

УДК 621.372.542:+681.325+621.4+551.46 082:534

**В.Ю. Карлусов, канд. техн. наук**

*Севастопольский национальный технический университет,*

*Студгородок, г. Севастополь, АР Крым, Украина, 99053*

*E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua*

## **СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

*Рассматривается подход к построению цифровых фильтров, осуществляющих выполнение однократного или двукратного интегрирования случайного процесса. Для модели с колоколообразной корреляционной функцией выведены аналитические зависимости и получены численные результаты.*

Построение цифрового алгоритма интегрирования является нетривиальной технической задачей. Математическое описание идеального интегрирующего звена первого порядка задается выражением [1]

$$h(p) = p^{-1}, \quad (1)$$

где  $p = j\omega$ ;  $\omega$  – круговая частота. Квадрат модуля амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) звена (1) определяется как

$$\left| \tilde{h}(\omega) \right|^2 = \omega^{-2}. \quad (2)$$

Вид выражений (1), (2) свидетельствует, что нарушается требование конечности, предъявляемое к аппаратной (весовой) функции физически реализуемых обрабатывающих систем. В то же время, осуществлять процедуру интегрирования при помощи цифрового фильтра (ЦФ) представляется актуальным [2].

Для интегратора любого порядка необходимо избавиться от постоянной составляющей входного процесса, т.е. обеспечить отсутствие усиления на нулевой частоте. Обычно это условие реализуется предварительной высокочастотной фильтрацией. Высокочастотный цифровой или аналоговый фильтры, её реализующие, вносят нежелательные искажения. Таким образом, необходимо обеспечить физическую реализуемость интегратора и учесть особенности поведения его АЧХ в области инфранизких частот. Поэтому особенно эффективными являются подходы, основанные на коррекции АЧХ интегратора в соответствии со спектральными характеристиками обрабатываемого процесса [3].

Одним из возможных подходов, применимых к решению задачи построения интеграторов вообще и двойного интегратора в частности, является процедура синтеза, изложенная в [4].

При этом дискретную импульсную характеристику (коэффициенты) НЦФ получают путём решением системы линейных уравнений порядка  $N$ , который определяется числом коэффициентов

$$R = A_0 \times W, \quad (3)$$

где  $R$  – квадратная матрица, элементы которой являются отсчетами автокорреляционной функции обрабатываемого процесса

$$r_{n,k} = B[(n-k)T_0]; \quad (4)$$

$A_0$  – искомый вектор коэффициентов НЦФ, а элементы столбца свободных членов  $\{w_k\}$  могут быть рассчитаны во временной или частотной областях по формуле

$$w_n = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau - nT_0)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \tilde{h}^*(\omega) \exp(-j\omega nT_0)d\omega. \quad (5)$$

В (4), (5) обозначено:  $T_0$  – шаг дискретизации обрабатываемого процесса;  $S(\omega)$  – его спектральная плотность, связанная с корреляционной функцией  $B(\tau)$  парой преобразований Хинчина-Винера;  $\tilde{h}^*(\omega)$  – комплексно-сопряженная  $\tilde{h}(\omega)$  АЧХ устройства, которая определяет характер обработки.

Для оценки среднеквадратической погрешности обработки процесса НЦФ с коэффициентами, полученными при решении (3), и произвольно рассчитанным НЦФ, используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min}^2 &= \sigma_y^2 - W^T A_0, \\ \varepsilon^2 &= \sigma_y^2 - 2W^T A + A^T R A, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau_1 - \tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left| \tilde{h}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (7)$$

– дисперсия процесса на выходе "желаемого" устройства;  $A$  – вектор коэффициентов произвольно рассчитанного (неоптимального) фильтра.

Таким образом, на основании (3)-(7) представляется возможным выполнить аналитические преобразования и расчеты, задавшись моделями обработки и обрабатываемой информации. В качестве базовой модели случайного процесса выберем процесс, описываемый так называемой колоколообразной корреляционной функцией:

$$B(\tau) = \sigma^2 \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \left( \frac{\tau}{\tau_x} \right)^2 \right\} \quad (8)$$

со спектральной плотностью мощности

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2 \tau_x}{2} \exp\left\{-\frac{1}{\pi} (\omega \tau_x)^2\right\}, \quad (9)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия процесса;  $\tau_x$  – его характерный временной масштаб. Выбор процесса (8) объясняется тем, что данный процесс является дифференцируемым бесчисленное множество раз, а вид модели удобен для выполнения аналитических преобразований и моделирования.

