

УДК 621.3.011.7

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ СО СХемой БУШЕРО

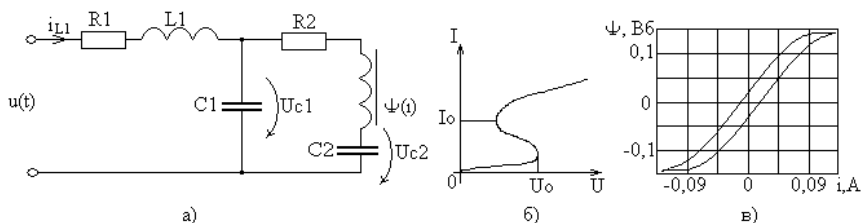


Рисунок 1 - Нелинейный последовательный колебательный контур со схемой Бушера (а) и его вольт-амперные (б) и вебер-амперные характеристики (в)

Канов Л.Н., Соколов В.А.

Исследованы хаотические колебания в нелинейном последовательном контуре, питающемся от источника синусоидального тока, собранного по схеме Бушера. Выявлены закономерности и числовые характеристики колебаний, условия их возникновения и разрушения.

К настоящему времени теоретически изучены, например [1], хаотические процессы в простейших нелинейных цепях второго порядка. Экспериментальное исследование подобных явлений в этих цепях оказалось невозможным из-за крайней трудности возбуждения субгармоник и хаотических колебаний. В то же время хаотические колебания можно сравнительно легко получить экспериментально в нелинейном последовательном колебательном контуре, питающемся от источника синусоидального тока по схеме Бушера (рисунок 1,а). Это объясняется тем, что с помощью схемы Бушера рабочая точка нелинейного контура выводится на неустойчивый падающий участок вольт-амперной характеристики между точками U_0 и I_0 (рисунок 1,б).

Вебер-амперная характеристика $\psi(i)$ нелинейной катушки (рисунок 1,в), аппроксимируется кубической параболой $i = a_1\psi + a_3\psi^3$. Коэффициенты аппроксимации a_1 , a_3 , определенные методом наименьших квадратов, для применяемой катушки составляют $a_1 = 0,126$; $a_3 = 190,5$, сопротивление обмотки нелинейной катушки $R_2 = 5$ Ом. Емкости обоих конденсаторов выбраны по 20 мкФ, а индуктивность линейной катушки определена из соотношения, характерного для схемы Бушера [2]:

$$L_1 = \frac{1}{\omega^2 C_1} = 0,51 \text{ Гн.}$$
 Сопротивление обмотки линейной катушки $R_1 = 15$ Ом. Динамика цепи, включен-

ной на синусоидальное напряжение, описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{du_{C1}}{dt} &= i_{L1} - i(\psi); \\ L_1 \frac{di_{L1}}{dt} &= -i_{L1}R_1 - u_{C1} + u(t); \\ \frac{d\psi}{dt} &= -R_2 i(\psi) + u_{C1} - u_{C2}; \\ C_2 \frac{du_{C2}}{dt} &= i(\psi), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $i(\psi) = a_1\psi + a_3\psi^3$, $u(t) = U_M \sin \omega t$.

На рисунке 2 показаны результаты компьютерного моделирования зависимости напряжения на конденсаторе u_{C2} от амплитуды входного напряжения. Напряжение на конденсаторе фиксировалось через каждый период

входного напряжения $T=0,02$ с. Фиксация начиналась спустя 30 с после включения входного напряжения для исключения влияния переходного процесса и продолжалась в течение 7 с.

Рисунок 2 – Диаграмма зависимости характера колебаний от амплитуды входного напряжения

Из рисунка 2 следует, что при $U_M \in [0, ..., 5]$ В в цепи существуют периодические колебания с частотой питающего напряжения. В диапазоне

$U_M \in [5, 2, ..., 7, 2]$ В возникают хаотические колебания, которым соответствуют полностью затемненные участки графика. Далее до значения $U_M=9,8$ В в цепи существует четвертая субгармоника с периодом $4T$. Диапазон

Рисунок 3 – Фазовая траектория хаотических колебаний при входном напряжении 12 В

$U_M \in [9, 8, ..., 10, 5]$ В характеризуется большим количе-

ством субгармоник, накладывающихся друг на друга. Вплоть до напряжения $U_M = 11,5$ В в цепи доминирует пятая субгармоника с периодом $5T$. Ярко выраженные хаотические колебания возникают при изменении входного напряжения в интервале $U_M \in [11,5, \dots, 13]$ В. С дальнейшим увеличением амплитуды входного напряжения хаотические колебания разрушаются и уступают место периодическим с основной частотой 25 Гц (вторая субгармоника).

На рисунке 3 показана фазовая траектория хаотических колебаний в координатах u_{C2}, i_{C2} , соответствующая амплитуде входного напряжения $U_M = 12$ В. Из рисунка 3 следует, что в фазовом пространстве цепи существует странный аттрактор – область глобально устойчивых, но локально неустойчивых фазовых траекторий. Эти траектории располагаются по поверхности аттрактора, и его сечение представляет одномерную кривую. Таким образом, странный аттрактор имеет вид неправильного пустотелого тора в четырехмерном фазовом пространстве цепи. Подобная закономерность, характерная для систем с высокой степенью диссипации ($R_1 = 15$ Ом), была отмечена и другими исследователями, например [3].

