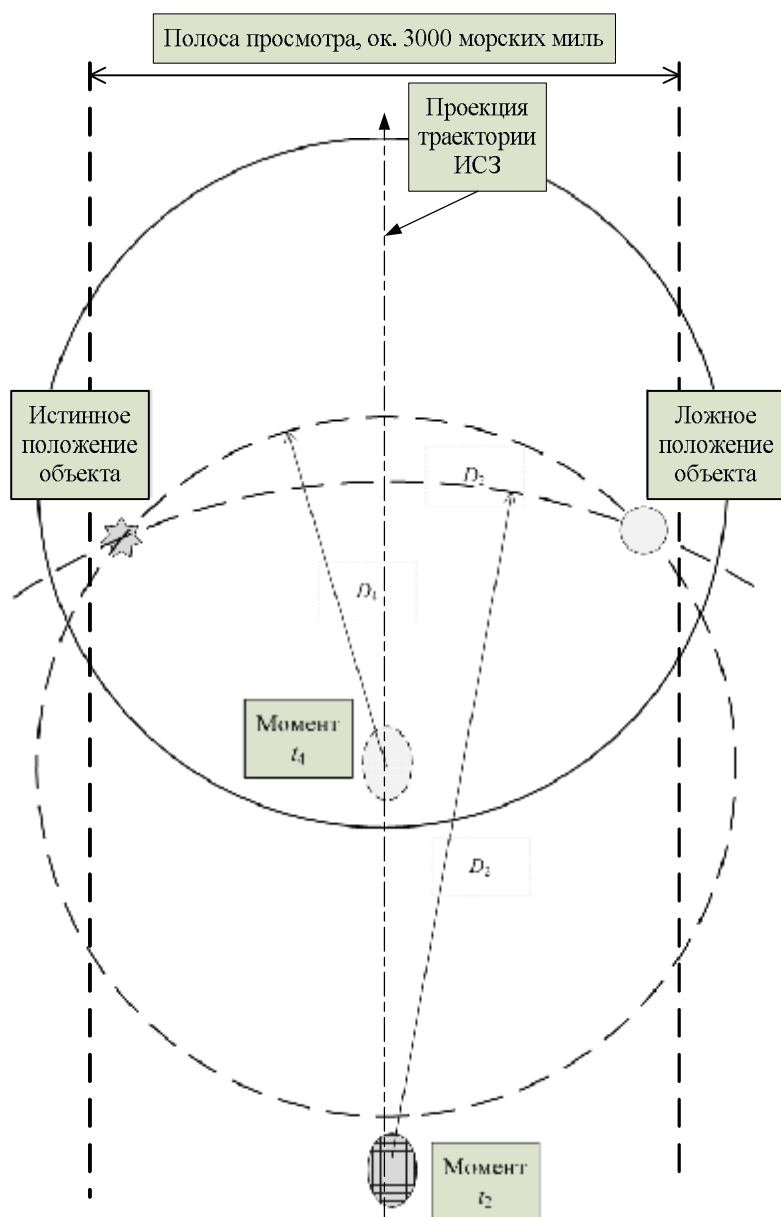


Рис. 2.14 — Оценка местоположения объекта по двум известным расстояниям до ИСЗ

Устранение неоднозначности выполняется путем учета вращения Земли: за 100 секунд угол поворота составит:

$$\alpha_{42} = \frac{360^\circ \cdot 100^\circ}{86400} = 0,42^\circ.$$

Недостаток низкоорбитальных ИСЗ: при малом числе может возникнуть **задержка доставки** сообщения на Землю до 1,5 часов.

Для геостационарных ИСЗ эффект Доплера отсутствует, поэтому определение координат невозможно. Информацию от таких ИСЗ можно использовать двумя путями:

— для обычных АРБ — предварительное уведомление об аварии (можно уточнить район бедствия через информационные сети);

— для АРБ со встроенными приёмниками ГНСС — приём и ретрансляция данных о местоположении, полученных самим АРБ и переданных им в эфир.

Сочетание достоинств низколетящих и геостационарных СЗ: использование **промежуточных орбит МЕО — Medium Earth Orbit**: планируется в ближайшие годы.

2.7. Сигналы, применяемые в РТС

2.7.1. Классификация сигналов

Основными характеристиками сигналов являются поведение во времени и характер изменения по амплитуде (табл. 2.2).

Таблица 2.2 — Классификация сигналов по характеру изменения во времени и по амплитуде

Характер изменения		Название	Получение
во времени	по амплитуде		
Непрерывное	Непрерывное	Аналоговые	Естественная форма
Дискретное	Непрерывное	Импульсные	Дискретизация по теореме Котельникова
Непрерывное	Дискретное	Квантованные	Квантование при заданном уровне искажений
Дискретное	Дискретное	Цифровые	Аналого-цифровое преобразование (АЦП) с кодированием в удобную форму

Достоинство аналоговых сигналов: простора реализации. Недостаток: любые искажения снижают достоверность переносимой информации.

Достоинство импульсных сигналов: в интервалах между импульсами можно разместить другую информацию (применяется в многоканальных системах связи с ВРК). Недостатки: также подвержены искажениям, расширенный спектр.

Преимущества цифровых сигналов:

— можно реализовать с помощью двоичной системы счисления;

- для передачи «0» и «1» использовать максимально различимую пару элементарных сигналов;
- при правильном решении о передаваемом символе никаких дополнительных искажений информации не возникает (наибольшая помехозащищенность);
- ключевой режим работы ПП приборов: малое потребление энергии, высокая надежность.

Недостатком цифровых сигналов является широкий спектр, так как требуются импульсные сигналы малой длительности.

Выводы.

1. Наиболее перспективны для передачи и обработки информации цифровые сигналы. Недостатки преодолеваются путем применения эффективных способов кодирования и использования высокопроизводительных сигнал-процессоров.
2. Смесь радиосигнала с помехами на входе приёмной части РТС — аналоговый сигнал по природе, поэтому качество работы всей РТС зависит от энергии принимаемого сигнала и способа его обработки.
3. Применение импульсных и цифровых сигналов требует синхронизации во времени, а часто — выполнения жестких требований к стабильности частоты и фазы ВЧ сигналов.

2.7.2. Информационные параметры сигналов

По степени предсказуемости сигналы делят на **детерминированные** и **случайные**.

Сигналы считаются детерминированными, если в любой момент времени полностью известны их форма и все параметры. Для синусоидальных сигналов это амплитуда A , период T , частота f или ω , начальная фаза φ_0

$$s(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = A \sin(2\pi ft + \varphi_0) = A \sin(2\pi\omega t + \varphi_0).$$

Идеализированный синусоидальный сигнал начался в **бесконечный интервал** времени тому назад и продолжается **бесконечное время**, значит, начальную фазу определить невозможно. На практике определяют фазу **относительно** некоторого момента времени или как сдвиг фаз между двумя сигналами, один из которых считается **опорным**.

Зададимся вопросом: могут ли передавать информацию детерминированные сигналы?

Не могут по определению, так как «детерминированный» означает, что о сигнале известно всё.

Значит ли, что случайные сигналы должны быть полностью непредсказуемые?

Нет, достаточно, если будет непредсказуемым только значение информационного параметра.

Какими ещё информационными параметрами обладает реальный синусоидальный сигнал?

Можно зафиксировать:

— момент включения сигнала t_0 (рис. 2.15 а) — ещё один параметр;

— моменты включения t_0 , выключения t_1 сигнала и его длительность τ — ещё **три** параметра (рис. 2.15 б).

Итак, импульсный радиосигнал имеет всего **6 параметров**, каждый из которых может быть информационным. Если ещё рассматривать **сочетания параметров**, то число возможных вариантов будет весьма большим.

Вопрос: каким минимальным набором сигналов можно передавать символы текста?

Достаточно взять два импульсных сигнала разной длительности («точка» и «тире») и задать два значения интервала между ними: получим **азбуку Морзе** (рис. 2.15 в).

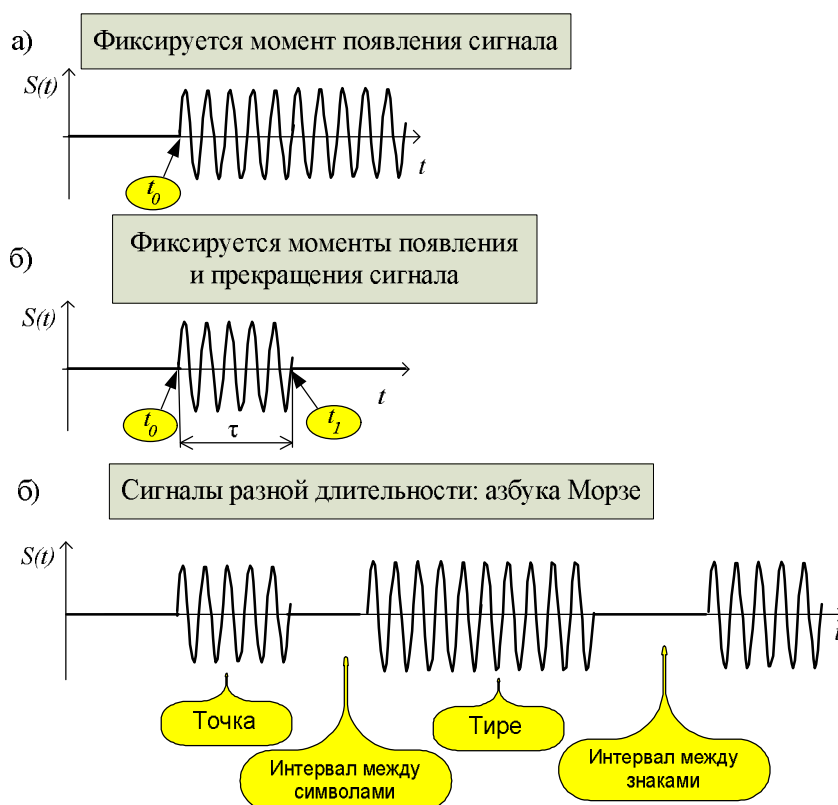


Рис. 2.15 — Включение ВЧ сигнала (а), фиксация длительности (б) и пример использования для передачи текста (в)

2.7.3. Основные виды помех

Помехи являются случайными по своей природе, но они, так же, как и сигналы, могут иметь непредсказуемую или квазисинусоидальную форму.

Помехи по природе делят на следующие виды:

- естественные (природные);
- промышленные;
- преднамеренные.

К естественным помехам относят:

- тепловые шумы Земли;
- шумы Солнца;

- космические шумы;
- электрические разряды в атмосфере;
- тепловые шумы ПП приборов.

«Шумом» называют колебание непредсказуемой формы во всем спектре радиочастот.

2.8. Объекты теории вероятностей и математической статистики

2.8.1. Случайный эксперимент и вероятность случайного события

Случайный эксперимент (*random experiment*) вводится следующим образом:

- известно число непредсказуемых **исходов** $i = 1, 2, \dots, m$: $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$;
- исключены посторонние факторы: условия чётко оговорены;
- состоит в проведении испытаний, в каждом из которых фиксируют, какой исход получен;
- допускает мысленное продолжение испытаний **до бесконечности**.

Элементарное случайное событие (*elementary event or basic event*): наступление одного из m возможных исходов.

Пример условий случайного эксперимента: бросание «монеты» с физически одинаковыми, но отличимыми сторонами. Толщина монеты считается равной нулю, чтобы исключить «стояние на ребре».

Число исходов $m = 2$; исходы: a_1 — выпал «Орёл» (О), a_2 — выпала «Решка» (Р).

Случайное событие (*random event*) определяется путём наложения **условий** на исходы случайного эксперимента, т.е. случайное событие (сложное) — это определённое **сочетание исходов** случайного эксперимента.

Пример: рассмотрим запись исходов 10 бросаний монеты:

О, Р, Р, О, О, Р, О, О, О, Р.

Выполним анализ этой записи.

1) Элементарные события: a_1 (О) — выпал 6 раз; a_2 (Р) — выпала 4 раза.

2) Сочетания пар элементарных событий:

- событие A_1 — «после О — Р» — ОР произошло 3 раза;
- событие A_2 — ОО произошло 3 раза;
- событие A_3 — РО произошло 2 раза;
- событие A_4 — РР произошло 1 раз;
- событие A_5 — «любое сочетание О — Р» ОР или РО произошло 5 раз.

Далее можно рассматривать сочетание троек элементарных событий и т.д.

Несовместимые события — события, которые не могут произойти одновременно. Элементарные события являются несовместимыми по определению условий эксперимента. В нашем примере события A_1 — A_4 — несовместимые, а A_1 и A_5 , а также A_2 и A_5 — совместимые.

После n испытаний можно определить число наступлений i -го элементарного события n_i и ввести понятие **частоты** (частости) как относительное количество «благоприятных исходов», т. е. наступлений данного события

$$p(a_i, n) = \frac{n_i}{n}.$$

Вероятность элементарного события вводится как предел частоты при бесконечном повторении случайного эксперимента:

$$P(a_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(a_i, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}.$$

Значения вероятностей лежат в пределах

$$0 \leq P(a_i) \leq 1, P(a_i) = 0 \quad P(a_i) = 1$$

при нуле — **невозможное** событие, при единице — определённое, **не случайное**.

2.8.2. Сумма и произведение событий

Суммой событий A и B называется **сложное событие** Y_Σ , состоящее в наступлении одного **ИЛИ** второго, т. е. любого из них

$$Y_\Sigma = A + B = A \vee B.$$

Вероятность суммы **несовместимых** событий равна сумме вероятностей. Так как элементарные события являются несовместимыми по определению, для них

$$P(a_i + a_j) = P(a_i \vee a_j) = P(a_i) + P(a_j).$$

Отсюда следует, что вероятность **суммы всех** элементарных событий т. е. всех возможных исходов случайного эксперимента равна единице — вероятность **полной группы** событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^m a_i\right) = \sum_{i=1}^m P(a_i) = 1.$$

Пример. Бросание игральной кости. Случайный эксперимент имеет $m = 6$ равновероятных исходов, следовательно, вероятность элементарного события равна

$$p_0 = 1/m = 1/6.$$

Рассмотрим геометрическую модель исходов данного эксперимента: каждое элементарное событие — квадрат, полная группа — фигура из 6 одинаковых квадратов. Вероятность элементарного события — отношение площади квадрата к суммарной площади фигуры.

По результатам двух бросаний кости зададим следующие события:

- A — сумма двух исходов 1 и 4: $A = a_1 + a_4$;
- B — сумма трёх исходов 4, 5 и 6: $B = a_4 + a_5 + a_6$;
- C — сумма двух исходов 2 и 3: $C = a_2 + a_3$; одновременно его можно рассматривать как «ненаступление ни A , ни B » (рис. 2.16).

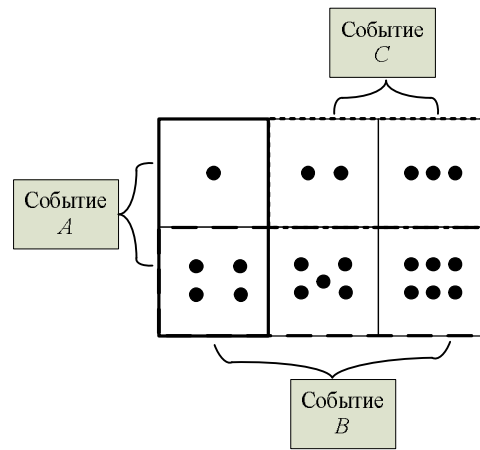


Рис. 2.16 — Геометрическая модель вероятности сложных событий

Так как событие A состоит из несовместимых элементарных событий, его вероятность $P(A) = 2p_0 = 2 \cdot 1/6 = 2/6$.

Аналогично вероятность B равна $P(B) = 3p_0 = 3 \cdot 1/6 = 3/6$.

Также вероятность C равна $P(C) = 2p_0 = 2/6$.

События A и B частично накладываются, т. е. являются совместимыми. Если бы они были несовместимыми, то вероятность суммы событий $P(A+B)$ была бы равна $2p_0 + 3p_0 = 5p_0$.

С помощью геометрической модели определяем действительную вероятность

$$P(A+B) = 4/6 = 4p_0.$$

Вывод: если события взаимосвязаны, то формула вероятности суммы должна быть другой! Попробуем сформулировать правило определения вероятности в этом случае.

Первый вариант действий: использование свойства полной группы событий.

Воспользуемся тем, что событие C есть **ненаступление** суммы событий A и B

$$C = \overline{A+B} = \overline{A \vee B}.$$

Так как C не накладывается ни на A , ни на B , все три события образуют полную группу, следовательно

$$P(C) + P(A+B) = 1,$$

откуда находим вероятность суммы A и B

$$P(A+B) = 1 - P(C) = 6/6 - 2/6 = 4/6 = 4p_0.$$

Получили правильный результат, но рассуждения оказались довольно громоздкими.

Второй вариант действий: использование условных вероятностей и вероятности произведения событий.

Понятие «**условная вероятность**» вводится как вероятность наступления одного события, **если** наступило другое. То есть наступившее событие «выбывает» из случайного эксперимента, его вероятность не учитывается.

В нашем примере A и B — **совместимые** события: если наступило B , то для A наступил **только** исход «4», то есть в геометрической модели площадь перекрытия составила одну клетку. По отношению к полной площади одна клетка является $1/6$, т. е. полная вероятность составила $1/6$. Но так как **наступило** событие B , можем определить, какую часть площади занимает исход «4» события A от площади события B .

Таким образом, геометрически условная вероятность равна отношению **площади перекрытия** событий к площади **наступившего** события:

— вероятность наступления A , если наступило B , равна

$$P(A/B) = 1/3;$$

— вероятность наступления B , если наступило A , равна

$$P(B/A) = 1/2.$$

Вводится понятие «**произведение**» или «**пересечение**» двух событий как наступление **одновременно** обоих событий: произошло первое событие **I** второе событие

$$Y_x = A \times B = A \wedge B.$$

Вероятность произведения несовместимых событий равна произведению их вероятностей. Например, для элементарных событий

$$P(a_i \times a_j) = P(a_i \wedge a_j) = P(a_i)P(a_j).$$

В нашем примере игральной кости для определения вероятности пар элементарных событий нужно рассмотреть число возможных сочетаний пар событий в двух последовательных испытаниях случайного эксперимента:

$$a_1 a_1; a_1 a_2; \dots a_6 a_6 \text{ — всего } 36 \text{ событий, следовательно, } P(a_i \wedge a_j) = 1/36 = p_0^2.$$

Вероятность произведения **взаимосвязанных** событий определяется с учетом **условных вероятностей**

$$P(A \times B) = P(A \wedge B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Проверим для нашего примера:

$$P(A)P(B/A) = 2/6 \cdot 1/2 = 1/6;$$

$$P(B)P(A/B) = 3/6 \cdot 1/3 = 1/6.$$

Вернемся к **сумме взаимосвязанных** событий. В геометрической модели видно, что область пересечения входит в сумму площадей два раза, то есть для правильного определения вероятности суммы взаимосвязанных событий нужно область пересечения исключить

$$P(A + B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B).$$

Проверим выполнение этого условия:

$$P(A+B) = P(A \vee B) = 2/6 + 3/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3.$$

2.8.3. Формула полной вероятности

Пусть на элементарных событиях задано взаимосвязанное с ними событие A . Это означает, что существует пересечения A с элементарными событиями и известны их вероятности $P(A \wedge a_1); P(A \wedge a_2); \dots P(A \wedge a_m)$.

Так как элементарные события несовместимы, их пересечения также несовместимы, поэтому полная вероятность равна сумме вероятностей всех пересечений

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(A \wedge a_i) = \sum_{i=1}^m P(A / a_i) P(a_i).$$

Смысл формулы очевиден: сложное событие мы понимаем как сочетание результатов случайного эксперимента, состоящих из элементарных событий.

2.8.4. Формула Байеса

Для вероятности пересечения событий сложного события A и элементарного события a_i имеем два варианта записи

$$P(A \vee a_i) = P(A) P(a_i / A) = P(a_i) P(A / a_i).$$

Отсюда можем выразить условную вероятность наступления элементарного события, если наступило событие A

$$P(a_i / A) = \frac{P(a_i) P(A / a_i)}{P(A)}$$

или, подставив вместо $P(A)$ формулу полной вероятности, получим

$$P(a_i / A) = \frac{P(a_i) P(A / a_i)}{\sum_{i=1}^m P(A / a_i) P(a_i)}.$$

Данная формула называется формулой **апостериорной вероятности гипотез Байеса**.

$P(a_i), P(A / a_i)$ называются прямыми или **априорными** вероятностями.

Если был произведен опыт, и в результате произошло событие A , то формула Байеса позволяет переоценить вероятности элементарных событий, найти так называемые **апостериорные** вероятности.

Вероятность $P(a_i / A)$ называется **обратной** вероятностью.

Ценность формулы Байеса проявляется тогда, когда нужно уточнить априорные вероятности по результатам **реального** эксперимента, который не может повторяться до бесконечности: такая ситуация часто встречается в задачах обработки сигналов.

2.9. Применение теории случайных событий к теории информации

Дискретный источник сообщений (ИС) генерирует определённый набор из m различных символов (сигналов отличающейся формы). Такой ИС уподобляется случайному эксперименту. Элементарные события случайного эксперимента называют **алфавитом** источника.

Сообщение — это набор из последовательности M символов: результат наблюдения ограниченного числа исходов случайного эксперимента.

ПС знает алфавит, но имеет неопределённость относительно **порядка** следования символов. Разрушение этой неопределённости есть процесс получения информации.

Так как последовательность символов дискретна, для разрушения неопределённости нужно ставить вопросы и получать на них ответы. Однако, если ответы не будут равновероятны, то количество вопросов для получения полной характеристики сообщения будет неопределённым.

Формальная логика содержит только две оценки какого-либо утверждения: «истина» и «ложь» («*true*» и «*false*»), поэтому для количественной оценки информации вводится понятие «бинарный вопрос»: вопрос, требующий ответа «да» или «нет».

Количество информации в битах численно равно количеству бинарных вопросов, которые нужно задать для определения исхода случайного эксперимента, если ответы на вопросы **равновероятны**.

Элементарные исходы случайного эксперимента можно пронумеровать, а номер выразить в двоичной системе счисления. Количество нужных разрядов определяется числом исходов или объёмом алфавита m .

Примеры. 1) Бросание монеты. «Орел» — «0», «Решка» — «1». Так как число исходов $m = 2$, нужен 1 разряд двоичного числа. Для определения, какой исход получен в результате одного эксперимента, достаточно **одного** бинарного вопроса, следовательно, в каждом исходе содержится количество информации I_i , равное одному биту.

2) Бросание правильного октаэдра (рис. 2.16): $m = 8$.

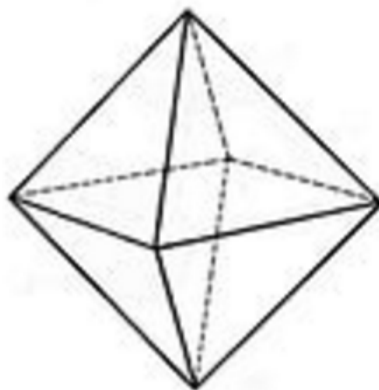


Рис. 2.16 — Правильный октаэдр

Нужно $\log_2 8 = 3$ двоичных разряда для записи исходов. Вопросы должны ставиться так, чтобы ответы были равновероятными, например: «Это чётное число?». Ответ разрушает **половину** неопределённости о результате. Всего понадо-

бится 3 вопроса, поэтому $I_i = \log_2 8 = 3$ бит. Число разрядов для передачи данных о номере исхода равно количеству информации.

3) Установление исторической правды. Во Франции было 16 королей по имени Людовик. Один из них сказал «Государство — это я». Сколько информации содержится в этом утверждении? Нужно $\log_2 16 = 4$ двоичных разряда для записи номеров исходов, значит, достаточно 4 бинарных вопросов: в правильно ответе 4 бита информации.

4) Бросание игральной кости: $m = 6$, т. е. $4 < m < 8$, значит, нужно 3 двоичных разряда для записи исходов. Ответ на бинарный вопрос «Это чётное число?» разрушает **половину** неопределённости, но новый вопрос не будет бинарным при равновероятных исходах, т. к. остаётся только три варианта ответов. Следовательно, количество информации не будет целым числом.

Количество информации всё равно составит $\log_2 6 = 2,58$ бит. Таким образом, количество информации в битах не всегда равно числу бит потока данных.

На основе данных рассуждений можно утверждать следующее.

1. Максимальное количество информации, переносимой одним двоичным символом, равно

$$I_i = \log_2 m.$$

2. Максимум достигается, если символы равновероятны.

При любом объёме алфавита m каждому символу можно сопоставить число в двоичной системе счисления. Сообщение из M символов приобретёт вид потока двоичных данных, каждый элемент которого принято называть битом.

Количество информации в потоке двоичных данных будет равно числу данных только в том случае, если число любых групп по 2, 3 и т. д. символов будет одинаковым.

Во всех других случаях поток данных будет **избыточным**, то есть содержать большее число символов, чем необходимо для передачи той информации, которая содержится в этом потоке.

Примеры. 1) ТВ высокой чёткости. Без устранения избыточности полоса одного канала должна быть около 150 МГц. Для снижения избыточности применяется специальное кодирование (форматы *MP3*, *MP4*, архиваторы *ZIP*, *RAR* и т. п.).

2) Рассказ Эдгара Алана По 1843 года «Золотой жук» («*The Gold Bug*»). Частотный анализ букв английского языка (приложение Б).

2.10. Случайные величины и их статистические характеристики

2.10.1. Законы распределения

Пусть x — переменная, которая может принимать любое значение в бесконечных пределах.

Случайной величиной называется переменная, значения которой связаны с результатами случайного эксперимента.

Вероятность того, что она будет меньше бесконечности, равна единице:

$$P(x < \infty) = 1.$$

Вероятность того, что она будет меньше «минус бесконечности», равна нулю:

$$P(x < -\infty) = 0.$$

Вводится понятие «**интегральный закон** распределения случайной величины» как вероятность того, что случайная величина будет меньше некоторого заданного значения a

$$F(a) = P(x < a).$$

Так как a — произвольная величина, применяется обозначение $F(x)$. При таком определении это непрерывная, монотонно возрастающая функция (рис. 2.17).

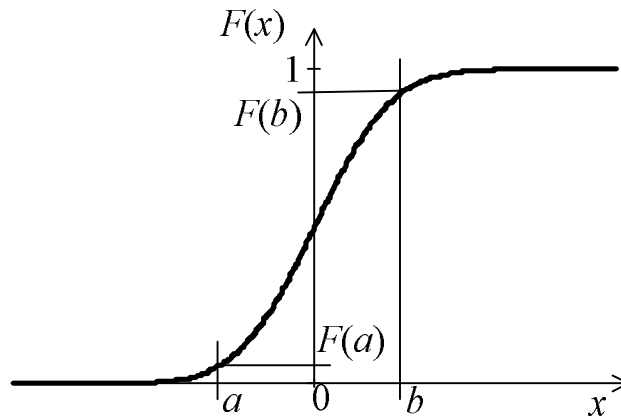


Рис. 2.17 — Характерный вид интегрального закона распределения случайной величины

Из определения интегрального закона следует, что вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[a, b]$ равна разности значений интегрального закона для точек b и a

$$P(x \in [a, b]) = F(b) - F(a).$$

Дифференциальный закон распределения или **плотность вероятностей** $W(x)$ формально определяется как производная от интегрального закона

$$W(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Наоборот, интегральный закон можно получить интегрированием плотности вероятностей

$$F(x) = \int_{-\infty}^x W(x) dx.$$

В отличие от интегрального закона дифференциальный не имеет прямого физического смысла: форма кривой плотности вероятностей позволяет установить, какие значения случайной величины более вероятны (рис. 2.18).

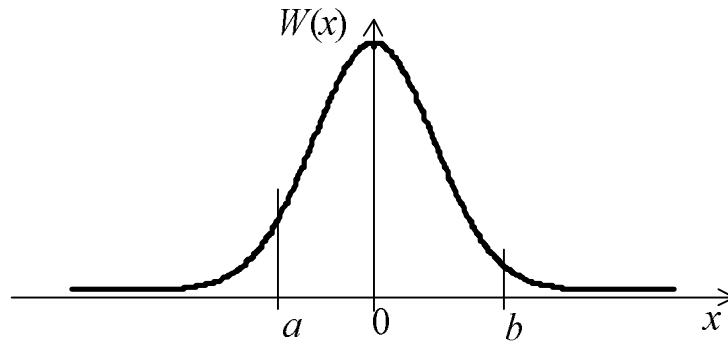


Рис. 2.18 — Характерный вид дифференциального закона распределения случайной величины

Физический смысл имеет площадь под этой кривой. Например, площадь под кривой плотности вероятностей, заключённая между точками a и b , равна вероятности попадания величины в этот интервал

$$P(x \in [a, b]) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b W(x) dx - \int_{-\infty}^a W(x) dx = \int_a^b W(x) dx .$$

2.10.2. Числовые характеристики случайной величины

На практике бывает достаточно знать отдельные характеристики законов распределения. Вводят понятие **числовых характеристик** случайной величины или **моментов**.

Момент первого порядка m_x называют «**математическим ожиданием**» (МОЖ), английское название *mathematical expectation*:

$$M_1 = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x W(x) dx .$$

Физический смысл математического ожидания состоит в том, что оно является **средним значением** (*average value*) случайной величины по всем её возможным значениям.

Момент второго порядка задаётся формулой

$$M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 W(x) dx .$$

Однако, если среднее значение случайной величины сместить относительно нуля, то величина этого момента изменится. Это изменение — регулярное, его всегда можно определить, зная смещение среднего. Если же из всех значений случайной величины вычесть среднее, то полученная величина момента уже не будет зависеть от МОЖ.

Вводится **центрированный** момент второго порядка σ_x^2 — **дисперсия** (*dispersion*)

$$s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 W(x) dx .$$

Физически дисперсия характеризует отклонения случайной величины от её МОЖ. Напрямую сравнивать эти величины невозможно, так как МОЖ определяется умножением плотности вероятностей на линейную функцию, а дисперсия — на квадратичную функцию. Например, если случайной величиной является напряжение сигнала, измеряемое в вольтах, то среднее значение будет также в вольтах, а дисперсия — в «вольтах в квадрате».

Для удобства такого сравнения вводят **среднеквадратическое отклонение** σ_x (СКО), английская аббревиатура *RMSD — Root-Mean Square Deviation*:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}.$$

2.11. Случайные процессы

2.11.1. Определения

Физически речь идёт об изменении некоторой величины во времени, когда присутствует та или иная непредсказуемость. При рассмотрении случайного эксперимента фактор времени не учитывается: считается, что условия эксперимента не меняются. Простейший пример СП: изменение условий случайного эксперимента по истечении заданного интервала времени.

Существует два подхода к определению понятия «случайный процесс» (СП).

1. Вспомогательное определение: **реализацией** СП называют каждое наблюдение СП на интервале времени от $-\infty$ до ∞ . После наблюдения реализация становится детерминированной функцией.

Случайный процесс $X(t)$ есть совокупность бесконечного числа реализаций.

2. Вспомогательное определение: **сечением** СП называют случайную величину $x(t)$, представляющую значения всех реализаций СП в момент времени t .

Случайный процесс $X(t)$ есть совокупность всех сечений СП на интервале времени от $-\infty$ до ∞ .

2.11.2. Вероятностные характеристики СП

Вводят вероятностные характеристики для сечений СП.

1) Интегральный закон распределения (*integral distribution*) сечений СП для момента t : $F(x, t)$.

2) Дифференциальный закон (одномерный) или плотность вероятностей СП (*probability density*):

$$W(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}.$$

Вводят также числовые характеристики для сечений СП — моменты, которые теперь **зависят от времени**.

1) Момент первого порядка — математическое ожидание:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x W(x, t) dx.$$

Математическое ожидание есть **среднее значение** случайного процесса или вероятностное среднее (*probabilistic average*).

Дисперсия — второй центрированный момент

$$\sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_x(t)]^2 W(x, t) dx.$$

Одномерная плотность вероятности недостаточна для описания случайного процесса, поскольку она характеризует процесс только в отдельных сечениях ансамбля реализаций и не дает представления о степени связи значений этого процесса в различных сечениях ансамбля реализаций.

Для оценки изменчивости случайного процесса во времени используют **двумерную плотность вероятностей** $W(x_1, x_2, t_1, t_2)$, где t_1 и t_2 — моменты времени, в которых наблюдают сечения x_1 и x_2 случайного процесса, соответственно.

Двумерная плотность вероятностей определяет взаимосвязь сечений случайного процесса, соответствующих моментам времени t_1 и t_2 .

Например, можно определить вероятность попадания случайной величины x_1 в интервал значений $[a, b]$ в момент t_1 , в то время как в момент t_2 она попадает в интервал значений $[c, d]$ по следующей формуле

$$P(x_1 \in [a, b], x_2 \in [c, d]) = \int_a^b \int_c^d W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Можно также ввести многомерную (N -мерную) плотность вероятностей $W(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$ для характеристики процесса в N моменты времени.

Стационарный в широком смысле случайный процесс ССП — это такой процесс, одномерный закон распределения которого не зависит от времени, а двумерный закон зависит только от временного интервала между сечениями τ и не зависит от положения интервала на оси времени.

В дальнейшем будем рассматривать только стационарные процессы.

Из приведенного выше определения следует, что для ССП выполняются следующие соотношения:

$$W(x, t) = W(x);$$

$$W(x_1, x_2, t_1, t_2) = W(x_1, x_2, \tau).$$

Соответственно, математическое ожидание и дисперсия ССП постоянны во времени (стационарность в узком смысле).

Эргодический случайный процесс ЭСП — это такой ССП, для полного описания которого достаточно знать только одну реализацию.

Математическое ожидание ЭСП:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt.$$

Дисперсия ЭСП

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - m_x]^2 dt.$$

Корреляционная функция вводится как среднее значение произведения двух значений центрированной случайной величины в сечениях, которые находятся на расстоянии τ друг от друга:

$$B(\Phi) = \int_a^b \int_c^d (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) W(x_1, x_2, \Phi) dx_1 dx_2.$$

При $\tau = 0$ $B(0) = \sigma_x^2$.

Корреляционная функция ЭСП

$$B(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x][x(t - \Phi) - m_x] dt.$$

Часто используют понятие **нормированной** корреляционной функции

$$R(\Phi) = B(\Phi) / \sigma_x^2.$$

Интервал корреляции определяют как интеграл от модуля нормированной корреляционной функции в бесконечных пределах

$$\Phi_{cor} = \int_{-\infty}^{+\infty} |R(t)| dt.$$

3. ДАЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ РТС

3.1. Общие положения

Во-первых, для нормальной работы любой РТС необходимо, чтобы в месте приёма уровень сигнала был достаточным. Мощность принимаемого сигнала зависит от следующих факторов:

- мощности передаваемого сигнала;
- характеристик применяемых антенн;
- условий РРВ (подстилающая поверхность, среда распространения).

Во-вторых, на дальность влияют:

- уровень требований к качественным показателям РТС (в зависимости от их назначения, например, средняя вероятность ошибки в ТКС или разрешающая способность по дальности в РЛС);

- характеристики и уровень помех;
- выбор алгоритмов обработки сигналов.

3.2. Мощность излучаемого сигнала в свободном пространстве

Пусть на выходе РПДУ мощность сигнала равна P_c . Излучаемая мощность P_r будет меньше за счёт потерь, которые характеризуются КПД **антенно-фидерного тракта** η_{af} . Передатчик соединён со входом антенны фидером длиной L с коэффициентом затухания α , антенна имеет КПД η_a (рис. 3.1).

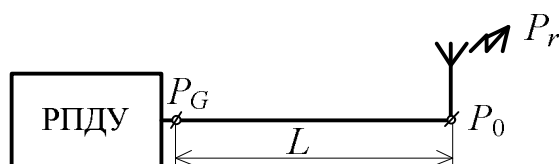


Рис. 3.1 — Схема передачи энергии в антенну

В эфир будет излучена мощность P_r , которая равна

$$P_r = \eta_{af} P_G = e^{-\alpha L} \eta_m \eta_a P_G,$$

где η_m — КПД входа антенны, определяемый условиями согласования (*matching*):

$$\eta_m = 1 - |\Gamma|^2 = \frac{4K}{(1+K)^2},$$

где Γ — коэффициент отражения;

K_{sw} — коэффициент стоячей волны (КСВ — *VSWR*)

$$K_{sw} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}.$$

Комплексный коэффициент отражения связан со входным сопротивлением антенны Z_{inp} и волновым сопротивлением фидера ρ_F соотношением

$$\Gamma = \frac{Z_{inp} - \rho_F}{Z_{inp} + \rho_F}.$$

Излучатель ЭМ энергии любых размеров на большом расстоянии представляет собой точечный излучатель, то есть создаёт сферическую волну.

Рассмотрим гипотетический изотропный излучатель, излучающий одинаково по всем направлениям в свободном пространстве (рис. 3.2 а). На расстоянии R окружим его сферой.

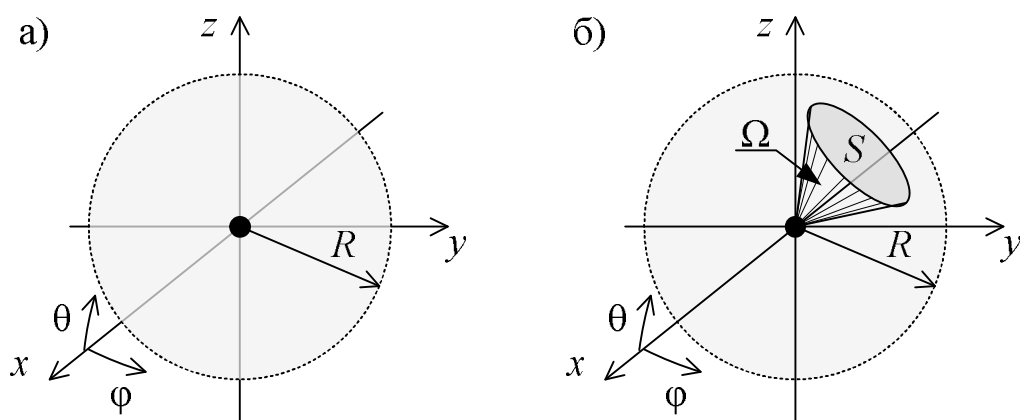


Рис. 3.2 — Сравнение изотропного (а) направленного (б) излучателей

Потоком мощности (*Power Flux*) через площадку называется та часть мощности, которая проходит через эту площадку.

Сфера радиуса R перекрывает всё излучение, поэтому поток мощности через неё равен излученной мощности P_r .

Плотностью потока мощности (ППМ) (*Power Flux Density*) называется мощность, которая проходится на единицу площади.

Сфера радиуса R имеет площадь поверхности, равную $4\pi R^2$, поэтому плотность потока мощности Π_R будет равна

$$\Pi_R = \frac{P_r}{4\pi R^2}. \quad (3.1)$$

Направленная антенна не «вырезает» часть мощности, а **концентрирует** её в определенном направлении. Если вся мощность проходит через часть поверхности сферы S , на которую опирается телесный угол Ω , то, по определению телесного угла (относительной площади участка сферы единичного радиуса к площади сферы)

$$\Pi_S = \frac{P_r}{S} = \frac{P_r}{\Omega R^2}. \quad (3.2)$$

Таким образом, направленная антенна увеличивает ППМ. Отношение ППМ, создаваемой направленной антенной, к ППМ от гипотетического изотропного излучателя называют **коэффициентом направленного действия** (КНД). Обычно он обозначается D от слова *Directivity*.

В рассмотренном идеализированном случае (площадка S «освещена» равномерно и за пределами телесного угла Ω излучения нет) КНД равен отношению всей площади сферы единичного радиуса к телесному углу излучения

$$D = \frac{\Pi_S}{\Pi_R} = \frac{4\pi}{\Omega}.$$

Пространственная диаграмма направленности (ДН) реальной антенны имеет **главный лепесток**, в пределах которого уровень излучения изменяется, и **боковое излучение**, поэтому КНД находят путём интегрирования **нормированной** (на уровень излучения в направлении главного максимума) ДН по мощности $F^2(\text{и,ц})$

$$D = \frac{4\pi}{\iint_{\Omega} F^2(\text{и,ц}) d\Omega}. \quad (3.3)$$

При оценке мощности, поступающей на вход приёмного устройства, нужно учитывать потери в антенно-фидерном тракте. Обычно вводят **коэффициент усиления антенны** (КУ) G , от слова *Gain* — «усиление», в котором учитывается КПД антенны (остальные составляющие потерь учитывают отдельно)

$$G = \eta_a D. \quad (3.4)$$

Подчеркнём, что КУ понимается только с позиции концентрации энергии, а усиления, аналогичного увеличению мощности сигнала, здесь нет.

Часто вводят **эффективную изотропно излучаемую мощность** (ЭИИМ) или *Effective Isotropic Radiated Power (EIRP)* для КУ передающей антенны G_T

$$EIRP = G_T P_0.$$

С учётом (3.4) соотношение для плотности потока мощности (3.2) от реальной передающей антенны в точке, находящейся на расстоянии R , приобретает вид

$$\Pi_R = \frac{G_T P_0}{4\pi R^2}. \quad (3.5)$$

3.3. Мощность принимаемого сигнала в РТС ПИ

На площадку площадью S_R приходится поток мощности P_R , равный

$$P_R = \Pi_R S_R = \frac{G_T P_0}{4\pi R^2} S_R. \quad (3.6)$$

Если приёмная антенна — апертурная, то S_R является физической площадью её апертуры (раскрыва). Однако эффективность преобразования потока мощности, приходящегося на апертуру, в мощность на входе приёмного устройства зависит от распределения токов и потерь в антенне, поэтому для реальных антенн вводят понятие эффективной площади S_{Re} . Так как распределение токов и ДН антенны взаимосвязаны, а в силу принципа взаимности параметры антенны в режиме приёма такие же, как в режиме передачи, эффективную площадь можно определить, зная КУ:

$$S_{Re} = \frac{\lambda^2 G_R}{4\pi}, \quad (3.7)$$

где λ — длина волны;

G_R — КУ приёмной антенны.

Подчеркнём, что формула (3.7) справедлива для антенн **любых типов**. Например, проволочная антенна типа «полуволновый симметричный вибратор» имеет эффективную площадь, равную $0,13\lambda^2$.

В реальных радиоприёмниках возникают **дополнительные потери**, обусловленные многими факторами: отражениями от подстилающей поверхности, поглощением в водяных парах, несогласованностью по поляризации и т. п.

Используя формулы (3.6, 3.7) и введя коэффициент дополнительных потерь k_{add} , можем записать окончательное выражение для мощности на входе приёмного устройства P_{inp} в виде

$$P_{inp} = k_{add} \Pi_R S_{Re} = k_{add} \frac{G_T P_0}{4\pi R^2} S_{Re} = \frac{k_{add} \lambda^2 G_T G_R P_0}{(4\pi R)^2}. \quad (3.8)$$

Анализ дополнительных потерь в радиолинии будет выполнен отдельно.

3.4. Мощность принимаемого сигнала в РЛС

3.4.1. Понятие эффективного поперечника рассеяния

В районе РЛ цели плотность потока мощности определяется формулой (3.5). Если РЛ цель представить как совокупность плоских площадок с характерными линейными размерами l_n ($n=1, 2...N$), находящихся под разными углами к падающему на них ЭМ полю, то на мощность сигнала, отраженного целью в направлении приёмной части РЛС (в однопозиционных РЛС направления приёма и передачи совпадают, в двухпозиционных они различны), будут влиять след. факторы:

- соотношение между размерами площадок l_n и длиной волны λ ;
- углы наклона площадок;
- формы переходных зон между площадками (острые или сглаженные рёбра);
- свойства конструкционных материалов (поглощение или отражение ЭМ волн);
- изменения ракурса цели при относительном перемещении РЛС и цели.

В зависимости от соотношения между l_n и λ отражение может зеркальным или диффузным (рис. 3.3).

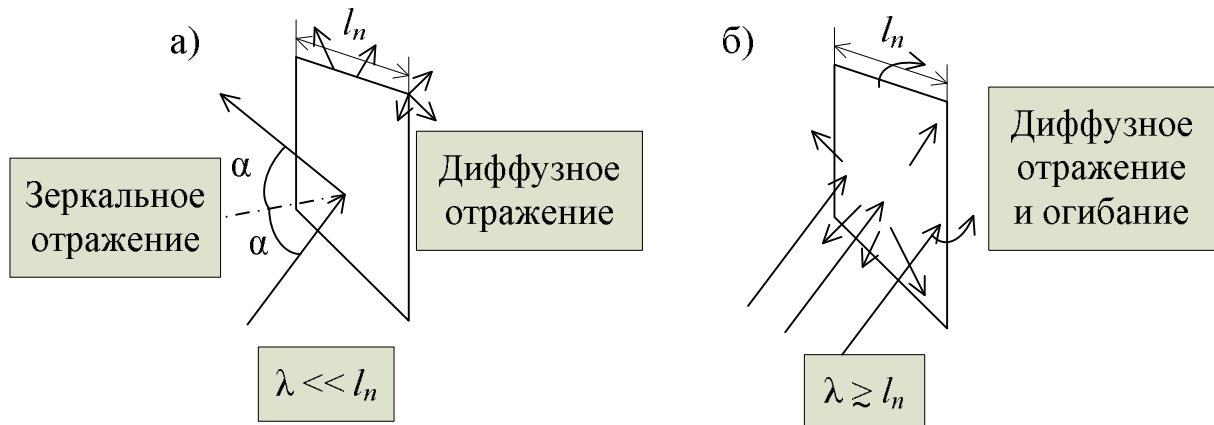


Рис. 3.3 — Отражение от большой площадки с острыми кромками (а); отражение от малой площадки и огибание её (б)

Если размеры металлической площадки много больше длины волны (см. рис. 3.3 а), то основная поверхность площадки отражает ЭМ волны зеркально, однако её острые углы и кромки, имеющие радиус кривизны, меньший длины волны, отражают поле диффузно, то есть во всех направлениях.