Известно, что при дифференцировании порядка  $n$  процесса во временной области существует следующая связь корреляционных функций и спектров мощностей исходных и полученных процессов:

$$B_n(\tau) = (-1)^n B^{(2n)}(\tau), \quad (10)$$

$$S_n(\omega) = \omega^{2n} S(\omega). \quad (11)$$

Подставляя (8) в (10), получаем следующие выражения для однократно дифференцированного процесса

$$B_1(\beta) \frac{2\tau_x}{\pi^2 \sigma^2} = \exp\left\{-\frac{\pi}{4} (n\beta)^2\right\} \left[1 - \frac{\pi}{2} (n\beta)^2\right] \quad (12)$$

и для двукратно дифференцированного процесса

$$B_2(\beta) \frac{4\tau_x^4}{\pi^2 \sigma^2} = \exp\left\{-\frac{\pi}{4} (n\beta)^2\right\} \left[\left[\frac{\pi}{2} (n\beta)^2 - 3\right]^2 - 6\right], \quad (13)$$

где  $\beta = T_0/\tau_x$ .

Компоненты векторов свободных членов получим подстановкой (9) в (11), используя интегралы во временной либо частотной областях (5), при учете (1) и (2). Для случая восстановления исходного процесса путем двукратного интегрирования его второй производной имеем

$$w_n(\beta) \frac{4\tau_x^2}{\pi \sigma^2} = \exp\left\{-\frac{\pi}{4} (n\beta)^2\right\} [2 - \pi (n\beta)^2]. \quad (14)$$

При восстановлении первой производной процесса путём однократно-го интегрирования его второй производной получим

$$w_n(\beta) \frac{2\tau_x^2}{\pi \sigma^2} = \exp\left\{-\frac{\pi}{4} (n\beta)^2\right\} \left[\frac{\pi}{2} (n\beta)^2 - 1\right], \quad (15)$$

а при интегрировании первой производной для восстановления процесса –

$$w_n = -\exp\left\{-\frac{\pi}{4} (n\beta)^2\right\}. \quad (16)$$

В результате можно построить три типа интеграторов, ориентированных на разные постановки задачи интегрирования.

Формулы (13) и (14) при подстановке в (3) позволяют рассчитать коэффициенты интегратора второго порядка, полностью восстанавливающего исходный процесс по его второй производной.

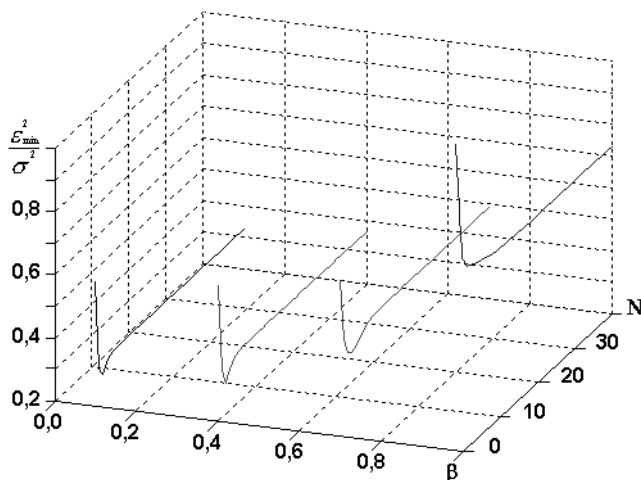


Рисунок 1 – Погрешности восстановления процессов

Формулы (13), (15), (3) определяют коэффициенты интегратора первого порядка, на вход которого поступают отсчеты второй производной процесса, а на выходе получаются отсчеты первой производной.

Формулы (12), (16), (3) описывают процедуру синтеза интегратора первого порядка, преобразующего отсчеты первой производной в отсчеты исходного процесса.

Результаты исследований фильтров, осуществляющих интегрирование, изображены на рисунках 1–3. Приведенные зависимости нормированных минимальных среднеквадратических погрешностей (6) соответствуют цифровому оптимальному интегратору, осуществляющему восстановление процесса по его второй производной. При расчёте  $R$  и  $W$  в (6) определялись (13) и (14) соответственно, а число коэффициентов  $N$  и параметр  $\beta$  варьировались. Для других типов интегрирования поведение кривых идентично. Поведение среднеквадратической погрешности можно интерпретировать следующим образом.

1. При малых значениях отношения шага дискретизации к характерному масштабу процесса  $\beta$ , точность восстановления возрастает до величины систематической погрешности, определяемой выбором способа интегрирования по методу прямоугольников, на что указывает уменьшение величины  $\varepsilon^2/\sigma^2$  на рисунках 1 и 3.

2. Существует конечное число коэффициентов  $N$ , определяемое в каждом конкретном случае значением  $\beta$ , начиная с которого уменьшения погрешности восстановления не происходит. Это следует из анализа поведения проекций линий  $\varepsilon^2/\sigma^2$  на плоскость  $N0\beta$ , представленных на рисунке 2.