Важнейшими характеристиками динамических систем являются показатели Ляпунова [4], характеризующие разбегание со временем фазовых траекторий, начинающихся в близких точках. Количество этих показателей равно порядку системы (в нашем случае $n=4$). Первый показатель λ_1 определяется интегрированием линеаризованной системы уравнений цепи вдоль траектории исходной нелинейной системы (1). Линеаризованная система для переменных $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2)$$

где матрица A составлена из частных производных правых частей (1) по фазовым координатам $u_{C1}, i_{L1}, \psi, u_{C2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{di}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -R_2 di & -1 \\ 0 & 0 & \frac{di}{C_2} & 0 \end{bmatrix},$$

здесь обозначено $di = a_1 + 3a_3\psi^2$, а $\psi(t)$ – решение нелинейной системы (1). Начальные условия линеаризованной системы (2) устанавливаются нулевыми, кроме $x_1(0) = 1$. Через каждый i -й период $T = 0,02$ с определяется дли-

на вектора решения $d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^4 x_j^2}$. Таким образом, d_i характеризует разбегание

фазовых траекторий линеаризованной системы за время T . При $d_i > 1$ траектории разбегаются, следует ожидать хаотических колебаний, при $d_i < 1$ колебания устойчивые, периодические. Первый показатель Ляпунова рас-

считывается по формуле $\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=1}^m \ln d_i$, где m – число периодов,

по которым исследуются колебания. Хаотическому характеру колебаний соответствует $\lambda_1 > 0$, устойчивым периодическим колебаниям $-\lambda_1 < 0$. Перед очередным i -м просчетом на периоде T уравнений (2) координаты x нормализуются:

$$x_j = \frac{x_j(mT)}{d_i}, \quad j = 1 \dots 4.$$

Каждый последующий j -й показатель Ляпунова также определяется на основе решения линеаризованной системы (2) с нулевыми начальными условиями, причем $x_j(0) = 1$. Второй показатель λ_2 характеризует изменение фазовой площади вдоль траектории системы (1), третий и четвертый – изменение фазового объема с размерностями, соответственно, 3 и 4. Таким образом, для оценки показателей Ляпунова следует одновременно интегрировать систему (1) и четыре системы вида (2) (всего 20 уравнений) в течение длительного времени ($m \rightarrow \infty$).

С помощью показателей Ляпунова оценивается размерность странного аттрактора в четырехмерном фазовом пространстве цепи. Фазовая траектория устойчивого периодического процесса представляет собой кривую и имеет размерность, равную единице. Размерность d_L аттрактора в области

хаотических колебаний оценивается выражением [4]: $d_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$, где

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_4$, а j определяется из условий: $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j + \lambda_{j+1} < 0$.

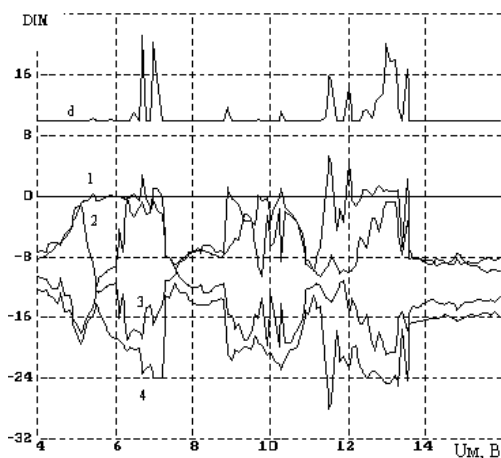


Рисунок 4 – Размерность и показатели Ляпунова

На рисунке 4 показана зависимость показателей Ляпунова и размерности аттрактора от амплитуды входного напряжения; $m = 100$. Во всем диапазоне изменения входного напряжения показатели $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ отрицательны, что говорит о сокращении фазового объема системы (1) с течением времени. Однако при значениях входного напряжения, соответствующим хаотическим колебаниям, первый показатель λ_1 становится положительным, что подтверждается сравнением графиков на рисунках 2 и 4. Так как практически на всем диапазоне входного напряжения $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, то $j=1$, а размерность аттрактора определяется выражением $d_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}$ и в области хаотических колеба-

ний имеет дробное значение, не превосходящее 2. Обращает на себя внимание удивительная симметрия графиков показателей Ляпунова, рисунок 4.

Исследование спектрального состава хаотических колебаний показывает, что помимо гармоник, соответствующей основной частоте 50 Гц, в формировании хаотических колебаний определяющую роль играют гармоники с периодами от $\frac{2}{3}T$ до $\frac{1}{2}T, \frac{1}{4}T$, а также субгармоники с периодами $\frac{3}{2}T$ и $5T$.

После приведенного теоретического анализа было выполнено экспериментальное исследование процессов в нелинейной цепи согласно рисунку 1, а. Опыты подтвердили наличие субгармоник и хаотических колебаний при значениях входного напряжения в области 12 В, хотя и более слабо выраженных. Это можно объяснить тем, что при теоретическом анализе была использована кубическая аппроксимация вебер-амперной характеристики, представляющей петлю гистерезиса, рисунок 1, в. Реальная цепь обладает большей диссипацией и подавляет хаотические колебания.

Библиография

- 1 Зевеке Г.В. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 528 с.
- 2 Френкель А. Теория переменных токов / А. Френкель. — М.: Энергоиздат, 1933. — 474 с.

3 Лоскутов А.Ю. О динамике отображения окружности при параметрическом воздействии / А.Ю. Лоскутов, С.Д. Рыбалко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. —1994. — № 4. — С. 19–27.

4 Былов Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее применение / Б.Ф. Былов. — М.: Наука, 1966. — 514 с.

Поступила в редакцию 14.02.2000 г.