Если размеры любого объекта соизмеримы или меньше длины волны, то волна способна не только отражаться во всех направлениях, но и огибать препятствие на своём пути (см. рис. 3.3 б).

Чаще всего в радиолокации используются сантиметровый и дециметровый диапазоны длин волн, так как размеры антенн с высокой направленностью оказываются приемлемыми. Следовательно, РЛ цели относятся к объектам, большим по

сравнению с длиной волны, причём, как правило, они имеют сложную форму с плоскими участками.

При изменении ракурса цели будут наблюдаться «всплески» отраженной мощности, когда цель повернётся плоским участком своей поверхности на РЛС, и, наоборот, «провалы», когда зеркально отраженный сигнал будет направлен за пределы главного луча ДН антенны. По аналогии с диаграммой направленности антенны можно ввести **диаграмму рассеяния** РЛ цели $F_r(\theta, \varphi)$ как угловую зависимость уровня рассеянного целью сигнала. Со стороны наблюдателя ракурс цели, а значит, и уровень отраженного сигнала есть случайная величина. Можно выполнить теоретический анализ диаграммы рассеяния цели, численный или физический эксперимент для её определения. В результате можно оценить **усредненную** отражательную способность цели и пределы её изменения, связанные с дисперсией и СКО (рис. 3.4.).

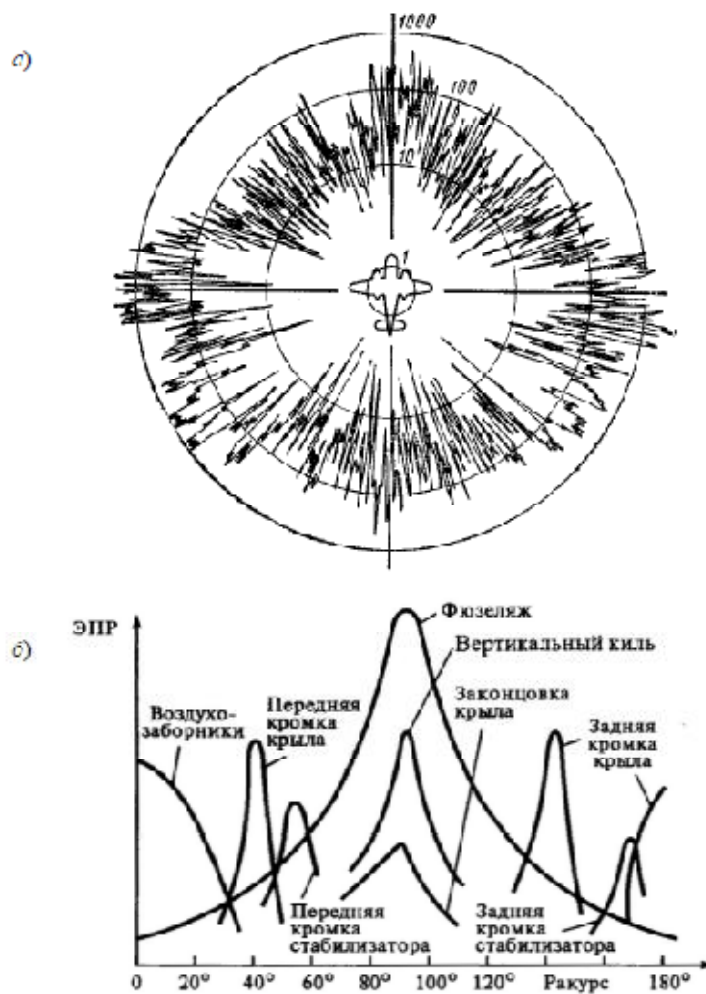


Рис. 3.4 — Возможный вид диаграммы рассеяния самолёта (а) и результаты её анализа (б)

Очевидно, что металлическая сфера будет иметь равномерную диаграмму рассеяния, поэтому принято вводить **эффективную площадь** или **эффективный поперечник** рассеяния (ЭПР) или *Effective Cross-Section (ECS)* σ_e как площадь поперечного сечения сферы, отражающей в сторону приёмника такую же среднюю мощность ЭМ волны, что и реальная цель. Для однопозиционной РЛС (*Monostatic*

Radar) ЭПР называют **радиолокационным поперечником** рассеяния (РПР) или *Radar Cross-Section (RCS)*.

3.4.2. Мощность на входе приёмного устройства РЛС

Из определения ЭПР следует, что реальная цель заменяется изотропным источником сигнала с излучаемой мощностью P_T , равной потоку падающей мощности через площадку площадью σ_e (3.6)

$$P_T = \Pi_s \sigma_e = \frac{GP_0}{4\pi R^2} \sigma_e. \quad (3.9)$$

Для однопозиционной локации расстояние от цели до РЛС равно R , а для приёма и передачи используется одна и та же антенна, поэтому соотношения (3.1, 3.8, 3.9) дают основную формулу радиолокации

$$P_{inR} = \frac{k_{add} \lambda^2 G^2 P_0}{(4\pi)^3 R^4} \sigma_e. \quad (3.10)$$

Здесь, как и в (3.8), учтены дополнительные потери в радиолинии.

3.4.3. Изменение «заметности» радиолокационных целей

На практике решаются две противоположные задачи:

- увеличение ЭПР (например, при поиске аварийного судна или самолета);
- уменьшение ЭПР (для скрытности боевых машин).

ЭПР можно увеличить с помощью угловых отражателей (рис. 3.5).

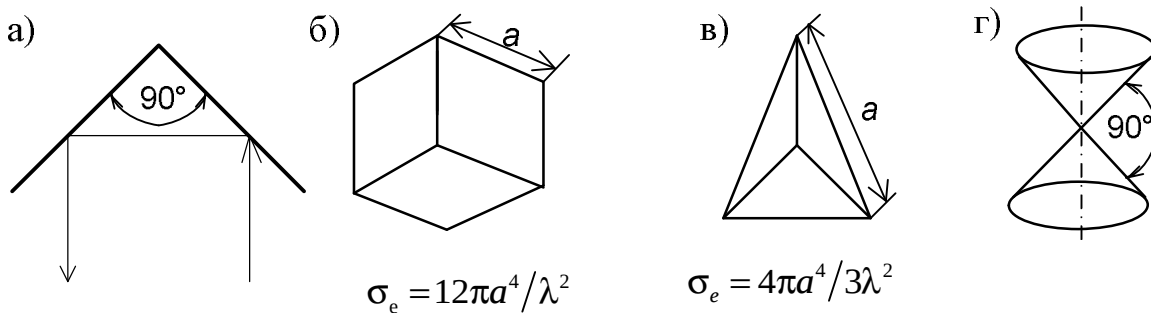


Рис. 3.5 — Принцип действия (а), угловые отражатели с квадратными (б) и треугольными (в) гранями; биконический отражатель (г)

Для ЭПР углового отражателя с квадратными гранями размером a имеется соотношение

$$\sigma_e = 12\pi a^4 / \lambda^2.$$

Для углового отражателя с треугольными гранями

$$\sigma_e = 4\pi a^4 / 3\lambda^2.$$

Из приведенных соотношений видно, что угловой отражатель с треугольными гранями при прочих равных условиях дает в девять раз меньшее значение по сравнению с угловым отражателем с квадратными гранями, но имеет более жесткую конструкцию, поэтому чаще применяется.

Другой вариант: применение специальных устройств — радиолокационных ответчиков, например, РЛО для морских судов (SART — Search And Rescue Radar Transponder).

Примером достижения малозаметности может служить технология **Stealth**: которая состоит в выборе формы цели и покрытий. Форма должна обеспечивать отражение в сторону от РЛС либо многократное отражение между элементами конструкции. При каждом отражении сигнал ослабляется за счет поглощающих покрытий (рис. 3.6).



Рис. 3.6 — Внешний вид самолёта F117A

Представление о пределах ЭПР реальных целей даёт таблица 3.1.

Таблица 3.1 — ЭПР различных целей

Радиолокационная цель	$\sigma_e, \text{м}^2$
Средний корабль водоизмещением от 10^3 до $3 \cdot 10^4$ т	$3 \cdot 10^3$ — 10^4
Малый корабль водоизмещением от 60 до 200 т	50—250
Подводная лодка в надводном положении	140—35
Транспортный самолёт, дальний бомбардировщик	100—20
Средний бомбардировщик	30—5
Бронетранспортёр	30—5
Тягач тяжёлый	20—15
Тяжёлый истребитель	10—5
Танк	9—6
Автомобиль	8—6
Лёгкий истребитель	5—2
Человек ($\lambda = 3 \text{ см}$)	1,2—0,5
Рубка подводной лодки	1
Крылатая ракета	1 — 10^{-2}
Стая птиц, попадающих в разрешаемый объём РЛС	1 — 10^{-2}
Боеголовка баллистической ракеты	1 — 10^{-3}
Голубь ($\lambda = 3 \text{ см}$)	10^{-2} — 10^{-3}
Пчела рабочая ($\lambda = 10$ — $0,8 \text{ см}$)	$6 \cdot 10^{-3}$ — 10^{-8}

3.5. Критерии ограничения дальности действия РТС

Независимо от типа РТС энергетика радиолинии должна позволять выделить сигнал на фоне помех. Для количественных оценок вводят, в основном, два вида отношения сигнал — помеха (ОСП) — *Signal-to-Noise Ratio*: ОСП по мощности и энергетическое ОСП.

ОСП по мощности r_{snP} применяют в случае непрерывных или импульсных сигналов при простейших способах демодуляции (например, детектирование АМ)

$$r_{snP} = \frac{P_{inp}}{P_n},$$

где P_n — мощность помехи типа шума.

Простейшие виды демодуляции обеспечивают высокое качество оценки принятого видеосигнала при больших значениях ОСП. Для этого приходится сужать полосу пропускания приёмного устройства, что приводит к снижению достоверности принимаемой информации (рис. 3.6).

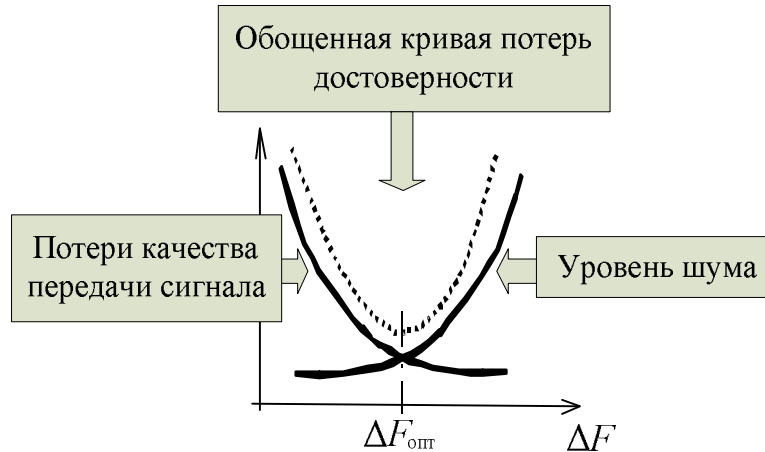


Рис. 3.6 — К выбору оптимальной полосы пропускания приёмника

Они не используют или недостаточно используют априорную информацию о форме сигнала. Алгоритмы обработки, полностью использующие эту информацию, называют **оптимальной обработкой** сигналов или **оптимальным приёмом**. Реальные устройства обычно не полностью реализуют теоретические условия оптимального приёма, поэтому их называют **квазиоптимальными**.

В основу оптимальных алгоритмов чаще всего закладывают сравнение принятой смеси сигнала и помехи с образцом сигнала на заданном интервале времени τ (для импульсных сигналов этот интервал равен длительности импульса). Результат обработки при этом определяется не мощностью, а энергией сигнала и аналогичной характеристикой помехи.

Если $U(t)$ — напряжение сигнала, [В], то энергию сигнала E_s , [Дж = В·А·с = В²/Ом·с] определяют для **единичного сопротивления** нагрузки

$$E_s = \int_0^{\tau} U^2(t) dt.$$

Если обозначить $n(t)$ реализацию помехи, наблюдаемую на интервале τ , то формально можно записать выражение для энергии помехи E_n

$$E_n = \int_0^{\tau} n^2(t) dt.$$

Однако помеха есть случайный процесс, поэтому для количественной оценки энергии помехи необходимо выбрать математическую модель её и применить методы теории вероятностей и математической статистики.

Общее выражение для **энергетического отношения сигнал-помеха** имеет следующий вид

$$r_{SNE} = \frac{E_s}{E_n}.$$

Критерием для определения дальности действия конкретной РТС является снижение ОСП либо по мощности, либо по энергии до минимально допустимого уровня.

3.6. Дополнительные потери в радиолинии

3.6.1. Источники дополнительных потерь

Потери могут быть вызваны техническими и природными факторами. К техническим относятся:

- нестабильность уровня сигнала в передатчике и приёмнике;
- неточность наведения антенн и поляризационное рассогласование;
- нестабильность усиления антенн (изменение формы антенны, люфты в устройстве крепления).

Природные факторы:

1) поглощение радиоволн в атмосфере:

- в газах (кислороде и азоте);
- в парах воды;
- в гидрометеорах (осадках);

2) поворот плоскости поляризации в ионосфере за счёт эффекта Фарадея;

3) интерференция прямой волны и волны, отражённой от подстилающей поверхности.

Суммарное ослабление на дистанции L можно оценить, если известно удельное ослабление α , дБ/км

$$k_{addL} = 10^{-\alpha L/10}.$$

Удельное ослабление, связанное с поглощением в атмосфере, зависит от частоты.

В ясную погоду для дециметровых и более длинных волн поглощение несущественно.

Для сантиметровых и более коротких волн в частотной зависимости удельного ослабления наблюдаются резонансные участки как повышенного, так и пониженного ослабления (рис. 3.7).

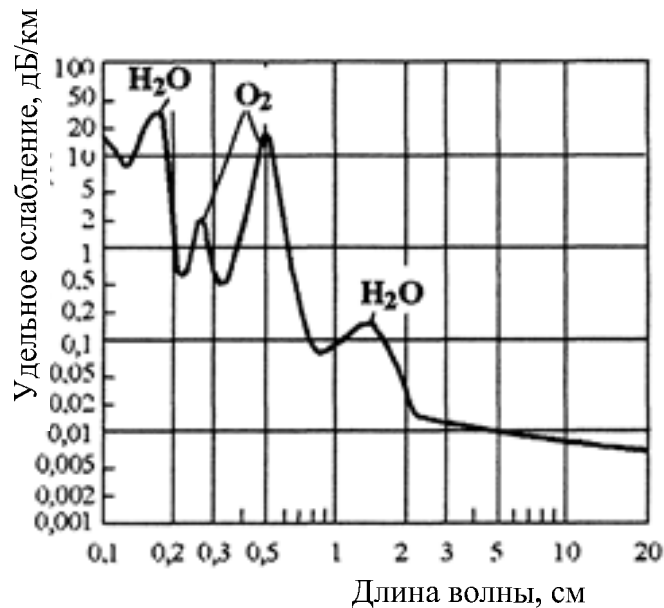


Рис. 3.7— Зависимость удельного ослабления в атмосфере от длины волны

При уменьшении длины волны, начиная с 2 см, изменение удельного ослабления носит резонансный характер за счет эффективного взаимодействия радиоволн с молекулами водяного пара H_2O (резонансные длины волн 1,35 см и 0,17 см) и кислорода O_2 (резонансы при $\lambda_{\text{res}} = 0,5$ см и 0,25 см).

В промежутках между резонансами в диапазоне длин радиоволн от 2 мм до 1,35 см наблюдаются три «окна прозрачности»:

- $\lambda \approx 8,6$ мм; $f \approx 35$ ГГц; $\alpha \approx 0,07$ дБ/км;
- $\lambda \approx 3,6$ мм; $f \approx 95$ ГГц; $\alpha \approx 0,4$ дБ/км;
- $\lambda \approx 2,2$ мм; $f \approx 140$ ГГц; $\alpha \approx 0,5$ дБ/км.

Гидрометеоры (дождь, туман, снег, град), а также пленки воды на антенных обтекателях или непосредственно на рефлекторах параболических антенн могут существенно ослаблять энергию радиоволн.

Наибольшее удельное ослабление (рис. 3.8) вносят частицы влаги в случае ливней. Однако и более слабые дожди, туманы приводят к чрезвычайно большим ослаблениям на миллиметровых волнах.

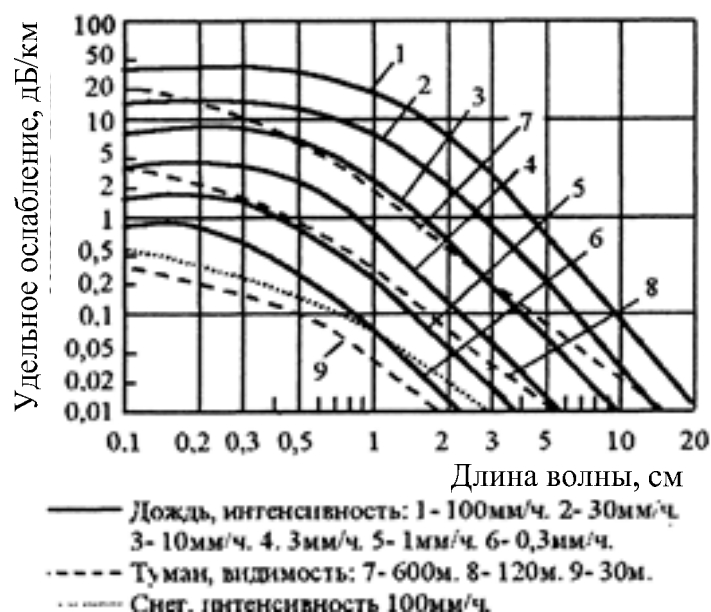


Рис. 3.8 — Зависимость удельного ослабления в
полосе дождя и в тумане от длины волны

Характер погоды в США часто оценивают по влиянию дождя средней интенсивности 3 мм/ч, вероятность которого для Вашингтона оценивается величиной 0,012. В дециметровом и даже десятисантиметровом диапазоне такой дождь существенно не увеличивает удельного ослабления ясной погоды, и лишь на длине волны 5 см удваивает последнее. В окнах прозрачности около 140 ГГц ослабление в дожде превышает 8 дБ/км.

Туманы характеризуются меньшими размерами капель, чем дожди, поэтому они сказываются сильнее на миллиметровых волнах, чем на сантиметровых.

Снег и град существенное влияют только, если они подтаивают и покрываются водяной пленкой.

Плёнки влаги толщиной 0,1—0,5 мм на антенных обтекателях приводят к дополнительным потерям 1—5 дБ на волнах длиной около 10 см и 5—12 дБ на волнах длиной около 2 см. Такие же плёнки на рефлекторах параболических антенн на волнах длиной около 2 см приводят к потерям 0,03—3 дБ.

Методика расчета ослабления радиосигнала в дожде состоит в следующем. По допустимому проценту времени кратковременных прерываний сигнала в радиолинии определяется допустимый процент времени кратковременных прерываний связи в течение года из-за дождя и интенсивность дождя, которая не превышает в этом проценте времени любого года. Для климатических зон России указанные выше проценты времени и интенсивность дождя, при которой необходимо обеспечить работу радиолиний, представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 — Данные о прерываниях радиосвязи из-за дождя

Тип телекоммуникационной системы	Мобильная связь	Спутниковая фиксированная связь	Один пролет радиорелейной линии связи
Допустимый процент времени года кратковременных	1%	0,1%	0,01%

прерываний связи из-за дождя			
Интенсивность дождя, мм/ч, которая не превышает в допустимом проценте времени года на территории России	2	6—8	30

Погонное ослабление в дожде

$$\alpha_r = aI^b,$$

где a , b — коэффициенты (табл. 3.3).

Таблица 3.3 — Значения коэффициентов a , b

Частота, ГГц	7	8	10	12	20	30	40	45
a	0,0026	0,004	0,009	0,017	0,07	0,17	0,31	0,39
b	1,31	1,31	1,26	1,29	1,07	1,00	0,93	0,90

Эквивалентная длина трассы L_e меньше физической длины L из-за неравномерной интенсивности дождя (ливневая зона 2—3 км, остальное — дождь средней интенсивности). Для горизонтальных трасс на высотах до 4 км применяется формула

$$L_e = \frac{L}{1 + L / 35e^{-0,015I}}.$$

Для спутниковых и авиационных линий на высоте свыше 4 км — экспериментальные кривые МСЭ (рис. 3.9).

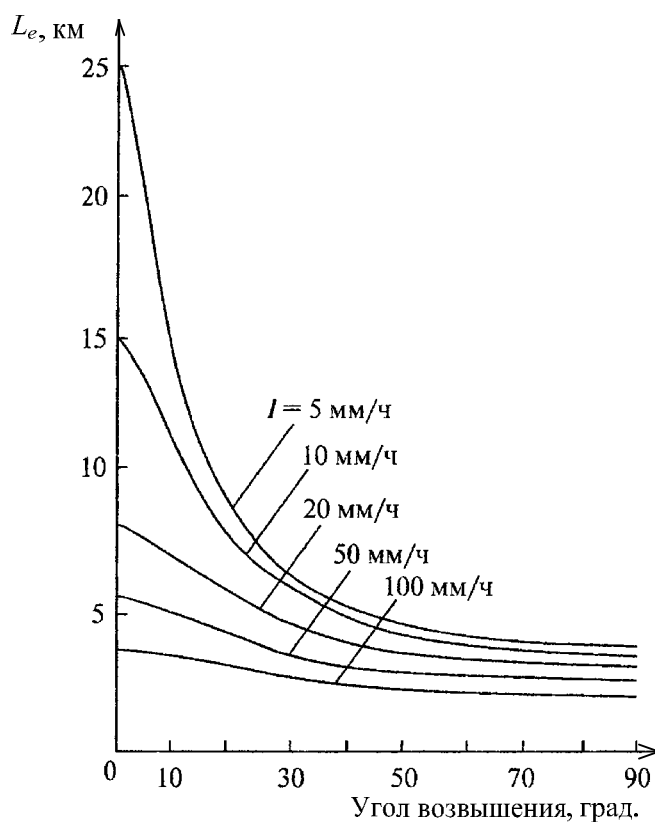


Рис. 3.9— Зависимости эквивалентной длины трассы в дожде от интенсивности дождя и угла возвышения трассы

3.6.2. Поляризационные потери

Линейная поляризация: для угла рассогласования γ коэффициент дополнительных потерь k_{addP} равен

$$k_{addP} = \cos^2 \gamma.$$

Реально: эффект деполяризации при отражении от металлических объектов (рис. 3.10).

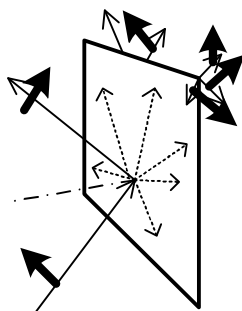


Рис. 3.10 — К эффекту деполяризации

Эффект Фарадея в ионосфере: поворот плоскости поляризации. В спутниковых системах чаще всего применяется круговая поляризация. Неидеальная поляризация — эллиптическая (рис. 3.11).

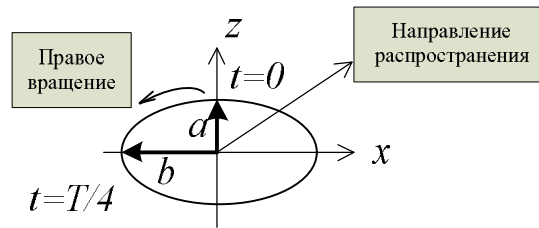


Рис. 3.11— Параметры поляризационного эллипса

Круговая поляризация рассматривается как сумма 2 линейных поляризаций со сдвигом фаз на 90° , если амплитуды одинаковы. При разных амплитудах поляризация является эллиптической. Вводится коэффициент эллиптичности

$$k_{el} = \pm \frac{a}{b}.$$

Верхний знак соответствует **правому вращению** (против часовой стрелки), нижний — левому.

Если одна антенна создаёт поле линейной поляризации, а другая — круговой, то потери составят 3 дБ, но **не будут зависеть** от ориентации!

Развязка сигналов, переносимых полями с противоположными круговыми поляризации, теоретически бесконечна, практически она может составлять 20—30 дБ. Примеры применения:

- поляризационное разделение каналов;
- уменьшение влияния отражений от местных предметов (при отражении от металлической плоскости направление вращения изменяется на противоположное — см. ниже).

3.6.3. Влияние подстилающей поверхности

Если в ДН передающей антенны попадает подстилающая поверхность, то в точке расположения цели (*Target*) возникает интерференция прямого и отражённого луча (рис. 3.12).

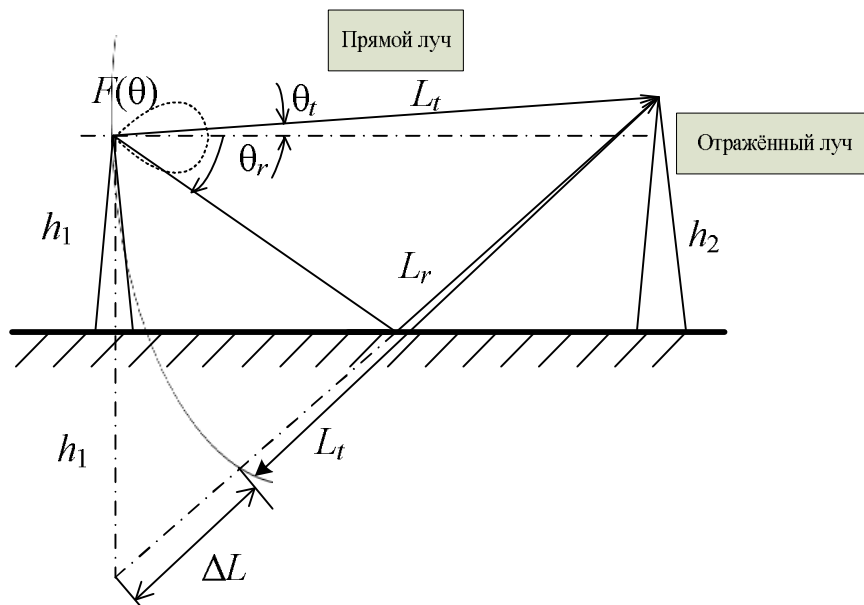


Рис. 3.12 — К влиянию подстилающей поверхности

Поле в точке приёма (или в районе цели) E_{Σ} будет равно

$$E_{\Sigma} = E_0 \left[F(\theta_t) + F(\theta_r) k_D k_G \Gamma e^{\beta \Delta L} \right],$$

где E_0 — поля прямого луча при наведении антенны на максимум;

Γ — комплексный коэффициент отражения от подстилающей поверхности;

β — постоянная распространения (для обычных сред волновое число $2\pi/\lambda$);

k_D — коэффициент шероховатости поверхности;

k_G — коэффициент поглощения в растительности (для средних широт Земли от 0,03 до 0,3).

ΔL — разность хода лучей.

Коэффициент отражения определяется:

— поляризацией падающей волны;

— электрическими параметрами поверхности.

Для металла, гладкой поверхности моря и гладкой поверхности суши на метровых волнах работает принцип зеркальных изображений электростатики: изображение заряда с плюсом имеет знак минус и наоборот. Диполь Герца: объединение двух мгновенных зарядов (рис. 3.13).

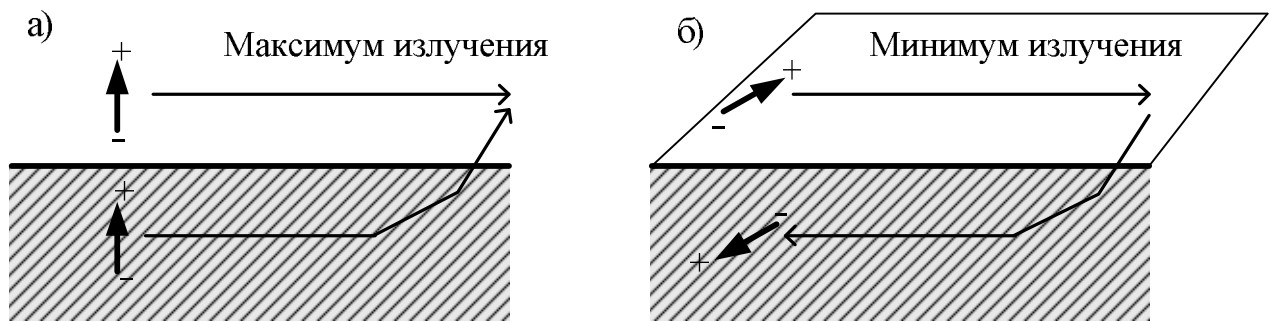


Рис. 3.13 — Картина отражения сигнала от Диполя Герца при вертикальном (а) и горизонтальном (б) его положениях

Электрические свойства поверхности определяются её формой и комплексной диэлектрической проницаемостью $\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{E} = \epsilon + j60\lambda\sigma_{\epsilon},$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость;

σ_{ϵ} — удельная проводимость (табл. 3.4).

Таблица 3.4 — Электрические параметры некоторых поверхностей

Материал	ϵ	$\sigma_{\epsilon}, (\text{Ом/м})^{-1}$
Хорошо проводящая почва (влажная)	25	0,02
Средне проводящая почва	15	0,005
Плохо проводящая почва (сухая)	3	0,001
Снег, лёд	3	0,001
Пресная вода для $\lambda = 1$ м	81	0,7
Пресная вода для $\lambda = 3$ см	65	15
Солёная вода для $\lambda = 1$ м	75	5

Коэффициент отражения для вертикальной поляризации

$$\Gamma_V = \frac{\sin \psi - \sqrt{1 - \cos^2 \psi}}{\sin \psi + \sqrt{1 - \cos^2 \psi}},$$

для горизонтальной поляризации

$$\Gamma_H = \frac{\sin \psi - \sqrt{1 - \cos^2 \psi}}{\sin \psi + \sqrt{1 - \cos^2 \psi}}.$$

3.6.4. Особенности РРВ различных диапазонов

Если кривизна Земли до горизонта много больше длины волны, то прямая видимость: УКВ (ОВЧ) — метровые и короче.

Дальность приема сигналов R (в километрах) можно оценить по формуле:

$$R = 3,57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}),$$

где h_1, h_2 — высота передающей и приемной антенн, соответственно.

Средние и промежуточные волны днем распространяются практически за счет поверхностных волн. При этом они испытывают поглощение землей и слоем D ионосферы. Поглощение землей увеличивается с ростом частоты. Дальность связи составляет 100—150 морских миль и в большой степени зависит от выходной мощности передатчика. Вечером после захода солнца слой D исчезает и пространственный луч отражается от более высокого слоя F и возвращается на землю. За счет этого дальность связи в ночное время может увеличиваться до 300—450 миль.

Из-за рефракции применяют эквивалентный радиус Земли, который больше реального радиуса.

Короткие волны огибают поверхность Земли, но земная волна быстро затухает.

Слои ионосферы — D, E, F_1, F_2 (ночью только F). Для каждого — критическая частота F_{cr} . Если частота больше критической, то волна проходит сквозь слой. На практике — максимальная используемая частота (MUF) $F_{MU} < F_{cr}$ (рис. 3.14).

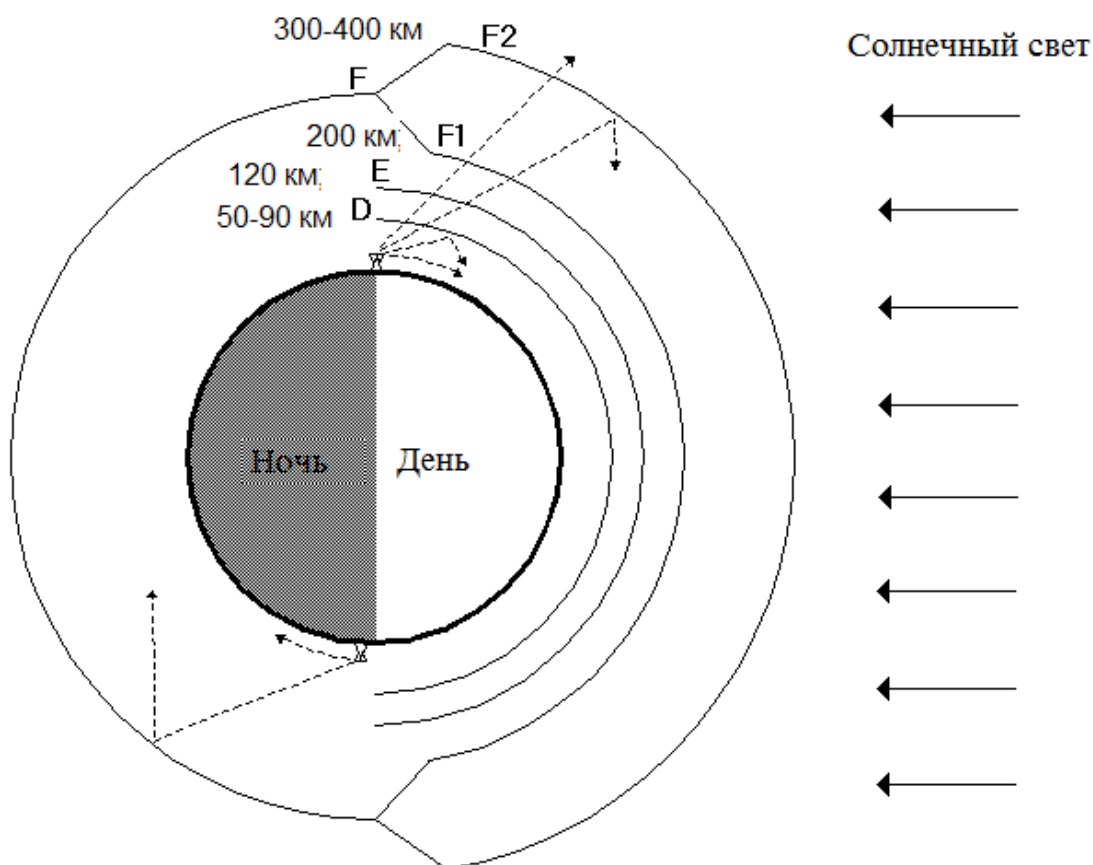


Рис. 3.14 — Схема слоёв ионосферы днём и ночью

Вода: глубина проникновения соизмерима с длиной волны (пример: для связи с подводными лодками используют сверхдлинные волны — СДВ).

4. ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ ВО ВРЕМЕННОЙ И ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТЯХ

4.1. Пара преобразований Фурье

Если $s(t)$ — сигнал во временной области, то прямое преобразование Фурье (ППФ) или *Direct Fourier Transform (DFT)* определяет его спектр $S(jf)$

$$S(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (4.1)$$

Вводится обозначение соответствия по Фурье:

$$s(t) \leftrightarrow S(jf).$$

Для обозначения модуля спектра исключим в аргументе мнимую единицу:

$$S(f) = |S(jf)|.$$

Обратное преобразование Фурье (ОПФ) или *Inverse Fourier Transform (IFT)*

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(jf)e^{j2\pi ft} df. \quad (4.2)$$

4.2. Специальные функции

4.2.1. Дельта-функция

Временная δ -функция есть бесконечный скачок в момент времени t_0 с ограниченной площадью:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Фильтрующее свойство δ -функции: для произвольной функции $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Спектр δ -функции (рис. 4.1)

$$S_{\delta}(j f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j \omega t} dt = e^{-j 2 \pi f t_0}. \quad (4.3)$$

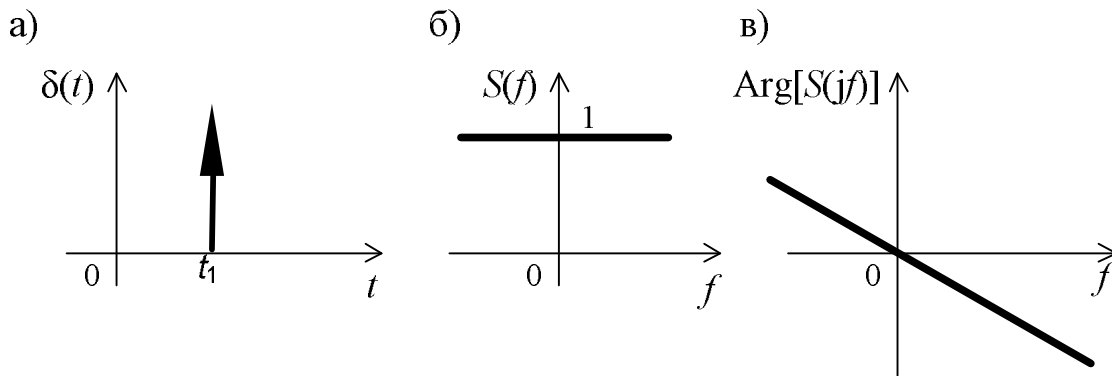


Рис. 4.1 — Графики δ -функции (а), модуля (б) и аргумента (в) её спектра

Важное свойство преобразования Фурье:

При запаздывании временной функции на величину t_0 к аргументу спектра добавляется линейная функция $-2\pi f t_0$. Модуль спектра не изменяется.

При $\tau = 0$ — чисто действительный спектр.

Частотная δ -функция $\delta(f - f_0)$ есть бесконечный «всплеск» на частоте f_0 .

Найдем временную функцию, соответствующую такому спектру, выполнив ОПФ

$$s_{\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j 2 \pi f t} df = e^{j 2 \pi f_0 t} = \cos 2 \pi f_0 t + j \sin 2 \pi f_0 t.$$

Комплексно-значная функция. Действительная часть — синусоида (рис. 4.2).

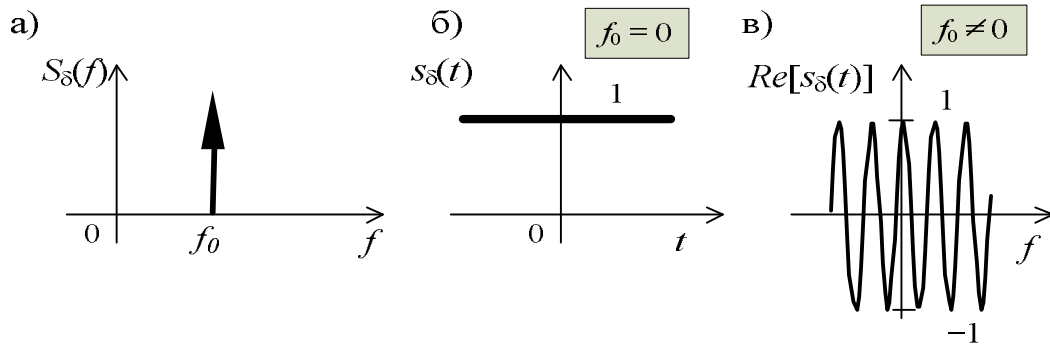


Рис. 4.2 — Графики частотной δ -функции (а), соответствующей ей функции времени при нулевой (б) и ненулевой (в) частоте

Важное свойство ОПФ:

При смещении спектра на величину f_0 действительная часть временной функции умножается на синусоиду $\cos 2\pi f_0 t$.

4.2.2. Функция Хевисайда

Функция Хевисайда (*Heaviside step*) есть результат интегрирования δ -функции

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{2}, & t = 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Найдём спектр функции Хевисайда (рис. 4.3)

$$S_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t_0}. \quad (4.4)$$

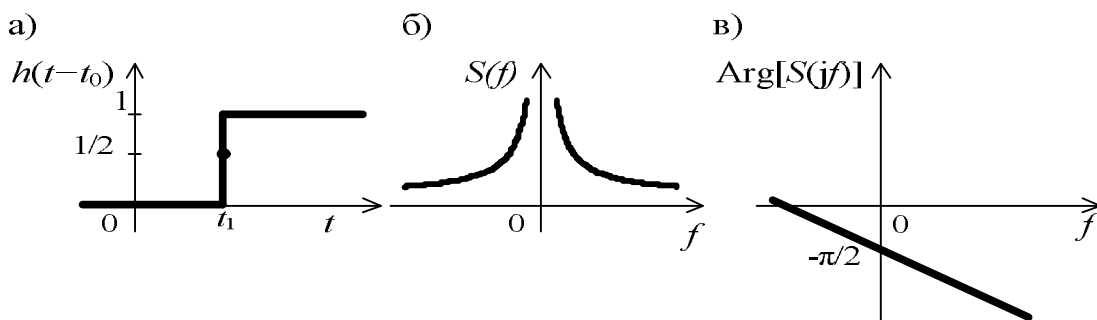


Рис. 4.3 — Графики функции Хевисайда (а), модуля (б) и аргумента (в) её спектра

Результат отображает свойство ППФ об интегрировании функции времени (Приложение А):

Спектр результата интегрирования функции времени получается умножением спектра этой функции на $\frac{1}{j2\pi f}$.

4.2.3. Функция «прямоугольник»

Весьма полезно определить специальную функцию «прямоугольник» с именем **rect(angle)**. Для временной области это будет модель прямоугольного импульса длительностью τ , которую можно составить как результат вычитания двух функций Хевисайда, сдвинутых на половину длительности относительно средней точки

$$\text{rect}(t, \tau) = h\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - h\left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Так как преобразование Фурье является **линейным**, можем найти спектр этой функции, используя суперпозицию спектров функций Хевисайда (3.4) и формулы Эйлера (рис. 4.4)

$$S_{\text{rect}}(f, \tau) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j2\pi f \tau/2} - e^{-j2\pi f \tau/2}) = \frac{j2 \sin \pi f \tau}{j2\pi f} = \tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}. \quad (4.5)$$

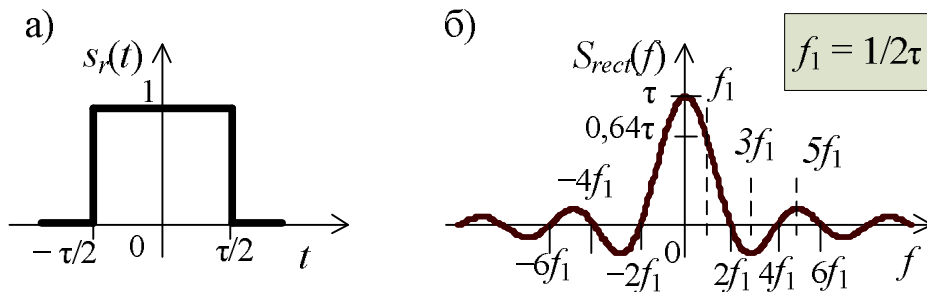


Рис. 4.4 — Графики функции «прямоугольник» (а) и её спектра (б)

Для удобства вводят функцию «синус икс на икс» $\text{sinc}(x)$ — в *MathCAD* применено обозначение $\text{sinc}(x)$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Тогда спектр можно выразить компактно

$$S_{\text{rect}}(f, \tau) = \tau \text{sinc}(\pi f \tau). \quad (4.6)$$

Параметры спектра.

Полуширина спектра по «главному лепестку» f_1 (термин взят из теории антенн), которая определяется **первым максимумом** синусоиды, равна

$$f_1 = \frac{1}{2\tau};$$

Значение $S_{\text{rect}}(f_1, \tau) = 0,64$. Полная ширина спектра по главному лепестку ΔF_1

$$\Delta F_1 = 2f_1 = \frac{1}{\tau}.$$

Ширина спектра по первым нулям ΔF_0 составляет

$$\Delta F_0 = 4f_1 = \frac{2}{\tau}.$$

Зададимся вопросом: какую форму будет иметь спектр **прямоугольного радиоимпульса**, т. е. синусоидального сигнала с ограниченной длительностью τ ? Аналитическое выражение для радиоимпульса имеет вид

$$s_{rp}(t, \tau, f_0) = \text{rect}(t, \tau) \cos(2\pi f_0 t).$$

Согласно свойству ОПФ спектр прямоугольного видеоимпульса будет просто смещён по частоте (рис. 4.5)

$$S_{rp}(f, \tau, f_0) = S_{\text{rect}}(f - f_0, \tau) = \tau \text{sinc}[\pi(f - f_0)\tau]. \quad (4.7)$$

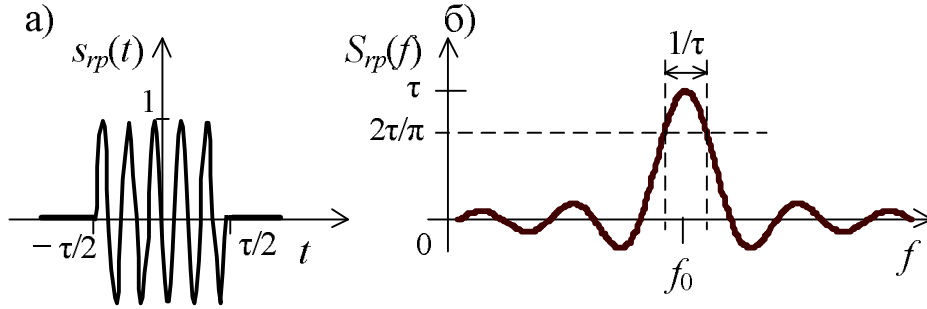


Рис. 4.5 — Функция «прямоугольный радиоимпульс» (а) и её спектр (б)

Рассмотрим спектральную функцию «**частотный прямоугольник**»

$$S_{rf}(f, f_0, \Delta F) = \text{rect}(f - f_0, \Delta F).$$

Используя симметрию преобразований Фурье, получим **временную функцию** «частотного прямоугольника»

$$\begin{aligned} s_{rf}(t, f_0, \Delta F) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(f - f_0, \Delta F) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{j2\pi t} [e^{j2\pi t \Delta F / 2} - e^{-j2\pi t \Delta F / 2}] e^{j2\pi f_0 t} = \\ &= \frac{2j \sin(\pi t \Delta F)}{j2\pi t} e^{j2\pi f_0 t} = \Delta F \text{sinc}(\pi t \Delta F) (\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для $f_0 = 0$ это **видеоимпульс**, длительность которого между первыми нулями τ_0 равна

$$\tau_0 = \frac{2}{\Delta F}.$$

Часто используют длительность по «главному лепестку» импульса τ_1

$$\tau_1 = \frac{1}{\Delta F}.$$

При смещении по частоте на f_0 получим синусоиду с огибающей в виде такого же импульса (рис. 4.6).