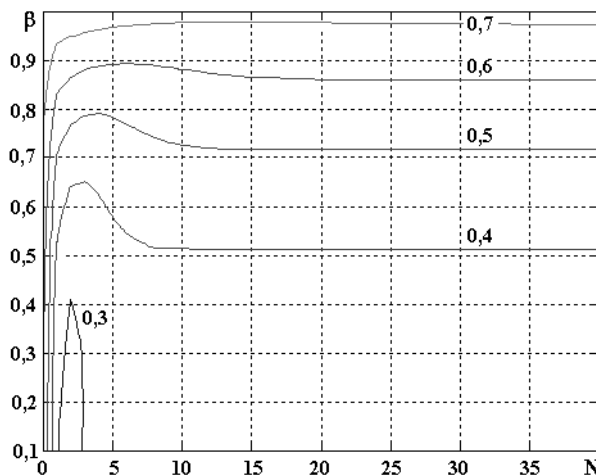


Рисунок 2 – Линии равного уровня погрешности восстановления  $\epsilon^2/\sigma^2$

Величины минимальных погрешностей обработки  $\epsilon^2/\sigma^2$  нанесены на кривые.

3. Существует оптимальное значение шага дискретизации  $T_0$ , определяемое  $\beta$ , которому для заданных числе коэффициентов цифрового фильтра и фиксированном временном масштабе обрабатываемого процесса соответствует минимальная ошибка. Прогнозируемый оптимум будет являться следствием компромисса между требованиями теоремы Котельникова к шагу дискретизации, с одной стороны, и необходимостью выполнения операции интегрирования на значительном временном интервале, с другой. На рисунке 3 представлена зависимость, полученная для семейства цифровых интегрирующих фильтров 39-го порядка, осуществляющих восстановление процесса по его второй производной. Все крайние точки линий  $\epsilon^2/\sigma^2$ , показанных на рисунке 1 при  $N=40$ , принадлежат этой кривой.

По результатам исследований можно сделать следующие выводы.

1. Решена оптимизационная задача синтеза ЦФ, осуществляющая интегрирование временного ряда, принадлежащего классу случайных процессов, описываемых колоколообразной корреляционной функцией.

2. На точность интегрирования синтезируемыми фильтрами наибольшее влияние оказывает правильный выбор частоты дискретизации, а не числа коэффициентов.

3. Один и тот же ЦФ, построенный с использованием вышеизложенного подхода, одинаково пригоден для обработки множества процессов, характеризующихся одним и тем же значением параметра  $\beta$ .

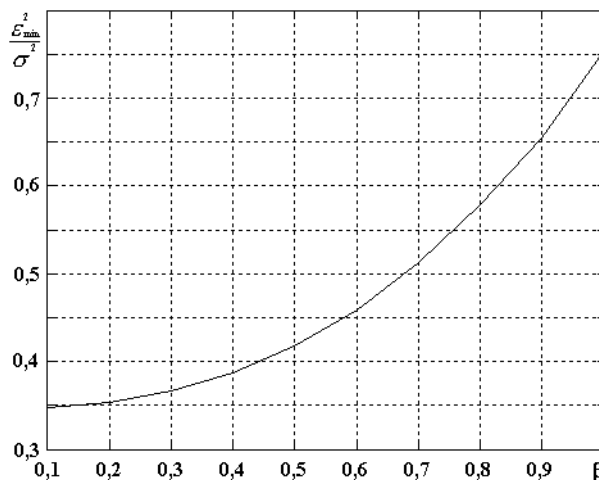


Рисунок 3 – Зависимость погрешности восстановления процесса от шага его дискретизации

Полученные результаты могут найти приложение при проектировании и разработке информационно-измерительных систем, основанных на обработке сигналов акселерометрических датчиков. Дальнейшие исследования целесообразно проводить в направлении разработки процедур цифрового многомерного интегрирования полей и процессов, описываемых корреляционными функциями сложного вида.

#### **Библиографический список**

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. — М.: Наука, 1972. — 767 с.
2. А.с. 1113811 СССР, МКИ G01 D1/04. Интегрирующее устройство / В.Н. Бондарев, О.Н. Соломаха, А.А. Ключарёв. — № 3360585/25 – 08; Заявлено 03.04.82; — Оpubл. 30.05.84. — Бюл. № 34. — 2 с.: ил.
3. Ключарёв А.А. Адаптивное устройство экспресс-анализа волнения / А.А. Ключарёв, А.А. Пинкин, О.Н. Соломаха // Методы и модели интенсификации производства: Сб. науч. тр. — К., 1988. — Вып. 1. — С. 82–87.
4. Доценко С.В. Синтез алгоритмов цифровой фильтрации с учетом статистических свойств обрабатываемого процесса / С.В. Доценко, В.Ю. Карлузов. // Автометрия. — 1990. — № 2. — С. 81–85.

*Поступила в редакцию 6.02.2004 г.*