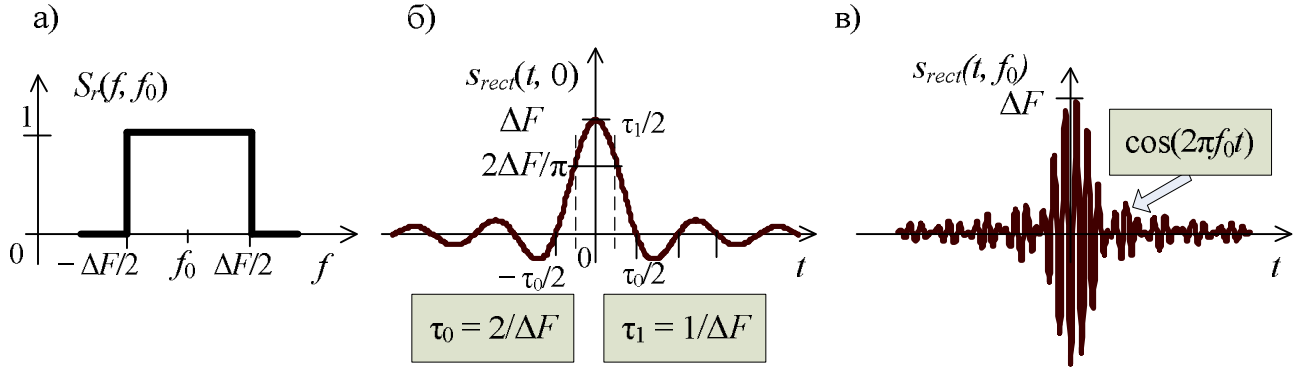


Рис. 4.6 — Графики функции «частотный прямоугольник» (а) и соответствующей ей временной функции без смещения (б) и при смещении (в) по частоте

4.2.4. Применение специальных функций для оценки диаграмм направленности апертурных антенн

Идеализированное распределение токов вдоль осей апертуры имеет вид прямоугольных функций (рис. 4.7).

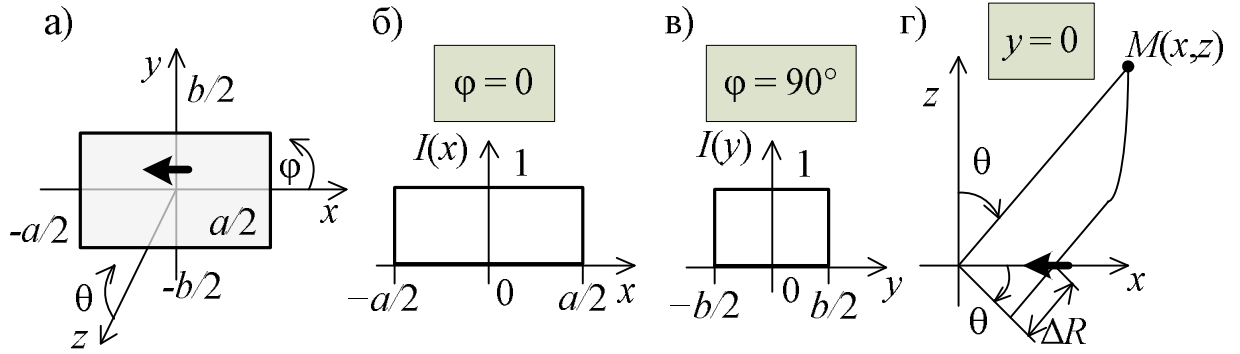


Рис. 4.7 — Геометрия апертуры антенны (а), распределения токов (б, в) и определение разности хода лучей (г)

Все диполи Герца (ДГ), которыми заменяем распределения токов, имеют одинаковые моменты тока. Для определённости расположим ДГ горизонтально, тогда сечения его ДН $f_{HD}(\theta, \varphi)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_{HDxz}(\theta) &= \cos \theta; \\ f_{HDyz}(\theta) &= 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Фазу поля ДГ, расположенного в начале координат, в точке наблюдения $M(x, y, z)$ принимаем за нуль. Если ДГ сдвинуть вдоль поперечной оси x или y , то создаваемое им поле приобретёт сдвиг фаз ψ , обусловленный разностью хода лучей ΔR (см. рис. 4.7 г). Для плоскостей (xOz) и (yOz) получим, соответственно

$$\psi_{xz} = -\beta \Delta R = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta = -2\pi X \sin \theta;$$

$$\psi_{yz} = -2\pi Y \sin \theta.$$

Здесь β — постоянная распространения (волновое число), а обозначения X, Y введены для **нормированных** на длину волны линейных размеров.

Суммирование полей от всех диполей Герца по апертуре для получения диаграмм направленности приводит к интегрированию

$$F_{xz}(\theta) = f_{HDxz}(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(X, A) e^{-j2\pi X \sin \theta} dX; \quad (4.10)$$

$$F_{yz}(\theta) = f_{HDyz}(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(Y, B) e^{-j2\pi Y \sin \theta} dY.$$

Сравнив (4.10) и (4.1), видим, что мы имеем ППФ, в котором вместо временного аргумента t фигурирует пространственный аргумент X или Y , а вместо частотного аргумента f — $\sin \theta$. Следовательно, для нормированных ДН апертуры в соответствующих плоскостях справедливы следующие выражения

$$F_{xz}(\theta) = \cos(\theta) \text{sinc}(\pi A \sin \theta);$$

$$F_{yz}(\theta) = \text{sinc}(\pi B \sin \theta). \quad (4.11)$$

Для «больших» апертур, размеры которых значительно превышают длину волны, множитель $\cos \theta$ можно не учитывать (рис. 4.8).

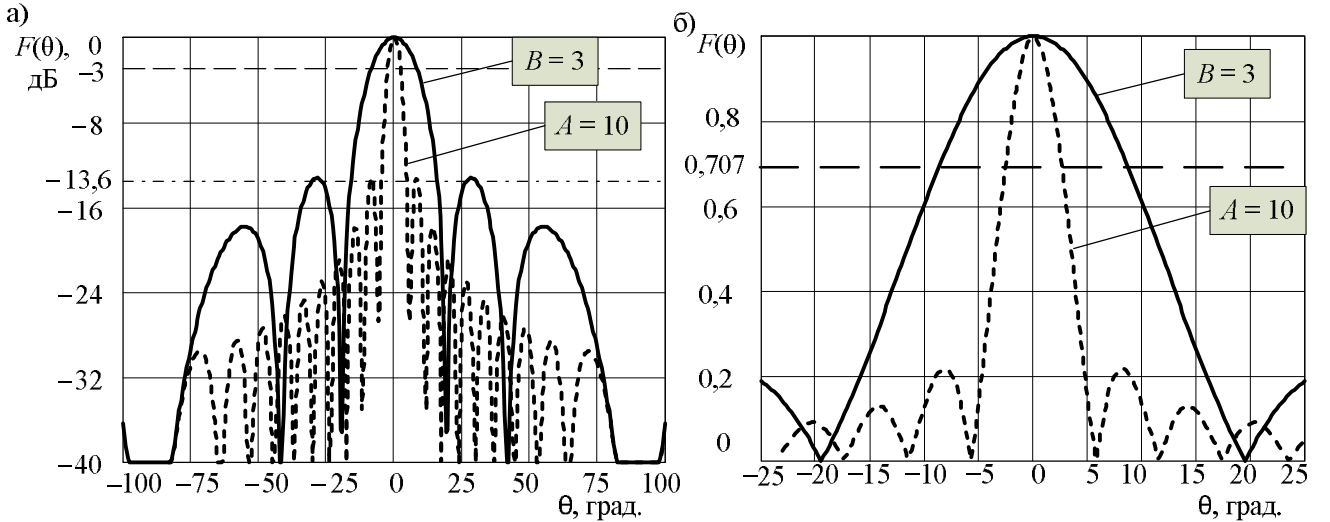


Рис. 4.8 — ДН в децибелах (а) и в линейном масштабе (б) в плоскостях (x, z) и (y, z)

Полуширина главного лепестка ДН по уровню половинной мощности (0,707 или -3 дБ) в каждой плоскости определяется выражениями

$$\theta_{0,5xz} = \arcsin\left(\frac{0,45}{A}\right);$$

$$\theta_{0,5yz} = \arcsin\left(\frac{0,45}{B}\right).$$

В нашем примере $\theta_{0,5xz} = 2,6^\circ$ и $\theta_{0,5yz} = 8,6^\circ$, что соответствует графикам на рис. 4.8.

Для равномерного по амплитуде и синфазного возбуждения ширина ДН получается минимальной, но УБЛ — довольно высокий: $-13,6$ дБ. Для уменьшения УБЛ применяют спадающее к краям распределение, которое обычно аппроксимируют функцией «косинус на пьедестале»

$$I(X) = i_e + (1 - i_e) \cos \frac{\pi X}{A}, \quad (4.12)$$

где i_e — относительная амплитуда тока на краю апертуры.

Стандартные уровни на краях берутся либо -10 дБ ($i_e = 0,316$), либо -20 дБ ($i_e = 0,1$). Данные о ширине ДН и КНД (КУ) можно получить аналитически или численно (рис. 4.9).

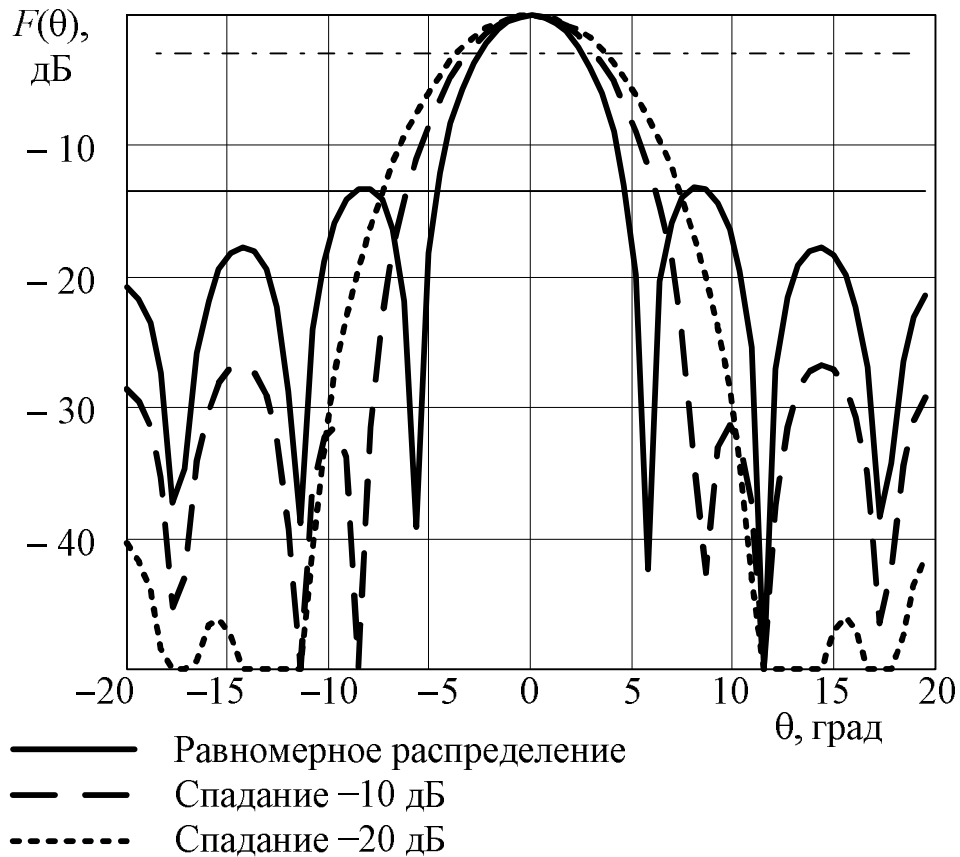


Рис. 4.9 — ДН для апертуры шириной 10 длин волн

Для круглой апертуры это данные имеются в литературе [3] рис. (4.10).

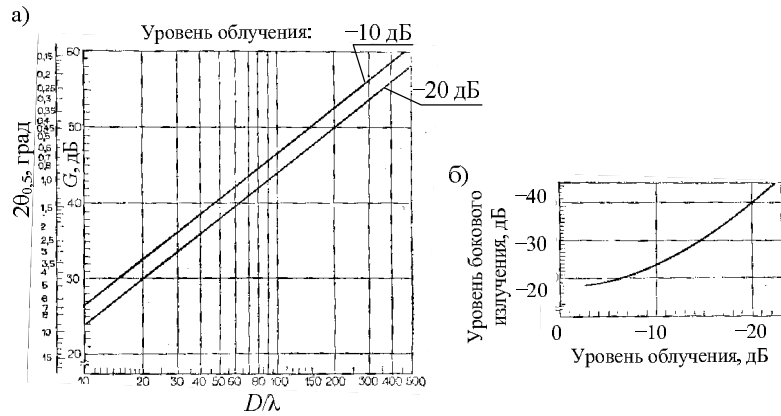


Рис. 4.10 — Зависимости, описывающие влияние диаметра (а) и уровня облучения (б) краёв круглой апертуры на характеристики антенны

4.3. Временные и спектральные характеристики помехи типа шума

Шумом мы считаем процесс, занимающий очень широкую полосу частот. Физически: ЭМ волны во всём спектре радиочастот, оптических частот и рентгеновского излучения создают тепловые процессы во всех физических телах, если их температура отлична от абсолютного нуля. Белый шум (БШ) — близкая к реальности абстракция: все реализации БШ $\{n(t)\}$ имеют энергию, **равномерно** распределённую по всем частотам.

Так как каждая реализация шума $n(t)$ имеет равномерный спектр, значит, она представляет собой последовательность δ -функций или, как говорят, δ -импульсов, случайно сдвинутых относительно друг друга и имеющих случайное значение площади.

Шум считаем **эргодическим** процессом, то есть все его числовые характеристики можно получить, зная **одну** реализацию. Среднее значение равно нулю, т. к. мы можем принимать сигналы только в определенной полосе частот.

Длительность δ -импульса равна нулю, значит следующий импульс возникает **независимо** от предыдущего. Для любой реализации БШ КФ является δ -функцией

$$B_n(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)n(t-\Phi)dt = N_0\delta(\Phi).$$

Здесь N_0 обозначена **усредненная энергия** реализации БШ: КФ имеет размерность энергии [Дж = Вт·с = Вт/Гц].

Результат ППФ от КФ имеет также размерность энергии, поэтому спектр КФ называют **энергетическим спектром (ЭС) СП** или **спектральной плотностью мощности (СПМ)**. Для БШ

$$S_n(f) = N_0.$$

Формально соответствие СПМ и КФ является теоремой Винера-Хинчина.

Т. к. СПМ равномерна, легко найти мощность $P_{\Delta F}$ в заданной полосе ΔF

$$P_{\Delta F} = N_0 \Delta F.$$

СПМ БШ не зависит от сопротивления цепи, на котором выделяется шум

БШ имеет тепловое происхождение, его энергия определяется температурой источника с согласованным внутренним сопротивлением

$$N_0 = kT,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/(Гц·К) — постоянная Больцмана.

В 1944 году для оценки шумовых свойств цепей Фриис (*Friis*) предложил эталонную температуру $T_0 = 290$ К, как нормальную температуру окружающей среды (17 °C). Впоследствии это предложение было принято *IEEE* как часть стандарта. Таким образом, реальные устройства по шумовым характеристикам обычно сравнивают со стандартным значением СПМ БШ

$$N_{0s} = kT_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 = 4,0 \cdot 10^{-21} \text{ Вт/Гц}.$$

Идеальное устройство не изменяет уровня шумов. Все реальные — увеличивают, т.к. содержат элементы, не находящиеся при температуре абсолютного нуля. Устройство характеризуется **коэффициентом** шума или **шум-фактором** (*Noise Figure*) k_n . СПМ на выходе цепи будет больше в k_n раз, в то время как на уровень полезного сигнала шумовые свойства не влияют. Для того, чтобы применять обычную теорию к анализу цепей прохождения сигнала и шума, используют СПМ шума, приведённую к входу устройства

$$N_{0inp} = k_n N_0 = k_n N_{0s} \frac{T}{T_0}.$$

Итак, формально СПМ БШ имеет размерность квадрата амплитуд, поэтому применяется обозначение

$$S_n^2(f) = N_{0inp}$$

для реальных (неотрицательных) частот $f \in [0, \infty)$.

Если нас интересует только шум в определённой полосе ΔF вокруг заданной частоты f_0 , то применяют «окрашенный» шум, СПМ которого имеет вид

$$S_{nc}^2(f) = N_0 \text{rect}(f - f_0, \Delta F).$$

Обычно БШ считают **нормальным** или **Гауссовым**: каждое сечение БШ в **любой i -й** момент времени n_i имеет плотность вероятностей гауссова вида

$$W_n(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

Дисперсия σ_s^2 равна значению корреляционной функции при $\tau = 0$. Физически это — мощность шума. Формально мощность стремится к бесконечности, поэтому указать значение дисперсии для бесконечной полосы частот **невозмож-**

но. Конечное значение будет только после наложения физических ограничений на полосу частот, занимаемую шумом.

Почему применяется нормальный закон распределения? Это соответствует физике тепловых шумов: в каждый момент времени происходит сложение большого числа случайных величин, а согласно центральной предельной теореме даже при равномерном распределении каждой величины их сумма имеет гауссово распределение.

Амплитуда сигнала A по определению есть его модуль, т.е. не может иметь отрицательных значений. Чисто математическое преобразование гауссова закона для этого случая даёт закон Релея (рис. 4.11)

$$W_n(A) = \frac{A}{\sigma_n} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

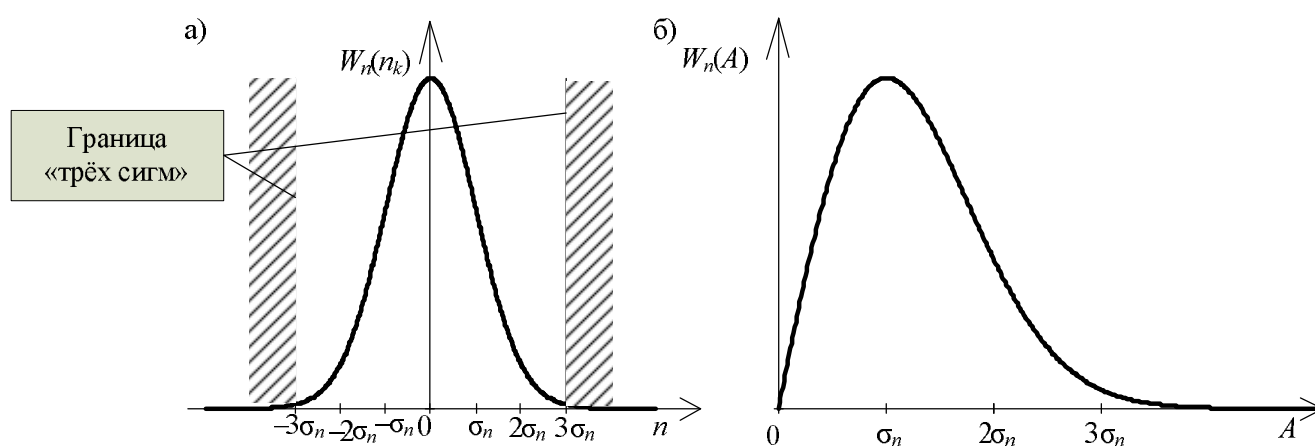


Рис. 4.11 — Вид нормального (а) и релеевского (б) законов распределения мгновенных значений и амплитуд шума

Вероятность попадания случайной величины в симметричный интервал равна интегралу от плотности вероятностей. Пределы изменения амплитуд шума выбирают по отношению к величине СКО σ_n (табл. 4.1).

Таблица 4.1 — Квантили нормального распределения

Интервал амплитуд шума	Вероятность попадания в интервал	Вероятность превышения уровня
$\pm\sigma_n$	0,683	0,317
$\pm2\sigma_n$	0,954	0,046
$\pm3\sigma_n$	0,997	0,003

4.4. Прохождение шума через линейную цепь

Линейные цепи анализируют либо во временной, либо в частотной областях.

Импульсная характеристика цепи $h(t)$ — это реакция цепи на воздействие в виде δ -функции (функции Дирака). **Частотная характеристика цепи $K(jf)$** — комплексный коэффициент передачи, который связан с импульсной характеристикой парой преобразований Фурье (рис. 4.12).

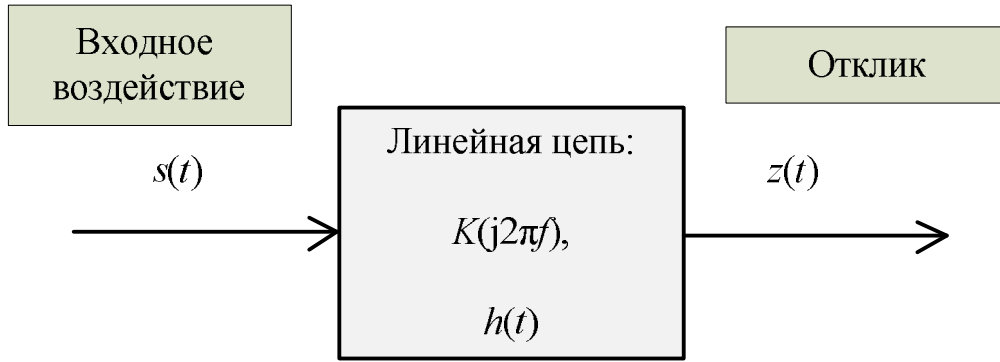


Рис. 4.12 — Схема прохождения сигнала $s(t)$ через линейную цепь
Если $S(jf)$ — спектр $s(t)$, а $S_z(jf)$ — спектр отклика, то в частотной области

$$S_z(jf) = S(jf)K(jf).$$

Во временной области — интеграл свёртки

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi)h(t - \xi)d\xi.$$

Для БШ $n(t)$ есть электрический сигнал, соответствующий его реализации. Нас интересует не конкретная реализация выходного отклика, а статистические характеристики его: корреляционная функция и СПМ.

Так как СПМ соответствует квадрату амплитуд БШ (введём обозначение $S_n^2(jf)$), для определения СПМ отклика следует использовать частотную характеристику цепи **по мощности**, которая равна квадрату от частотной характеристики по напряжению

$$S_{nz}^2(jf) = S_n^2(jf)K^2(jf).$$

Корреляционную функцию отклика можно найти по теореме Винера-Хинчина как ОПФ от СПМ

$$B_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nz}^2(jf)e^{j2\pi f\tau}df.$$

Чисто математически можно от квадрата ЧХ перейти к корреляционной функции импульсной характеристики $B_h(\tau)$

$$B_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(jf)e^{j2\pi f\tau}df,$$

тогда для корреляционной функции отклика можно записать интеграл свёртки

$$B_{nz}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_n(t)B_h(t - \tau)dt.$$

Примеры.

1. Идеальный полосовой фильтр (ПФ). АЧХ — прямоугольник

$$K^2(jf) = \text{rect}(f - f_0, \Delta F).$$

На выходе — «окрашенный» шум (рис. 4. 13)

$$S_{nz}(jf) = N_0 \text{rect}(f - f_0, \Delta F).$$

Соответственно, корреляционная функция как ОПФ от СПМ имеет вид

$$B_{nz}(\tau) = N_0 \Delta F \sin x(\pi \Delta F \tau) \cos 2\pi f_0 \tau.$$

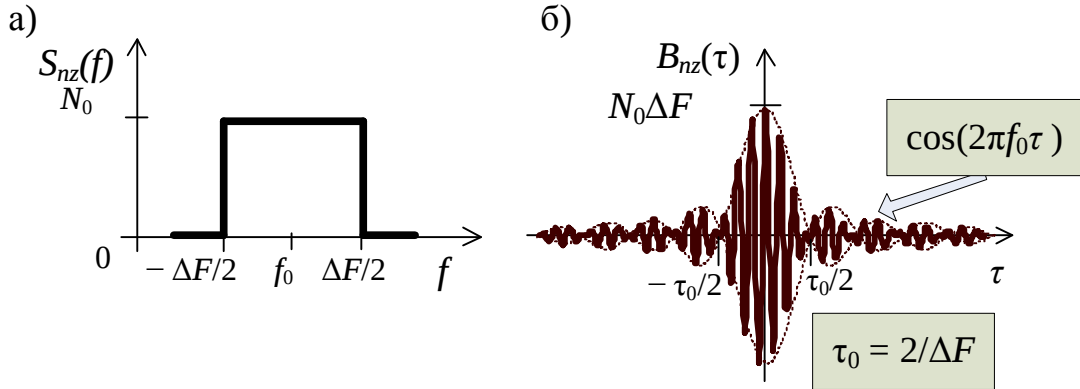


Рис. 4.13 — Энергетический спектр (а) и корреляционная функция (б) отклика идеального ПФ на БШ

2. Реальный ПФ с максимально плоской характеристикой (Баттерворта).
Функция, выражающая АЧХ ПФ n -го порядка, имеет вид

$$K_B^2(f, n) = \frac{(f / f_L)^{2n}}{\left[1 + (f / f_L)^{2n}\right] \left[1 + (f / f_H)^{2n}\right]},$$

где f_L, f_H — соответственно, нижняя и верхняя частоты среза ПФ.

Обычно задают центральную частоту f_0 и полосу по уровню 0,707 (–3 дБ) ΔF , поэтому

$$f_L = f_0 - \Delta F / 2;$$

$$f_H = f_0 + \Delta F / 2.$$

Так как спектр БШ — равномерный, спектр отклика имеет вид АЧХ ПФ. Корреляционную функцию можно найти численным ОПФ.

Для примера на рис. 4.14 приведены спектр отклика ПФ для $n = 5$ и $n = 10$, а также вид корреляционной функции для $n = 10$ и огибающая корреляционной функции на выходе идеального фильтра.

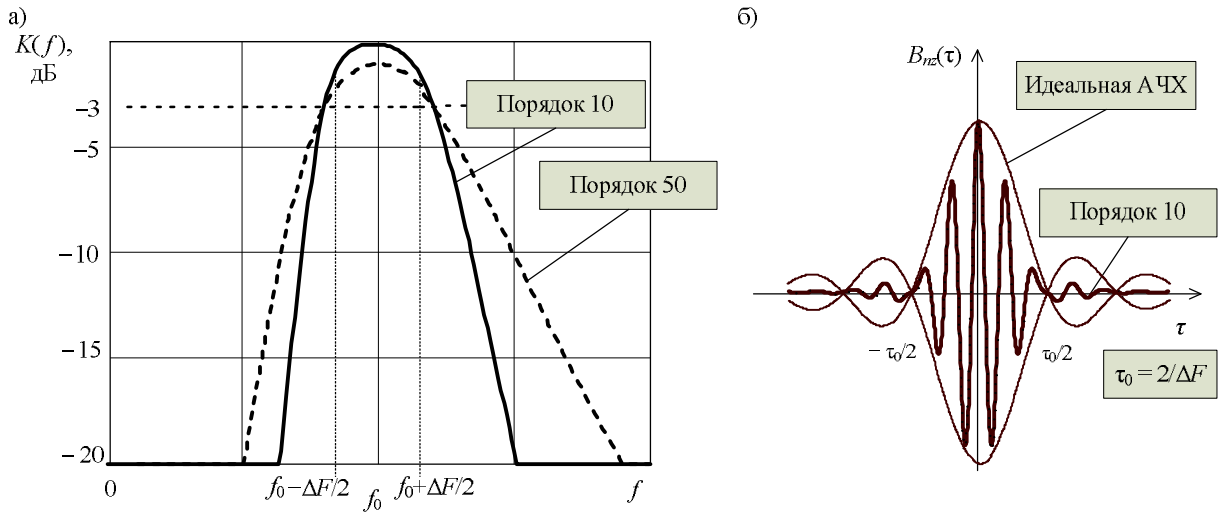


Рис. 4.14 — Спектр (а) и КФ (б) отклика реального ПФ на БШ

Видно, что чем выше порядок фильтра, тем ближе его АЧХ к идеальной. Корреляционная функция реального фильтра имеет осциллирующий характер, основная часть имеет ширину, близкую к ширине идеальной КФ, то есть интервал корреляции отклика имеет величину, определяемую полосой пропускания ПФ.

Грубо говоря, вместо δ -импульсов на выходе фильтра будем иметь импульсы с длительностью, в среднем близкой к τ_0 .

Степень приближения реальной характеристики к идеальной характеризуют **скоростью спада** АЧХ за пределами ПП V_D , измеряемую в **децибелах на октаву** (на удвоение частоты). ПФ первого порядка имеет скорость 6 дБ/октава, поэтому зависимость от порядка фильтра имеет вид

$$V_D = 6n.$$

Пример. Верхняя частота среза ПФ f_H равна 500 кГц. На частоте $f_n = 1,2$ МГц имеется нежелательный сигнал, который должен быть подавлен на $N_D = 100$ дБ. Какой ПФ нужно применить?

Решение. 1. Находим число октав в заданной полосе

$$N_{\Delta f} = \frac{f_n}{f_H} = \frac{1200}{500} = 2,4.$$

2. Находим требуемый порядок ПФ

$$n \geq \frac{N_D}{6N_{\Delta f}} \geq \frac{100}{6 \cdot 2,4} \geq 6,9 = 7.$$

Обычно полосу ΔF рассматривают как параметр ПФ для сигнала и шума, но это не совсем верно, т.к. шум охватывает более широкую полосу.

Вводят эквивалентную шумовую полосу ΔF_n путём интегрирования всей нормированной на максимум АЧХ цепи

$$\Delta F_n = \int_{-\infty}^{\infty} |K^2(jf)| df.$$

Для идеальной АЧХ полоса равна ПП ПФ. С ростом порядка фильтра полоса приближается к идеальной (табл. 4.2).

Таблица 4.2 — Относительная полоса ПФ Баттерворта

Порядок	∞	1	3	5	10
Относительная полоса	1,00	1,28	1,103	1,032	1,006

Выводы.

1. При обычном приёме аддитивной смеси сигнала с помехой производится полосовая фильтрация, затем усиление смеси до уровня, допускающего обработку, и выделение сигнала, если величина отношения сигнал-помеха по мощности достаточна для этого.
2. Из-за собственного шума активных приборов входного усилителя и неидеальности АЧХ ПФ отношение СП на выходе этого усилителя ухудшается, а при дальнейших преобразованиях практически не изменяется. Единственный путь уменьшения потерь качества — снижение температуры входных усилителей приёмника.
3. Для повышения качества выделения сигнала необходимо выполнять такую обработку смеси сигнал-помеха, которая в максимально возможной степени учитывает априорную информацию о сигнале и помехе.

5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РТС

5.1. Основные задачи

5.1.1. Виды задач

Теория статистической оптимизации охватывает задачи, характерные для РТС. Основные:

- обнаружения сигналов (есть или нет сигнал на фоне помехи);
 - различения или разрешения сигналов (какой именно сигнал содержится или сколько сигналов принято);
 - измерения параметров сигналов (значений информационных параметров).
- Дополнительно рассматриваются задачи:
- воспроизведения сигналов (создание сигналов с определёнными свойствами);
 - обнаружения-измерения;
 - измерения-управления;
 - классификации сигналов, целей и т.п.;
 - адаптации к неизвестным заранее условиям обнаружения, измерения, классификации, управления.

Перечисленные задачи возникают независимо от используемых волновых процессов (радио, оптических, акустических) и областей применения РЭС (локации, навигации, связи, управления, ЭМС, РЭБ). Эти задачи отличаются близостью

методов формализации и методик решения, совпадением ряда элементов получаемых алгоритмов решения, а значит, и реализующих их устройств обработки сигналов.

5.1.2. Математическая формулировка задач

Входная реализация принимаемых колебаний $y(t)$ в виде аддитивной смеси непрерывного сигнала и шума записывается с некоторым параметром a , которым будем характеризовать вид задачи

$$y(t) = as(t, \alpha, \beta) + n(t). \quad (5.1)$$

Здесь $s(t, \alpha, \beta)$ — полезный сигнал, с известным информативным параметром α (может быть два и более параметров, например, амплитудно-фазовая комбинированная модуляция) и со случайным неинформативным параметром β ; $n(t)$ — реализация аддитивной помехи.

1. Задача обнаружения.

По принятой реализации $y(t)$ должна быть выдана **оценка** параметра a :

— $a = 0$ «сигнал отсутствует»;

— $a = 1$ «сигнал есть».

2. Задача различения.

Случай отсутствия сигнала исключён: $a = 1$.

Информационный параметр принимает одно из возможных **дискретных** значений $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, M$. Необходимо установить, какой именно вид сигнала i содержится в смеси.

3. Задача оценки параметра.

Случай отсутствия сигнала исключён: $a = 1$.

Информационный параметр принимает одно из возможных **непрерывных** значений в пределах заданного интервала $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Необходимо получить оценку параметра с заданной точностью $\alpha \pm \Delta\alpha$.

Алгоритмы решения должны быть **оптимизированы** по отношению к принятым показателям качества или несовершенства обнаружения при заданных статистических моделях входящих в (5.1) величин.

5.2. Критерии поиска и оптимизации решения основных задач

5.2.1. Виды критериев

Методы постановки и критерии безусловной оптимизации рассматриваемых задач можно условно разбить на:

- байесовские параметрические (на основе оценки параметров с использованием формулы Байеса);
- небайесовские параметрические;
- непараметрические (основанные на статистических испытаниях);

— адаптивные и робастные (при неполной информации об условиях производится изменение количественных значений критериев по мере накопления информации).

5.2.2. Байесовские критерии

Используют доопытные (априорные) вероятности $P(A_k)$ событий A_k ($k=1,2,...,M$).

При обнаружении сигналов широко используются также условные вероятности $P(A_i / A_k)$ принятия решения о некотором i -м событии A_i при условии, что в действительности произошло k -е событие A_k .

Случай $i = k$ соответствует **правильному**, а случаи $i \neq k$ — **ошибочным** решениям.

Введение условных вероятностей решений и доопытных вероятностей событий позволяет перейти к **полным вероятностям** наложения решений и условий:

$$P(A_i, A_k) = P(A_i / A_k) P(A_k). \quad (5.2)$$

Случай $M = 2$ относится к задаче **обнаружения** сигнала, если нужно определить, имеется ли сигнал в смеси с шумом, и к задаче **различения** двух сигналов, когда какой-нибудь сигнал заведомо есть.

Критерий **минимума среднего риска** основан на введении штрафов R_{ik} за неправильные решения ($i \neq k$). За правильные решения ($i = k$) штраф не начисляется (равен нулю). Иногда вводится «отрицательный штраф» или «премия», но особого смысла в этом нет.

Величина **среднего риска** одного решения $\bar{R}$ находится усреднением значений случайной величины R_{ik}

$$\bar{R} = \sum_{i,k} R_{ik} P(A_i, A_k) = \sum_{i,k} R_{ik} P(A_i / A_k) P(A_k). \quad (5.3)$$

Оптимальным считается алгоритм, обеспечивающий **минимизацию** среднего риска (5.3)

$$\bar{R} = \min.$$

Критерий **идеального** (беспристрастного) **наблюдателя** (критерий Котельникова) является частным случаем критерия минимума среднего риска при одинаковых штрафах за неправильные решения.

5.2.3. Небайесовские методы и критерии

Эти методы и критерии не используют доопытных (априорных) вероятностей $P(A_k)$ событий A_k . Условные же вероятности $P(A_i / A_k)$ правильных и неправильных решений оказываются при этом показателями несовершенства или качества системы.

Критерий Неймана — Пирсона. Относится к двухальтернативным решениям, например об обнаружении (наличии или отсутствии) локационной цели в заданном участке пространства.

Правильные решения:

— правильное обнаружение с вероятностью P_{TD} (*True Detection*: сигнал есть, т. е. произошло событие A_1 , принято решение A_1 о его наличии);

— правильное необнаружение с вероятностью P_{TN} (*True No signal*: сигнала нет, т. е. произошло событие A_0 , принято решение о его наличии A_0).

Неправильные решения:

— пропуска цели с вероятностью P_{FN} (*False No signal*: сигнал есть A_1 , но принято решение о его отсутствии A_0);

— ложная тревога с вероятностью P_{FA} (*False Alarm*: сигнала нет A_0 , но принято решение о его наличии A_1).

Решение считают **оптимальным** по Нейману — Пирсону, если при отсутствии цели и ограниченной сверху вероятности ложной тревоги граничным значением F_B минимизируется вероятность пропуска цели

$$\begin{cases} P_{FA} = P(A_1 / A_0) \leq F_B; \\ P_{FN} = P(A_0 / A_1) = \min. \end{cases} \quad (5.4)$$

То же самое даёт критерий максимума вероятности правильного обнаружения

$$P_{TD} = 1 - P(A_0 / A_1) = P(A_1 / A_1) = \max.$$

Пример. ИКАО для РЛС управления воздушным движением рекомендует значения:

$F_B = 10^{-7}$ при $P_{TD} > 0,9$ или вероятности пропуска цели не более 0,1.

Критерий минимума средних потерь. В критерии минимума среднего риска нужно знать априорные вероятности событий, что не всегда возможно. С другой стороны, идея штрафов за неправильные решения позволяет учитывать разную цену последствий. Например, в охранных системах вероятность пропуска цели обычно приводит к большим издержкам, чем вероятность ложной тревоги. Можно установить значения штрафов R_{FN} и R_{FA} . Критерий состоит в достижении минимума средних потерь

$$R_{FN} P(A_0 / A_1) + R_{FA} P(A_1 / A_0) = \min. \quad (5.5)$$

Критерий максимума правдоподобия. Этот небайесовский критерий можно рассматривать как вариант байесовского критерия максимума послеопытной плотности вероятностей смеси сигнала с шумом $W_k[y(t)]$ при одинаковых априорных вероятностях событий $P(A_k) = \text{const}(k)$.

Оптимальным считается решение A_k , для которого максимальна условная апостериорная плотность вероятностей

$$W[y(t) / A_k] = \max.$$

Функцию $W[y(t) / A_k]$ называют **функцией правдоподобия** для значений рассматриваемого параметра. Оценки, обеспечивающие максимум этой функций, называют максимально правдоподобными (МП) или наиболее правдоподобными (НП) решениями или оценками.

Для задачи обнаружения это условные плотности $W_{sn}[y(t) / A_1], W_n[n(t) / A_0]$.

5.3. Подход к решению задачи обнаружения

Решение основывается на двух важнейших допущениях, которые на практике всегда выполняются:

- ширина спектра шума ограничивается некоторым максимальным значением F ;
- длительность сигнала $s(t)$ ограничена временным интервалом $[0, T]$.

Можно выполнить отсчёты смеси сигнал с шумом по теореме Котельникова, тогда они полностью представляют реализацию смеси. На ограниченном интервале времени $[0, T]$ число отсчётов K **конечно**, поэтому можно говорить о K -мерном пространстве, в котором сигналу $s(t)$ и каждой реализации и шума $n(t)$ соответствуют K -мерные векторы $\dot{s}$ и $\dot{n}$ (рис. 5.1).

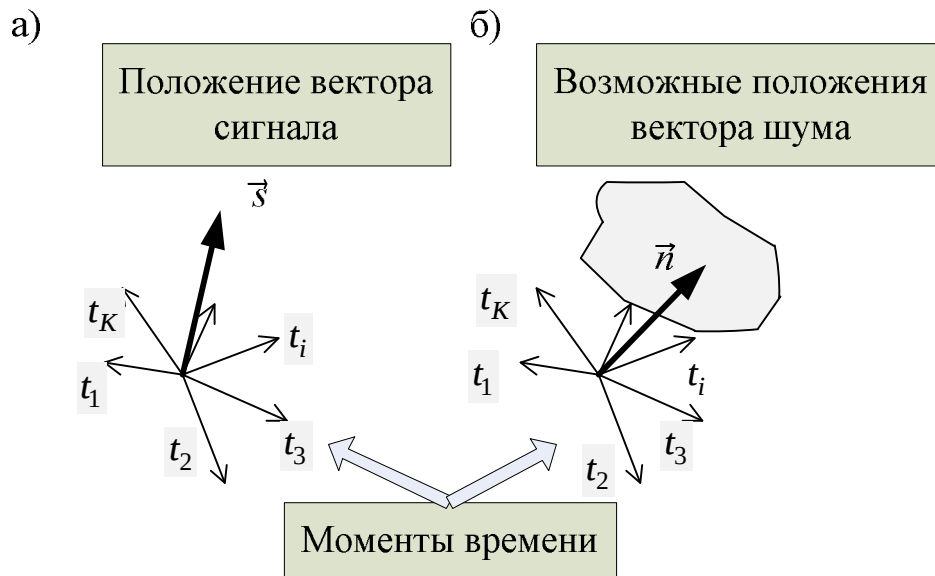


Рис. 5.1 — Векторное представление сигнала (а) и шума (б)

Смеси сигнала с шумом соответствует вектор $\dot{y}$ — сумма векторов $\dot{s}$ и $\dot{n}$ (рис. 5.2). Область в многомерном пространстве, содержащая реализации шума, может не пересекаться с областью пространства, содержащей реализации смеси сигнала и шума при большом отношении сигнал-помеха (рис. 5.2 а). В этом слу-

чае не требуется решать задачи оптимизации. Однако на практике приходится работать с такой степенью зашумлённости, что пространства шума и смеси сигнала с шумом пересекаются (рис. 5.2 б). Решение задачи обнаружения состоит в **установлении порога** разбиения пространства сигнала и помех на два непересекающихся подпространства Y_0 и Y_1 . При попадании реализации смеси сигнала и шума в Y_0 считается, что сигнала нет, а при попадании в Y_1 — что сигнал есть.

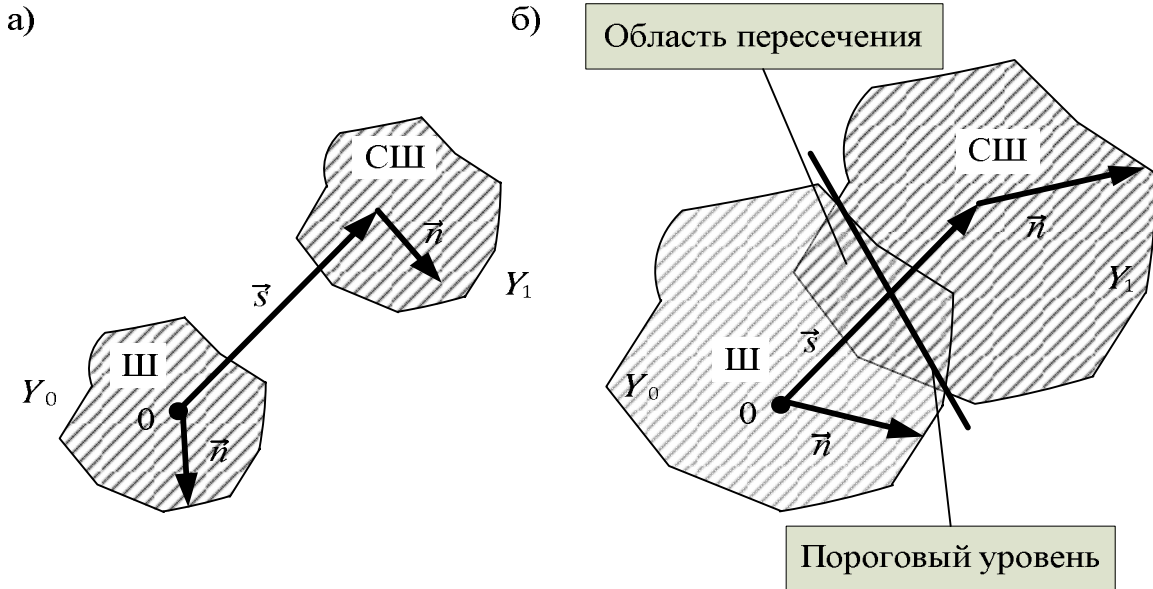


Рис. 5.2 — Области решений в задаче обнаружения при большом (а) и малом отношении сигнал-шум

Пример. Простейший амплитудный бинарный обнаружитель: смесь детектируется, для уровня выходного сигнала u выбирается порог U_B и принимается решение о наличии или отсутствии сигнала по превышению этого порога.

Причиной «размывания» амплитуд является гауссов белый шум, поэтому амплитуда шума распределена по закону Релея:

$$W_n(A) = \frac{u}{N_0} \exp\left[-\frac{u^2}{2N_0}\right].$$

Смесь сигнала с шумом имеет распределение Релея-Райса (обобщённый закон Релея)

$$W_{sn}(A) = \frac{u}{N_0} \exp\left[-\frac{u^2 - u_s^2}{2N_0}\right] I_0\left(\frac{uu_s}{N_0}\right),$$

где u_s — уровень продетектированного сигнала;

$I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Соответствующие вероятности определяются площадями под кривыми плотностей вероятностей (рис. 5.3).

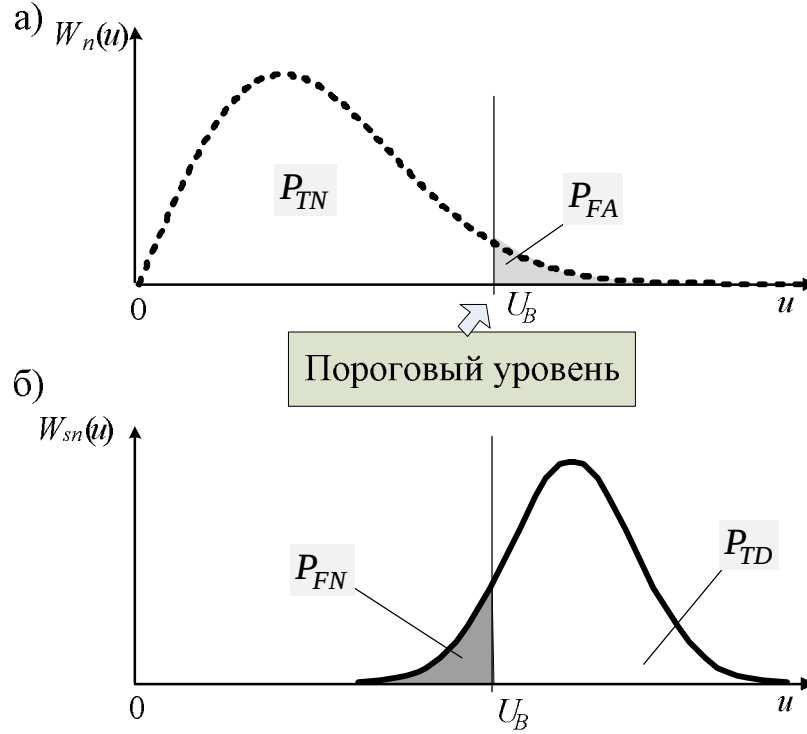


Рис. 5.3 — Распределения напряжения на выходе амплитудного детектора без сигнала (а) и при наличии сигнала (б)

5.3.1. Обобщенные соотношения для критериев минимума среднего риска и минимума средних потерь

Критерий минимума среднего риска для задачи обнаружения выражается следующим образом

$$\bar{R} = R_{FA} P_{FA} P(A_0) + R_{FN} P_{FN} P(A_1) = \min.$$

Вынесем за скобку $R_{FN} P(A_1)$

$$\bar{R} = \left[P_{FA} \frac{R_{FA} P(A_0)}{R_{FN} P(A_1)} + P_{FN} \right] R_{FN} P(A_1).$$

Введём обозначение весового множителя l_0

$$l_0 = \frac{R_{FA} P(A_0)}{R_{FN} P(A_1)}, \quad (5.6)$$

тогда выражение для среднего риска приобретает вид

$$\bar{R} = [P_{FA} l_0 + (1 - P_{TD})] R_{FN} P(A_1) = [1 - (P_{TD} - P_{FA} l_0)] R_{FN} P(A_1).$$

Следовательно, критерий минимума среднего риска соответствует условию

$$P_{TD} - P_{FA} l_0 = \max. \quad (5.7)$$

Правильное обнаружение будет, если при наличии сигнала вектор выборок смеси $\dot{\mathbf{y}}$ попадает в объём пространства Y_1 , то есть вероятность правильного обнаружения можно получить путём интегрирования плотности вероятностей смеси сигнала с шумом по всем координатам K -мерного пространства Y_1

$$P_{TD} = \int_{Y_1} W_{sn}(\dot{\mathbf{y}}) dY_1.$$

Вероятность ЛТ, наоборот, будет равна результату интегрирования плотности вероятностей шума по пространству Y_1

$$P_{FA} = \int_{Y_1} W_n(\dot{\mathbf{y}}) dY_1.$$

Условие (5.7) перепишем в виде

$$P_{TD} - P_{FA} l_0 = \int_{Y_1} [W_{sn}(\dot{\mathbf{y}}) - W_n(\dot{\mathbf{y}}) l_0] dY_1 = \max.$$

Под интегралом вынесем плотность вероятностей шума за скобки

$$\int_{Y_1} \dots \int_{Y_1} W_n(\dot{\mathbf{y}}) \left[\frac{W_{sn}(\dot{\mathbf{y}})}{W_n(\dot{\mathbf{y}})} - l_0 \right] dy_1 dy_2 \dots dy_K = \max. \quad (5.8)$$

Введём обозначение для **отношения правдоподобия** $l(\dot{\mathbf{y}})$

$$l(\dot{\mathbf{y}}) = \frac{W_{sn}(\dot{\mathbf{y}})}{W_n(\dot{\mathbf{y}})}.$$

В выражении (5.8) максимум достигается при положительном значении выражения в скобках. Таким образом, из (5.8) следует **правило решения**:

- если $l(\dot{\mathbf{y}}) > l_0$, то сигнал есть;
- если $l(\dot{\mathbf{y}}) < l_0$, то сигнала нет.

Величина l_0 играет роль **порога обнаружения**. Согласно критерию среднего риска в (5.6) учитываются как разные потери при ложных решениях, так и априорные вероятности. Введем обозначение

$$l_{0AR} = \frac{R_{FA} P(A_0)}{R_{FN} P(A_1)}. \quad (5.9)$$

При одинаковых потерях получаем критерий идеального наблюдателя (Котельникова), для которого порог задаётся выражением

$$l_{0IW} = \frac{P(A_0)}{P(A_1)}. \quad (5.10)$$

При равной априорной вероятности наличия или отсутствия сигнала порог будет определяться только отношением потерь от ложных решений, поэтому для критерия минимума средних потерь

$$l_{0AL} = \frac{R_{FA}}{R_{FN}}. \quad (5.11)$$

5.3.2. Выводы

1. Приёмник, вычисляющий отношение правдоподобия, является оптимальным в статистическом смысле, так как это отношение учитывает статистические свойства шума и смеси сигнала с шумом.
2. Различные критерии оптимальности дают разные выражения для порога принятия решения о наличии или отсутствии сигнала.
3. В основе оптимального обнаружения лежат законы распределения (плотности вероятностей) шума и смеси сигнала и шума. Для реализации алгоритмов и схем обработки сигналов необходимо знать эти законы.

5.4. Обнаружение сигналов, известных полностью

5.4.1. Условия задачи

Известны все параметры сигнала $s(t)$, заданного на временном интервале $[0, T]$. На практике это означает, что имеется жёсткая синхронизация на приёмной стороне **во времени и по фазе** с передающей стороной. Задача обеспечить синхронизацию здесь не рассматривается: она решается отдельно.

5.4.2. Решение

1. Ограничиваем полосу частот, занимаемую сигналом и шумом.

Введём формальное ограничение на ширину спектра по всей оси частот $[-F, F]$, т. е. вместо белого шума рассматриваем **окрашенный** шум со СПМ, равной $N_0/2$ (для реальных частот от 0 до F СПМ равна N_0).

2. Переходим к дискретным отсчётам.

Так как полоса ограничена, проведём дискретизацию принятой реализации $y(t)$ по теореме Котельникова с интервалом $\Delta t = \frac{1}{2F}$.

Число отсчётов K на ограниченном интервале будет конечным

$$K = \frac{T}{\Delta t}.$$

Заменим реализацию $y(t)$ вектором в K -мерном пространстве.

3. Устанавливаем законы распределения шума и смеси сигнала с шумом.

Если в реализации **сигнала нет**, а содержится только шум, то каждый отсчёт шума n_k ($k=1, 2, \dots, K$) распределён по закону Гаусса

$$W_n(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left[-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2}\right]. \quad (5.12)$$

Дисперсия шума есть его мощность. Спектральная плотность шума N_0 есть его энергия в 1 Гц полосы, поэтому дисперсию можно выразить через полосу или интервал дискретизации

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} 2F = N_0 F = N_0 \frac{1}{2\Delta t}. \quad (5.13)$$

Если в реализации **сигнал есть**, то каждый отсчёт есть сумма детерминированной величины s_k и случайной величины n_k . Среднее значение этой суммы равно s_k , так как шум имеет нулевое среднее значение. Следовательно, распределение смеси определяется распределением шума, но со средним значением s_k

$$W_{sn}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left[-\frac{(n_k - s_k)^2}{2\sigma_n^2}\right]. \quad (5.14)$$

4. Выводим выражение для отношения правдоподобия.

Корреляционная функция белого шума имеет вид дельта-функции, то есть моменты времени, отстоящие на бесконечно малый интервал, не коррелированы. СПМ окрашенного шума имеет вид функции «прямоугольник»

$$S_n^2(jf) = \frac{N_0}{2} \text{rect}(f, 2F), \quad (5.15)$$

а его корреляционная функция имеет вид функции «синус икс на икс»

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2} 2F \text{sinc}(2\pi F\tau) = N_0 F \text{sinc}\left(\pi \frac{\tau}{\Delta t}\right). \quad (5.16)$$

Эта функция затухает через несколько интервалов Δt , а в точках $\tau = \Delta t$ равна нулю: это означает, что каждый отсчёт **статистически независим** от другого. Многомерные плотности вероятностей являются произведением одномерных

$$W_n(\mathbf{y}) = \prod_{k=1}^K W_n(y_k);$$

$$W_{sn}(\mathbf{y}) = \prod_{k=1}^K W_{sn}(y_k).$$

Получим отношение правдоподобия. При перемножении экспонент их аргументы складываются, а при делении — вычитаются

$$l(\mathbf{y}) = \frac{\prod_{k=1}^K W_{sn}(y_k)}{\prod_{k=1}^K W_n(y_k)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp \sum_{k=1}^K \left[-\frac{(n_k - s_k)^2}{2\sigma_n^2} \right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp \sum_{k=1}^K \left[-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2} \right]} = \exp \sum_{k=1}^K \left[-\frac{n_k^2 + 2n_k s_k + s_k^2 - n_k^2}{2\sigma_n^2} \right].$$

Выразим дисперсию из (5.13) и разделим аргумент экспоненты на два слагаемых

$$l(\mathbf{y}) = \exp \left[\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^K 2n_k s_k \Delta t - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^K s_k^2 \Delta t \right]. \quad (5.17)$$

5. Выведем решающее правило.

Воспользуемся энергетическим следствием из теоремы Котельникова

$$E_s = \sum_{k=1}^K s_k^2 \Delta t = \int_0^T s^2(t) dt. \quad (5.18)$$

Первая сумма в (5.17) имеет размерность энергии. Её также заменим интегралом, который принято называть «корреляционным интегралом» (КИ)

$$z = \sum_{k=1}^K n_k s_k \Delta t = \int_0^T n(t) s(t) dt. \quad (5.19)$$

Теперь переходим к непрерывным функциям в отношении правдоподобия (5.17)

$$l[y(t)] = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) s(t) dt \right]. \quad (5.20)$$

Так как экспонента является монотонной функцией, обе части (5.20) можно прологарифмировать без нарушения условий достижения максимума

$$\ln l[y(t)] = -\frac{E_s}{N_0} + \frac{2}{N_0} z. \quad (5.21)$$

Решающее правило можно выразить в виде

$$-\frac{E_s}{N_0} + \frac{2}{N_0} z \underset{0^*}{\overset{s^*}{\gtrless}} \ln l_0. \quad (5.22)$$

Здесь обозначение s^* соответствует принятию решения о наличии сигнала, а обозначение 0^* — о его отсутствии.

В (5.22) переменной является значение КИ, остальные множители и слагаемые — константы, поэтому можно правило свести к виду

$$z \underset{0^*}{\overset{s^*}{\gtrless}} z_0. \quad (5.23)$$

Решающему правилу (5.23) соответствует следующая схема (рис. 5.4).

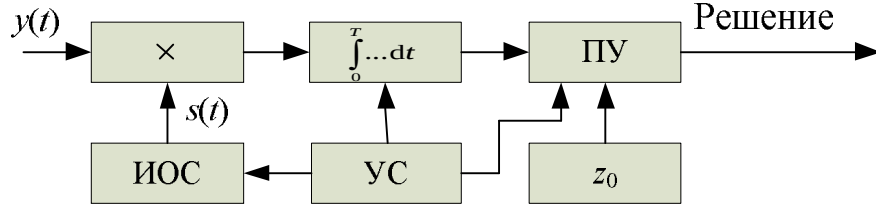


Рис. 5.4 — Структурная схема обнаружителя СИП

5.4.3. Качественные показатели обнаружителя СИП

Оценим вероятности правильных и ошибочных решений как основные показатели качества обнаружения.

Так как интегрирование — линейная операция, значения КИ распределены по тому же закону, что и гауссов белый шум.

При отсутствии сигнала (чистый шум) это гауссов закон с нулевым средним

$$W_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right]. \quad (5.24)$$

В аддитивной смеси сигнала с шумом происходит алгебраическое сложение мгновенных значений, следовательно, статистическое распределение имеет только шум. Так как КИ имеет размерность энергии, средним значением его будет энергия сигнала

$$W_{sn}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} \exp\left[-\frac{(z - E_s)^2}{2\sigma_z^2}\right]. \quad (5.25)$$

Чтобы получить выражение для дисперсии КИ, необходимо проинтегрировать квадрат произведения сигнала на шум

$$\sigma_z^2 = \int_0^T [n(t)s(t)]^2 dt.$$

Так как отсчёты сигнала и шума независимы, а полосу мы ограничили интервалом $[-F, F]$, в котором спектральная плотность мощности шума равна $N_0/2$, вместо интеграла от квадрата произведения функций будем иметь произведение двух интегралов

$$\sigma_z^2 = \int_0^T [n(t)]^2 dt \times \int_0^T [s(t)]^2 dt = \frac{N_0}{2} E_s. \quad (5.26)$$

Среднее значение КИ при наличии сигнала равно E_s , значит среднее значение квадрата КИ равно E_s^2 .

Введём **энергетическое отношение сигнал-шум**

$$r_{SNE} = \frac{E_s^2}{\frac{N_0 E_s}{2}} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (5.27)$$

Вводят также отношение сигнал-шум для **напряжений** q или **параметр обнаружения**

$$q = \sqrt{r_{SNE}} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}. \quad (5.28)$$

Вероятности правильных и неправильных решений можно найти путём интегрирования соответствующих плотностей вероятностей

$$P_{TD} = \int_{z_0}^{\infty} W_{sn}(z) dz; \quad (5.29)$$

$$P_{FA} = \int_{z_0}^{\infty} W_n(z) dz. \quad (5.30)$$

Изменяя порог, можно построить **рабочие характеристики** как зависимость вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги (рис. 5.5 а) и **характеристики обнаружения**: зависимости вероятности правильных решений от энергетического отношения сигнал-шум (рис. 5.5 б).

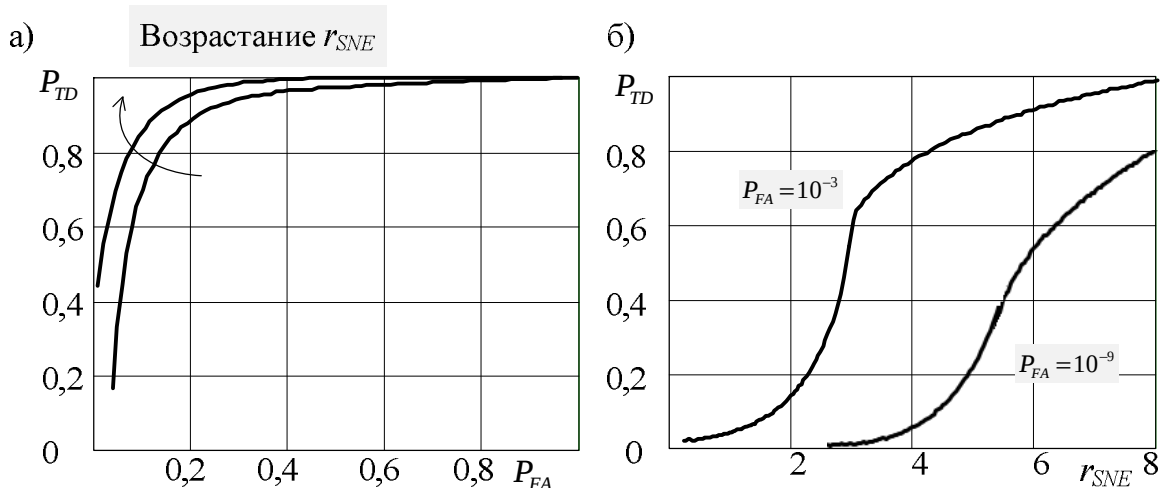


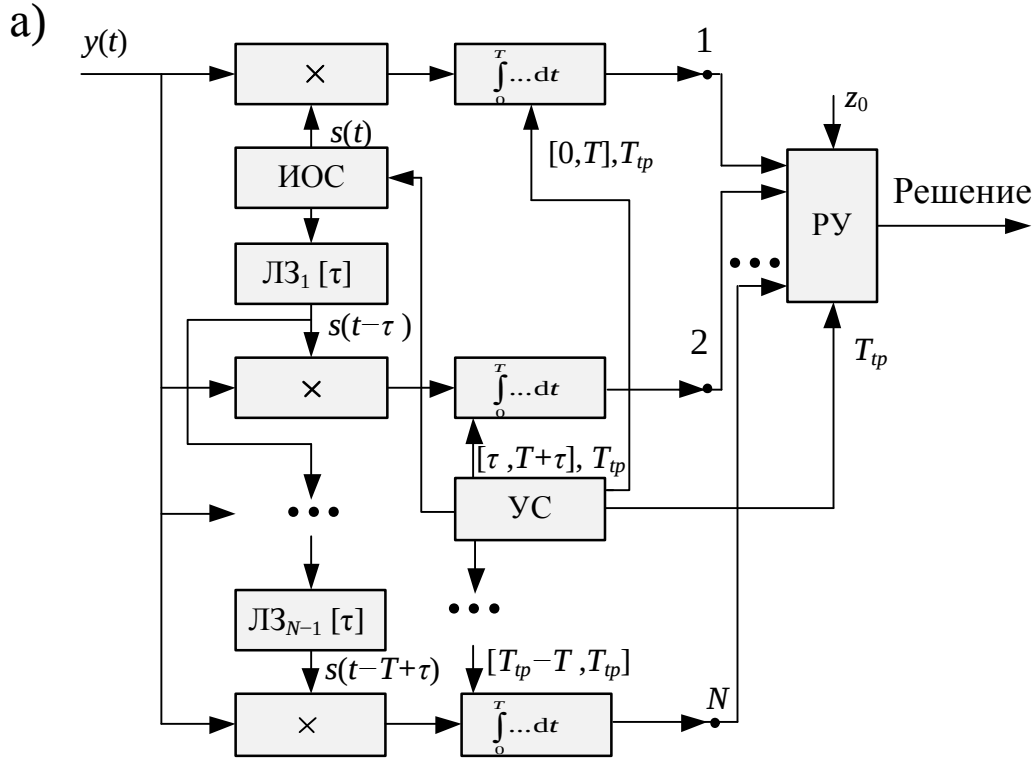
Рис. 5.5 — Рабочие характеристики (а) и характеристики обнаружения (б) для СИП

5.4.4. Выводы

1. Оптимальный обнаружитель вычисляет КИ и принимает решение об отсутствии или наличии сигнала путём сравнения значения КИ с порогом. Различные критерии соответствуют разным значениям порога.
2. Полученные результаты соответствуют идеальным условиям обнаружения. Качественные показатели оптимального обнаружителя характеризуют его **потенциальные** возможности, не реализуемые в полном объёме на практике.
3. На основе алгоритма оптимального обнаружителя можно строить **квази-оптимальные** обнаружители. Для этого изменяют схему с учётом возможностей практической реализации.

Пример. Сигнал полностью известен, кроме момента его появления Δt внутри тактового интервала T_{tp} . В радиолокации этот момент и является информационным параметром.

Возможная реализация обнаружителя: N параллельных каналов, в которых опорные сигналы сдвинуты по времени на величину $\tau = T_{tp}/N$. Дискрет выбирается, исходя из требований к точности определения момента Δt (рис. 5.6).



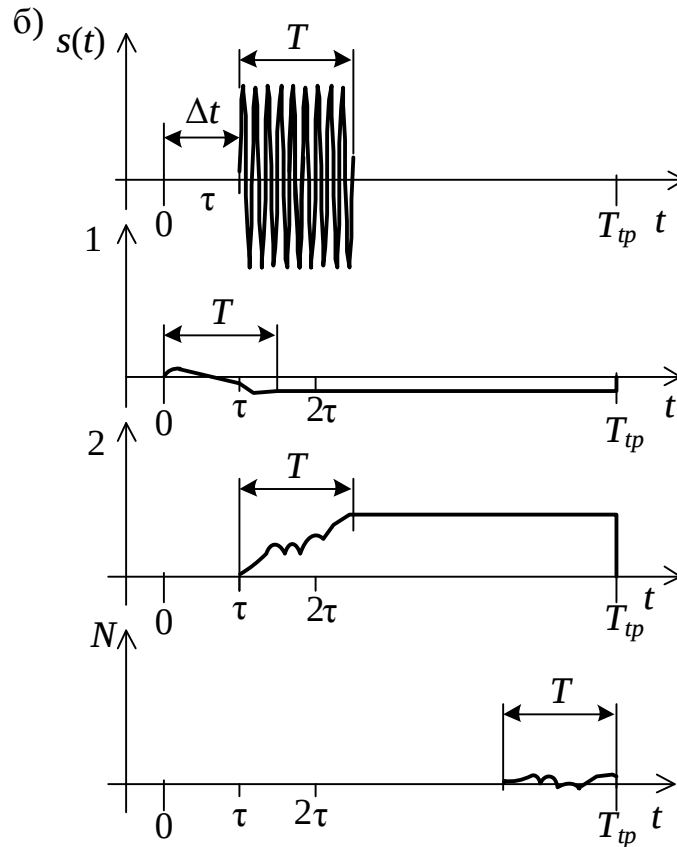


Рис. 5.6 — Структурная схема квазиоптимального обнаружителя (а) и временные диаграммы его работы (б)

5.5. Обнаружение сигналов с неизвестной начальной фазой

5.5.1. Условия задачи

Сигнал с неизвестной начальной фазой (СНФ) соответствует двум случаям:

- в передатчике радиоимпульсов нет фазовой синхронизации между огибающей сигнала и синусоидальным высокочастотным заполнением;
- в процессе РРВ возникают случайные флуктуации электрической длины трассы (диэлектрической проницаемости воздуха или ионосферы).

В обоих случаях в модель СНФ вводится случайная фаза β , которая распределена по **равномерному** закону $W(\beta)$ (рис. 5.7)

$$s(t, \beta) = A(t) \cos[2\pi ft + \varphi(t) - \beta]. \quad (5.31)$$

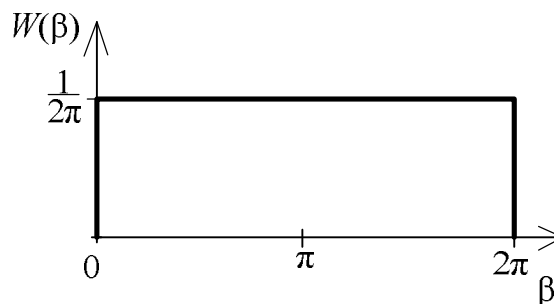


Рис. 5.7

5.5.2. Вывод решающего правила

Энергия сигнала и СПМ шума не зависят от фазы, но значение КИ теперь от фазы зависит

$$z = \int_0^T n(t) s(t) dt = \int_0^T n(t) A(t) \cos[2\pi ft + \varphi(t) - \beta] dt.$$

Воспользовавшись формулой тригонометрии для косинуса разности, получим

$$z = \cos\beta \underbrace{\int_0^T n(t) A(t) \cos[2\pi ft + \varphi(t)] dt}_{z_c} + \sin\beta \underbrace{\int_0^T n(t) A(t) \sin[2\pi ft + \varphi(t)] dt}_{z_s} = \cos\beta z_c + \sin\beta z_s.$$

Итак, отклик коррелятора можно интерпретировать как сигнал, который имеет модуль и фазу. Введём **комплексный корреляционный интеграл** ККИ:

$$Z = \sqrt{z_c^2 + z_s^2};$$

$$\text{Arg}(Z) = \Psi = \text{Arctg}\left(\frac{z_s}{z_c}\right).$$

Составляющие ККИ (рис. 5.8) можно выразить через модуль и фазу ККИ

$$z_c = Z \cos \Psi;$$

$$z_s = Z \sin \Psi;$$

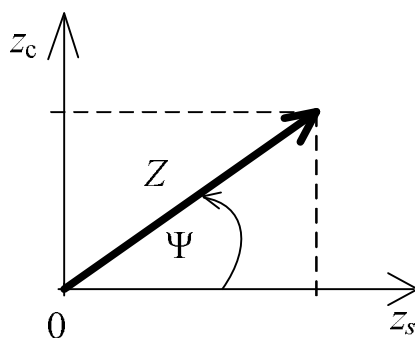


Рис. 5.8

Корреляционный интеграл

$$z = Z[\cos\beta \cos\Psi + \sin\beta \sin\Psi] = Z \cos(\beta - \Psi).$$

Отношение правдоподобия (5.20) можем записать в виде

$$l[y(t), \beta] = \exp\left[-\frac{E_s}{N_0} + \frac{2}{N_0} z\right] = \exp\left[-\frac{E_s}{N_0} + \frac{2}{N_0} Z \cos(\beta - \Psi)\right].$$

Для исключения влияния начальной фазы нужно это выражение усреднить по фазе

$$\overline{I[y(t), \beta]} = \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right) \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2Z \cos(\beta - \Psi)}{N_0} d\beta\right) = \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right). \quad (5.32)$$

Здесь $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решающее правило сравнения с порогом в силу монотонности экспоненты и функции Бесселя можно записать в виде

$$Z \underset{0^*}{\overset{s^*}{>}} Z_0. \quad (5.33)$$

Обнаружитель СНФ должен вычислять модуль ККИ (рис. 5.9).

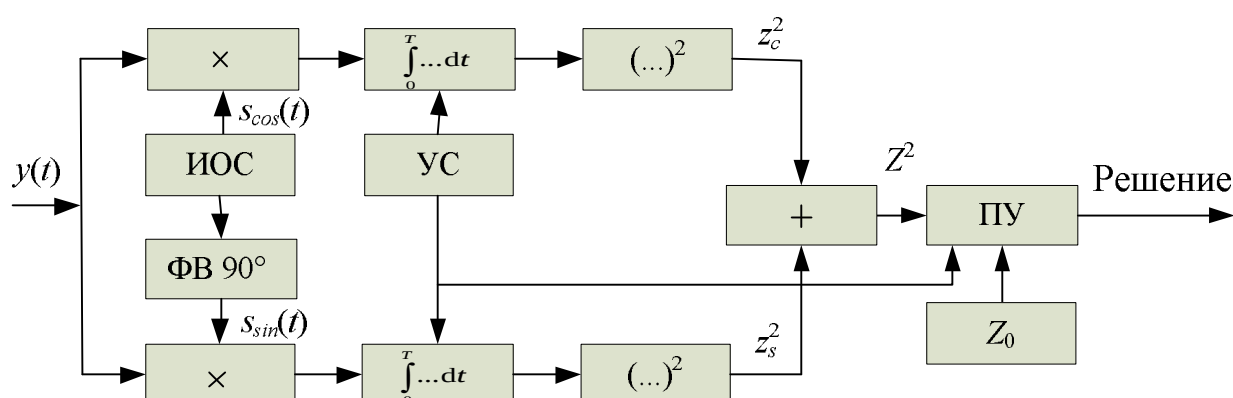


Рис. 5.9 — Структурная схема оптимального обнаружителя СНФ

Начальная фаза **не влияет** на результат сложения суммы квадратов сигналов, сдвинутых на 90° , благодаря тригонометрическому равенству

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

5.5.3. Качественные показатели обнаружителя СНФ

Так как вычисляется **модуль ККИ**, при отсутствии сигнала шум распределён по закону Релея

$$W_n(Z) = \frac{Z}{\sigma_z^2} \exp\left[-\frac{Z^2}{2\sigma_z^2}\right]. \quad (5.34)$$

При наличии сигнала изменяется среднее значение и добавляется модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка: получаем **обобщенный закон Релея**

$$W_{sn}(Z) = \frac{Z}{\sigma_z^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + E_s^2}{2\sigma_z^2}\right] I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right). \quad (5.35)$$

Вероятности правильных и неправильных решений находим интегрированием дифференциальных законов распределения ККИ

$$P_{TD} = \int_{Z_0}^{\infty} W_{sn}(Z) dZ; \quad (5.36)$$

$$P_{FA} = \int_{Z_0}^{\infty} W_n(Z) dZ. \quad (5.37)$$

Можно построить характеристики обнаружения и рабочие характеристики так же, как для СИП (см. ниже).

5.5.4. Выводы

1. Для исключения начальной фазы обработка производится в двух квадратурных каналах (со сдвигом фаз на 90 градусов). При вычислении модуля квадратурные КИ возводятся в квадрат и суммируются, чем исключается влияние фазы.
2. Количественные различия в законах распределения шума и сигнала с шумом приводят к **ухудшению** качественных показателей обнаружителя по сравнению с СИП.
3. Структурно оптимальный приёмник более сложен, но существенно упрощается задача генерации опорного сигнала: не нужно следить за начальной фазой.

5.6. Обнаружение сигналов с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой

5.6.1. Условия задачи

Амплитудные флуктуации: при движении объектов; из-за погодных условий («замирания» в атмосфере, осадках); из-за отражений от подстилающей поверхности.

В модель СНФА введём множитель амплитуды B

$$s(t, \beta, B) = BA(t) \cos[2\pi ft + \varphi(t) - \beta]. \quad (5.38)$$

Случайная величина B лежит в пределах от 0 до 1.

Сделаем следующие предположения.

1. Флуктуации — глубокие, т. е. среднее значение мгновенных отсчётов равно **нулю**, а множитель амплитуды распределён по закону Релея.
2. Флуктуации амплитуды и фазы **независимы**. Это подтверждено, в частности, результатами экспериментальных исследований, проводившихся сотрудниками нашей кафедры для трасс прямой видимости.

В силу независимости двух случайных величин их совместная (двумерная) плотность вероятностей есть произведение одномерных плотностей

$$W_{B\beta}(B, \beta) = W_B(B)W_\beta(\beta) = \frac{B}{\sigma_B^2} \exp\left(-\frac{B^2}{2\sigma_B^2}\right) \frac{1}{2\pi}.$$

Отношение правдоподобия для СИП (5.20) включало энергию сигнала и КИ. Теперь это отношение справедливо только для мгновенных значений

$$l[y(t), \beta, B] = \exp\left(-\frac{E_s}{N_0} + \frac{2}{N_0} z\right). \quad (5.39)$$

Мгновенное значение энергии сигнала пропорционально квадрату амплитуды

$$E_s(A, B) = \int_0^T s^2(t) dt = B^2 E_{AV},$$

где E_{AV} — средняя энергия сигнала с амплитудной модуляцией или без неё.

Так как имеем флуктуирующую фазу, вводим ККИ и выражаем КИ через модуль и фазу ККИ с амплитудным множителем

$$z = BZ \cos(\Psi - \beta). \quad (5.40)$$

Вместо энергии сигнала в ККИ вводим среднюю энергию модулированного сигнала, выразим отношение правдоподобия (5.20) с учётом этих обозначений

$$l[y(t), \beta, B] = \exp\left[-\frac{B^2 E_{AV}}{N_0} + \frac{2}{N_0} BZ \cos(\Psi - \beta)\right].$$

Зная совместную плотность вероятностей, можем усреднить это отношение по двум параметрам

$$\overline{l[y(t), \beta, B]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{B^2 E_{AV}}{N_0} + \frac{2BZ \cos(\Psi - \beta)}{N_0} - \frac{B^2}{2\sigma_B^2}\right] \frac{B}{\sigma_B^2} dB d\beta.$$

Под интегралами первое и третье слагаемые от β не зависят, второе даёт модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка. Остаётся только один интеграл

$$\overline{l[y(t), \beta, B]} = \frac{1}{\sigma_B^2} \int_0^\infty I_0\left(\frac{2BZ}{N_0}\right) \exp\left[-B^2 \left(\frac{E_{AV}}{N_0} + \frac{1}{2\sigma_B^2}\right)\right] B dB.$$

Данный интеграл сводится к табличному интегралу следующего вида

$$\int_0^\infty \exp(-bx^2) x I_0(ax) dx = \frac{1}{2b} \exp\left(\frac{a^2}{4b}\right).$$

Получаем

$$\overline{l[y(t), \beta, B]} = \frac{1}{\sigma_B^2} \frac{1}{2\left(\frac{E_{AV}}{N_0} + \frac{1}{2\sigma_B^2}\right)} \exp\left[\left(\frac{2Z}{N_0}\right)^2 \frac{1}{4\left(\frac{E_{AV}}{N_0} + \frac{1}{2\sigma_B^2}\right)}\right].$$

Величина B есть множитель амплитуды. Для закона Релея максимум достигается, когда $B^2 = \sigma_B^2$. При таком предположении отношение правдоподобия можно упростить

$$l_{AV} = \frac{N_0}{2E_{AV} + N_0} \exp \left[\frac{Z^2}{N_0(2E_{AV} + N_0)} \right].$$

Множитель перед экспонентой перенесём в левую часть и прологарифмируем отношение правдоподобия

$$\ln \left[\frac{l_{AV}(2E_{AV} + N_0)}{N_0} \right] = \frac{Z^2}{N_0(2E_{AV} + N_0)}.$$

Оставим в правой части только квадрат модуля ККИ, а всё остальное обозначим как Z_0^2 . В силу монотонности функции уберём возведение в квадрат. Получим внешне такое же решающее правило, как для СНФ (5.33)

$$Z \underset{0^*}{\overset{s^*}{>}} Z_0. \quad (5.41)$$

Здесь

$$Z_0 = \sqrt{N_0(2E_{AV} + N_0) \ln \left[\frac{l_{AV}(2E_{AV} + N_0)}{N_0} \right]}.$$

Таким образом, структурная схема обнаружителя СНФА — **такая же**, как для СНФ (см. рис. 5.9).

5.6.2. Качественные характеристики обнаружителя СНФА

Вероятности решений:

$$P_{TD} = \int_{Z_0}^{\infty} W_{sn}(Z) dZ;$$

$$P_{FA} = \int_{Z_0}^{\infty} W_n(Z) dZ.$$

Амплитуды шума распределены по закону Релея

$$W_n(Z) = \frac{Z}{\sigma_z^2} \exp \left[-\frac{Z^2}{2\sigma_z^2} \right],$$

где $\sigma_z^2 = \frac{E_{AV} N_0}{2}$.

При наличии сигнала с флуктуирующей амплитудой, причём мы рассматриваем только **глубокие** флуктуации (так как фаза почти не влияет на энергию сиг-

нала, её влияние на качество обнаружения в этом случае незначительно), мгновенные значения и сигнала, и шума распределены **по нормальному закону** с нулевым средним, значит, их сумма также распределена по нормальному закону, а амплитуда — по закону Релея, но с дисперсией, зависящей от среднеквадратической энергии сигнала

$$W_{sn}(Z) = \frac{Z}{\sigma_z^2 + \frac{E_{AV}^2}{2}} \exp \left[-\frac{Z^2}{2\sigma_z^2 + E_{AV}^2} \right].$$

Благодаря одинаковой форме законов распределения можно вывести простую формулу для рабочих характеристик обнаружителя СНФА

$$P_{TD} = \frac{1}{P_{FA}^{1+r_{SNE}/2}}.$$

Характеристики обнаружения для различных моделей сигналов [2] представлены на рис. 5.10.

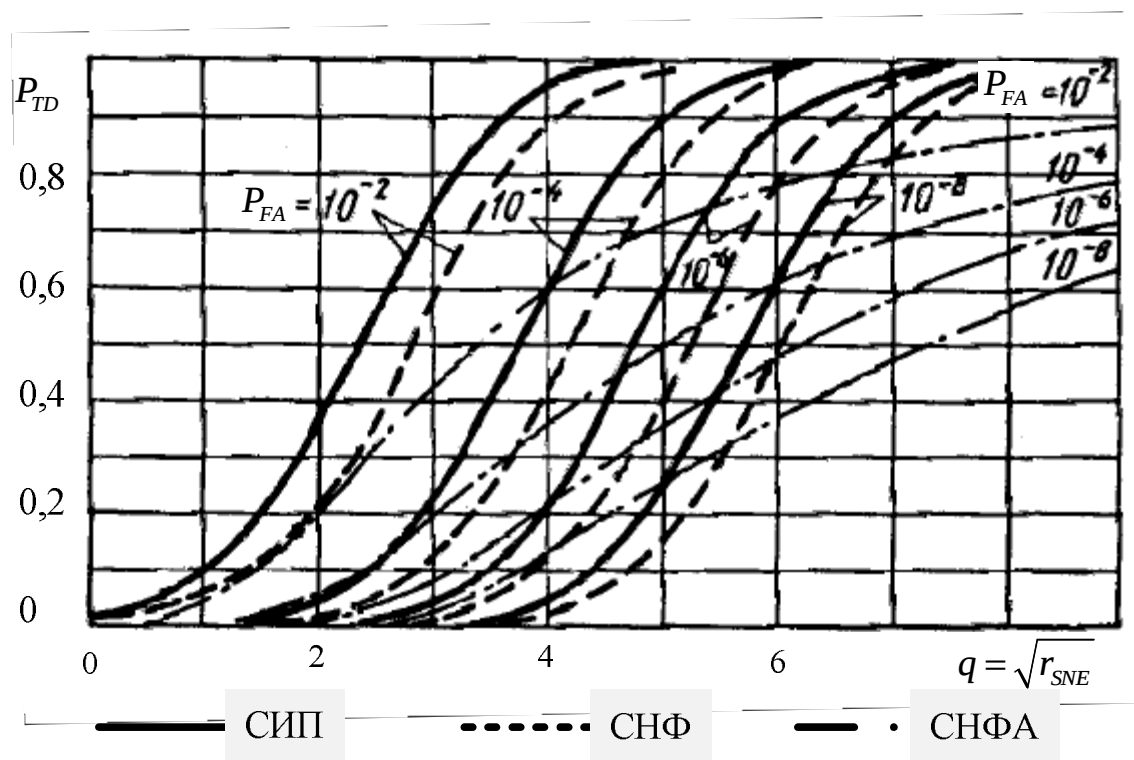


Рис. 5.10

Видно, что для СНФА при малых значениях СШЭ вероятность правильного обнаружения довольно велика, так как возникают случайные «выбросы» амплитуды сигнала. С ростом СШЭ повышение качества резко замедляется: наоборот, и при большой средней энергии существенны «провалы» амплитуды.

5.7. Обнаружение пачек радиоимпульсов

Пакет (пачка) импульсов — набор из **известного числа N** импульсов **стандартной формы**, повторяющихся с известной частотой и отличающихся сдвигом во времени и, возможно, некоторыми случайными параметрами.

5.7.1. Когерентная пачка импульсов

Если случайных параметров нет, то каждый импульс — СИП, такая пачка называется **когерентной**. Сам термин относится к радиосигналам, для которых известна начальная фаза.

Для i -го импульса ($i=0,1,\dots,N-1$) длительностью τ будем иметь следующую модель

$$s_i(t) = S(t - i\Delta t, \tau) \cos[2\pi f_0 t + \varphi],$$

где $S(t, \tau)$ — функция, описывающая форму огибающей импульса;

Δt — стандартный временной сдвиг;

f_0 — частота заполнения;

φ — начальная фаза каждого импульса.

Всю пачку (рис. 5.11) можно представить суммой

$$s_p(t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i(t) = \sum_{i=0}^{N-1} S(t - i\Delta t, \tau) \cos[2\pi f_0 t + \varphi].$$

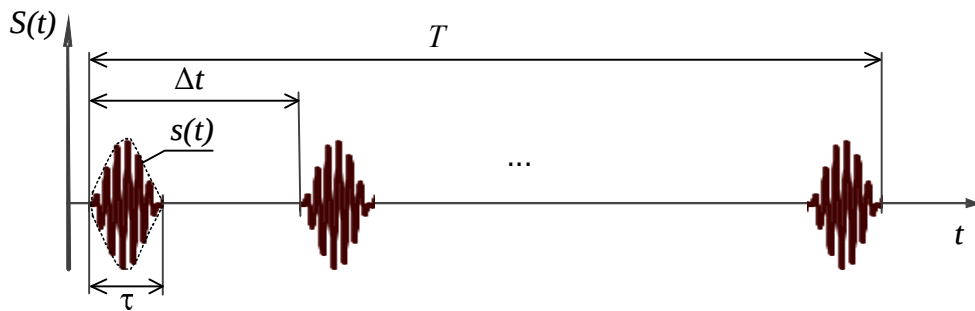


Рис. 5.11

Длительность пачки T , очевидно, равна

$$T = (N-1)\Delta t + \tau.$$

Каждый импульс — СИП, значит, обнаружитель можно построить по ранее рассмотренной ранее схеме, только добавить суммирующе-запоминающее устройство, роль которого может выполнить интегратор (рис. 5.12).

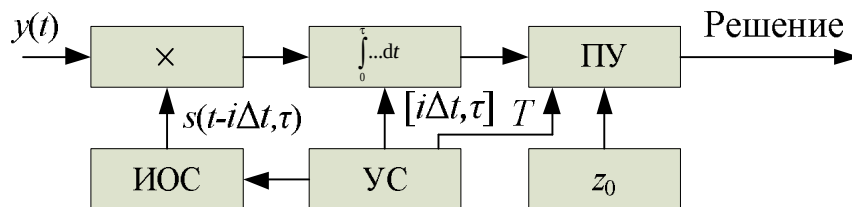


Рис. 5.12

Теперь устройство синхронизации должно быть более сложным:

- разрешать генерацию опорного сигнала только на длительность импульса;
- определять все моменты начала каждого импульса;
- разрешать накопление КИ только на время каждого импульса;

— определять момент принятия решения только после окончания всей пачки.

В этом случае качественные показатели обнаружителя будут определяться не энергией отдельного импульса $E_i = E_0$, а суммарной энергией пачки

$$E_{\Sigma} = \sum_{i=0}^{N-1} E_0 = NE_0.$$

5.7.2. Пачка импульсов с флуктуирующей начальной фазой

Модель сигнала включает случайную начальную фазу β , имеющую равномерное распределение

$$s_{pp}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} S(t - i\Delta t, \tau) \cos[2\pi f_0 t + \varphi + \beta_i].$$

Каждый импульс — СНФ, следовательно, для обнаружения можно применить квадратурную обработку с вычислением ККИ (рис. 5.13).

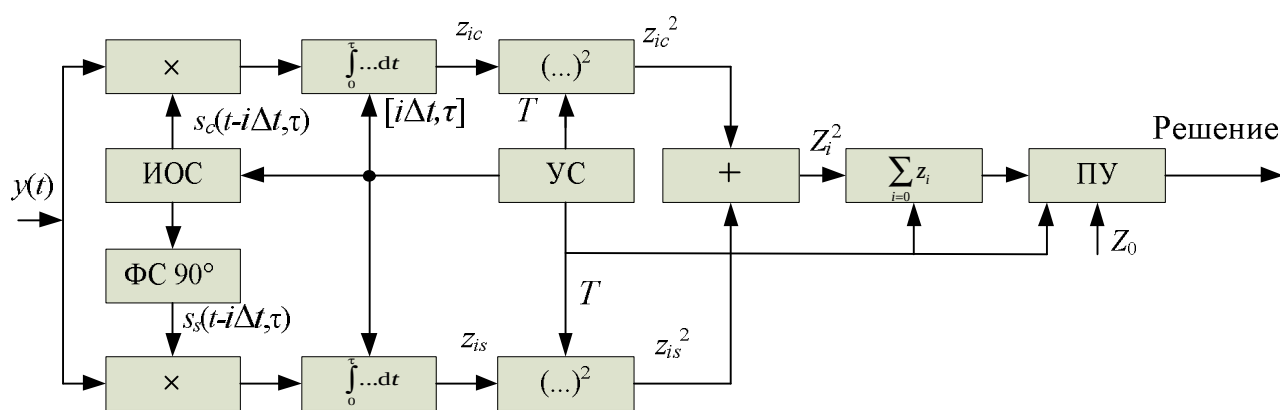


Рис. 5.13

5.7.3. Пачка импульсов с флуктуирующими начальной фазой и амплитудой

Модель сигнала включает случайную начальную фазу каждого импульса β_i , имеющую равномерное распределение, и флуктуирующую амплитуду, множитель которой B_i распределен по закону Релея

$$s_{ppa}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} B_i S(t - i\Delta t, \tau) \cos[2\pi f_0 t + \varphi + \beta_i].$$

Каждый импульс, следовательно, является СНФА. Взаимозависимость параметров импульсов оценивают для двух возможных вариантов.

Вариант 1: «дружные» флуктуации амплитуды, то есть амплитуды всех импульсов в пачке одинаковы ($B_i = \text{const}$), но меняются от пачки к пачке.

Случай «низкочастотных» флуктуаций: интервал корреляции флуктуаций τ_{AU} много больше интервала между импульсами в пачке Δt , но меньше длительности пачки T :

$$T > \tau_{AU} \gg \Delta t.$$

Пачку можно считать **одним** импульсом сложной формы (с интервалами «молчания») и для обнаружения использовать квадратурную обработку с вычислением ККИ (см. рис. 5.14). Качественные показатели — как при приёме СНФА, имеющего энергию, равную суммарной среднеквадратической энергии сигнала

$$E_{\Sigma AV} = NE_{AV}.$$

Вариант 2: независимые флуктуации амплитуды.

Возможна только многоканальная обработка:

- пределы изменения амплитуд квантуются на K уровней;
- в обнаружителе создаётся K каналов квадратурной обработки (всего $2K$), каждый со своим ИОС;
- принимается наиболее правдоподобное решение путём сравнения результатов обнаружения в каждом канале.

Выводы.

1. Оптимальная обработка пачки радиоимпульсов может проводиться в обнаружителях, вычисляющих КИ или ККИ, но включающих дополнительно устройства накопления.

2. Качественные показатели обнаружителей пачек импульсов могут быть высокими благодаря **накоплению** энергии отдельных импульсов, так как энергетическое отношение сигнал-шум определяется энергией пачки в целом, а не отдельного импульса.

3. В случае «быстрых» независимых флуктуаций амплитуды схема обработки становится многоканальной и преимущества обнаружителя пачек импульсов теряются.

5.8. Оптимальная линейная фильтрация

Как уже отмечалось, линейная цепь характеризуется импульсной характеристикой (ИХ) $h(t)$ — откликом на импульс в виде дельта-функции, — и частотной характеристикой $K(jf)$. Эти характеристики связаны парой преобразований Фурье

$$K(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt;$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(jf) e^{j2\pi ft} df.$$

Если на вход линейной цепи подать сигнал $x(t)$, то отклик $u(t)$ будет выражаться **интегралом свёртки**, в котором верхний предел можно взять бесконечным, так как импульсный отклик начинается в момент $t = 0$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

5.8.1. Импульсная характеристика СФ

Сопоставим это выражение с КИ для **произвольного времени** запаздывания χ

$$z(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)s(t-\chi)dt.$$

Видно, что эти выражения похожи. Получим выражение для ИХ фильтра, позволяющего определить КИ с точностью до постоянной C и времени задержки t_0 . Условие имеет вид

$$Cz(\chi) = U(t_0 + \chi).$$

Величина КИ не зависит от текущего времени, поэтому в обоих интегралах можно взять переменную интегрирования τ . Равенство примет вид

$$C \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)s(\tau-\chi)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(t_0 + \chi - \tau)d\tau.$$

Для выполнения равенства необходимо, чтобы в подынтегральном выражении выполнялось условие

$$Cs(\tau-\chi) = h(t_0 + \chi - \tau).$$

Введём новую переменную

$$t = t_0 + \chi - \tau,$$

тогда

$$\tau - \chi = t_0 - t,$$

и выражение для ИХ **оптимального** или **согласованного фильтра** (СФ) приобретает вид

$$h_{OF}(t) = Cs(t_0 - t).$$

Здесь константы C и t_0 учитывают реальную ситуацию: уровень сигнала и постоянная задержка в фильтре не влияют на форму отклика. Если сигнал имеет длительность T , то полное значение КИ на выходе фильтра будет только по истечении этого времени:

$$t_0 \geq T.$$

Форма ИХ есть зеркальное отражение формы сигнала (рис. 5.14).

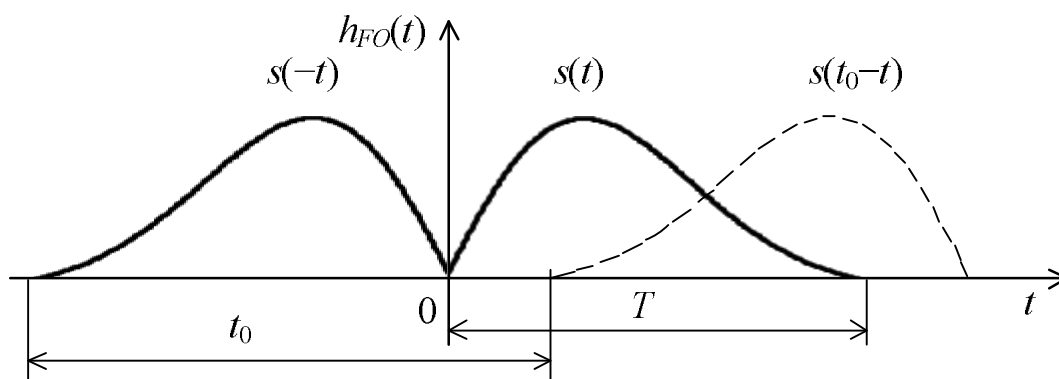


Рис. 5.14

Итак, отклик на выходе СФ будет повторять форму всей КФ, а нужное значение КИ соответствует **максимуму** этой функции.

Пример. Прямоугольный импульс

$$s(t) = \text{rect}(t, \tau).$$

Автокорреляционная функция (рис. 5.15)

$$\begin{aligned} K(\chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\chi)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t, \tau)\text{rect}(t+\chi, \tau)dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 \text{rect}(t, \tau)\text{rect}(t+\chi, \tau)dt + \int_0^{\infty} \text{rect}(t, \tau)\text{rect}(t-\chi, \tau)dt = \\ &= \int_{-\chi-\tau}^0 1 \cdot dt + \int_0^{-\chi+\tau} 1 \cdot dt = (\tau - |\chi|)\text{rect}(\chi, 2\tau). \end{aligned}$$

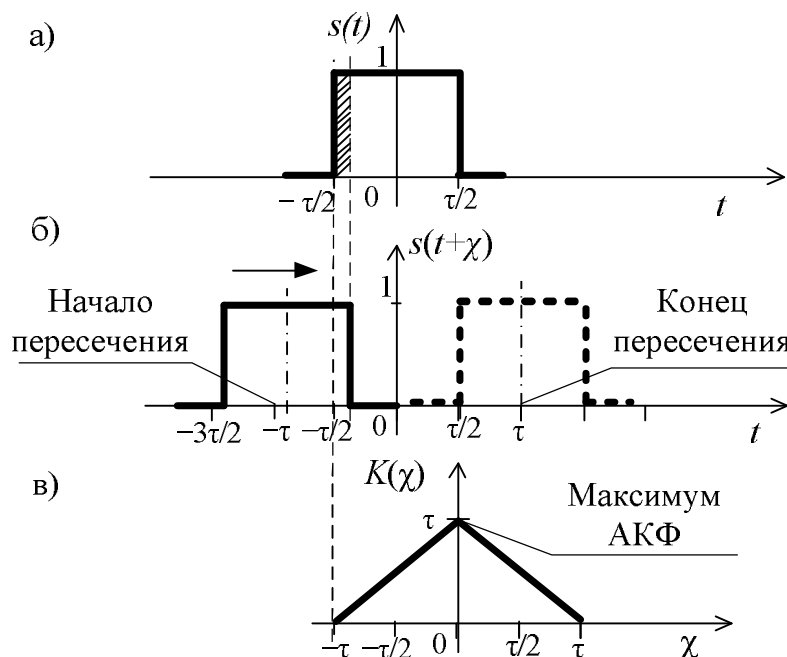


Рис. 5.15 — Временные диаграммы прямоугольного импульса (а), процесса наложения (б) и АКФ (в)

Для радиоимпульса, согласно свойству сдвига спектра на частоту f_0 , картина будет такой же, но для **огibaющей** импульса с частотой заполнения f_0 .

В рассмотренных задачах обнаружения моменты возможного появления импульса считаются известными, поэтому в оптимальном обнаружителе должно быть устройство синхронизации (УС), которое определяет моменты принятия решения. Отклик СФ при отсутствии сигнала имеет нарастающий характер, но максимальная скорость нарастания соответствует наличию сигнала. После достижения максимума уровень отклика уменьшается, поэтому отсчёт следует брать в моменты окончания сигнала. Так как длительность АКФ в 2 раза больше длительности сигнала T , для обеспечения непрерывного анализа смеси нужно принудительно сбрасывать СФ в исходное состояние (рис. 5.16).

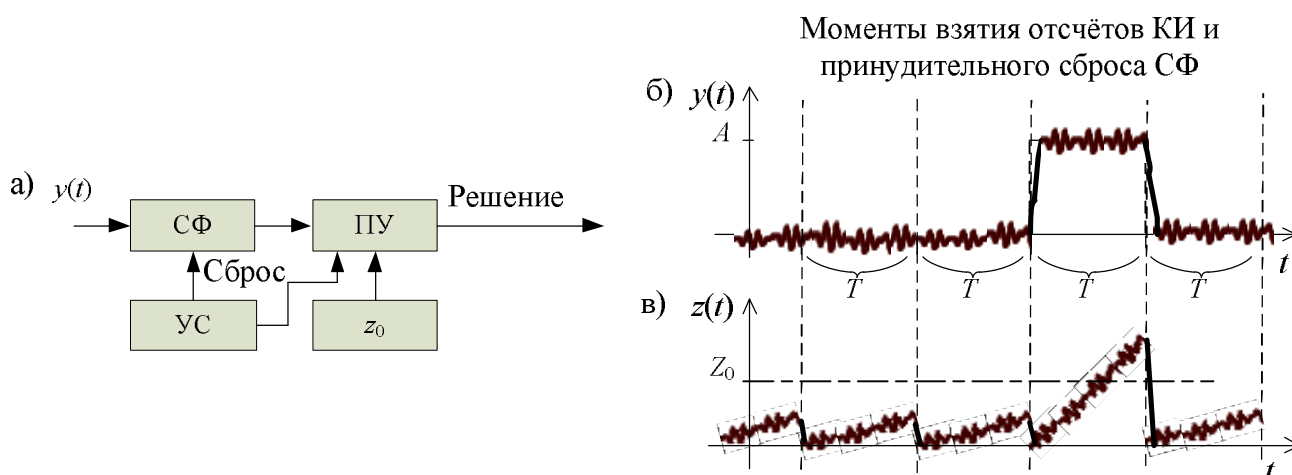


Рис. 5.16 — Структурная схема обнаружителя на СФ со сбросом (а) и временные диаграммы сигналов на входе (б) и выходе (в) СФ

Таким образом, СФ по принципу действия **не требует** синхронизации, то есть его реализация может быть проще, чем коррелятора. В наиболее простой схеме при превышении порога не только принимается решение о наличии сигнала, но и фиксируется сам момент его появления (рис. 5.17).

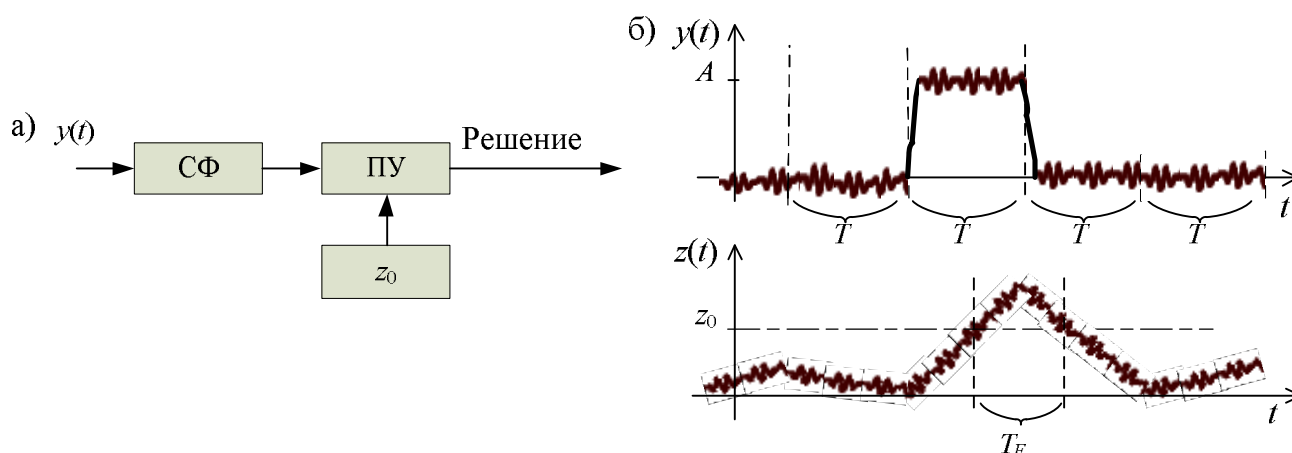


Рис. 5.17 — Структурная схема обнаружителя на СФ без сброса (а) и временные диаграммы его работы (б)

Очевидно, что в этом случае уровень порога необходимо устанавливать **меньше** оптимального, следовательно, качественные показатели будут ниже, чем у обнаружителя со сбросом.

Еще одна проблема: если к следующему моменту появления сигнала СФ не успеет вернуться в исходное состояние, то это новый сигнал может быть не обнаружен. Решение вопроса о том, один или два сигнала приняты, составляет задачу **разрешения** сигналов, которая должна быть рассмотрена отдельно.

5.8.2. Частотные свойства СФ

Итак, СФ имеет ИХ, **согласованную** с сигналом. Найдем ЧХ СФ как ОПФ от ИХ

$$K_{OF}(j f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{OF}(t) e^{-j 2 \pi f t} dt = C \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 - t) e^{-j 2 \pi f t} dt.$$

Выполним замену переменных

$$t_0 - t = \chi; \quad t = t_0 - \chi.$$

Получим

$$K_{OF}(j f) = C \int_{-\infty}^{\infty} s(\chi) e^{-j 2 \pi f t_0} e^{j 2 \pi f \chi} d\chi = C e^{-j 2 \pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\chi) e^{j 2 \pi f \chi} d\chi = C e^{-j 2 \pi f t_0} S^*(j f).$$

Итак, ЧХ СФ пропорциональна **комплексно-сопряженному спектру** сигнала

$$K_{OF}(j f) = C e^{-j 2 \pi f t_0} S^*(j f).$$

Множитель на модуль ЧХ, то есть на АЧХ, не влияет

$$K_{OF}(f) = C S(f).$$

Аргумент ЧХ, т. е. ФЧХ, приобретает дополнительный сдвиг

$$\text{Arg}[K_{OF}(j f)] = -\text{Arg}[S(j f)] - 2 \pi f t_0.$$

Форма АЧХ СФ повторяет амплитудный спектр сигнала, но при этом:

— форма сигнала на выходе СФ **искажается**, однако задача точного воспроизведения формы не ставится, достаточно вынести решение о наличии или отсутствии сигнала;

— СФ способствует «вытягиванию», т. е. «подъёму» наиболее интенсивных составляющих спектра сигнала, тем самым подавляя составляющие низкого уровня, сильно искажённые шумом.

ФЧХ имеет знак, противоположный знаку аргумента спектра. Это обеспечивает неискажённую передачу составляющих при постоянной задержке во времени.

5.9. Синтез согласованных фильтров во временной области

5.9.1. Принцип прямого синтеза

Задача: используя линейные элементы, реализовать цепь с импульсной характеристикой нужного вида.

Принцип прямого синтеза импульсных сигналов вытекает из фильтрующего свойства дельта-функции, только место идеального дельта-импульса берётся короткий прямоугольный импульс. Реальный сигнал представляется суммой большого числа таких импульсов, сдвинутых во времени друг относительно друга на их длительность, амплитуды которых изменяются по закону сигнала. Для радиосигнала синтезированный импульс является **огibaющей**, т. е. ВЧ колебание модулируется этим импульсом.

Принцип прямого синтеза СФ с импульсной характеристикой, имеющей форму сигнала, обращённого во времени, аналогичен. Так как отклик СФ соответствует автокорреляционной функции сигнала, цепь должна суммировать результаты сдвига сигнала на малые промежутки времени.

5.9.2. Использование многоотводных линий задержки

Для один из наиболее гибких методов формирования как самих сигналов сложной формы, так и СФ основан на применении многоотводных **линий задержки** (ЛЗ).

Интегральные многовыводные ЛЗ, рассчитанные на n ступеней задержки, это линейные, взаимные компоненты, содержащие два входа-выхода и $n - 1$ боковых отвода. Интервал задержки между соседней парой отводов Δt_d фиксирован и является параметром ЛЗ.

При формировании импульсного сигнала сложной формы на вход ЛЗ подаётся формирующий прямоугольный импульс $x(t)$ длительностью Δt_d (необходимое условие получения непрерывного сигнала). На первом отводе сигнал появится в момент окончания этого импульса, а на каждом следующем отводе — в момент окончания импульса на предыдущем отводе. При n ступенях задержки импульс на выходе ЛЗ будет задержан на максимальное время $\Delta t_{\max}$, равное

$$\Delta t_{\max} = n\Delta t_d.$$

Сигналы с каждого вывода ЛЗ можно подать через усилители с определёнными коэффициентами усиления k_i ($i=0,1,...,n$) на сумматор (рис. 5.18 а).

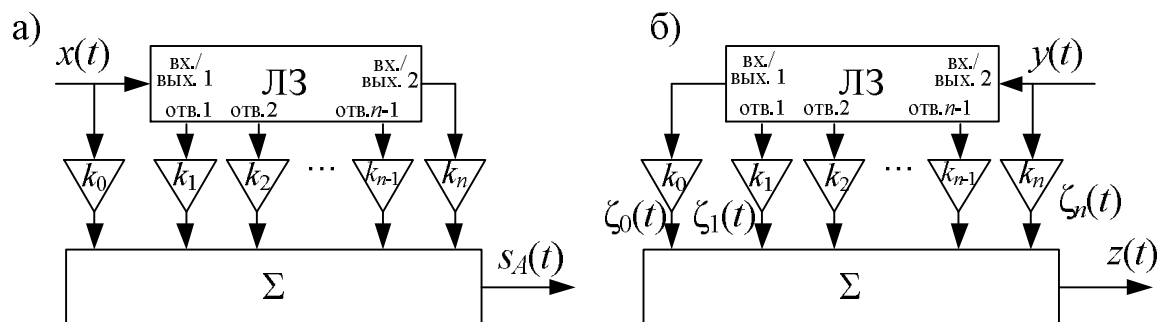


Рис. 5.18

Подбирая коэффициенты усиления, можно сформировать импульсный сигнал в виде **ступенчатой** функции (см. рис. 5.18 а)

$$s_A(t) = \sum_{i=0}^n k_i x(t - i\Delta t_d).$$

Такая схема имеет дополнительное преимущество: цепь допускает юстировку, т. е. точную настройку под реальную форму сигнала (форма может отличаться от расчётной из-за неидеальности элементов) путём регулировки коэффициентов усиления усилителей.

Длительность сформированного сигнала T , очевидно, будет на один интервал задержки больше величины $\Delta t_{\max}$

$$T = \Delta t_{\max} + \Delta t_d = (n+1)\Delta t_d.$$

Таким образом, с помощью ЛЗ можно лишь аппроксимировать импульсный сигнал требуемой формы. Степень точности синтеза определяется числом ступеней задержки ЛЗ. Путём низкочастотной фильтрации можно выполнить сглаживание ступенчатого сигнала, тем самым обеспечить высокое качество аппроксимации при сравнительно небольшом числе отводов ЛЗ. Однако ограничения на минимальную длительность формирующего прямоугольного импульса связаны с ограничением на полосу рабочих частот, поэтому в реальных устройствах сформированный сигнал будет значительно сглаженным и без дополнительной фильтрации.

Если в рассмотренной схеме формирования импульсного сигнала подать смесь сигнала и помехи $y(t)$ длительностью T на второй вход-выход ЛЗ (см. рис. 5.19 б), то накопление выходного сигнала будет происходить с коэффициентами усиления, расположенными во времени **в обратном порядке**, от окончания сформированного сигнала к его началу. Это соответствует импульсной характеристике СФ. Длительность отклика будет равна $2T$.

5.9.3. Формирование импульсного сигнала сложной формы

Рассмотрим алгоритм прямого синтеза импульсного сигнала с помощью ЛЗ.

Пример. Синтезировать импульс релеевской формы $s(t)$ единичного размаха, длительностью $T = 10$ мкс со среднеквадратическим значением $\sigma_t = 3$ мкс.

Условие: быстроедействие элементной базы позволяет обрабатывать импульсы длительностью не менее 1 мкс.

Форма сигнала задаётся релеевским законом и длительностью T

$$s(t) = \frac{t}{\sigma_t^2} \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma_t^2}\right) \text{rect}\left(t - \frac{T}{2}, T\right).$$

1. Выбираем длительность формирующего прямоугольного импульса и интервал задержки Δt_d , равный минимально допустимой длительности 1 мкс. Определяем требуемое число ступеней задержки ЛЗ

$$n = \frac{T}{\Delta t_d} - 1 = \frac{10}{1} - 1 = 9.$$

2. Определяем значения коэффициентов усиления как уровни отсчётов сигнала $s(t)$ в моменты, соответствующие **серединам** формирующих импульсов

$$k_i = s(0,5\Delta t_d - i\Delta t_d) = s(0,5 - i).$$

Для заданных параметров импульса, имеющего форму закона Релея, значения коэффициентов усиления сведём в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_i	0,271	0,727	0,971	0,974	0,803	0,563	0,342	0,181	0,084	0,035

3. Запишем выражение для аппроксимированного сигнала и построим графики (рис. 5.19).

$$s_A(t) = \sum_{i=0}^n k_i \text{rect}(t - 0,5\Delta t_d - i\Delta t_d, \Delta t_d) = \sum_{i=0}^9 k_i \text{rect}(t - 0,5 - i, 1).$$

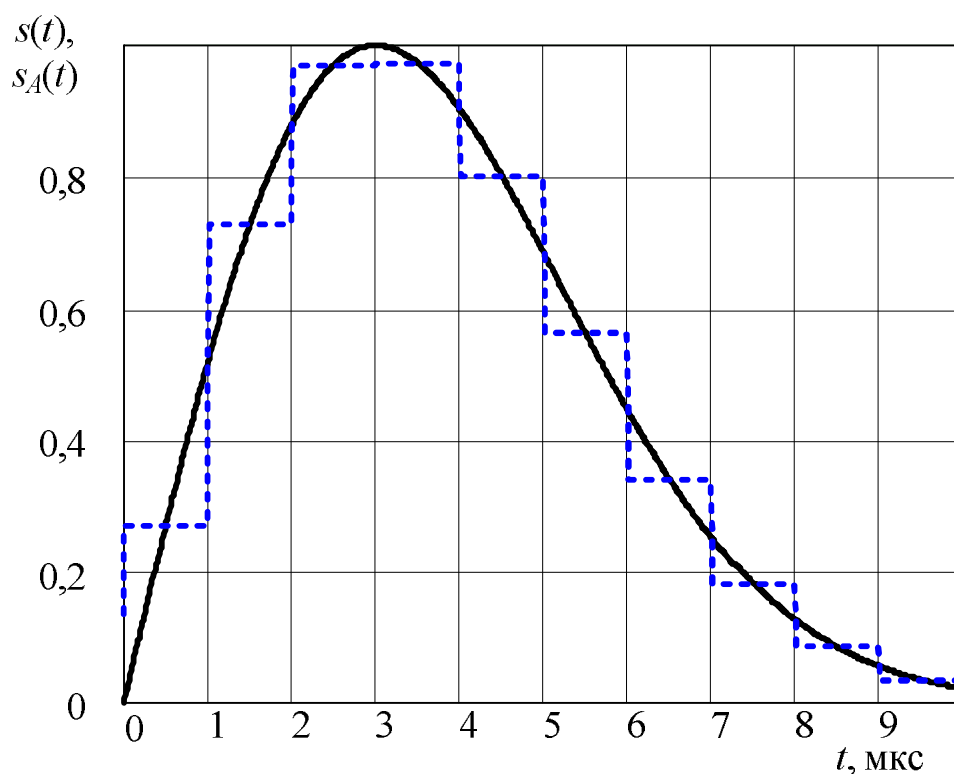


Рис. 5.19 — Исходный (сплошная линия) и сформированный сигналы (пунктир)

Подчеркнём, что технические ограничения на минимальную длительность формирующего импульса связаны с ограниченной полосой пропускания устройств, а значит, форма формирующего импульса не будет идеально прямоугольной, и «ступеньки» синтезированного сигнала будут сглаженными. Таким образом, выбирая технически минимально допустимую длительность формирующего

импульса, получаем возможность сформировать огибающую радиоимпульса с высокой точностью.

5.9.4. Синтез согласованного фильтра

Пусть на вход-выход 2 (см. рис. 5.18 б) подан импульсный сигнал $y(t)$ длительностью T , а коэффициенты усиления k_i подобраны в соответствии с законом изменения сигнала при подаче его на вход-выход 1.

На последний вход сумматора поступает сигнал $\zeta_n(t)$, синхронный с исходным, но с коэффициентом усиления k_n

$$\zeta_n(t) = k_n y(t).$$

На отводе ЛЗ номер $n - 1$ сигнал будет сдвинут относительно исходного $y(t)$ на Δt_d , поэтому на соответствующем входе сумматора появится сигнал $\zeta_{n-1}(t)$ вида

$$\zeta_{n-1}(t) = k_{n-1} y(t - \Delta t_d).$$

В результате сложения несдвинутого во времени сигнала $\zeta_n(t)$ и сдвинутого сигнала на один интервал Δt_d уровень отклика на выходе сумматора скачком возрастёт. При дальнейшем сложении возрастание уровня отклика будет продолжаться, пока сдвиг во времени не достигнет длительности сигнала T , то есть сигналы полностью наложатся, затем уровень начнёт понижаться, так как к сдвинутому сигналу больше ничего не будет добавляться. Отклик закончится, когда его длительность достигнет $2T$.

Рассмотрим формирование отклика СФ для нашего примера релеевского импульса.

Исходный сигнал $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = s(t) \operatorname{rect}\left(t - \frac{T}{2}, T\right),$$

где $s(t)$ — закон Релея с СКО $\sigma_t = 3$ мкс, нормированный на максимум; $T = 10$ мкс.

Задержка между выводами $\Delta t_d = 1$ мкс. Коэффициенты усиления k_i приведены в таблице 5.1.

Запишем выражение для отклика СФ и построим временные диаграммы (рис. 5.20).

$$z(t) = \sum_{i=0}^n k_{n-i} s[t - i\Delta t_d] \operatorname{rect}\left(t - \frac{T}{2} - i\Delta t_d, T\right) = \sum_{i=0}^9 k_{n-i} s[t - i] \operatorname{rect}(t - 5 - i, 10).$$

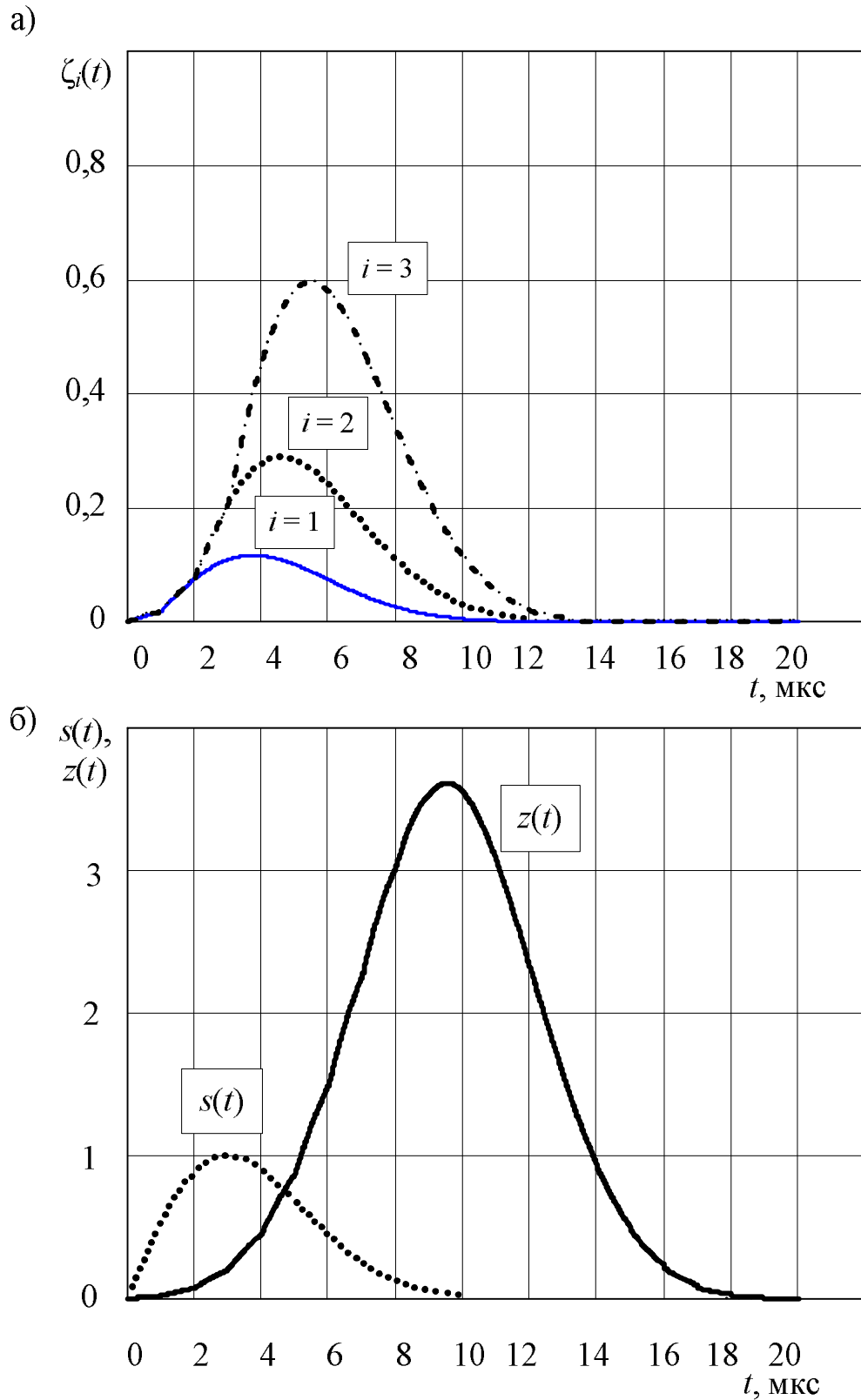


Рис. 5.20 — Промежуточные результаты сложения сигналов (а), исходный сигнал и отклик СФ (б)

Видно, что отклик СФ на основе многоотводной ЛЗ не является ступенчатой функцией, так как при сложении пар сдвинутых импульсов воспроизводится их реальная форма.

В приёмных устройствах согласованная фильтрация производится на **промежуточной** частоте (ПЧ) f_M , которая точно известна. Для отсутствия переходных процессов на «стыках импульсов» необходимо, чтобы задержка Δt_d была кратна периоду колебания промежуточной частоты (ПЧ)

$$\Delta t_d = \frac{N}{f_M},$$

где N — выбранное число периодов ПЧ.

5.9.5. Упрощённые реализации согласованных фильтров

Схема фильтра может быть упрощена для импульсов **симметричной формы** относительно момента $T/2$, так как тогда импульсная характеристика и форма импульса совпадают.

Самая простая схема — для прямоугольного импульса, т. к. все коэффициенты усиления одинаковы, а суммирование можно заменить интегрированием.

Результат интегрирования прямоугольного импульса — функция с изломом, линейно нарастающая на интервале длительности импульса (рис. 5.21 а, б). Чтобы обеспечить убывание и «гашение» постоянного уровня, необходимо взять ещё один результат интегрирования прямоугольного импульса с отрицательным уровнем, сдвинутый относительно первого на его длительность (рис. 5.21 в). В результате сложения этих двух сигналов получаем АКФ прямоугольного импульса (рис. 5.21 г). Схема формирователя очевидна (рис. 5.21 д).

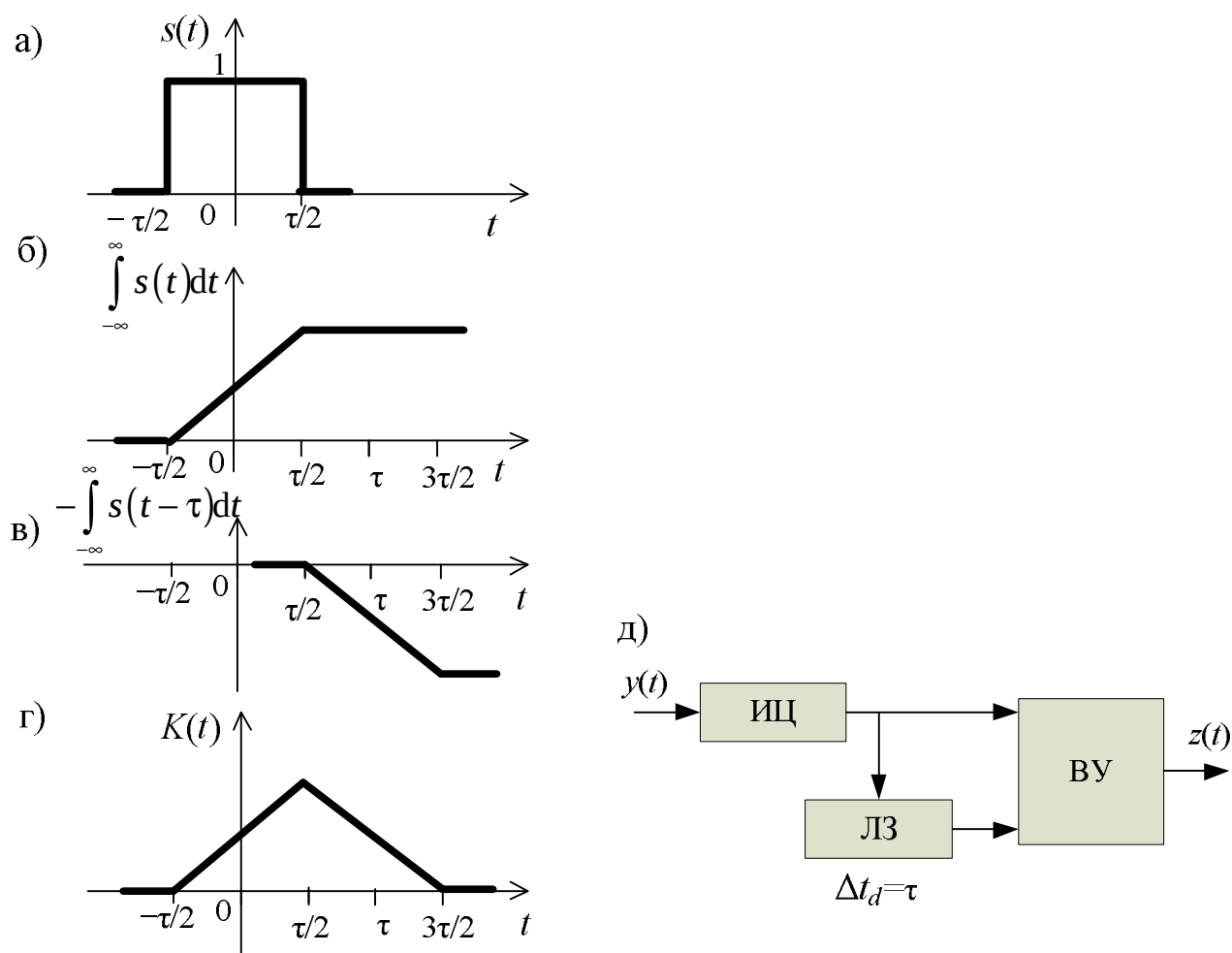


Рис. 5.21

Примечание. Если задержка кратна **нечётному числу** полупериодов, то вычитание следует заменить суммированием.

Роль интегрирующей цепи играет фильтр нижних частот (ФНЧ, рис. 5.22).

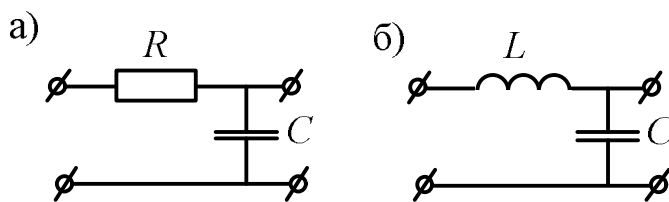


Рис. 5.22 — Варианты схем ФНЧ

5.9.6. Согласованный фильтр для пачек импульсов

Выражение для сигнала в виде пачки из n импульсов имеет следующий вид

$$s_p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} U_i s(t - i\Delta T),$$

где U_i — амплитуды импульсов в пачке;

$s(t)$ — форма каждого импульса;

ΔT — интервал между импульсами.

Пусть спектр одиночного импульса $G(jf)$. Смещение во времени даёт в спектре экспоненциальный множитель, поэтому для i -го импульса

$$G_i(jf) = G(jf)e^{-j2\pi f i \Delta T}.$$

Спектр пачки имеет вид

$$G_\Sigma(jf) = \sum_{i=0}^{n-1} U_i G(jf) e^{-j2\pi f i \Delta T}.$$

Частотная характеристика СФ

$$K_\Sigma(jf) = CG_\Sigma^*(jf) e^{-j2\pi f t_0}.$$

Величина смещения во времени должна обеспечить физическую реализуемость. Длительность пачки T равна

$$T = (n-1)\Delta T + \tau,$$

где τ — длительность импульса.

Примем в качестве t_0 эту величину, тогда

$$\begin{aligned} K_\Sigma(jf) &= CG_\Sigma^*(jf) \exp[-j2\pi f (n-1)\Delta T] \exp(-j2\pi f \tau) = \\ &= CG^*(jf) \exp(-j2\pi f \tau) \sum_{i=0}^{n-1} U_i \exp[-j2\pi f (n-1-i)\Delta T] \end{aligned}$$

Получили

$$K_\Sigma(jf) = CK(jf)K_w(jf).$$

Первый сомножитель является частотной характеристикой СФ для одиночного импульса. Второй отображает **взвешенное** суммирование (каждый импульс имеет свою амплитуду).

Структурная схема СФ пачки включает и СФ одиночного импульса, и схему на основе многоотводной линии задержки (рис. 5.23).

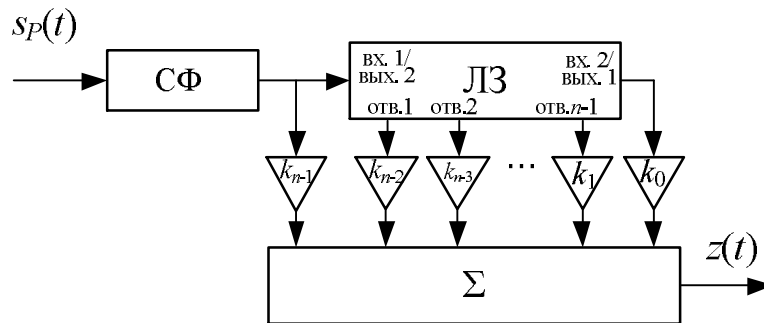


Рис. 5.23 — Структурная схема СФ пачки импульсов произвольной формы

Для прямоугольных импульсов схема упрощается (рис.5.24).

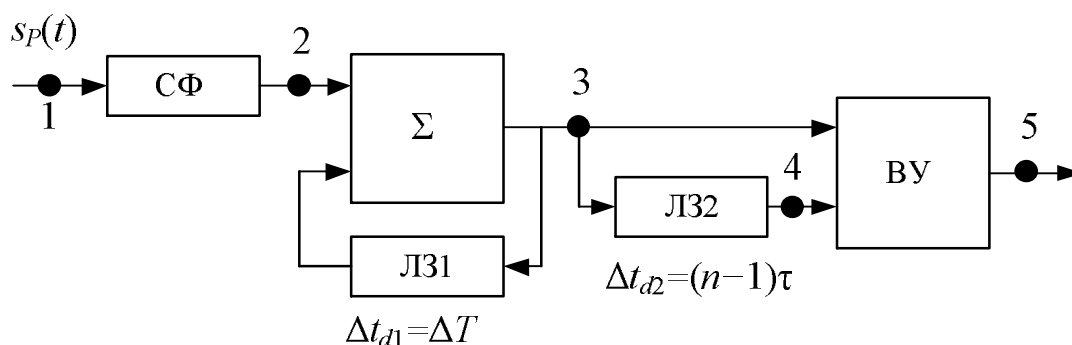


Рис. 5.24 — Структурная схема СФ пачки прямоугольных импульсов

Здесь применён сумматор с обратной связью через линию задержки — так называемый **рециркулятор**. Он обеспечивает нарастание выходного сигнала по линейному закону за счёт накопления импульсов. Фильтры с рециркуляторами называют **накопительными**.

Для примера построим временные диаграммы для пачки из 4 импульсов с интервалом $\Delta T = 3\tau$ (рис. 5.25).

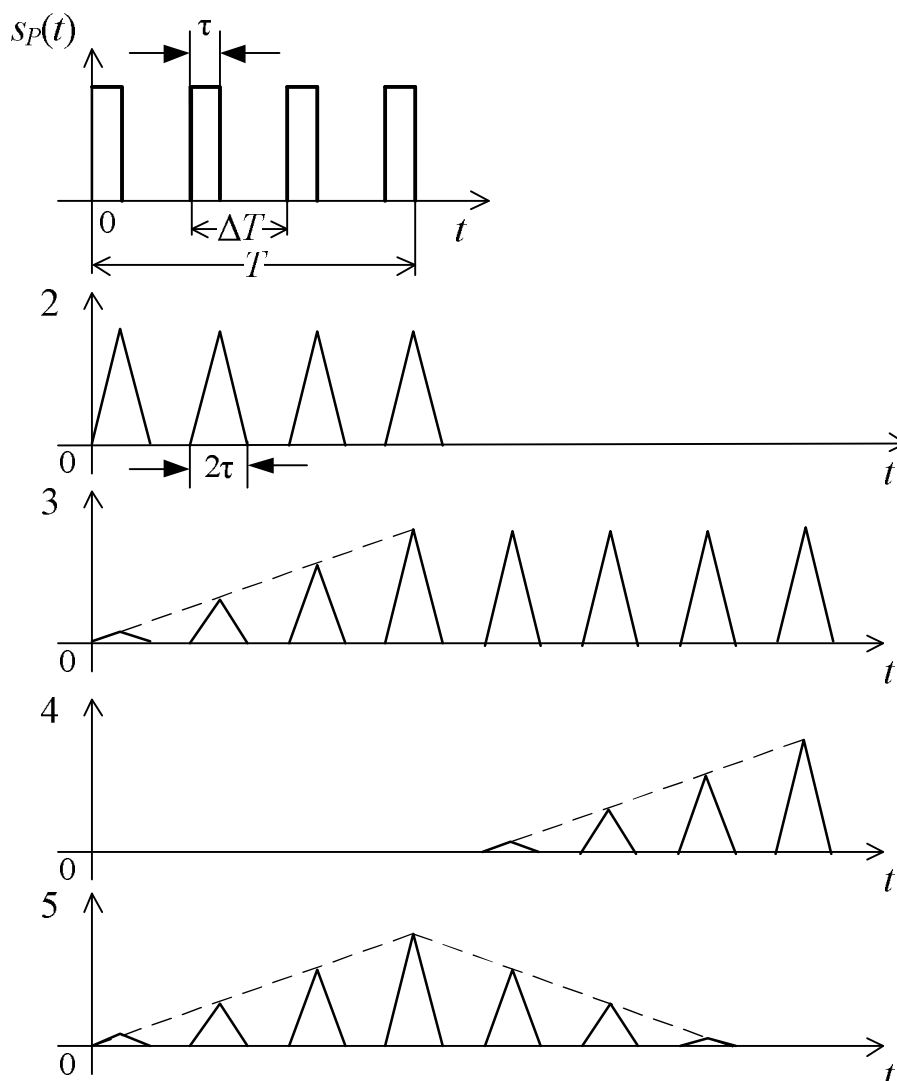


Рис. 5.25

Амплитудный спектр одиночного прямоугольного импульса имеет вид

$$G(f) = \left| \tau \operatorname{sinc} \left[\pi (f - f_0) \tau \right] \right|.$$

АЧХ СФ для этого импульса имеет такой же вид, а для пачки добавляется множитель суммирования (рис. 5.26)

$$K(f) = C \left| \operatorname{sinc} \left[\pi (f - f_0) \tau \right] \right| \left| \sum_{i=0}^{n-1} \exp \left[-j2\pi f (n-i) \Delta T \right] \right|.$$

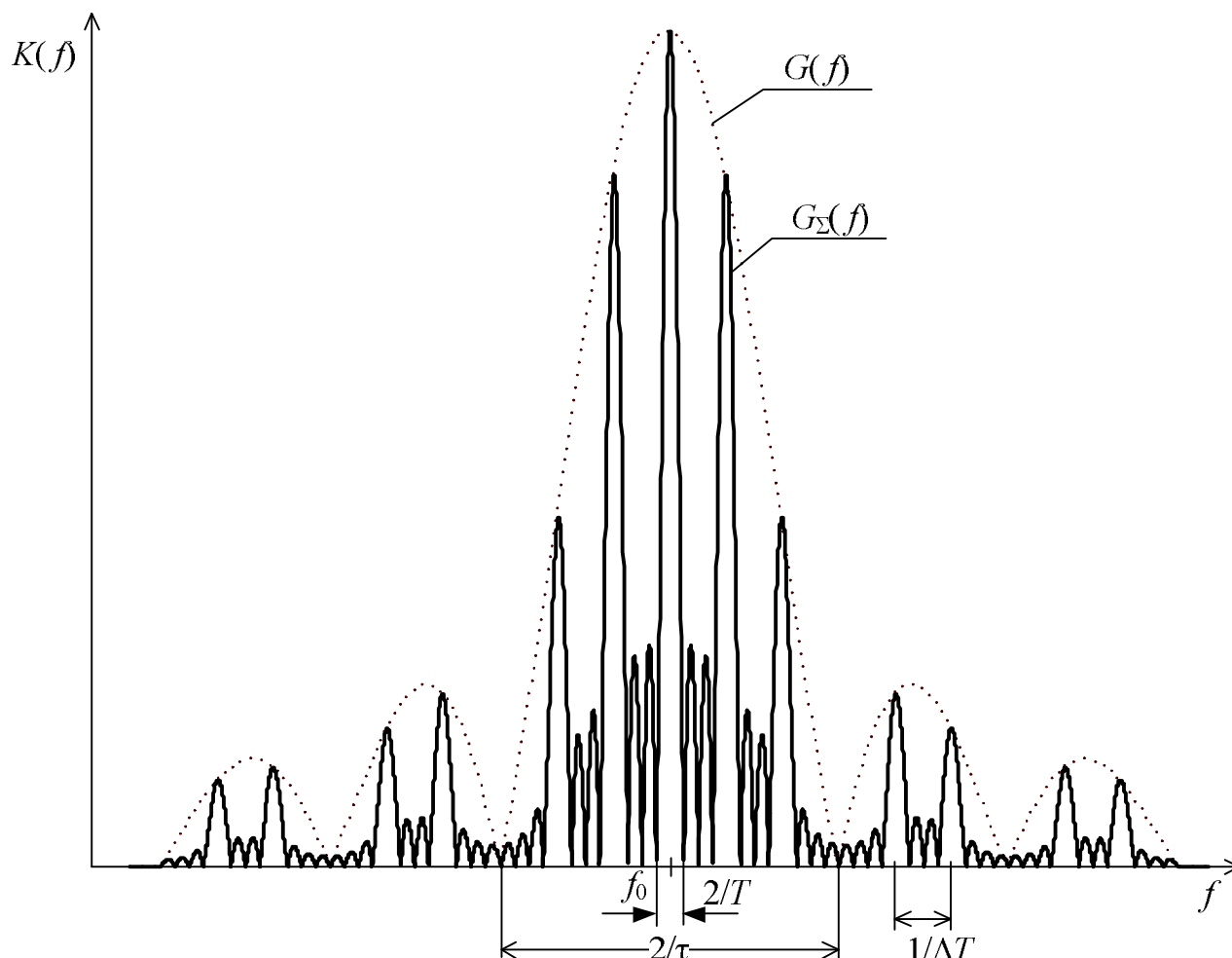


Рис. 5.26 — АЧХ СФ для пачки из четырёх импульсов

По виду АЧХ такие фильтры называют «гребёнчатые».

Формально говоря, с ростом числа импульсов в пачке линейно увеличивается энергия сигнала, т. е. растёт отношение сигнал-помеха. Однако при большом числе импульсов проявляется неидеальность рециркуляторов: имеются потери в ЛЗ и аналоговом сумматоре (рис. 5.27).

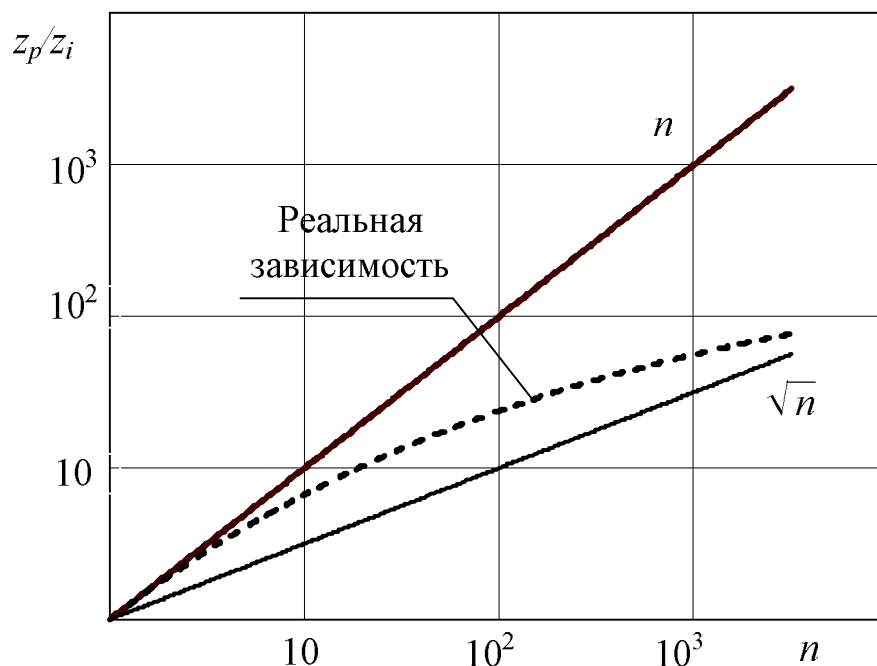


Рис 5.27 — Идеальная и реальная характеристики накопления рециркулятора

Таким образом, с учётом неидеальности рециркулятора можно схему СФ упростить, так как вторая ЛЗ и вычитатель нужны только для обеспечения **спадания** уровня сигнала на выходе. Если выбрать коэффициент обратной связи рециркулятора меньшим единицы, то эта часть схемы станет лишней (рис. 5.28).

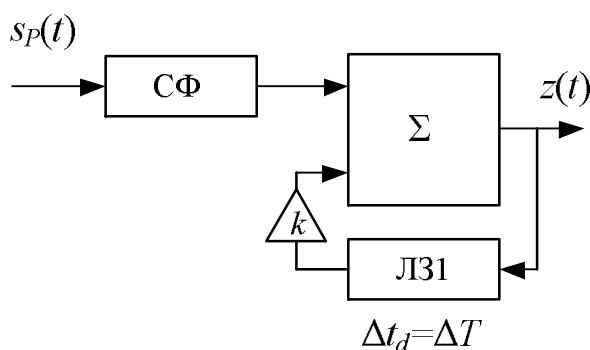


Рис 5.28 — Упрощенная структурная схема СФ пачки импульсов

6. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

6.1. Понятие разрешающей способности

В РТС любого типа применяются отличительные признаки для сигналов, позволяющие на приёмной стороне выделять информацию. Это временное положение, амплитуда, частота, фаза и их всевозможные сочетания.

Разрешающая способность (*resolution capability*) системы характеризуется количественной мерой отличительных признаков, достаточной для отдельного обнаружения двух сигналов или отдельного измерения их параметров.

Основные виды разрешения в многоканальных РТС ПИ:

— разрешающая способность по частоте (РСЧ) или *frequency resolution (FR)* в системах с ЧРК это минимальный частотный разнос, позволяющий выделить каналные сигналы;

— разрешающая способность по времени (РСВ) или *time resolution (TR)* в системах с ВРК это минимальный временной интервал между каналными сигналами.

Эти параметры определяются при проектировании системы и они не связаны с измерением параметров сигналов. Принципиальную проблему представляет собой разрешение сигналов в радиолокации, так как тут требуется не только определить количество целей, но и раздельно измерить параметры отражённых сигналов.

Основные виды разрешения в РЛС:

— РС по времени (РСВ) или *time resolution (TR)*, а также РС по дальности (РСД) или *distance resolution (DR)*, это минимальная разность во времени запаздывания сигналов либо минимальное расстояние между двумя целями, имеющими одинаковое угловое положение;

— РС по частоте (РСЧ), *frequency resolution (FR)*, а также РС по радиальной скорости (РСС), *velocity resolution (VR)*, это минимальный доплеровский сдвиг между частотами сигналов или минимальная разность скоростей двух целей, находящихся на одинаковой дальности и в том же направлении;

— РС по угловым координатам (РСУ), *angular resolution (AR)*, это минимальный угловой разнос между двумя целями, находящимися на одной дальности.

Теоретически, при отсутствии шумов, РС можно сделать любой, но это связано либо с расширением спектра излучаемого сигнала (например, применением более коротких импульсов), либо со специальной обработкой на приёмной стороне, обеспечивающей сжатие сигнала во времени (фильтр Урковица с АЧХ, обратной к спектру сигнала: подавляются НЧ-составляющие, «вытягиваются» ВЧ-составляющие). В реальной ситуации это приводит к уменьшению отношения сигнал-шум: либо энергия сигнала уменьшается, либо растёт мощность шума, так как приходится расширять полосу пропускания.

6.2. Разрешающая способность по времени

Рассмотрим ситуацию наложения на исходный сигнал $s(t)$ его копии, сдвинутой во времени на величину τ : $s(t - \tau)$. При полном наложении энергия суммарного сигнала станет в два раза больше, а при сдвиге на величину, больше или равную длительности сигнала T наложение прекратится, и два сигнала будут восприниматься раздельно.

Другими словами, при нулевом значении сдвига τ предположение о наложении сигналов будет достоверным, т. е. иметь вероятность, равную единице. Соответственно, вероятность ошибиться в этом предположении будет равной нулю. При ненулевом сдвиге вероятность ошибиться будет тем больше, чем больше сдвиг.

Введём **относительную среднеквадратическую ошибку наложения** (ОС-КОН) или **Relative Root-Mean Square Overlay Error (RRMSOE)** двух сдвинутых во времени сигналов

$$\delta_{OE}^2(\tau) = \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - s(t - \tau)]^2 dt,$$

где E_s — энергия сигнала.

Раскрыв скобки, получим

$$\delta_{OE}^2(\tau) = \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt - \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau) dt + \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)^2 dt.$$

Первое и третье слагаемые одинаковы, так как на энергию сигнала сдвиг во времени не влияет, а второе есть нормированная АКФ сигнала $R(\tau)$

$$\delta_{OE}^2(\tau) = 1 - R(\tau).$$

Известно, что максимальное значение АКФ соответствует нулевому сдвигу во времени

$$\max[R(\tau)] = R(0) = 1.$$

При полном наложении (нулевой сдвиг) ОСКОН будет равна нулю. Это означает, что обнаружение второго сигнала, то есть разрешение двух сигналов **невозможно**. Нам удобнее ввести **ОСКО неналожения** (ОСКОНН) или **RRMSNOE** основного и сдвинутого сигналов

$$\delta_{NO}^2(\tau) = 1 - \delta_{OE}^2(\tau) = R(\tau).$$

При нулевом сдвиге ОСКОНН максимальна и равна единице, что соответствует принятию ошибочного решения о том, что сигналы не накладываются.

Можно ввести **порог принятия решения**: как только ОСКОНН станет меньше порога, можем утверждать, что присутствует два сигнала, а не один.

Таким образом, разрешающую способность во времени характеризует АКФ сигнала. Для уменьшения ОСКОНН, т. е. достижения высокой разрешающей способности во времени следует применять сигналы с быстрым спаданием АКФ при росте временного сдвига.

Известно, что СФ для радиоимпульса вычисляет АКФ. После линейного детектирования будем иметь модуль АКФ огибающей импульса, а после квадратичного детектирования — квадрат модуля АКФ. Так как АКФ может быть знакопеременной функцией, обычно меру ОСКОНН определяют именно для квадрата АКФ (рис. 6.1).

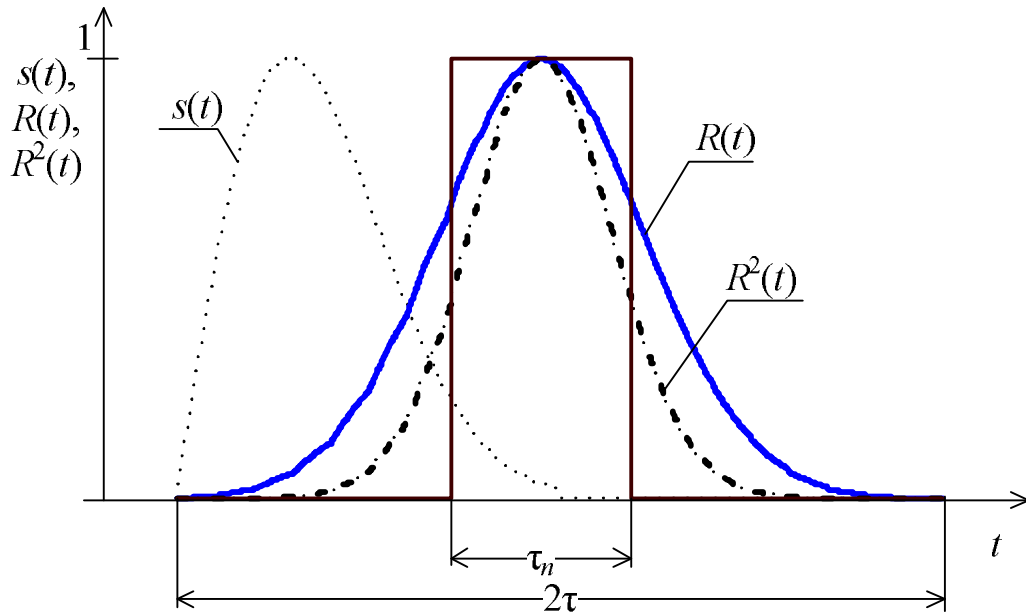


Рис. 6.1 — Временные диаграммы огибающей сигнала, нормированной АКФ и квадрата нормированной АКФ

Интервал корреляции τ_n , вычисленный для квадрата АКФ, будет характеризовать РСВ

$$\tau_n = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)|^2 d\tau.$$

Если речь идёт об определении дальности до цели D , то оценка РСД будет равна

$$\Delta D_{DR} \approx \frac{c\tau_n}{2},$$

где c — скорость света.

6.3. Разрешающая способность по частоте

Для определения РСЧ следует сравнивать частотные спектры сигналов. Можно так же, как для времени, ввести ОСКОН спектров, смещенных только по частоте на величину F

$$\delta_{OE}^2(F) = \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} [G(jf) - G(jf - jF)]^2 df.$$

По аналогии с ОСКОН по времени эта величина может быть выражена через нормированную функцию частотной корреляции (ЧКФ) $R(F)$

$$\delta_{OE}^2(F) = 1 - |R(F)|,$$

где $R(F) = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} G(jf)G(jf - jF)df.$

Введём ОСКО неналожения спектров (ОСКОНН) и будем оценивать меру неопределённости по частоте на основе ОСКОНН для квадрата ЧКФ (рис. 6.2)

$$\Delta F_{FR} \approx \int_{-\infty}^{\infty} |R(F)|^2 dF.$$

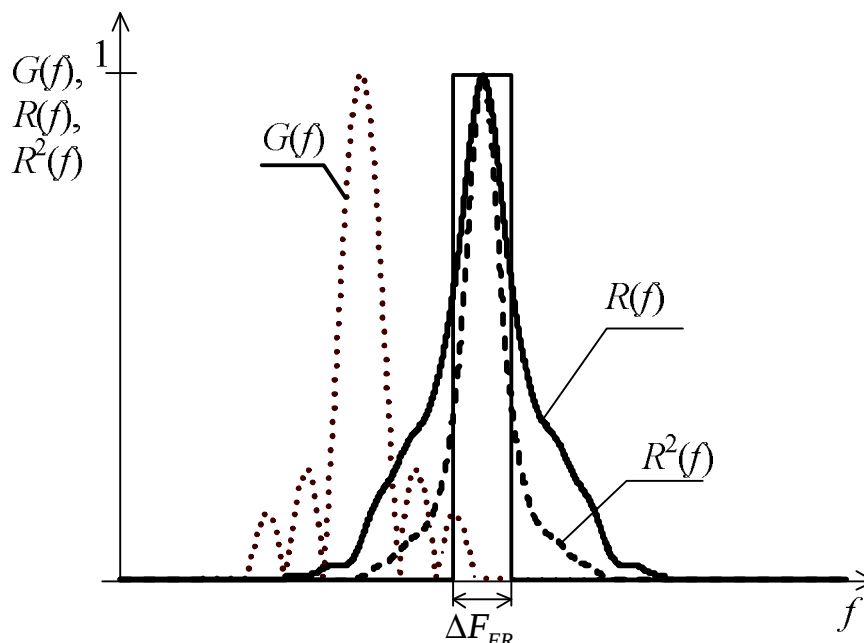


Рис. 6.2 — Спектр огибающей прямоугольного импульса, нормированная ЧКФ и квадрат нормированной ЧКФ

Ясно, что большую РС можно обеспечить теми сигналами, для которых ЧКФ быстрее спадает с ростом **частотного** разнosa.

При определении скорости цели по эффекту Доплера смещение частоты отражённого сигнала ΔF равно удвоенной частоте Доплера

$$\Delta F = \pm 2 f \frac{V_r}{c} = \pm 2 \frac{V_r}{\lambda},$$

где V_r — радиальная скорость цели (знак плюс соответствует приближению цели, знак минус — удалению).

Две цели с разными скоростями можно разрешить, если это смещение будет превышать неопределённость по частоте ΔF_{FR} , следовательно, оценка РСС по скорости имеет вид

$$\Delta V_{VR} \approx \frac{\Delta F_{FR} \lambda}{2}.$$

6.4. Совместная разрешающая способность по времени и по частоте

Полученные результаты по РС противоречат друг другу:

- повышение РСВ-РСД требует сигналов с узкой АКФ, малой длительности импульса, а значит, расширения спектра;
- повышение РСЧ-РСС требует сужения спектра.

Таким образом, требуется одновременный анализ РС по двум переменным.

6.4.1. Двумерная автокорреляционная функция. Тело и диаграмма неопределённости

Вводится двумерная нормированная АКФ (ДНАКФ) сигнала

$$R(\tau, F) = \frac{1}{E_s} \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t - \tau) e^{j2\pi Ft} dt \right| = \frac{1}{E_s} \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(jf) G(jf - jF) e^{j2\pi ft} df \right|.$$

Рассмотрим вид этой функции для прямоугольного радиоимпульса (рис. 6.3).

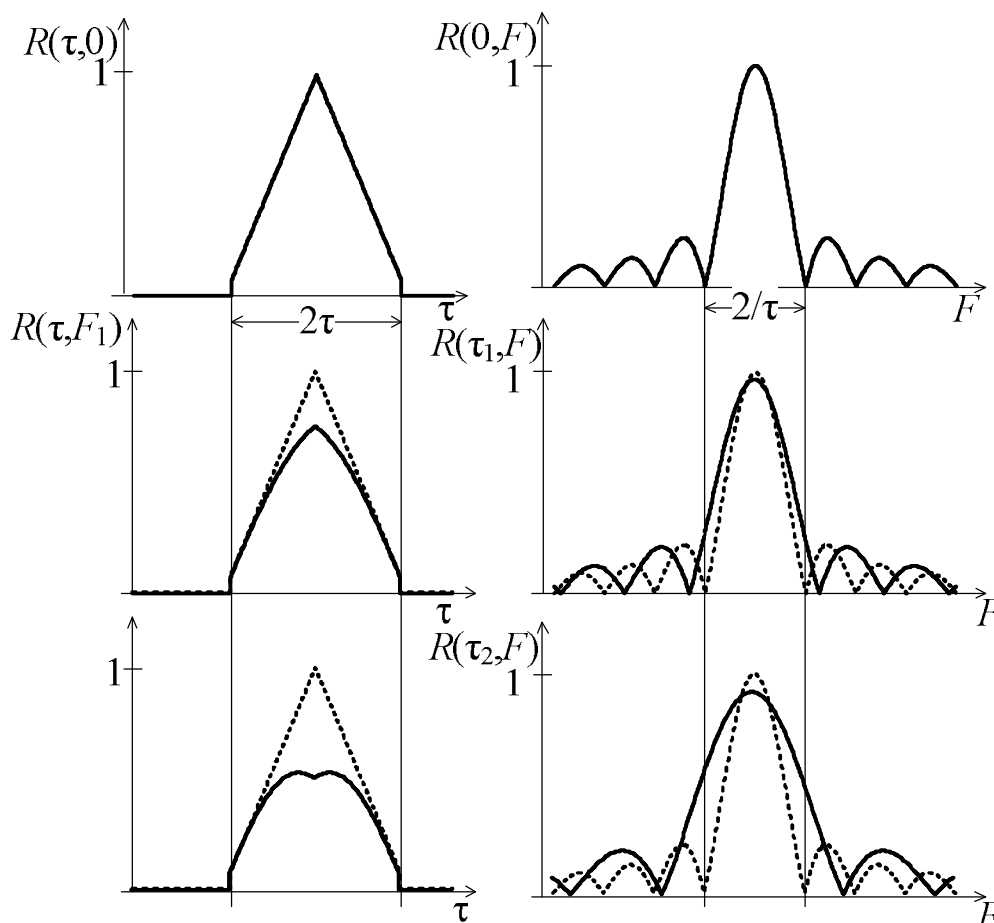


Рис. 6.3

Видно, то при появлении частотного разноса во временной области уменьшается размах АКФ, а при возникновении разноса во времени АКФ в частотной области не только уменьшает свой размах, но и расширяется. Аналогичный вид имеет квадрат модуля АКФ.

График ДНАКФ в трёхмерном пространстве называют **телом неопределённости** (ТН) — *uncertainty body (UB)*. Максимум ТН соответствует нулевым значениям аргументов. Обычно рассматривают сечения ТН для квадрата АКФ по уровню 0,5 (половинной мощности) и 0,1 — диаграммы неопределённости (ДН) — *uncertainty diagrams (UD)* (рис. 6.4).

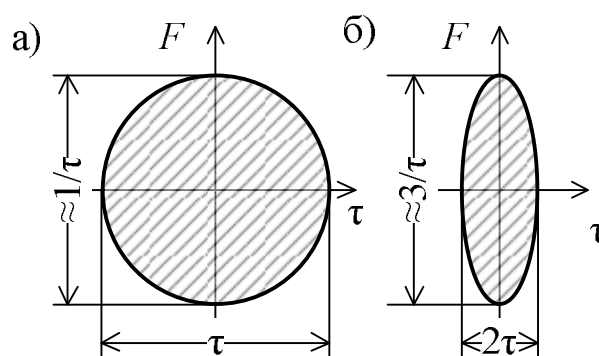


Рис. 6.4 — Сечения тела неопределённости прямоугольного импульса по уровню 0,5 (а) и по уровню 0,1 (б)

Заштрихованные области — **зона высокой корреляции**, для неё разрешение сигналов невозможно. Таким образом, мерой совместной РС по времени и по частоте могут служить **параметры эллипса** сечения ТН по уровню 0,5: длина оси по времени $2a$ и длина оси по частоте $2b$.

Для прямоугольного импульса

$$2a \approx \tau; \quad 2b \approx 1,2 / \tau.$$

6.4.2. Принцип неопределённости в оценке разрешающей способности

Анализ формулы для ТН приводит к следующему выводу.

Площадь диаграммы неопределённости для сигналов заданного вида есть величина постоянная, не зависящая от длительности сигнала.

Именно это свойство и соответствует **принципу неопределённости**: при сужении сечения по оси времени расширяется сечение по оси частот и наоборот (пример — сжимаемый руками воздушный шарик).

Пример 1. Прямоугольный импульс длительностью τ . Площадь ДН

$$S_n \approx ab = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{1,2}{2\tau} \approx 0,3\pi.$$

Рассмотрим вид отклика СФ U на два импульса, сдвинутых во времени на различную величину Δt (рис. 6.5).

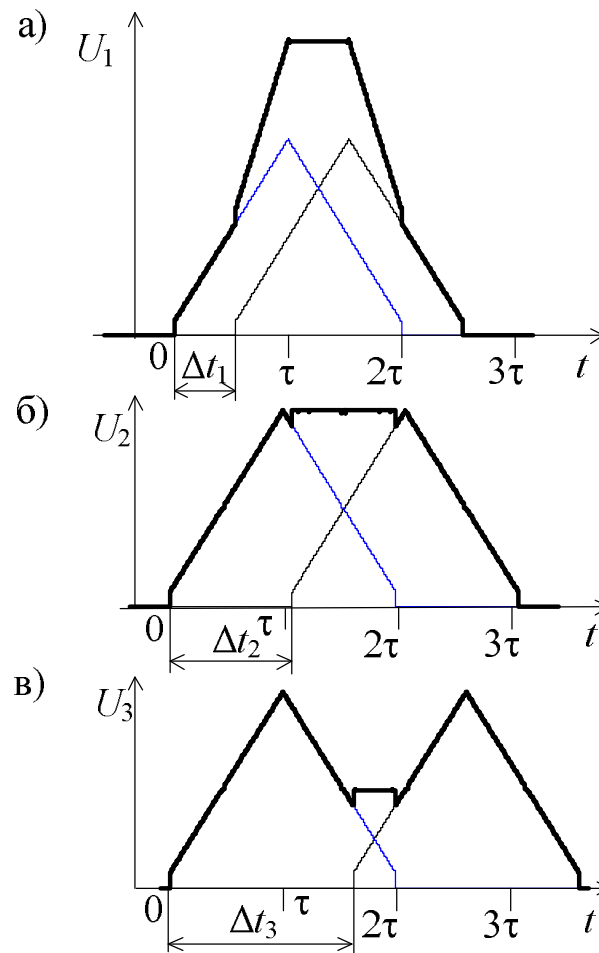


Рис. 6.5

Видно, что при $\Delta t_1 < \tau$ отклик имеет вид одnogорбой кривой: разрешение невозможно. При $\Delta t_2 = \tau$ вершина становится плоской, но разрешение всё равно невозможно. Только для $\Delta t_3 > \tau$ кривая становится двугорбой, и если установить порог сравнения, то разрешение становится принципиально возможным.

Пример 2. Гауссов радиоимпульс

Он может быть ограничен во времени по уровню 2σ или 3σ (рис. 6.6 а). Форма двумерной АКФ будет также гауссовой. Её сечение по уровню 0,5 для 3σ имеет следующие параметры (рис. 6.6 б).

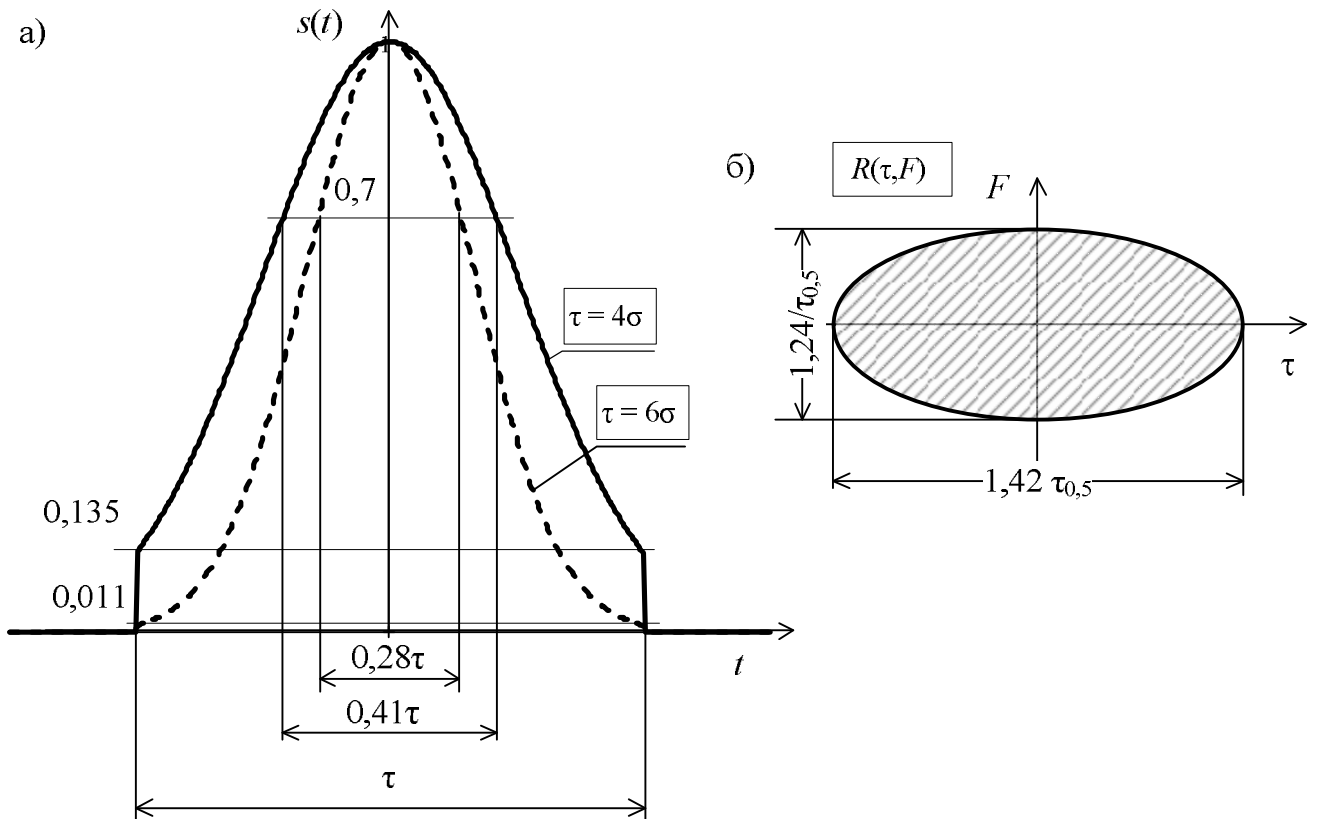


Рис. 6.6 — Вид гауссова импульса (а) и его диаграмма неопределённости (б)

Таким образом, АКФ гауссова импульса несколько шире, чем прямоугольного, но уровень «боковых лепестков» существенно ниже. Благодаря этому «двугорбая» АКФ проявляется уже при временном разnose пары импульсов, равном его длительности (рис. 6.7).

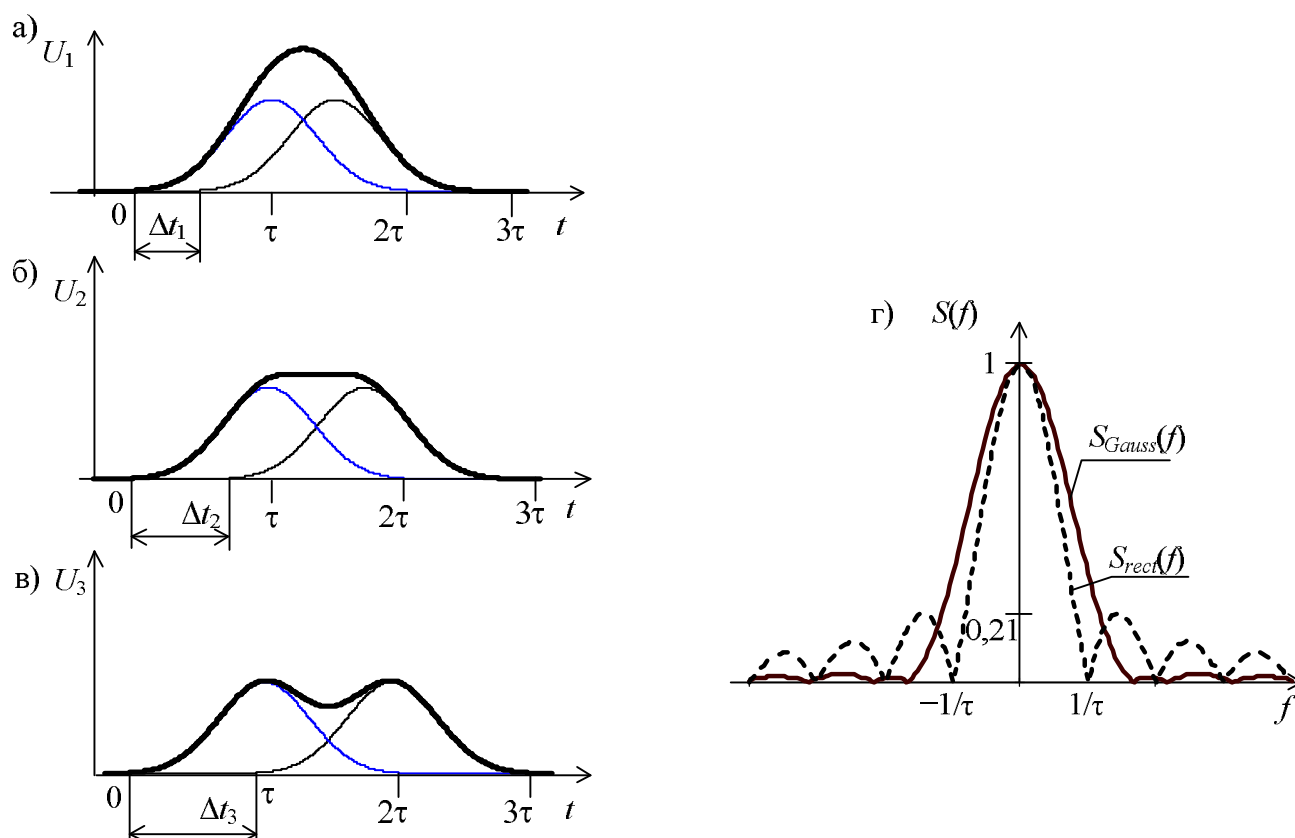


Рис. 6.7 — Оклик СФ на два гауссова импульса при различных сдвигах во времени (а, б, в) и сравнение форм спектров гауссова и прямоугольного импульса (г)

Однако АКФ спадает медленнее, чем для прямоугольного импульса, поэтому в целом РС оказывается примерно одинаковой.

6.5. Повышение разрешающей способности систем

6.5.1. Понятие базы измерительного прибора

Понятие базы пришло из оптики и акустики. Там под базой понимается поперечный размер измерительного устройства, определяющий его пространственные характеристики.

Примеры:

- акустическая стереобаза — расстояние между акустическими излучателями (определяет зону стереоэффекта);
- база стереослуха — расстояние между ушами (определяет точность определения направления на источник звука);
- зрительная стереобаза — расстояние между глазами или объективами оптических приборов (определяет глубину стереозрения и точность измерения расстояния дальнометрическим методом).

6.5.2. Повышение разрешающей способности РЛС по углу методом «синтезированной апертуры»

Как отмечалось ранее, РСУ определяется шириной главного лепестка ДН антенны, которая, в свою очередь, определяется **поперечным размером** антенны и видом амплитудно-фазового распределения возбуждения.

Для дистанционного зондирования Земли с ЛА и ИСЗ применяют **радиолокаторы бокового обзора** и **радиометры** (пассивные). Размеры антенн ограничены чисто технически: что делать, если РСУ при этом недостаточна?

Возьмём две одинаковые антенны $WA1$, $WA2$ с диаграммами направленности $F_1(\theta)$, находящиеся на расстоянии d друг от друга, соизмеримом с длиной волны λ (рис. 6.8 а).

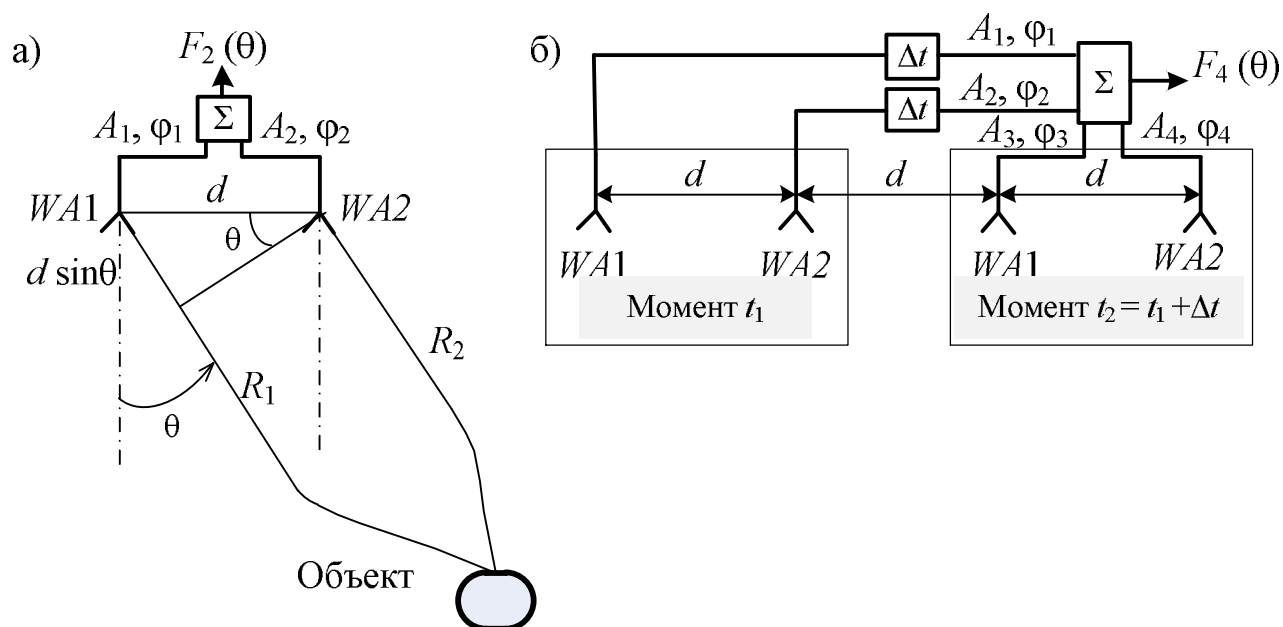


Рис. 6.8 — Формирование ДН двухэлементной решётки (а) и синтезированной апертуры (б)

Поле, отраженное от объекта, определяет амплитуды A_1 , A_2 и фазы φ_1 , φ_2 сигналов на выходах антенн. Расстояния R_1 , R_2 до объекта много больше длины волны, поэтому амплитуды сигналов на выходах антенн A_1 , A_2 будут одинаковыми, а разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ будет определяться разностью хода лучей, приходящих от объекта. В результате сложения сигналов в сумматоре Σ формируется диаграмма направленности антенной решеткой из 2 элементов $F_2(\theta)$

$$F_2(\theta) = F_1(\theta) F_{A_2}(\theta) = F_1(\theta) \cos\left(k \frac{d}{2} \sin \theta\right),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Множитель $F_{A2}(\theta)$ называется **множителем решётки**, в данном случае из 2 элементов. Благодаря его действию суммарная ДН **сужается**. При увеличении числа элементов, например, до четырёх, ДН $F_4(\theta)$ становится ещё более узкой.

Если взять рассмотренную решётку из 2 элементов и переместить её со скоростью V на расстояние d за время Δt , равное

$$\Delta t = \frac{d}{V},$$

(см. рис. 6.8 б), а сигналы с выходов антенн, полученные в момент t_1 задержать на этот интервал до момента $t_2 = t_1 + \Delta t$ и сложить в сумматоре с сигналами, полученными в момент t_2 , то суммарная ДН соответствует решётке из 4 элементов

$$F_4(\theta) = F_1(\theta) F_{A4}(\theta) = F_1(\theta) \sum_{i=1}^2 \cos \left[k(2i-1) \frac{d}{2} \sin \theta \right].$$

Таким образом, мы получили тот же результат, что для решётки из 4 элементов, то есть мы искусственно **«синтезировали»** антенну с в два раза большим числом элементов и, соответственно, большими размерами.

Ясно, что так можно поступать любое число раз, соответственно увеличивая эквивалентный размер синтезированной антенны. Ограничения здесь — чисто технические: возможности хранения и переработки огромного количества данных.

6.5.3. Понятие базы сигнала

Разрешающие способности РСВ и РСЧ ограничены в силу действия принципа неопределённости, количественной мерой которой является площадь сечения диаграммы неопределённости. Вводится понятие «база сигнала» как произведение длительности сигнала τ на занимаемую им полосу частот ΔF

$$B = \tau \Delta F,$$

Для рассмотренных ранее радиоимпульсов $\Delta F \approx 1 / \tau$, поэтому $B \approx 1$. Таким сигналам принято называть простыми, так как у них отсутствуют параметры, которые можно было бы варьировать для достижения высоких РСВ и РСЧ.

Задача состоит в том, чтобы ввести в сигналы такие **параметры**, чтобы база стала значительно больше единицы без существенного расширения спектра: $B \gg 1$.

6.5.4. Применение пачек импульсов для достижения высокой РС по скорости

Возьмем, для примера, РЛС с длительностью импульса $\tau = 1$ мкс при длине волны $\lambda = 3$ см = $3 \cdot 10^{-2}$ м.

РСД

$$\delta^2(D) \approx \frac{c\tau}{2} = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \approx 150 \text{ м.}$$

РСС

$$\delta^2(V_r) = \frac{F_n \lambda}{2} \approx \frac{\lambda}{2\tau} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-6}} \approx 15 \text{ км/с.}$$

Таким образом, РСС имеет неприемлемое значение. Вывод: для одиночных импульсов невозможно получить высокое разрешение по скорости.

Попробуем применить пачку из импульсов. Ширина одного пика ЧКФ будет примерно в n раз меньше, чем ширина пика для одиночного импульса (рис. 6.9).

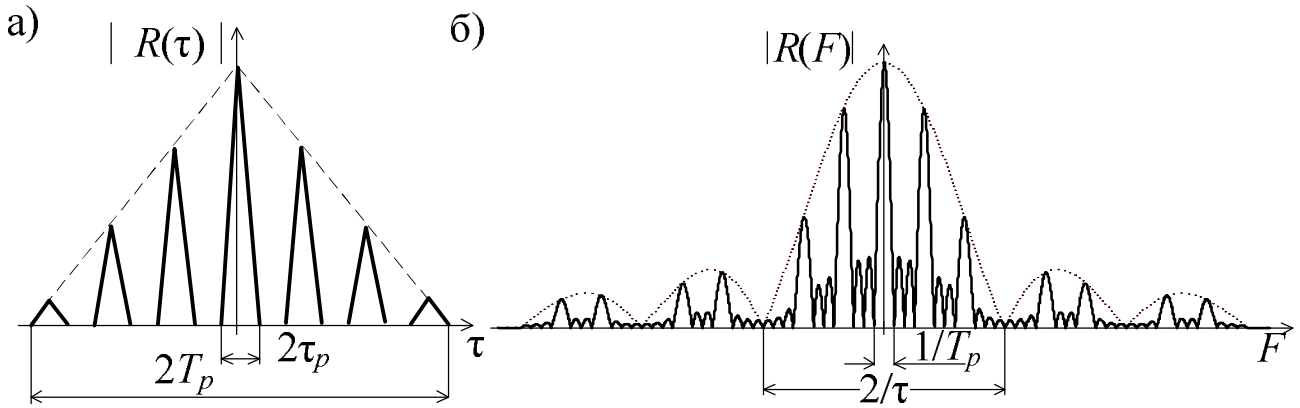


Рис. 6.9 — ВКФ и ЧКФ пачки импульсов

Сечение двумерной КФ будет состоять из множества эллипсов (рис. 6.10).

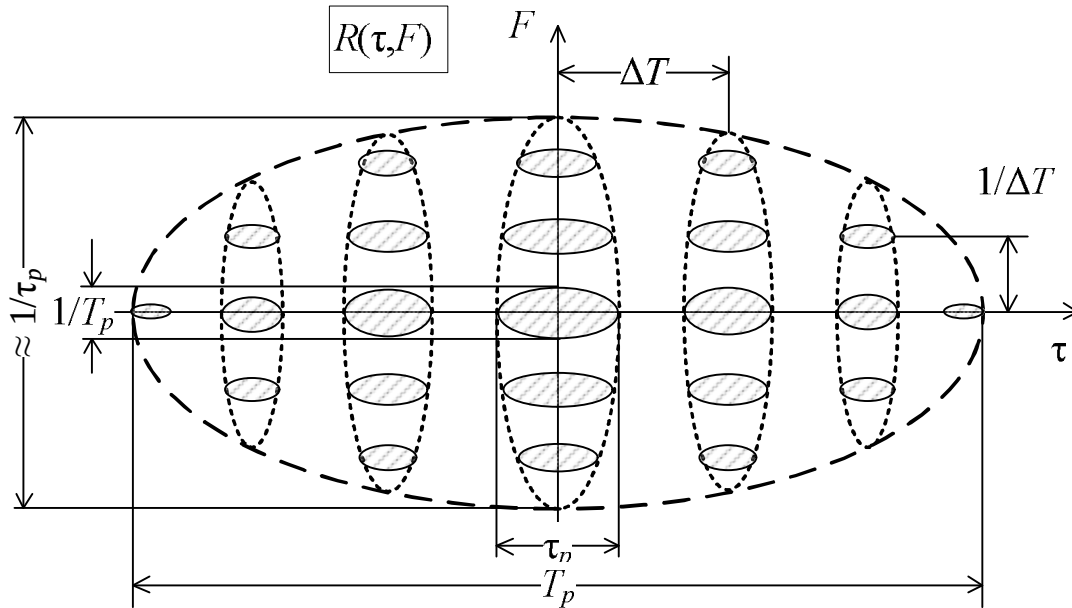


Рис. 6.10 — Сечение тела неопределённости пачки импульсов по уровню 0,5

Если τ_p — длительность импульса, ΔT — интервал между импульсами, то длительность пачки T_p будет равна

$$T_p = (n-1)\Delta T + \tau_p.$$

База сигнала в виде пачки импульсов

$$B \approx T_p \frac{1}{\tau_p}.$$

Число импульсов в пачке n для получения РСС 150 м/с, численно равной РСД, должно быть приблизительно равно

$$n \approx \frac{\delta^2(V_r)}{\delta^2(D)} \approx \frac{15000}{150} \approx 100.$$

6.5.5. Применение линейной частотной модуляции

Изменение частоты излучённого сигнала f_r по линейному закону называется **линейной частотной модуляцией** ЛЧМ. Пусть задана скорость изменения частоты γ

$$\gamma = \frac{df_r}{dt}.$$

Время распространения сигнала до цели, находящейся на расстоянии D и обратно T_D равно

$$T_D = \frac{2D}{c}.$$

За это время частота изменится на величину Δf , равную

$$\Delta f = \gamma T_D.$$

Следовательно, измерив разность частот, мы можем определить дальность

$$D = \frac{c}{2\gamma} \Delta f = \frac{c}{2\gamma} F_D.$$

Здесь введено обозначение F_D — разность, соответствующая дальности.

На практике применяют периодическую ЛЧМ двух видов:

— симметричная (СЛЧМ), когда нарастание и спадание происходят с одинаковой скоростью (рис. 6.11 а);

— несимметричная (НЛЧМ), когда сброс частоты до начального значения происходит за короткое время (рис. 6.11 б).

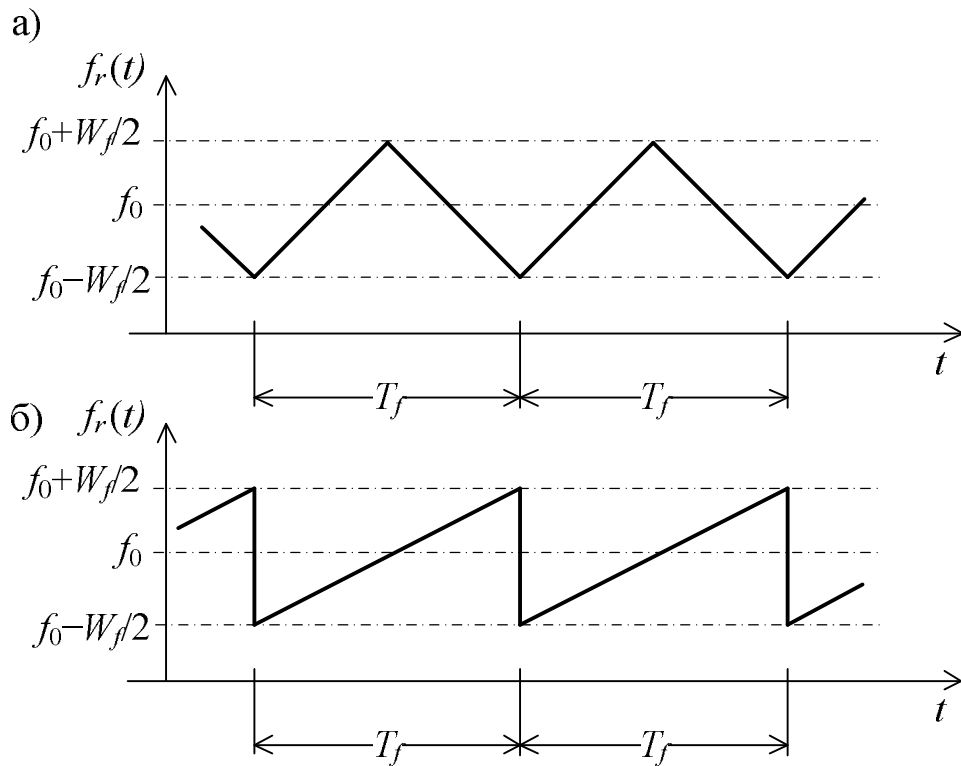


Рис. 6.11

Параметрами ЛЧМ являются:

- средняя частота f_0 ;
- девиация частоты W_f ;
- период изменения частоты T_f и частота повторения $F_f = 1/T_f$.

Для НЛЧМ ещё используют паразитный параметр — время восстановления

τ_{rel} .

Рассмотрим работу системы с СЛЧМ (рис. 6.12).

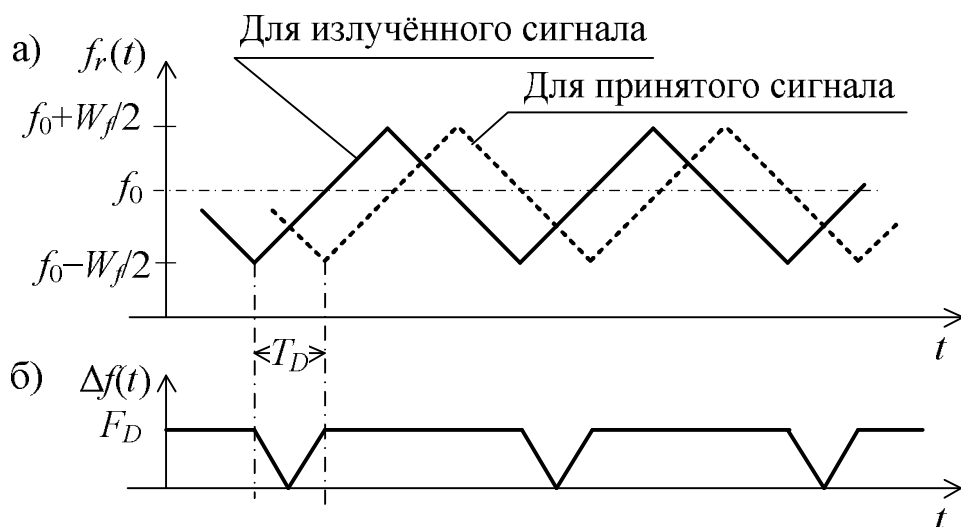


Рис. 6.12

Скорость изменения частоты для заданной девиации равна

$$\gamma = \frac{2W_f}{T_f},$$

поэтому величина разностной частоты равна

$$F_D = \frac{4W_f}{cT_f} D = \frac{4}{\lambda_w T_f} D,$$

где $\lambda_w = \frac{c}{W_f}$ — модуляционная длина волны.

При непрерывном измерении частоты фактически измеряется среднее её значение за период модуляции

$$F_{Dav} = \frac{4}{\lambda_w T_f} D \left(\frac{T_f - T_D}{T_f} \right).$$

Для достижения высокой точности измерений длительность «провалов» должна быть малой по сравнению с периодом модуляции

$$T_D \ll T_f.$$

В этом случае измеренная дальность до цели составит

$$D \approx \frac{\lambda_w T_f}{4} F_D \approx \frac{\lambda_w}{4} \frac{F_D}{F_f}.$$

Обычно вместо измерения частоты используют счётчик числа периодов n_D колебаний с частотой F_D за период модуляции, поэтому возникает вопрос о дискретности определения дальности ΔD .

Число периодов равно

$$n_D = F_D T_f = \frac{4}{\lambda_w T_f} D T_f = \frac{4}{\lambda_w} D.$$

Дискретность соответствует изменению числа периодов на единицу, поэтому её можно определить из соотношения

$$n_D + 1 = \frac{4}{\lambda_w} (D + \Delta D).$$

Отсюда находим

$$\Delta D = \frac{\lambda_w}{4},$$

Для уменьшения дискретности нужно увеличивать девиацию частоты, но здесь есть технический предел, связанный с увеличением ширины спектра сигнала.

Если на вход приёмника поступают 2 сигнала, отстоящие на 1 дискрет, то их практически невозможно разрешить, так как ширина спектра ЛЧМ примерно равна девиации частоты, что по дальности составляет одну длину волны модуляции.

Таким образом, РС по дальности составит примерно 4 дискрета

$$\delta(D) \approx 4\Delta D = \lambda_w.$$

6.5.6. Совместное измерение дальности и скорости с помощью ЛЧМ

Кроме изменения частоты от дальности F_D имеется доплеровское изменение частоты от радиальной скорости F_V . Их нужно измерять отдельно.

Случай 1. Дальностное изменение превышает скоростное $F_{D1} > F_{V1}$.

Разностная частота F_{M1} , измеряемая системой, на одном полупериоде будет больше, чем F_{D1} , а на другом — меньше за счёт частоты Доплера

$$F_{M1} = F_{D1} \pm F_{V1} = \frac{4W_f}{cT_f} D \pm \frac{2f(t)}{c} V_r \approx \frac{4W_f}{cT_f} D \pm \frac{2f_0}{c} V_r.$$

Среднее за период модуляции значение частоты будет равно F_{D1} , а пределы изменения частот дадут возможность определить скорость (рис. 6.13)

$$F_{D1} = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2};$$

$$F_{V1} = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2},$$

где $F_{\max}, F_{\min}$ — соответственно, верхняя и нижняя измеренные частоты.

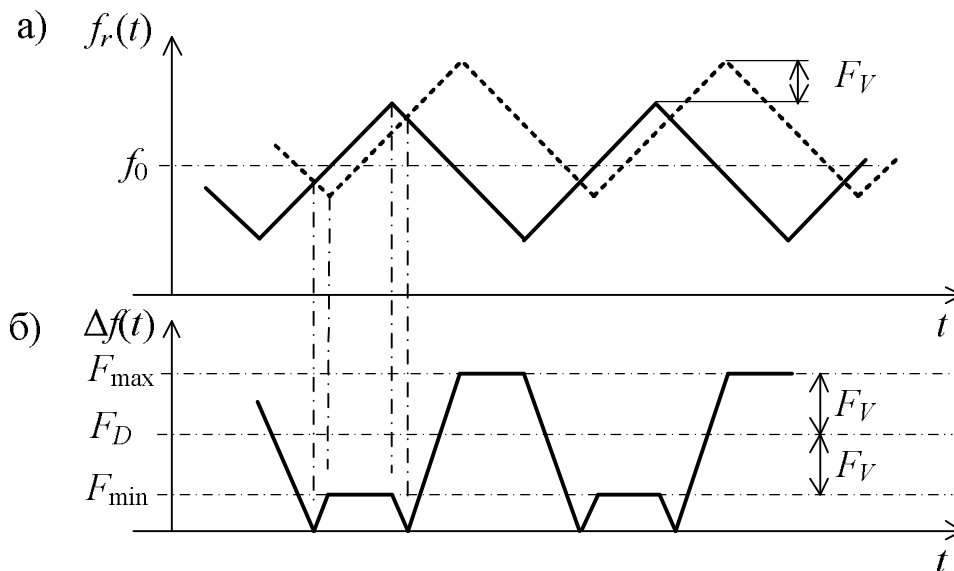


Рис. 6.13 — Временные диаграммы частот излучённого и принятого сигналов (а) и измеряемого отклонения частоты (б) для случая 1

Случай 2. Дальностное изменение меньше скоростного $F_{D2} \leq F_{V2}$.

Картина меняется на противоположную (рис. 6.14)

$$F_{D2} = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2};$$

$$F_{V2} = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2}.$$

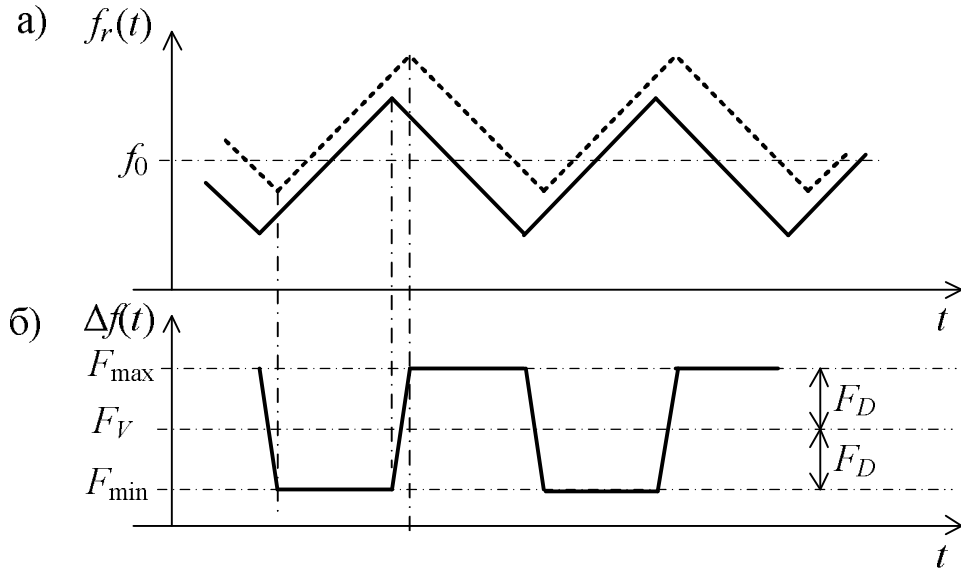


Рис. 6.14 — Временные диаграммы частот излучённого и принятого сигналов (а) и измеряемого отклонения частоты (б) для случая 2

Для однозначного измерения дальности и скорости во всём диапазоне их изменения необходимо правильно выбрать среднюю частоту и девиацию.

Для систем, где основное измерение — дальность, выбирают условие, которое соответствует первому случаю: минимальное отклонение по дальности $F_{D\max}$ превышает максимальное отклонение по скорости $F_{V\max}$, следовательно, должно выполняться условие

$$\frac{4W_f}{cT_f} D_{\min} > \frac{2f_0}{c} V_{r\max},$$

откуда получаем

$$\frac{2W_f}{f_0 T_f} > \frac{V_{r\max}}{D_{\min}}.$$

В системах, измеряющих скорость целей, применяют обратное соотношение.

Разрешающая способность по скорости обусловлена дискретностью счёта числа периодов разностной частоты n_V . Для дискретности измерения скорости ΔV_r имеем условие

$$n_V + 1 = \frac{2f_0}{c} (V_r + \Delta V_r) T_f,$$

откуда находим

$$\Delta V_r = \frac{c}{2f_0 T_f} = \frac{\lambda_0}{2T_f}.$$

Так же, как и для дальности, РС по скорости составляет около четырёх дискретов

$$\delta(V_r) \approx \frac{2\lambda_0}{T_f}.$$

Пример. Пусть требуется получить РС $\delta(V_r) = 10$ м/с. Найдём период модуляции

$$T_f = \frac{2\lambda_0}{\delta(V_r)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{10} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 6 \text{ мс} —$$

вполне реализуемая величина.

6.5.7. Согласованная фильтрация ЛЧМ сигнала

Для обеспечения высокой РС по дальности период модуляции ЛЧМ сигнала T_f должен быть значительно больше длительностей импульсов.

Обработка ЛЧМ сигнала сводится к «сжатию» без потери информации. Практически реализуется **дискретное** сжатие:

- вся полоса ЛЧМ сигнала разбивается на m парциальных полос;
- на каждую ПП настраивается свой ПФ;
- так как отклики ПФ будут сдвинуты во времени, необходимо перед суммированием их задержать на соответствующий интервал (рис. 6.15, 6.16).

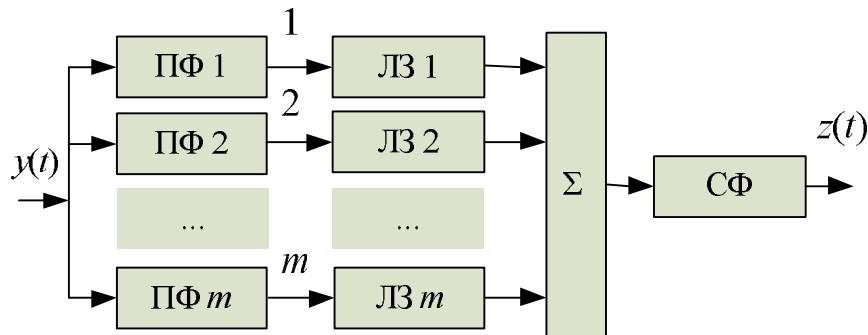


Рис. 6.15 — Структурная схема СФ ЛЧМ

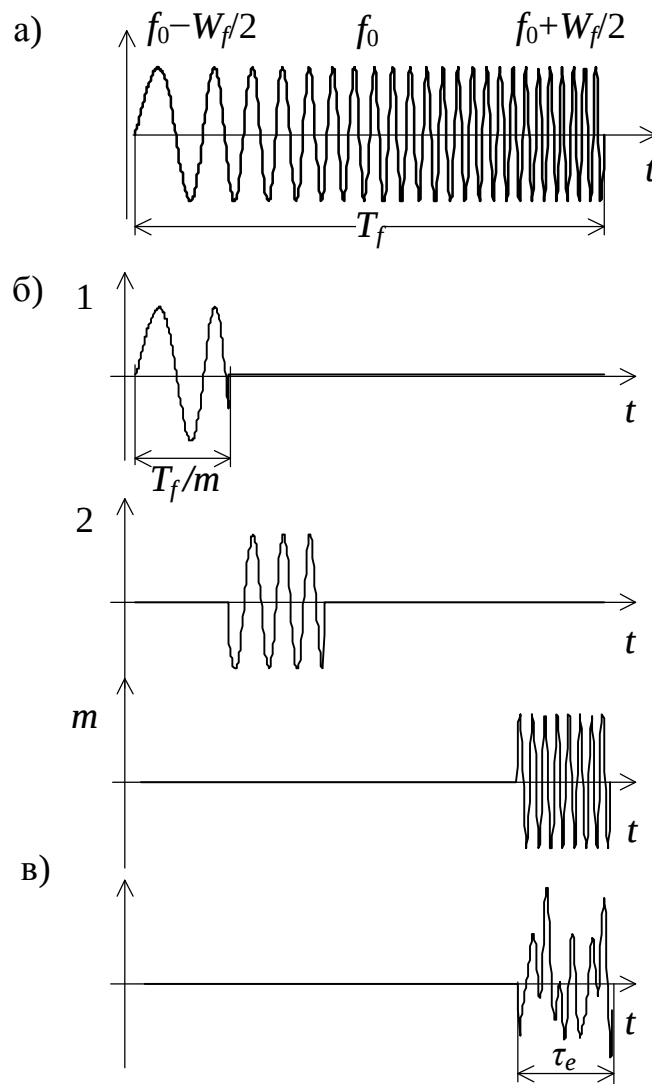


Рис. 6.16 — Временные диаграммы на входе (а), выходах ЛЗ (б) и на выходе сумматора (в)

Длит отклика будет равна эффективной длительности импульса

$$\tau_e = \frac{T_f}{m}.$$

Полоса, занимаемая откликом, будет примерно равна

$$\Delta F \approx \frac{W_f}{m}.$$

Размах ТН будет определяться периодом модуляции и девиацией частоты, но так как время и частота измеряются одновременно, эллипс сечения ТН будет наклонным. РС определяется не размерами самого эллипса, а размерами его сечений по соответствующим осям (рис. 6.17).

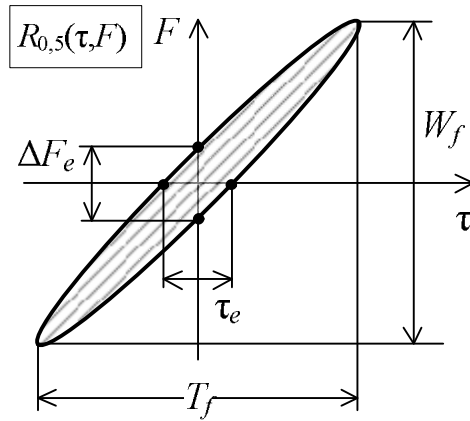


Рис. 6.17 — Сечение ТН для ЛЧМ сигнала

Длительность сигнала определяется периодом ЛЧМ, а полоса частот — девиацией, поэтому база ЛЧМ сигнала приблизительно равна

$$B = T_f W_f = m \cdot m \Delta F \approx m^2 \tau_e \Delta F.$$

Таким образом, база ЛЧМ сигнала в m^2 раз больше базы одиночного импульса.

6.5.8. Применение фазоманипулированных сигналов

Пачки импульсов и ЛЧМ сигналы имеют свои недостатки: у пачек в интервалах не происходит накопление, а ЛЧМ занимают широкую полосу.

Если частоту не изменять и заполнить промежутки, то остаётся только манипулировать фазу (рис. 6.18).

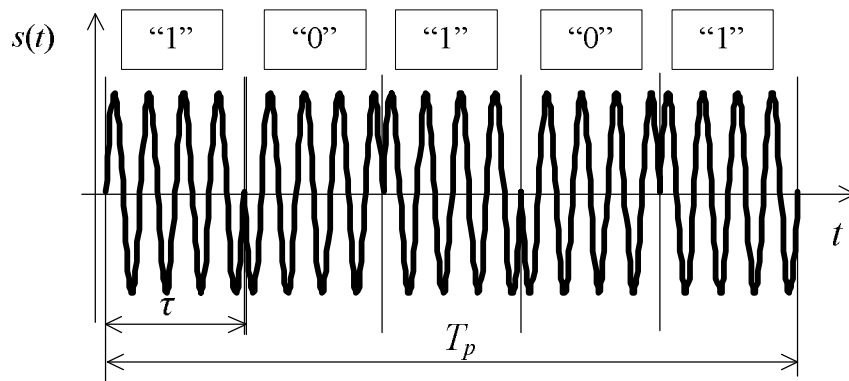


Рис. 6.18

Параметрами ФМН являются:

- длительность импульса τ ;
- число позиций манипуляции p ;
- девиация фазы $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{p} = \frac{2\pi}{p};$$

- длительность посылки T_p из N импульсов

$$T_p = N\tau.$$

Каждому виду импульса присваивается число. При двухпозиционной ФМН $p=2$ — два вида: с фазами 0 и 180° , поэтому двоичные числа «0» и «1». При трехпозиционной $\Delta\varphi=120^\circ$ числа «0», «1» и «2» — обычно записывают в двоичном виде. Например, 16-ти позиционная: $\Delta\varphi=22,5^\circ$ «0000», «0001» ... «1111».

Информационным признаком послыки является цифровая последовательность, записанная в виде двоичного числа. При двухпозиционной манипуляции кодируется каждый двоичный символ, при многопозиционной — группы из двоичных символов.

Применяют два основных способа присвоения фаз:

- абсолютный (прямой);
- относительный (следующий «перескок» фазы зависит от предыдущего состояния, например, если был «0», то не выполняется смена фазы, а если была «1», то выполняется).

6.5.9. ФМН сигналы на основе последовательностей Баркера

Последовательность Баркера или код Баркера — двоичная последовательность $a_i (i=1,2,...N)$ со специальным свойством: все «боковые лепестки» нормированной АКФ одинаковы и равны $1/N$. Известны коды для $N=3,4,5,7,11,13$ (табл. 6.1); для больших значений коды не найдены.

Таблица 6.1 — Значения символов для кодов Баркера

N	a_i для длины кода N												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	+	+	—										
4	+	+	—	+									
5	+	+	+	—	+								
7	+	+	+	—	—	+	—						
11	+	+	+	—	—	—	+	—	—	+	—		
13	+	+	+	+	+	—	—	+	+	—	+	—	+

Пример. $N = 7$. Последовательность: 1110010 или +++--+- (рис. 6.19).

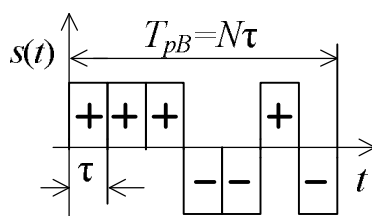


Рис. 6.19 — Чередование фаз для 7-разрядного кода Баркера

Формирователь такой последовательности и СФ для неё имеют следующую структуру (рис. 6.20).

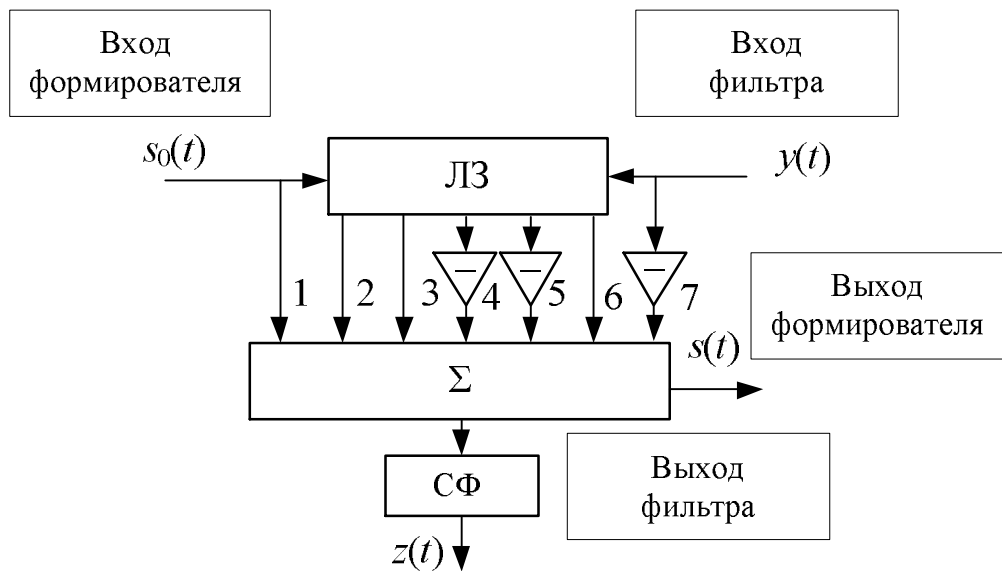


Рис. 6.20

На вход формирователя поступает периодическая последовательность импульсов одинаковой формы $s_0(t)$ длительностью τ с периодом

$$T_{pB} = N\tau.$$

Работа формирователя очевидна: импульсы $s_0(t)$ сдвигаются на свою длительность $N-1$ раз. Фаза определённых алгоритмом импульсов «переворачивается» на противоположную.

Работа СФ происходит аналогично, но, так как порядок чередования фаз — обратный, импульсы через один «гасят» друг друга. Из «ненулевых» тактов только в одном происходит сложение N амплитуд, а в остальных остаётся только одна амплитуда (рис. 6.21).

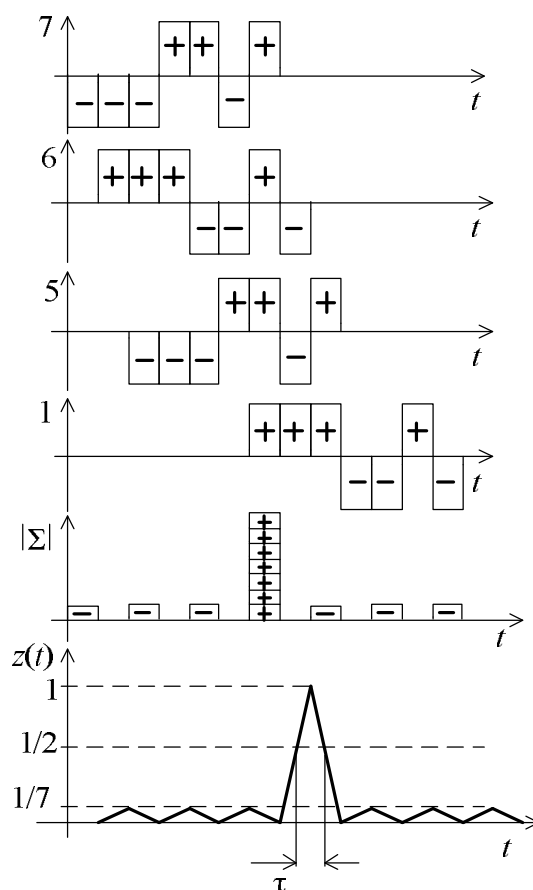


Рис. 6.21 — Временные диаграммы к работа СФ 7-разрядной последовательности Баркера

Видно, что происходит «сжатие» отклика СФ.

Полоса пропускания для кодов Баркера определяется длительностью импульса, т.е. составляет $\Delta F \approx 1 / \tau$, а длительность последовательности $T = N \tau$, поэтому база равна

$$B \approx N\tau / \tau \approx N.$$

Максимальная длина кода Баркера $N = 13$, при этом УБЛ равен $1 / 13$, что по мощности составляет -22 дБ.

6.5.10. Фазоманипулированные шумоподобные сигналы

Чередование символов производится по закону **псевдослучайных последовательностей** (ПСП), формируемых по **рекуррентным** алгоритмам.

ПСП называют рекуррентной (РПСР), если задано m элементов **порождающей последовательности**, а каждый следующий элемент формируется на основе предыдущих по определённому правилу.

РПСР называют линейной, если это правило — линейное:

- сложение по модулю p (без перехода в следующий разряд);
- логическое умножение по модулю p .

Линейные РПСР формируют с помощью многоотводных ЛЗ, регистров сдвига, мультиплексоров. Обычно используется двоичная арифметика, затем, если $p > 2$, то двоичные символы объединяют в группы.

Последовательность максимального периода называют **М-последовательностью**. Место и число отводов для любого m определяется с помощью таблиц неприводимых многочленов. Если его изменить, то период последовательности станет равным $N^* < M$.

Длину порождающей последовательности выбирают из условия

$$2^{m-1} < N^* < 2^m.$$

Общая схема цифрового автомата для формирования М-последовательности содержит РС из m триггеров, умножители по модулю p и дешифратор (рис. 6.24).

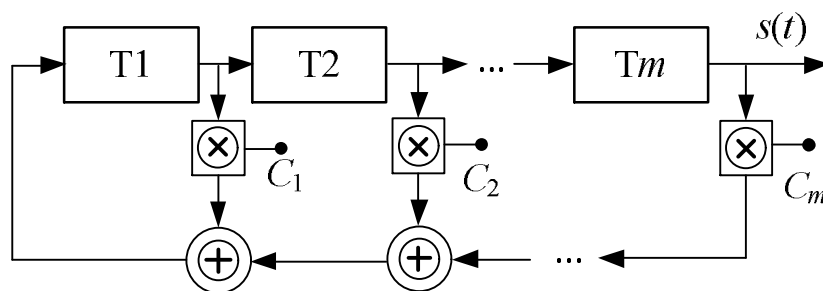


Рис. 6.24

Умножение по модулю — это умножение без переноса старший разряд, например, для $p = 5$:

$$2 \times 2 = 4 \equiv 4 \pmod{5}; \quad 2 \times 3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Если константа $C_i = 0$, то это означает неподключение данного выхода триггера. Для $p = 2$ никакие специальные умножители не нужны.

Для формирования последовательности с заданным периодом N^* в состав формирователя должен входить дешифратор, который обеспечивает сброс схемы в исходное состояние, когда на выходах триггеров появится заданное число.

Основное свойство ФМ сигнала, модулированного М-последовательностью: АКФ имеет один пик. Боковые лепестки для периодической М-последовательности имеют уровень $1/M$. Однако при приёме мы имеем дело с непериодической (однократной) М-последовательностью, поэтому боковые лепестки **не полностью** взаимно компенсируются: реальная оценка УБЛ — уровень $1/\sqrt{M}$.

СФ имеет структуру, аналогичную СФ для кодов Баркера.

Пример: в системе спутниковой навигации *GPS* (спутники *Navstar*) излучается два вида сигналов:

- сигнал грубого определения местонахождения объекта имеет длительность импульса 1 мкс, период кодовой последовательности ≈ 1 с. Для формирования используются 10-разрядные сдвиговые регистры, коэффициент сжатия равен 1023;
- сигнал точного определения имеет длительность импульса 0,1 мкс, а период кодовой последовательности около 267 суток. Погрешность не более 15 м.

6.5.11. Формирование опорного сигнала при ФМН

Задача: извлечь опорный сигнал из информационного сигнала на промежуточной частоте приёмника.

При двухпозиционной ФМН

$$s_0(t) = A \cos(\omega t); s_1(t) = A \cos(\omega t + \pi).$$

При удвоении частоты информация о фазе снимается:

$$s_{02}(t) = A \cos(2\omega t); s_1(t) = A \cos[2 \cdot (\omega t + \pi)] = A \cos[2 \cdot \omega t + 2\pi] = A \cos(2\omega t).$$

Схема Пистолькорса (1933 год) (рис. 6.25).

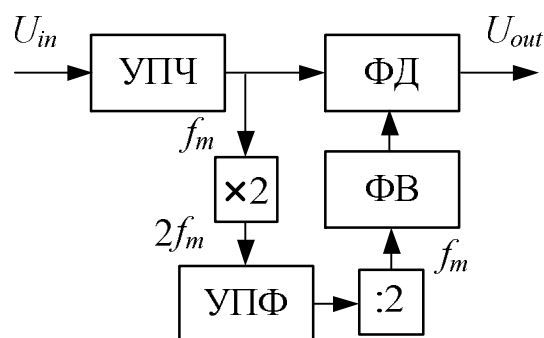


Рис. 6.25

Недостаток: при делении частоты возможен сбой фазы: для двухпозиционной ФМН возникает эффект «обратной работы».

Схема Костаса (1956 год) (рис. 6.26).

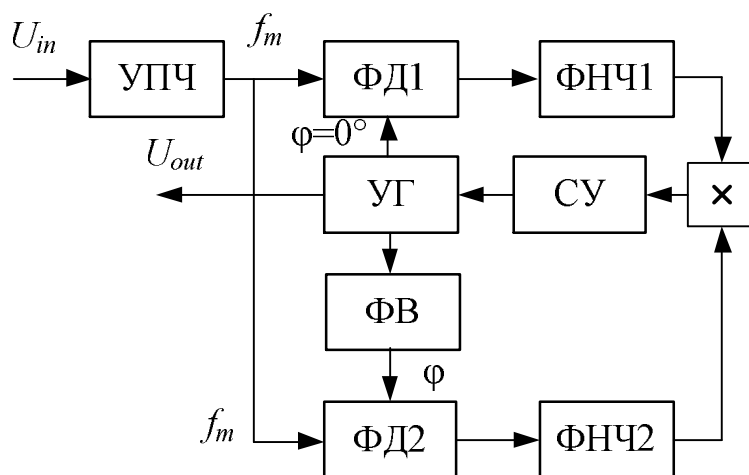


Рис. 6.26

На выходе двух ФД — знакопеременные последовательности, но с противоположным чередованием знаков. За счёт перемножения знаки снимаются.

7. РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

7.1. Постановка задачи

Отличие от задачи обнаружения: считается, что на заданном интервале времени $[0, T]$ могут быть приняты сигналы различного вида. Необходимо принять решение: какой именно сигнал из заданного **ансамбля** был принят?

Будем рассматривать случай **дискретных** сигналов, ансамбль из p сигналов, отличающихся значениями информационного параметра (группы параметров) $\Lambda_i, i=1, 2, \dots, p$.

Практически: должна обеспечиваться временная синхронизация — это отдельная задача.

Путь на вход приёмника поступает смесь, в которой обязательно содержится один из сигналов

$$x(t) = s_i(t, \Lambda_i, \beta) + n(t)$$

где β — несущественный случайный параметр.

Необходимо по виду принимаемой смеси дать оценку, какой именно сигнал в ней содержится

$$\begin{array}{l} \square \quad s_1^* \rightarrow \Lambda_1 \\ x(t) \rightarrow \dots \\ \square \quad s_p^* \rightarrow \Lambda_p \end{array}$$

При этом должен выполняться один из статистических критериев оптимальности.

Рассмотрим случай **бинарных сигналов** $p=2$.

Возможны ошибочные решения двух видов, вероятности которых равны

$$P_{F12} = P_1 P(s_2^* / s_1);$$

$$P_{F21} = P_2 P(s_1^* / s_2).$$

Для общности введём штрафы за каждое ошибочное решение: r_1, r_2 .

Обычно применяют следующие критерии.

1. Минимума среднего риска Байеса

$$\bar{r} = r_1 P_1 P(s_2^* / s_1) + r_2 P_2 P(s_1^* / s_2) = \min.$$

2. Для РТСПИ обычно штрафы одинаковы, поэтому более подходит критерий идеального наблюдателя Котельникова или критерий минимума средней вероятности ошибки

$$\bar{P}_F = P_1 P(s_2^* / s_1) + P_2 P(s_1^* / s_2) = \min.$$

7.2. Общее решение задачи различения

Проведём рассуждения для критерия идеального наблюдателя

$$P_1 P(s_2^*/s_1) + P_2 P(s_1^*/s_2) = \min$$

Известно ? Известно ?

Ясно, что следует заниматься условными вероятностями. Рассмотрим вероятности ошибок разного вида по отдельности.

Шаг 1. Ограничим полосу, в которой рассматривается смесь сигнала с шумом пределами $[-F, F]$. Условие, при котором шум можно считать квазибелым: эта полоса более широкая, чем для сигнала.

Введем отсчёты по Котельникову с интервалом $\Delta t = 1/2F$ смеси, сигналов и шума. На интервале $[0, T]$ их будет ограниченное количество N , поэтому можно ввести N -мерное пространство, в котором функции времени представлены векторами (рис. 7.1):

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow \mathbf{\bar{x}}; \\ s_i(t) &\rightarrow \mathbf{\bar{s}}_i; \\ n(t) &\rightarrow \mathbf{\bar{n}}. \end{aligned}$$

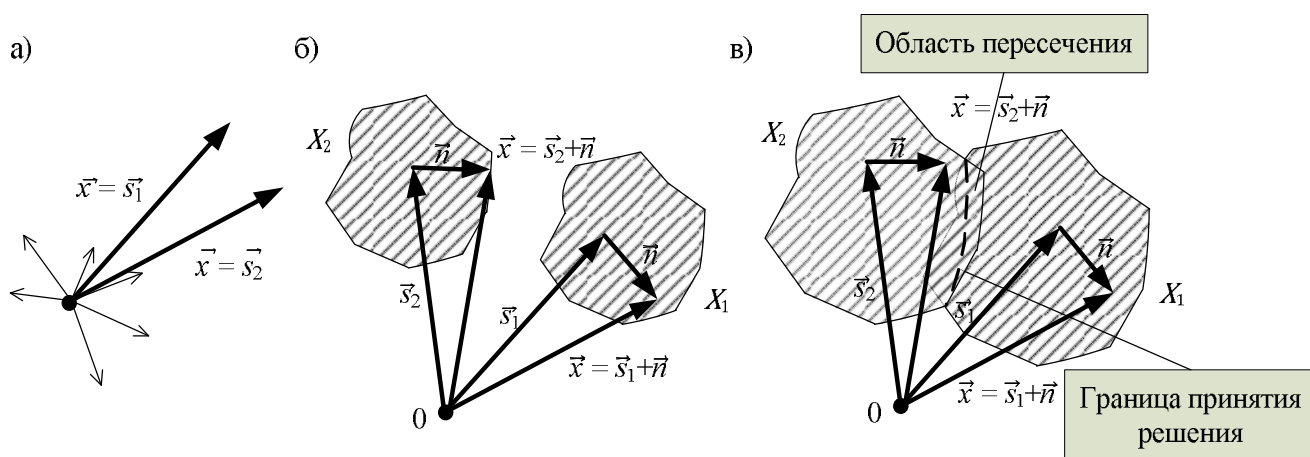


Рис. 7.1 — Геометрическая интерпретация задачи различения при отсутствии шума (а), при шуме низкого уровня (б) и высокого уровня (в)

Шаг 2. Выражения для вероятностей ошибок

$$P(s_2^*/s_1) = P\{\mathbf{\bar{x}} \in X_2 / s_1\} = \iiint_{X_2} \dots \int W_1(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1, dx_2, \dots, dx_N = J_{12^*};$$

$$P(s_1^*/s_2) = P\{\mathbf{\bar{x}} \in X_1 / s_2\} = \iiint_{X_1} \dots \int W_2(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1, dx_2, \dots, dx_N = J_{21^*}.$$

Подставим введённые обозначения в выражение для критерия

$$P_1 J_{12^*} + P_2 J_{21^*} = \min.$$

Шаг 3. Рассмотрим среднюю вероятность ошибок **при условии**, что был передан сигнал номер 1: $\bar{P}_{F1}$.

Вероятность правильного решения при передаче сигнала номер 1 равна

$$P_{T1} = P_1 J_{11*},$$

где J_{11*} — интеграл по области 1 для W_1 .

В выражении для критерия добавим и вычтем выражение для P_{T1}

$$\bar{P}_{F1} = P_1 J_{12*} + P_2 J_{21*} + P_1 J_{11*} - P_1 J_{11*} = \bar{P}_{F1} = P_1 (J_{12*} + J_{11*}) + P_2 J_{21*} - P_1 J_{11*}.$$

Так как сумма интегралов $J_{12*} + J_{11*}$ описывает вероятность полной группы событий, она равна единице, получим

$$\bar{P}_{F1} = P_1 - (-P_2 J_{21*} + P_1 J_{11*}) = P_1 - J_{X1}.$$

Минимум средней вероятности ошибок соответствует максимуму интеграла J_{X1} . Так как интегрирование производится по одной и той же области X_1 , можем перейти к подынтегральным выражениям, тогда получаем условие

$$P_1 W_1(x_1, x_2 \dots x_N) > P_2 W_2(x_1, x_2 \dots x_N).$$

Шаг 4. Выполним такие же преобразования при условии передачи сигнала номер 2. Получим аналогичное правило, которое можно объединить первым

$$P_1 W_1(x_1, x_2 \dots x_N) \underset{S_2^*}{\overset{S_1^*}{>}} P_2 W_2(x_1, x_2 \dots x_N).$$

Это — алгоритм оптимального различения по критерию идеального наблюдателя. Легко обобщить на критерий Байеса, достаточно добавить веса неправильных решений.

7.3. Различение в стационарном когерентном канале

Стационарный канал: параметры канала не изменяются во времени: амплитуда постоянна. Когерентный: нет флуктуаций фазы.

Можно считать, что этот случай соответствует случаю СИП (амплитуда, частота, фаза). Шум — квазибелый (окрашенный) гауссов: с ограниченным спектром $[-F, F]$. Нормальный закон распределения имеют как шум, так и смесь сигналом.

Отсчёты по Котельникову с интервалом $\Delta t = 1/2F$ **независимы**, поэтому многомерная плотность вероятностей есть произведение одномерных

$$W(x_1, x_2 \dots x_N) = \prod_{i=1}^N W(x_i).$$

Одномерные плотности имеют вид

$$W(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x_i - s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

Для многомерной плотности вероятностей получим

$$W(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x_i - s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^N \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

Энергетическое следствие теоремы Котельникова:

$$\Delta t \sum_{i=0}^N x_i^2 = \frac{1}{2F} \sum_{i=0}^N x_i^2 = \int_0^T x^2(t) dt.$$

Сумму квадратов отсчетов заменяем интегралом по непрерывной функции

$$W(x_1, x_2, \dots, x_N) = W_0 \exp\left[-\frac{\int_0^T [x(t) - s(t)]^2 dt}{N_0}\right].$$

Подставим в решающее правило

$$P_1 W_0 \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt\right] \underset{<}{\overset{\geq}{>}} P_2 W_0 \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_2(t)]^2 dt\right].$$

Сокращаем на W_0 , раскрываем скобки и логарифмируем

$$\ln \frac{P_1}{P_2} - \frac{\int_0^T x(t)^2 dt}{N_0} + \frac{2 \int_0^T x(t) s_1(t) dt}{N_0} - \frac{\int_0^T s_1(t)^2 dt}{N_0} \underset{<}{\overset{\geq}{>}} - \frac{\int_0^T x(t)^2 dt}{N_0} + \frac{2 \int_0^T x(t) s_2(t) dt}{N_0} - \frac{\int_0^T s_2(t)^2 dt}{N_0}.$$

$$\ln \frac{P_1}{P_2} - \cancel{\frac{\int_0^T x(t)^2 dt}{N_0}} + \underbrace{\frac{2 \int_0^T x(t) s_1(t) dt}{N_0}}_{z_1} - \underbrace{\frac{\int_0^T s_1(t)^2 dt}{N_0}}_{E_1} \underset{<}{\overset{\geq}{>}} - \cancel{\frac{\int_0^T x(t)^2 dt}{N_0}} + \underbrace{\frac{2 \int_0^T x(t) s_2(t) dt}{N_0}}_{z_2} - \underbrace{\frac{\int_0^T s_2(t)^2 dt}{N_0}}_{E_2}.$$

Получили правило

$$\ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{2z_1}{N_0} - \frac{E_{s1}}{N_0} \underset{s_2^*}{\overset{s_1^*}{>}} \frac{2z_2}{N_0} - \frac{E_{s2}}{N_0}.$$

В цифровых РТСПИ вероятности передачи нулей и единиц одинаковы и равны 0,5: либо по характеру сообщений, либо в результате специального кодирования для устранения избыточности. Тогда логарифм исключается

$$\frac{2z_1}{N_0} - \frac{E_{s1}}{N_0} \begin{matrix} s_1^* \\ s_2^* \end{matrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{2z_2}{N_0} - \frac{E_{s2}}{N_0}.$$

Пример 1. АМН с пассивной паузой

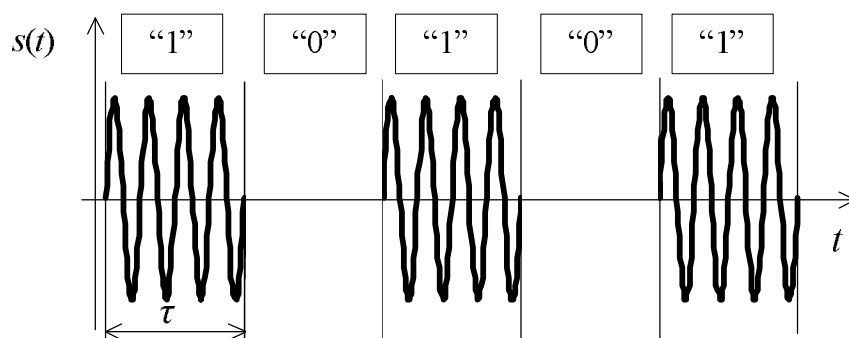


Рис. 7.2

$$s_1 = s; z_1 = z; E_{s1} = E;$$

$$s_2 = 0; z_2 = 0; E_{s2} = 0.$$

Правилорешения имеет следующий вид (рис. 7.3)

$$\begin{matrix} s^* \\ z > z_0, \\ 0^* \end{matrix}$$

где $z_0 = \frac{E_s}{2}$ — порог принятия решения.

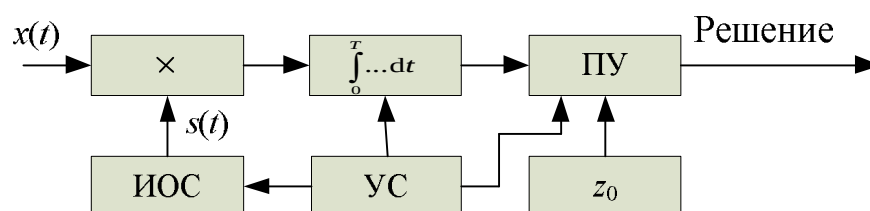


Рис. 7.3 — Структурная схема оптимального различителя АМн

Реально амплитуда флуктуирует, поэтому качество различения снижается. Кроме того, на качество влияет нестабильность усилителей и преобразователей сигналов.

Пример 2. Сигналы с равной энергией или с активной паузой (под паузой понимается логический нуль): ЧМН, ФМН.

Решающее правило (рис. 7.4)

$$\begin{matrix} s_1^* \\ z_1 > z_2 \\ s_2^* \end{matrix}$$

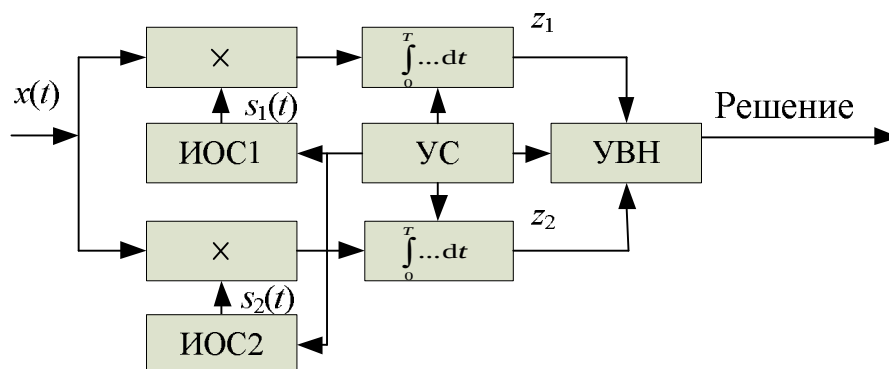


Рис. 7.4 — Структурная схема оптимального различителя сигналов с активной паузой

Стабильность уровней сигналов, в том числе из-за нестабильности КУ, роли не играет. Важно, чтобы устройства предварительной обработки были одинаковыми.

Пример 1. ФМН двухпозиционная. Алгоритм имеет вид

$$\int_0^T x(t) s_1(t) dt \begin{matrix} s_1^* \\ > \\ < \\ s_2^* \end{matrix} \int_0^T x(t) s_2(t) dt .$$

Теперь

$$s_1(t) = -s_2(t) .$$

Правило:

$$\begin{matrix} s_1^* \\ z_1 > 0 \\ s_2^* \end{matrix}$$

Структурная схема — как для АМН, но порог — нулевой: устраняется источник нестабильности.

Пример 2. ЧМН на 4 частотах

$$z_i = \int_0^T x(t) s(t, f_i) dt, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Нужно вычислить 4 КИ, затем применить схему выбора наибольшего из 4.

7.4. Анализ качественных показателей различителей СИП

Основным качественным показателем является средняя вероятность ошибок. Величину среднего риска легко найти, если известны вероятности ошибок первого и второго вида.

7.4.1. Различитель сигналов с пассивной паузой

Модель смеси имеет следующий вид

$$x(t) = as(t) + n(t).$$

При $a = 0$ — чистый шум, при $a = 1$ — смесь сигнала и шума.

Шаг 1. Запишем алгоритм решения (правило)

$$z \underset{0^*}{\overset{s^*}{>}} \frac{E_s}{2}.$$

Условия ошибок

$$P(s^*/0) = P\left[z > \frac{E_s}{2} \middle/ a=0 \right];$$

$$P(0/s^*) = P\left[z < \frac{E_s}{2} \middle/ a=1 \right].$$

Шаг 2. Рассмотрим ошибку первого рода

$$z_n = \int_0^T x(t)s(t)dt > \frac{E_s}{2}.$$

Шаг 3. Определим закон распределения случайной величины $W(z_n)$. Каждый отсчёт шума — случайная величина с нормальным законом распределения, отсчёт сигнала — детерминированная величина, поэтому их произведение есть случайная величина с нормальным законом распределения.

Согласно энергетическому следствию теоремы Котельникова:

$$\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{2F} \sum_{i=0}^N x_i^2.$$

КИ имеет размерность энергии

$$z_n = \int_0^T n(t)s(t)dt = \frac{1}{2F} \sum_{i=0}^N n_i s_i.$$

Вычислим среднее значение КИ

$$m_z = [z_n]_{av} = \frac{1}{2F} \left[\sum_{i=0}^N n_i s_i \right]_{av} = \frac{1}{2F} \sum_{i=0}^N [n_i]_{av} s_i = 0.$$

Найдем дисперсию КИ

$$\sigma_z^2 = [z_n^2]_{av} = \left(\frac{1}{2F}\right)^2 \left[\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N n_i n_j s_i s_j \right]_{av} = \left(\frac{1}{2F}\right)^2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [n_i n_j]_{av} s_i s_j.$$

Отсчёты шума независимы, поэтому

$$[n_i n_j]_{av} = \begin{cases} \sigma_n^2, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Ранее, для задачи обнаружения, было получено: $\sigma_n^2 = N_0 F$. Остальная одинарная сумма даёт энергию сигнала. Получаем

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0 F}{2F} \cdot \frac{1}{2F} \sum_{i=0}^N s_i^2 = \frac{N_0 E_s}{2}.$$

Получили выражение для закона распределения чистого шума

$$W(z_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{z_n^2}{2\sigma_z^2}\right].$$

Шаг 4. Найдём вероятность ошибки первого рода

$$P(s^*/0) = \int_{E_s/2}^{\infty} W(z_n) dz_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{E_s/2}^{\infty} \exp\left[-\frac{z_n^2}{2\sigma_z^2}\right] dz_n.$$

Обозначим $\xi = \frac{z_n}{\sigma_z}$. Нижний предел

$$\xi_0 = \frac{E_s}{2\sigma_z} = \frac{E_s}{2} \sqrt{\frac{2}{E_s N_0}} = \sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} = \frac{q}{2}.$$

Здесь $q^2 = \frac{2E_s}{N_0}$ — энергетическое отношение сигнал-помеха.

Получили

$$P(s^*/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q/2}^{\infty} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi.$$

Функция «интеграл вероятности» имеет вид (рис. 7.7)

$$\Phi(\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_0} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_0}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx.$$

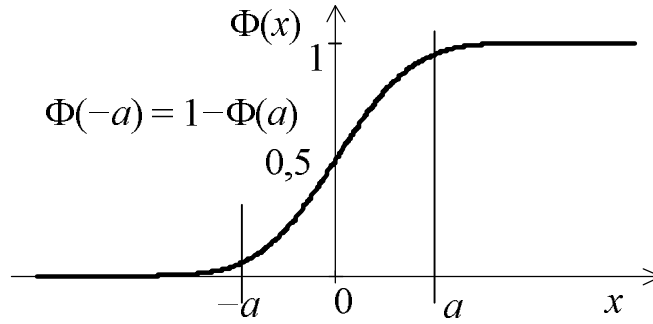


Рис. 7.7

Таким образом, средняя вероятность ошибки первого рода равна

$$P(s^*/0) = 1 - \Phi(\xi_0) = 1 - \Phi\left(\frac{q}{2}\right).$$

Шаг 5. Аналогичные рассуждения применим для вероятности ошибки второго рода

$$\begin{aligned} z_n &= \int_0^T [s(t) + n(t)] s(t) dt < \frac{E_s}{2}; \\ \int_0^T s^2(t) dt + \int_0^T n(t) s(t) dt &< \frac{E_s}{2}; \\ z_n &> -\frac{E_s}{2}. \end{aligned}$$

Получаем

$$P(0/s^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-q/2} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi = \Phi(-q/2) = 1 - \Phi(q/2).$$

Вероятности получились одинаковыми!

Шаг 6. Средняя вероятность ошибок и значение среднего риска

$$\begin{aligned} P_{Fav} &= P_1 P(s^*/0) + P_2 P(0/s^*); \\ r_{av} &= r_1 P_1 P(s^*/0) + r_2 P_2 P(0/s^*). \end{aligned}$$

Так как вероятности отдельных ошибок получились одинаковыми, окончательно получаем

$$\begin{aligned} P_{Fav} &= (P_1 + P_2) [1 - \Phi(q/2)] = 1 - \Phi(q/2); \\ r_{av} &= (r_1 P_1 + r_2 P_2) [1 - \Phi(q/2)]. \end{aligned}$$

Средняя вероятность ошибок не зависит от соотношения между вероятностями передачи символов, а значение среднего риска от этого соотношения зависит. На практике, для цифровых систем связи, чаще всего априорные вероятности передачи символов одинаковы.

7.4.2. Различитель сигналов с равной энергией

Шаг 1. Алгоритм

$$\begin{matrix} s_1^* \\ z_1 > \\ < \\ s_2^* \end{matrix} z_2.$$

Вероятности ошибок первого и второго рода

$$P(s_2^*/s_1) = P\left[z_1 < z_2 / x(t) = s_1(t) + n(t)\right];$$

$$P(s_1^*/s_2) = P\left[z_1 > z_2 / x(t) = s_2(t) + n(t)\right].$$

Шаг 2. Для ошибок первого рода разделим случайные и детерминированные факторы

$$\begin{aligned} \int_0^T [s_1(t) + n(t)] s_1(t) dt &< \int_0^T [s_1(t) + n(t)] s_2(t) dt; \\ \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T n(t) s_1(t) dt &< \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt + \int_0^T n(t) s_2(t) dt. \end{aligned}$$

Введём нормированный коэффициент корреляции между сигналами

$$R_{12} = \frac{1}{E_s} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt.$$

Он изменяется от -1 до 1 : при совпадении равен единице, для ортогональных сигналов (например, с ЧМн или ФМн на 90°) — нулю, для противоположных сигналов (ФМн на 180°) — минус единице.

Условие ошибки первого рода имеет вид

$$\int_0^T [s_1(t) - s_2(t)] n(t) dt < -E_s (1 - R_{12}).$$

В левой части имеем КИ для **разности** сигналов — разностный КИ (РКИ)

$$z_{der} < -E_s (1 - R_{12}),$$

где $z_{der} = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)] n(t) dt.$

Шаг 3. Закон распределения РКИ, как и для полных сигналов, гауссов с нулевым средним значением, а в дисперсию теперь входит **энергия разности** сигналов

$$E_{der} = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 n(t) dt = 2E_s - 2E_s R_{12}.$$

Итак, дисперсия равна $\sigma_{zder}^2 = E_s N_0 (1 - R_{12})$ и выражение для закона распределения имеет вид

$$W(z_{der}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{zder}} \exp\left[-\frac{z_{der}^2}{2\sigma_{zder}^2}\right].$$

Шаг 4. Рассмотрим вероятность ошибки первого рода

$$P(s_1^*/s_2) = \int_{E_sder}^{\infty} W(z_n) dz_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{zder}} \int_{E_s(1-R_{12})}^{\infty} \exp\left[-\frac{z_{der}^2}{2\sigma_{zder}^2}\right] dz_{der}.$$

Выполним замену переменной $\xi = \frac{z_{der}}{\sigma_{zder}}$.

Нижний предел интегрирования равен

$$\xi_0 = \frac{E_s(1-R_{12})}{\sigma_{zder}} = \frac{E_s(1-R_{12})}{\sqrt{E_s N_0 (1-R_{12})}} = q \sqrt{\frac{1-R_{12}}{2}}.$$

Здесь $q^2 = \frac{2E_s}{N_0}$ — энергетическое отношение сигнал-шум.

Получили

$$P(s_1^*/s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q\sqrt{\frac{1-R_{12}}{2}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi = 1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-R_{12}}{2}}\right).$$

Шаг 5. В силу равенства энергий вероятность ошибки второго рода будет такой же. Значит, для средней вероятности ошибок можно записать выражение

$$P_{Fav} = 1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-R_{12}}{2}}\right).$$

7.4.3. Анализ полученных результатов

1. Отличия от идеального случая: невозможно полностью использовать априорную информацию: реальная синхронизация по времени отличается от идеального случая, белый шум является абстракцией, полной информации о нём нет. Итак, различитель может быть только квазиоптимальным. Полученные оценки определяют **потенциальную** помехоустойчивость, к которой можно только приблизиться.
2. В оценках присутствует отношение сигнал-шум по энергии, а не по мощности. Разница: в первом отсутствует формальная зависимость от полосы частот.

Сравним полученные результаты по значениям средней вероятности ошибок. Для сигналов с пассивной паузой (АМн)

$$P_{Fav} = (P_1 + P_2) [1 - \Phi(q/2)] = 1 - \Phi(q/2).$$

Для сигналов с равной энергией

$$P_{Fav} = 1 - \Phi \left(q \sqrt{\frac{1 - R_{12}}{2}} \right).$$

Равную энергию имеют сигналы с ЧМн. Для частотного разнеса ΔF коэффициент корреляции равен

$$R_{12} = \sin x (2\pi \Delta F T).$$

Если $\Delta F \ll \frac{1}{T}$, то $R_{12} \rightarrow 0$. На практике выбирают такой разнос частот, чтобы коэффициент был меньше 0,1.

При нулевом значении коэффициента корреляции

$$P_{Fav} = 1 - \Phi \left(\frac{q}{\sqrt{2}} \right).$$

Для двухпозиционной ФМнс девиацией 180° коэффициент корреляции равен -1 , тогда

$$P_{Fav} = 1 - \Phi(q).$$

Четырёхпозиционная ФМнс девиацией 90° соответствует ортогональным сигналам ($R_{12} = 0$)

$$P_{Fav} = 1 - \Phi \left(\frac{q}{\sqrt{2}} \right).$$

Ранее мы ввели энергетическое отношение сигнал-шум

$$r_{SNE} = \frac{E_s}{N_0} = \frac{q^2}{2}.$$

Выполним сравнение качественных показателей различителей различных сигналов (рис. 7.8).

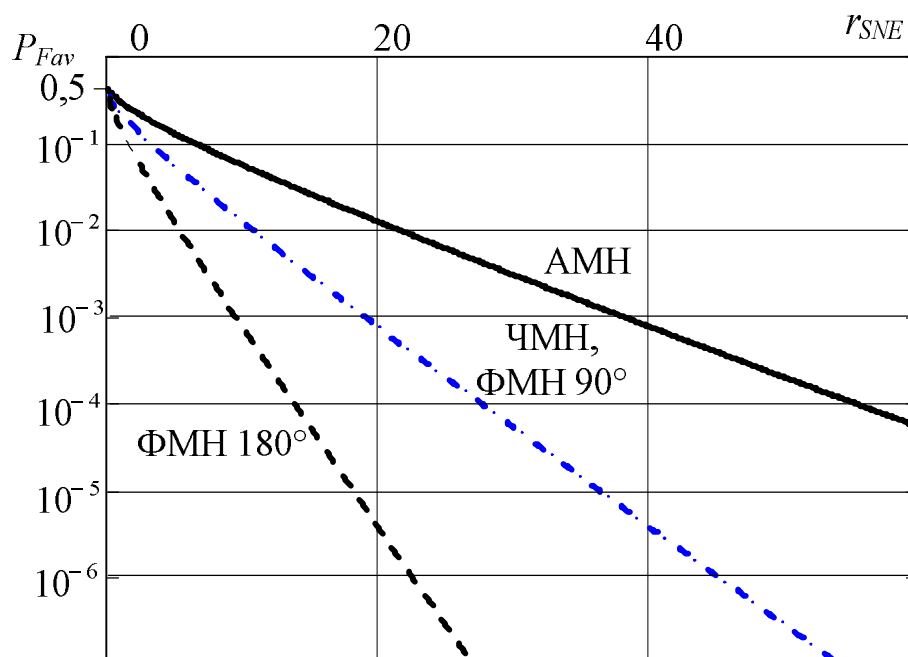


Рис. 7.8 — Зависимости средней вероятности ошибок от энергетического отношения сигнал-шум

На практике задают максимально допустимую вероятность ошибок, обычно 10^{-6} — 10^{-8} . Определяют нужное отношение сигнал-шум, рассчитывают N_0 для заданных условий и определяют необходимую энергию сигнала.

Величина N_0 определяется с учётом шумовой температуры антенн:

$$N_0 = kT_{ne} = k(T_{Ae} + k_n T_{inp}) = N_{0s} \left(\frac{T_{Ae}}{T_0} + k_n \frac{T_{inp}}{T_0} \right),$$

где k — постоянная Больцмана;

k_n — коэффициент шума входных цепей;

T_{Ae} — эквивалентная шумовая температура антенно-фидерного тракта;

T_{inp} — физическая температура входных устройств;

$T_0 = 290$ К — стандартная нормальная температура Земли;

$N_{0s} = 4,0 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц — стандартное значение спектральной плотности шума для нормальной температуры.

Шумовая температура антенны определяется её ДН и ориентацией:

— вдоль Земли: $T_{Ae} \approx T_0$;

— в зенит днём $T_{Ae} \approx 60$ К;

— в зенит ночью (лучшие радиоастрономические антенны, если Луна не падает в ДН) $T_{Ae} \approx 10$ К.

Коэффициенты шума:

— обычный приёмник СВЧ $k_n \approx 5$;

— LNB для спутникового ТВ $k_n \approx 1,05$ — $1,1$.

Приёмники радиоастрономии охлаждают до температур около 50 К, т.е. примерно в 6 раз по отношению к нормальной температуре.

7.5. Различение сигналов с неизвестной фазой (некогерентный приём)

При медленных изменениях фазы система фазовой автоподстройки (ФАП) позволяет свести задачу к когерентному приёму.

При быстрых флуктуациях нужно учесть, что энергия сигнала не зависит от фазы. Для когерентных сигналов с равной энергией получили алгоритм различения в виде

$$\begin{matrix} s_1^* \\ z_1 > z_2 \\ s_2^* \end{matrix}$$

Для некогерентных сигналов так же, как в случае обнаружения СНФ, нужно вычислять модули ККИ (рис. 7.9)

$$\begin{matrix} s_1^* \\ z_1 > z_2 \\ s_2^* \end{matrix}$$

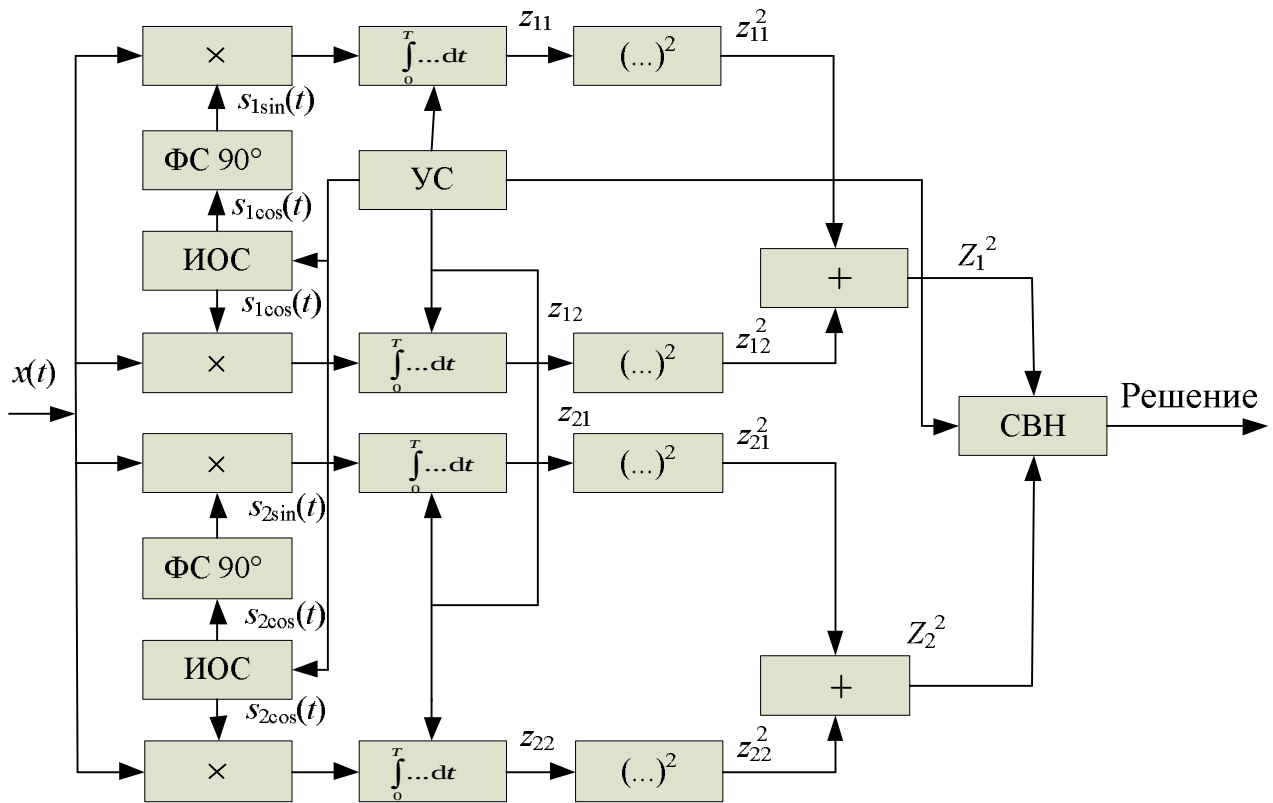


Рис. 7.9 — Структурная схема различителя некогерентных сигналов

Оценим качественные показатели такого различителя.

Ранее было показано, что модуль ККИ имеет распределение по обобщённому закону Релея (5.35). Повторяя рассуждения, относящиеся к когерентному случаю, но для этого вида распределения, получаем возможность сравнить качественные

показатели когерентного и некогерентного различителей сигналов с равными энергиями (рис. 7.10)

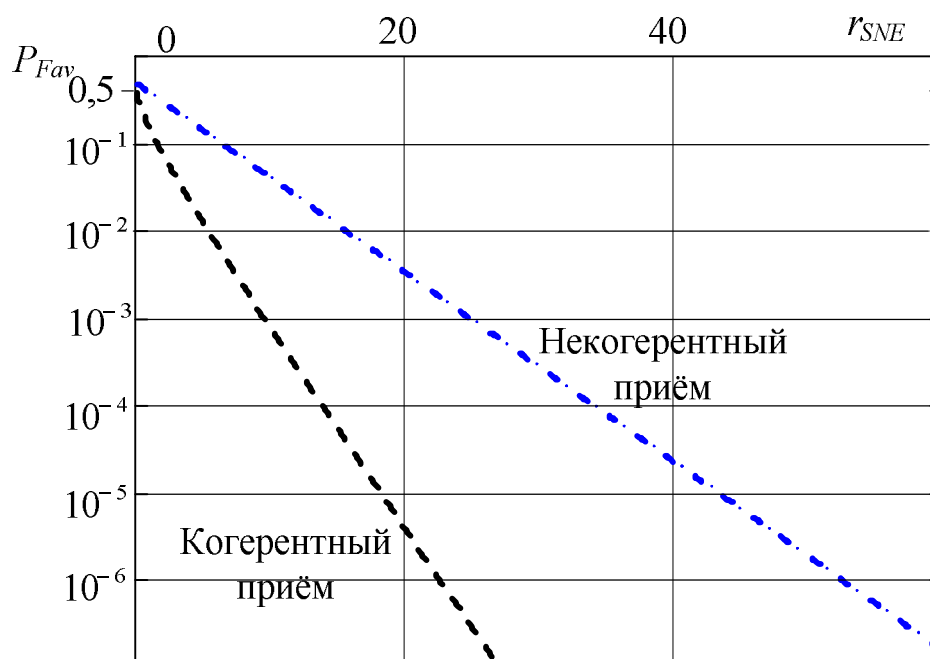


Рис. 7.10

8. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ

8.1. Постановка задачи

На интервале $[0, T]$ наблюдается смесь сигнала с информационным параметром Λ и гауссова белого шума $n(t)$

$$x(t, \Lambda) = s(t, \Lambda) + n(t).$$

Требуется выбрать оценку Λ^* информационного параметра так, чтобы ошибка измерения, рассчитанная по определённому правилу, была минимальной.

8.2. Анализ задачи

8.2.1. Состав ошибок измерения

Введём **мгновенное** (однократно измеренное) значение отклонения оценки Λ^* параметра $\Delta\Lambda$ от его истинного значения Λ как их разность

$$\Delta\Lambda = \Lambda^* - \Lambda = \Delta\Lambda_{an} + \Delta\Lambda_{sys} + \sigma(\Lambda),$$

где $\Delta\Lambda_{an}$ — аномальная ошибка (сбой);

$\Delta\Lambda_{sys}$ — систематическая ошибка (несоответствие эталону измеряемого параметра, т.е. нарушение калибровки измерителя);

$\sigma(\Lambda)$ — случайное среднеквадратическое отклонение.

Сбои относительно редки и обычно сразу выявляются. Погрешности калибровки устранимы. Случайные погрешности принципиально неустранимы, поэто-

му будем заниматься ими.

8.2.2. Критерии минимизации ошибок

Будем считать плотность вероятностей оценки информационного параметра $W(\Delta^*)$ известной. Тогда пределы оценок можно указать, задавшись **вероятностью неперевышения** этих пределов P_{nm} . Например, при гауссовом законе с дисперсией σ^2 (рис. 8.1) СКО будут лежать в следующих пределах (табл. 8.1).

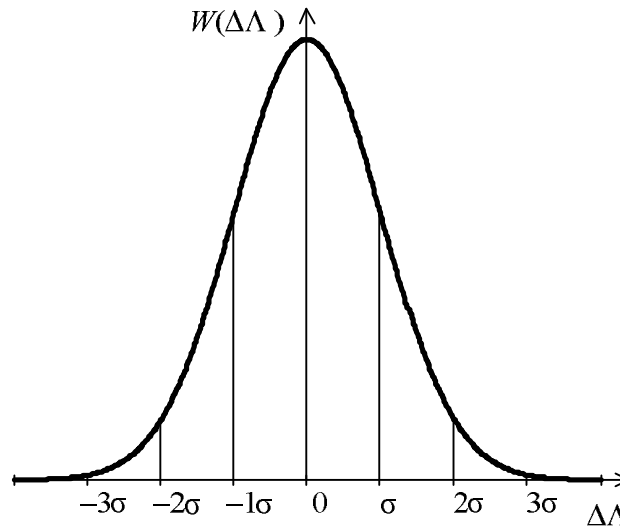


Рис. 8.1

Таблица 8.1 — Пределы СКО для вероятности P_{nm}

Вероятность неперевышения	Пределы СКО
0,68	$\pm\sigma$
0,95	$\pm 2\sigma$
0,997	$\pm 3\sigma$

На практике пределы устанавливают, введя **функцию стоимости** ошибок или **функцию потерь** (штрафов) $r(\Delta\Lambda)$ (рис. 8.2).

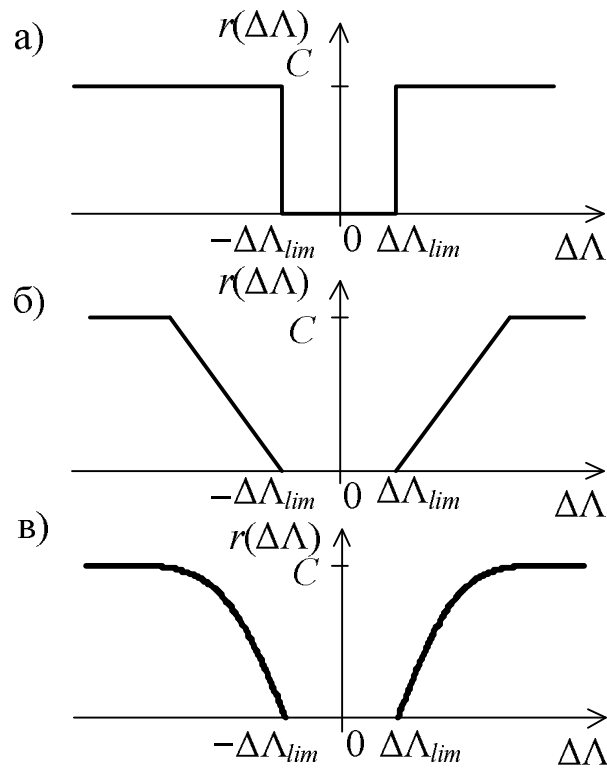


Рис. 8.2 — Варианты функции потерь: предельная (а), линейно-ломаная (б), экспоненциальная (в)

8.2.3. Связь задачи измерения с задачами обнаружения и различения

Наличие случайных ошибок измерения — следствие наличия шума в принимаемой смеси, поэтому все статистические подходы и выводы справедливы для задачи измерения. Отличие — в функции потерь, которая была дискретной, а теперь является **непрерывной**.

Максимально правдоподобной оценкой параметра называют такую оценку Λ^* , которая соответствует максимуму функции правдоподобия в задаче оптимального приёма.

Эта функция есть многомерная плотность вероятностей смеси сигнала с шумом, следовательно, правило выделения оценки информационного параметра для отсчётов по Котельникову имеет следующий вид

$$W_{sn}(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\Lambda^*}{=} \max.$$

Оценка параметра должна удовлетворять следующим требованиям:

- быть несмещённой (т.е. должна отсутствовать систематическая ошибка);
- иметь минимальное СКО относительно истинного значения.

Математически эти условия формулируются следующим образом:

$$(\Lambda^* - \Lambda)_{av} = 0;$$

$$\sigma^2(\Delta\Lambda) = \min.$$

Условие на вид функции распределения оценки содержит неравенство (граница) Крамера-Рао. Смысл этого неравенства состоит в том, максимально правдо-

подобная оценка достигается только при определённом виде функции распределения, которая определяется характером действия шума на данный способ измерения.

8.2.4. Реализация оптимального измерителя

Обычно применяют параллельный или последовательный метод измерения:

— разбиение интервала оценок на ограниченные подинтервалы (в несколько раз меньшие области допустимых значений) и выполнение параллельных оценок (рис. 8.3);

— применение следящей системы, которая варьирует параметр до достижения максимума КИ (рис. 8.4).

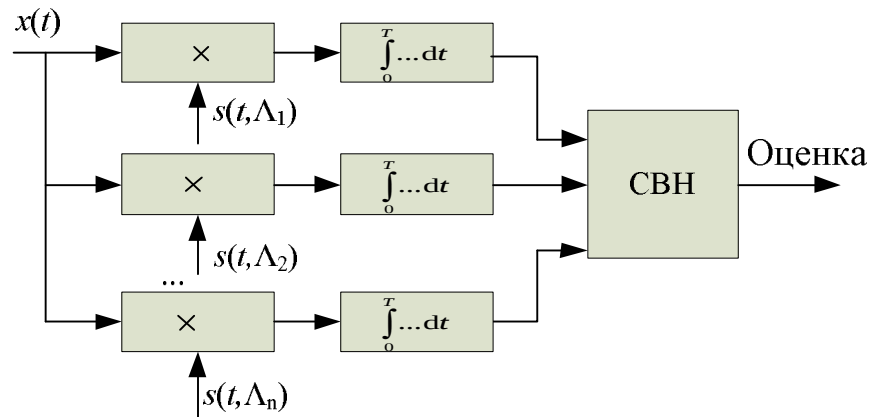


Рис. 8.3 — Структурная схема параллельного измерителя параметра

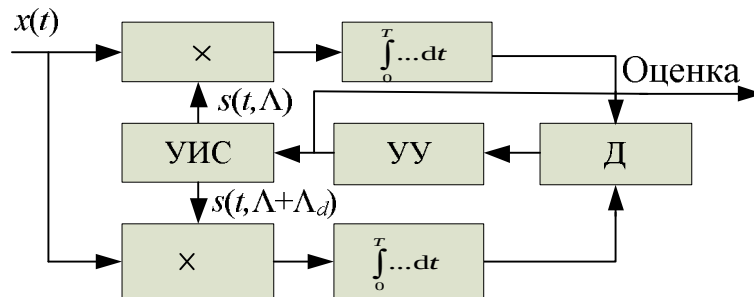


Рис. 8.4 — Структурная схема следящего измерителя параметра

Здесь приняты обозначения:

- СВН — схема выбора наибольшего;
- УИС — управляемый источник сигнала;
- УУ — устройство управления;
- Д — дискриминатор.

Дискриминирующая вариация Λ_d определяет разрешающую способность достижения максимума, т.е. потенциальную точность измерителя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Казаринов, Ю. М. Радиотехнические системы: учебник для вузов / Ю. М. Казаринов [и др.] ; под ред. Ю.М. Казаринова. — М.: Академия, 2008. — 589 с.
2. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория : справочник /под ред. Я. Д. Ширмана. — М. : Радиотехника, 2007. — 512 с.
3. Шпиндлер, Э. Практические конструкции антенн / Э. Шпиндлер, пер. с нем. — М. : Мир, 1989. — 448 с.

Приложение А. Некоторые свойства преобразования Фурье

А.1. Спектр производной заданной функции времени

Пусть $x(t)$ — функция времени, а $S(f)$ — её спектр. Найдем выражение для спектра производной $\frac{dx(t)}{dt}$. Для этого продифференцируем выражение, связывающее спектр с функцией времени

$$\frac{dS(f)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Спектр от времени не зависит, поэтому в левой части будет нуль, а в правой можно внести дифференцирование под знак интеграла и применить правило дифференцирования произведения функций

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{dt} e^{-j2\pi ft} dt.$$

Первое слагаемое даёт нужный спектр, а во втором достаточно продифференцировать экспоненту. В результате получим окончательное выражение для спектра производной $S_{der}(jf)$

$$S_{der}(jf) = j2\pi f S(f).$$

Примечание — Обычно в аргумент спектра вводят мнимую единицу, чтобы показать, что спектр — комплексно-значная функция.

А.2. Спектр интеграла заданной функции времени

Если обозначить

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt,$$

то

$$x(t) = \frac{d}{dt} y(t),$$

следовательно, можно применить свойство для производной. В результате получим выражение спектра $S_{in}(jf)$ для интеграла от функции

$$S_{in}(jf) = \frac{1}{j2\pi f} S(f).$$

Приложение Б. Анализ рассказа Эдгара По «Золотой жук»

Краткое содержание

Действие рассказа происходит в Южной Каролине, США. Потомок старинного аристократического рода Уильям Легран, преследуемый неудачами и банкротством, бежит из Нового Орлеана и поселяется на пустынном островке вблизи атлантического побережья со своей собакой — ньюфаундлендом и старым слугой-негром.

Однажды во время прогулки был найден «золотой» жук, которого они завернули в кусок найденного поблизости клочка бумаги. Придя домой, Легран обнаруживает, что это пергамент и совершенно случайно находит на пергаменте изображение черепа, нарисованное скрытыми чернилами, которые проявились от действия тепла — камина в доме Леграна. Расспрашивая о подробностях, рассказчик замечает, что Легран воспринимает эту находку как счастливое предзнаменование — его не покидает мысль о внезапном и скором богатстве. Негр Юпитер беспокоится, не заболел ли хозяин — Легран все время что-то считает и надолго исчезает из дома.

Через какое-то время Рассказчик получает от Леграна записку с просьбой посетить его по некоему важному делу. Лихорадочный тон записки заставляет Рассказчика поторопиться, и он в тот же день оказывается у друга. Легран ожидает его с видимым нетерпением и предлагает всем тут же отправиться в путь — на материк, в горы — в конце экспедиции они поймут, что он имеет в виду.

Через несколько часов компания добирается до дерева, которое и искал Легран. Он заставляет лезть негра на дерево, то и дело направляя его. Юпитер находит прибитый к суку череп и получает указание пропустить золотого жука на шнуре через левую глазницу. Забив колышек туда, где опустился жук, Легран измеряет расстояние и все начинают копать. Через некоторое время оказывается, что негр перепутал глазницы и их усилия оказались напрасными. Легран перемеряет все заново и они возобновляют раскопки.

Они трудятся уже часа полтора, когда их прерывает отчаянный лай ньюфаундленда. Собака рвется в яму и находит два скелета. Спустя пару мгновений компаньоны обнаруживают и сундук, в котором находится настоящее сокровище — груды золота и драгоценных камней. Преодолев с трудом обратный путь, наконец, видя, что друг сгорает от любопытства, Легран рассказывает, что привело его к находке и разгадке шифра, позволившего найти сокровища.

Решение криптограммы

В рассказе подробно описан криптографический метод решения простого шифра подстановки. Текст криптограммы состоял из 203 символов:

5 3 ‡ ‡ ‡ 3 0 5)) 6 *; 4 8 2 6) 4 ‡.) 4 ‡); 8 0 6 *; 4 8 † 8 ¶
6 0)) 8 5; 1 ‡ (: ‡ * 8 † 8 3 (8 8) 5 * †; 4 6 (: 8 8 * 9 6 *
?; 8) * ‡ (: 4 8 5); 5 * † 2 : * ‡ (: 4 9 5 6 * 2 (5 * — 4) 8 ¶
8 *; 4 0 6 9 2 8 5);) 6 † 8) 4 ‡ ‡; 1 (‡ 9; 4 8 0 8 1; 8 : 8 ‡
1; 4 8 † 8 5; 4) 4 8 5 † 5 2 8 8 0 6 * 8 1 (‡ 9; 4 8; (8 8; 4 (

‡?34;48)4‡;161;:188;‡?;

Уильям Легран пытается решить закодированную запись пирата Кидда, легенда о котором витает в округе.

Легран предполагает, что Кидд не сумел бы составить истинно сложную криптограмму. Значит, перед ним был примитивный шифр, но притом такой, что для обычной фантазии моряка он показался бы совершенно непостижимым. Первым шагом идет определение языка, на котором пишется код. Внизу пергамента Легран обнаруживает рисунок козленка и решает, что это и есть подпись пирата (в английском языке «kid» — козленок, «Kidd» — имя пирата). Значит, скорее всего, зашифрованный текст — английский.

Послание было написано компактно, без пробелов, Легран проводит частотный анализ текста (табл. Б.1, рис. Б.1).

Таблица Б.1

Символ	8	;	4	‡	)	*	5	6	(	1	†	0	9	2	:	3	?	¶	—	.
Упоминаний в тексте	33	26	19	16	16	13	12	11	10	8	8	6	5	5	4	4	3	2	1	1

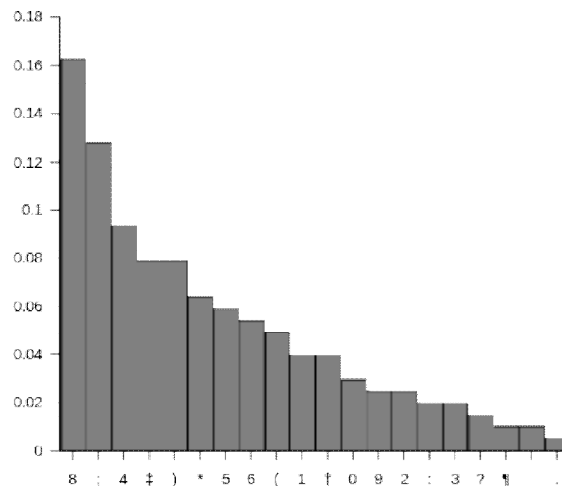


Рис. Б.1 — Относительная частота букв в шифре
В английском письме самая частая буква — е (рис. Б.2).

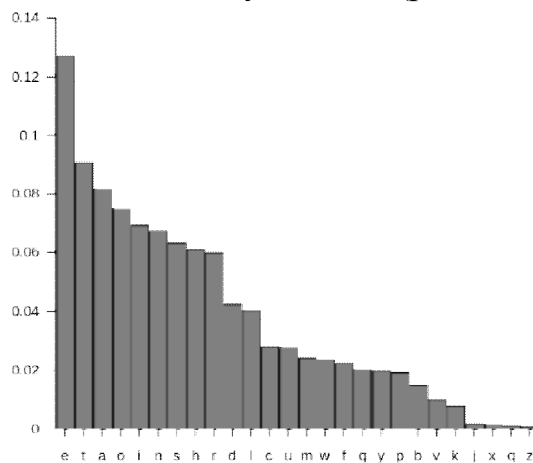


Рис. Б.2 — Относительная частота букв в английском языке

Поскольку знак 8 встречается в криптограмме чаще других, Легран принимает его за букву e английского алфавита.

Для проверки своей гипотезы он проверяет, встречается ли этот знак дважды подряд, потому что в английском, буква e очень часто удваивается, например в словах meet или fleet, speed или seed, seen, been, agree и так далее. Хотя криптограмма невелика, последовательность 88 встречается в нём 5 раз, что косвенно подтверждает выбранную гипотезу.

Следующим шагом в расшифровке было использование факта, что самое частое слово в английском — определенный артикль **the**. Легран проверяет, не повторяется ли сочетание из трех знаков, расположенных в той же последовательности, и оканчивающееся знаком 8. Если такое найдется, это будет, по всей вероятности, определенный артикль. Он находит 7 раз сочетание из трех знаков ;48, что позволяет ему предположить, что знак ; — это буква t, а 4 — h. Вместе с тем подтверждается, что 8 действительно e.

Расшифровка целого слова позволяет найти границы других слов. Для примера Легран берет предпоследнее из сочетаний рода ;48. Идущий сразу за 8 знак ; будет, очевидно, начальной буквой нового слова. Выписывая, начиная с него, шесть знаков подряд, можно обнаружить, что только один из них пока незнаком. Обозначая теперь знаки буквами и оставляя свободное место для неизвестного знака:

t.eeth

Ни одно слово, начинающееся на t и состоящее из шести букв, не имеет в английском языке окончания th, в этом легко убедиться, подставляя на свободное место все буквы по очереди. Потому отбрасывая две последние буквы как посторонние, получаем:

t.ee

Легран полагает пропущенной букву r, которая в шифре представлена знаком (. И теперь появляется возможность прочесть два слова подряд:

the tree

Далее Легран обнаруживает уже знакомое сочетание ;48. Принимая его опять за границу нового слова и выписывая целый отрывок, начиная с двух расшифрованных слов, Легран получает такую запись:

the tree thr...h the

У Леграна не остается сомнения, что неясное слово — through (через). Это открытие дает ещё три буквы — o, u и g, обозначенные в криптограмме знаками ‡ ? и 3.

Внимательно вглядываясь в криптограмму, Легран находит вблизи от её начала группу знакомых знаков: 83(88, которая читается так: egree. Это очень напоминает слово degree (градус) без первой буквы. Теперь Легран знает, что буква d обозначена знаком +.

Вслед за словом degree, через четыре знака, встречается такая группа:

th.rtee

Легран быстро догадывается, что перед ним слово thirteen (тринадцать). К известным буквам прибавились i и n, обозначенные в криптограмме знаками 6 и *.

Криптограмма начинается так: 5 3 ‡ ‡ +. Подставляя по-прежнему буквы и точки, Легран получает:

.good

Недостающая буква, конечно, а, и, значит, два первые слова будут читаться так:

A good (хороший)

Чтобы теперь не сбиться, расположим знаки в виде таблицы Б.2.

Таблица Б.2.

Символ	5	†	8	3	4	6	*	‡	(	;	?
Замена	a	d	e	g	h	i	n	o	r	t	u

Применив данный ключ к записке, Легран получил следующее:

agoodg0a))inthe2i)ho.)ho)te0inthede
 ¶i0))eat1ort:onedegree)andthirteen9i
 nute)northea)tand2:north9ain2ran—h)e
 ¶enth0i92ea)t)ide)hoot1ro9the0e1te:eo
 1thedeath)heada2ee0ine1ro9thetreeth
 roughthe)hot1i1t:1eetout

После того, как у Леграна сформировался ключ к десяти главным буквам, остались девять нерасшифрованных (таблица Б.3).

Таблица Б.3.

Нерасшифрованные символы	¶	.	0	9	2	1	:	—	)
--------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Аналогично были распознаны остальные символы, дав конечный ключ к шифру (таблица Б.4)

Таблица Б.4.

Символ	8	;	4	‡	)	*	5	6	(	1	†	0	9	2	:	3	?	¶	—	.
Буква	e	t	h	o	s	n	a	i	r	f	d	l	m	b	y	g	u	v	c	p

Криптограмма пирата оказалась одной из самых простейших. Теперь приведем полный текст получившейся записи. Вот она в расшифрованном виде:

agoodglassinthebishopshostelinthede
 vilsseattwentyonedegreesandthirteenmi
 nutesnortheastandbynorthmainbranchse
 venthlimbeastsideshootfromthelefteyeo
 fthedeathsheadabeelinefromthetreeth
 roughtheshotfiftyfeetout

Разделив последний текст по смыслу на слова, Легран получил окончательную разгадку шифра:

A good glass in the bishop's hostel in the devil's seat twenty-one degrees and thirteen minutes northeast and by north main branch seventh limb east side shoot from the left eye of the death's-head a bee line from the tree through the shot fifty feet out.

Русский перевод (пер. А.Старцева):

«Хорошее стекло в трактире епископа на чёртовом стуле двадцать один градус и тринадцать минут север-северо-восток главный сук седьмая ветвь восточная сторона стреляй из левого глаза мёртвой головы прямая от дерева через выстрел на пятьдесят футов».

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Учебно-методическое пособие

Составитель: Слезкин **Виталий Геннадьевич**

В авторской редакции

Изд. № 223/19. Объем 9,75 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет