

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кафедра информатики и управления в технических системах

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания
к проведению лабораторного практикума
по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика"
для студентов направления подготовки
27.03.04 – Управление в технических системах



Севастополь
СевГУ
2020

УДК 681.5.012:004.942(076.5)
ББК 32.965.4
Р47

Рецензент:

В.А. Карапетьян – доцент кафедры "Информатика и управление в технических системах", канд. техн. наук, доцент

Составитель: Б.А. Скороход

Р47 Решение задач по теории вероятностей : методические указания к проведению лабораторного практикума по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика " для студентов направления подготовки 27.03.04 – "Управление в технических системах" / Сост. Б.А. Скороход ; Министерство науки и высшего образования РФ, Севастопольский государственный университет, Институт информационных технологий и управления в технических системах, кафедра информатики и управления в технических системах. – Севастополь : СевГУ, 2020. – 20 с. – Текст : электронный.

В методических указаниях приводится описание практических занятий, целью которых является решение задач по теории вероятностей и математической статистике.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения направления подготовки 27.03.04 – "Управление в технических системах".

УДК 681.5.012:004.9 (076.5)
ББК 32.965.4

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 6 от 28 февраля 2020 г.

Рекомендованы к изданию на заседании ученого совета Института информационных технологий и управления в технических системах, протокол № 4 от 3 марта 2020 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1 КОМБИНАТОРИКА И КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.....	4
1.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач.....	4
1.2 Набор типовых задач для решения на занятии.....	5
1.3 Контрольные вопросы.....	6
2 ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ.....	6
2.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач.....	6
2.2 Набор типовых задач для решения на занятии.....	7
2.3 Контрольные вопросы.....	8
3 Независимость событий. Условные вероятности.....	8
3.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач.....	8
3.2 Набор типовых задач для решения на занятии.....	9
3.3 Контрольные вопросы.....	10
4 Формула полной вероятности и формула Байеса.....	10
4.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач.....	10
4.2 Набор типовых задач для решения на занятии.....	11
4.3 Контрольные вопросы.....	13
5 Функции распределения, плотности и числовые характеристики случайных величин.....	13
5.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач.....	13
5.2 Набор типовых задач для решения на занятии.....	14
5.3 Контрольные вопросы.....	15
6 Распределения случайных величин.....	16
6.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач.....	16
6.2 Набор типовых задач для решения на занятии.....	17
6.3 Контрольные вопросы.....	19
Библиографический список.....	20

1 КОМБИНАТОРИКА И КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

1.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач

Многие задачи теории вероятностей требуют подсчета числа вариантов (числа шансов) при которых некоторое событие может наступить. Методы, которые позволяют это сделать называются комбинаторными. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть дано k групп элементов: в первой группе содержится n_1 элементов, во второй - n_2 элементов и т.д. Тогда можно образовать $n = n_1 n_2 \dots n_k$ различных комбинаций, содержащих по одному элементу из каждой группы (теорема о перемножении шансов).

Пример 1. Классификация по многим признакам. Предположим, что люди классифицируются по полу, семейному положению и профессии.

Решение. Если имеется 17 профессий, то всего будет $2 \cdot 2 \cdot 17 = 68$ класса.

Множество называется упорядоченным, если его каждому элементу поставлен в соответствие номер. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются друг от друга, либо своими элементами, либо их порядком. Различные упорядоченные множества с одинаковым количеством элементов n , различающиеся порядком называют перестановками. Число их есть $n!$

Пример 2. Сколькими способами можно упорядочить множество, состоящее из трех элементов.

Решение. Упорядоченные множества имеют вид $\{a, b, c\}, \{b, c, a\}, \{c, b, a\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{c, a, b\}$. Число способов равно $3! = 6$.

Пусть имеется ящик, содержащий n пронумерованных объектов, которые мы без ограничения общности будем полагать шарами. Мы выбираем из этого ящика k шаров. Нас интересует, сколькими способами можно это сделать.

При выборе без возвращения с учетом порядка:

$$A_n^k = n! / (n - k)!$$

- число размещений с учетом порядка.

Пример 3. Сколькими способами из 3 элементов множества $\{a, b, c\}$ можно составить 2-элементное подмножество, характеризующееся как самими элементами, так и их порядком.

Решение. Подмножества имеют вид: $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{b, a\}, \{c, b\}, \{a, c\}$.

При выборе без возвращения, без учета порядка:

$$C_n^k = n! / k!(n - k)!$$

- число сочетаний из n по k .

Пример 4. Сколькими способами из трех элементов множества можно составить множества, содержащие по два элемента.

Решение. Подмножества имеют вид: $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$.

При выборе с возвращением с учетом порядка: $N = n^k$, при выборе с возвращением без учета порядка: $N = C_{n+k-1}^k$.

Ряд задач комбинаторики может быть сведен к следующей. В ящике из n элементов имеется n_1 белых и $n - n_1$ черных. Из ящика без возвращения вынимают k шаров, по одному, случайно. Найти вероятность события, что будет выбрано k_1 белых.

Вероятность этого события (а также любого другого, связанного с комбинаторикой) определяется выражением: $P(A) = m/n$, где m – число благоприятных исходов равно $C_{n_1}^{k_1} C_{n-n_1}^{k-k_1}$, а n – общее число исходов – C_n^k .

1.2 Набор типовых задач для решения на занятии

Задача 1. Из пункта А в пункт В ведут 4 дороги, из В в С – 7, а из С в Д – 2. Сколько существует различных маршрутов из А в Д.

Задача 2. Сколькими способами читатель может выбрать три книги из пяти.

Задача 3. Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги.

Задача 4. Имеется 25 мест. Сколькими способами можно разместить на них 4 учащихся.

Задача 5. Десять кандидатов, 7 от партии А и 3 от В, нужно рассадить в президиуме в один ряд. Предполагая, что кандидаты от одной партии неразличимы. Подсчитать, сколькими различными способами можно разместить всех 10.

Задача 6. В партии из 1000 изделий 10 дефектных. Из партии выбирается для контроля 120 изделий. Найти вероятность того, что среди них будет ровно 4 дефектных.

Задача 7. Некто выбирает наугад 6 клеток Спортлото (6 из 49). Найти вероятность того, что он правильно угадает из числа выбранных 6 номеров 1. Ровно 3; 2. Ровно 4; 4. Ровно 6.

Задача 8. Кодовый замок имеет 10 кнопок, соответствующих цифрам от 0 до 9. Код замка — двузначный, образованный различными числами. Какова вероятность набора правильного кода при выборе кнопок наугад?

Задача 9. В общем числе 10 черных и белых шаров 6 черных. Какова вероятность того, что среди наугад взятых 5 шаров окажется 3 черных?

Задача 10. Пусть в группе из $N = 100$ студентов $M = 20$ — круглые отличники. Внешней комиссией для последующего тестирования отбирается $n = 10$ студентов (выборка без возвращения). Какова вероятность того, что среди отобранных студентов число отличников будет равно $m = 5$?

Задача 11. В ящике, 5 белых и 3 черных шаров. Из ящика вынимают последовательно два шара. Найти вероятность того, что они будут белыми.

Задача 12. На четырех карточках написаны буквы в, л, к и о. Карточки перемешиваются и выкладываются в ряд. Найти вероятность того, что образовавшееся слово будет волк.

Задача 13. Из колоды в 36 карт вынимаются наудачу 3 карты. Найти вероятность того, что все эти 3 карты будут одной масти.

Задача 14. Среди 25 экзаменационных билетов 5 хороших. Два студента берут по одному билету. Найти вероятность, что 1. Один из них взял хороший; 2. Оба взяли хорошие билеты.

1.3 Контрольные вопросы

1. Дать определение множества.
2. Когда упорядоченные множества будут различными?
3. Что называют перестановками, сочетаниями, размещениями и при выполнении каких условий они используются в комбинаторике.

2 ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

2.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач

Пусть производится некоторый опыт со случайными исходами. Рассмотрим множество Ω всех возможных исходов опыта. Будем полагать, что появление каждого исхода исключает появление другого. Каждый элемент ω этого множества будем называть элементарным событием, а все множество Ω пространством элементарных событий: $\Omega = \{\omega: \omega_1, \omega_2, \dots\}, \omega_i \neq \omega_j, i \neq j$.

Пример 1. Однократное подбрасывание монеты: $\Omega = \{\omega: \Gamma, \Pi\}$.

Случайным событием называется любое подмножество пространства элементарных событий. События называются несовместными, если наступление одного из них исключает появление других.

Пусть задано пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega: \omega_1, \dots, \omega_n\}$, причем вероятности появления любого элементарного события одинаковы. Пусть также событие A состоит из m элементарных. Тогда вероятность A определяется по формуле классической вероятности $P(A) = m/n$, где m – число благоприятных исходов равно, а n общее число исходов.

Пример 2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны.

Решение. Всего кубиков $n=1000$. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными сторонами. Поэтому $m = 12 * 8 = 96$, $p = m/n = 0.096$.

2.2 Набор типовых задач для решения на занятии

Задача 1. Совместный опыт состоит в бросании игральной кости на грани, которой нанесены цифры от 1 до 6 и кубика с буквами от А до F. 1) Написать все элементы, входящие в пространство элементарных событий. 2) Пусть К – событие, заключающееся в выпадении на игральной кости четного очка, а на кубике – букв В или С. Найти его вероятность.

Задача 2. Совместный опыт заключается в трехкратном бросании монеты. 1) Перечислите все элементы пространства элементарных событий. 2) Найти вероятность того, что а) решетка выпадет два раза, б) решетка выпадет более одного раза.

Задача 3. Относительно каждой группы событий ответить на вопрос являются ли они в данном опыте несовместными.

1. Опыт – бросание монеты, события – герб и решетка.
2. Опыт – два выстрела по цели, события – ни одного попадания, одно попадания, два попадания,
3. Опыт – бросание двух монет, события – герб на первой, герб на второй.
4. Опыт – передача трех сообщений по радио, события – в первом ошибка, во втором ошибка, в третьем ошибка.

Задача 4. Относительно каждой из групп событий ответить на вопрос, невозможные ли они в данном опыте.

1. Опыт – бросание симметричной монеты, события – герб, цифра.
2. Опыт – бросание неправильной монеты, события – те же.
3. Опыт – выстрел по мишени, события – попадания, промах.

Задача 5. Монета подбрасывается три раза подряд. 1) Построить пространство элементарных событий. 2) Описать событие, состоящее в том, что выпало не менее двух гербов.

Задача 6. Событие В является частным случаем события А. Чему равны их сумма и произведение.

Задача 7. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Записать выражение для события, состоящего в том, что котельная работает.

Задача 8. Определить для опыта с игральной костью вероятности наступления следующих событий: а) выпадение 5, б) числа большего 3, в) четного числа.

Задача 9. Перечислите все возможные исходы и укажите, являются ли они равновероятными для следующих случайных опытов.

1. Рассматривается последняя цифра телефонного номера, взятого наугад из телефонного справочника.
2. Рассматривается сумма двух последних цифр телефонного номера, взятого наугад из справочника.

Задача 10. Укажите, являются ли элементарными перечисленные ниже события.

1. Выпадение суммы очков равной 7 при бросании двух игральных костей.
2. Выпадение двух решеток в опыте с тремя монетами.
3. Вытаскивание туза при случайном выборе карты из колоды.
4. Вытаскивание 6 пик при случайном выборе из колоды.
5. Выпадение суммы очков 2 при бросании пары игральных костей.
6. Выпадение трех решеток при бросании трех монет.

Задача 11. Определите для опыта с бросанием пары игральных костей вероятности следующих событий. 1. Выпадение суммы равной 11. 2. Выпадение суммы меньше 5.

Задача 12. Каждое из четырех несовместных событий может произойти с вероятностями 0.012, 0.01, 0,0064, 0.002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

Задача 13. Определить вероятность того, что при последовательном бросании двух шестигранных кубиков сумма очков будет равна 5.

Задача 14. В урне находится 20 шаров: 6 белых, 4 красных, 8 зеленых и 2 синих. Из урны производится выборка одного шара наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: а) не красным; б) не зеленым; в) не красным и не зеленым.

Задача 15. Поступление каждого из двух сигналов в приемник равновозможно в любой момент промежутка времени T . Найти вероятность того, что приемник будет "забит", что происходит в том случае, когда промежуток времени между моментами поступления обоих сигналов меньше τ .

2.2 Контрольные вопросы

1. Что называют элементарным событием? Пространством элементарных событий?
2. Как определяются классическая, геометрическая, аксиоматическая вероятности?

3 НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

3.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач

Условной вероятностью наступления события A при условии, что B наступило называется величина $P(A) = P(AB)/P(B)$. События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

Пример 1. Рабочий обслуживает два независимо работающих станка. Вероятности того, что станки не потребуют внимания рабочего, равны 0.7, 0.8. Найти вероятность того, что за время отсутствия рабочего ни один станок не потребует его внимания.

Решение. Требуется найти вероятность произведения двух событий, состоящего в том, чтобы оба станка не потребуют внимания рабочего. Поэтому получим $0.7 \cdot 0.8 = 0.56$.

3.2 Набор типовых задач для решения на занятии

Задача 1. Зависимы или независимы: 1) несовместные события, 2) события, образующие полную группу событий, 3) равновозможные события.

Задача 2. Вероятность попадания α -частиц и β -частиц в контрольную зону равна 0.6 и 0.8. Какова вероятность одновременного попадания α - и β -частиц в эту зону.

Задача 3. В цехе имеется 3 однотипных станка. Вероятность того, что каждый станок работает в данный момент, равна 0.8. Какова вероятность события А, состоящего в том, что в данный момент работает хотя бы один станок.

Задача 4. Вероятность попадания каждой из однотипных элементарных частиц в контрольную зону одинакова. Какова эта вероятность, если вероятность попадания частицы хотя бы один раз при трех испытаниях равна 0.973.

Задача 5. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: А – герб на первой монете, D – хотя бы один герб, Е – хотя бы одна цифра, F – герб на второй монете. Определить, зависимы или независимы пары событий: а) А, Е; б) А, F; в) D, Е; г) D, F. Определить условные и безусловные вероятности событий в каждой паре.

Задача 6. Из колоды в 36 карт берут наугад одну. Пусть событие А – извлечение туза, В – извлечение масти пик. Являются, ли эти события статистически независимы? Обосновать ответ.

Задача 7. Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя соответственно с вероятностями 0.3, 0.4, 0.5. Как изменится искомая вероятность, если первый элемент не выходит из строя.

Задача 8. С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово “каре́та”. Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово “раке́та”.

Задача 9. Из ящика, содержащего 4 белых и 3 черных шара, вынимают последовательно два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Задача 10. В ящике 5 белых шаров и 2 черных. Из него вынимаются один за другим два шара. Найти вероятность того, что они будут разных цветов.

Задача 11. Два полупроводниковых диода соединены последовательно. Вероятность короткого замыкания каждого из них составляет 0.05, а обрыва – 0.1. Если считать, что неисправности, возникающие в одном диоде, не влияют на работу другого, то какова вероятность работоспособности цепи.

Задача 12. На стенде независимо друг от друга проходят испытания в определенных условиях 250 приборов. Вероятность отказа в течение одного часа

одинакова для всех приборов и равна 0.004. Найти вероятность того, что в течение часа откажет хотя бы один прибор.

Задача 13. Условием сдачи экзамена является ответ на один из двух вопросов. Студент не знает ответов на 8 вопросов из 40. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен.

Задача 14. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишени равны соответственно 0.7 и 0.8 производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Задача 15. Вероятность того, что в результате четырех независимых опытов событие А произойдет хотя бы один раз равно, половине. Определить вероятность появления события при одном опыте, если она во всех опытах остается неизменной.

Задача 16. В ящике 2 круглых и 3 ромбических детали. Осуществляются две последовательных выборки по одной детали без возвращения. Определить вероятность появления ромбической детали (событие В) при второй выборке, если при первой была извлечена круглая деталь (событие А).

Задача 17. В урне имеется 7 черных и 3 белых шара. Осуществляется поочередное изъятие сначала одного шара, затем — другого (без возвращения). Определить вероятность появления шара одного цвета при условии, что перед ним вытащен шар другого цвета. Определить вероятность появления двух разноцветных шаров.

3.3 Контрольные вопросы

1. Дать определение условной вероятности, статистической независимости двух событий.

4 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

4.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач

Пусть пространство элементарных событий представлено в виде

$$\Omega = H_1 + \dots + H_n,$$

где H_i - попарно несовместные события. Тогда вероятность произвольного события А определяется по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k).$$

Для определения условных вероятностей $P(H_k/A)$ используется формула Байеса

$$P(H_k/A) = P(H_k)P(A/H_k)/P(A).$$

Пример 1. Станок работает в двух режимах: рентабельном (наблюдается в 90 % случаях) и нерентабельном (в 10 %). Вероятность выхода из строя за вре-

мя t в первом случае равна 0.1, во втором – 0.7. Найти вероятность выхода станка из строя за время t .

Решение. Пусть A – событие выхода из строя станка, H_1, H_2 – работа станка в первом и во втором режимах. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0.16.$$

4.2 Набор типовых задач для решения на занятии

Задача 1. По объекту производится (независимо) три одинаковых выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.4, при втором 0.5, при третьем 0.7. Для вывода объекта из строя заведомо достаточно трех попаданий. При двух попаданиях он выходит из строя с вероятностью 0.6, при одном с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов объект будет выведен из строя.

Задача 2. Прибор состоит из двух узлов. Работа каждого узла, безусловно, необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна p_1 , второго – p_2 . Прибор испытывался в течение времени T , в результате чего обнаружено, что он вышел из строя. Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

Задача 3. Производится один выстрел по плоскости, на которой расположены две цели: 1 и 2. Вероятность попадания в цель 1 – p_1 , 2 – p_2 . После выстрела получено сообщение, что попадание в цель 1 не произошло. Какова вероятность того, что произошло попадание в цель 2.

Задача 4. Радиолокационная станция ведет наблюдения за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помехи, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью p_0 , если применяет – с вероятностью $p_1 < p_0$. Вероятность того, что за время цикла будут применяться помехи равна p и не зависит от того, как и когда применялись помехи в остальных циклах. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора.

Задача 5. Изготовитель электронного оборудования закупил партии в 1000, 2000, 3000 интегральных схем у поставщиков А, В, С, соответственно. При проведении входного контроля выяснилось, что условные вероятности отказов этих схем во время прогона составили – 0.1, 0.05, 0.08 для каждого поставщика соответственно. Все схемы смешиваются и наугад берут одну из них. Какова вероятность того, что 1. Выбранная схема откажет во время прогона? 1. Отказавшая схема поступила от А.

Задача 6. Кодирование сообщения в цифровой системе связи выполняется путем преобразования их в последовательность двоичных символов 0 и 1. Воздействие шума приводит к тому, что время от времени при приеме происходят ошибки. Пусть вероятность передать 0 составляет 0.4, а 1 – 0.6. Кроме того, пусть вероятность приема 1 при передаче 0 равна 0.08, а вероятность приема 1 при передаче 0 равна 0.05. Найти: 1. Вероятность того, что переданный сигнал

будет принят правильно. 2. Вероятность того, что переданная 1 будет передана правильно. 3. Вероятность ошибки при передаче любого сигнала.

Задача 7. Фирма покупает комплект у трех поставщиков. Вероятность того, что изделие, полученное от А, окажется негодным 0.1, от В – 0.15, от С – 0.5. Определить: 1. Вероятность того, что выбранное случайным образом изделие окажется негодным, 2. Вероятность того, что негодное изделие поступило от В.

Задача 8. При производстве некоторого электронного устройства используются интегральные схемы 4-х типов. Вероятности неисправности этих схем таковы: 0.05 – для схем совпадения И-Не, 0.1 – для триггеров, 0.03 – для счетчиков, 0.12 – для сдвиговых регистров.

1. Записать все элементы декартова произведения пространства элементарных событий.

2. Определить вероятность работоспособности, собранного устройства.

3. В случае неработоспособности собранного устройства определить вероятность того, что она обусловлена неисправностью триггеров.

4. В случае неработоспособности собранного устройства определить вероятность того, что она обусловлена одновременной неисправностью счетчиков и триггеров.

Задача 9. Изделие выпускается двумя заводами. Первый поставляет на рынок 70 % продукции, второй — 30 %. Выпуск стандартных изделий для первого завода составляет 83 %, для второго — 63 %. Проверкой купленного в магазине изделия установлено, что оно стандартное. Какова вероятность приобрести стандартное изделия в описанных условиях? Какова вероятность того, что приобретенное изделие выпущено вторым заводом?

Задача 10. Автозавод осуществляет проверку автомашин на двух стендах. Из каждых 100 машин на первый стенд попадает 55, на второй — 45. Стенды отличаются качеством проверки. Из каждой сотни кондиционных машин на первом стенде признается годными 96, на втором — 98. Определить вероятность признания автомашин соответствующими нормам и вероятность того, что решение о соответствии машины нормам принято после испытания на втором стенде.

Задача 11. Анализом качества микросхем установлено, что 65% из них имеют повышенный уровень качества, остальные соответствуют техническим нормам. При проверке на стенде платы, собранной из высококачественных микросхем, выявлено, что вероятность безотказной работы платы за Т часов составляет 0.98. Надежность плат, собранных из обычных микросхем, характеризуется вероятностью безотказной работы, равной 0.79 за время Т. Какова вероятность того, что проверяемая плата, безотказно отработавшая Т часов, собрана из высококачественных микросхем?

Задача 12. Вуз представил контрольной комиссии 5 групп студентов следующего состава:

1) 2 группы по 8 человек каждая, из которых 2 отличника;

2) 3 группы по 10 человек каждая, из которых 6 отличника.

Задача 13. Для проверки знаний комиссия наугад выбирает одну группу из пяти и из этой группы также наугад выбирается студент. Какова вероятность

события А, состоящего в том, что выбранный студент окажется отличником? Если событие А произошло, каковы вероятности того, что отличник принадлежит к группам первого и второго типов?

4.3 Контрольные вопросы

1. Сформулировать условия применимости формул Байеса и полной вероятности.

5 ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ПЛОТНОСТИ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

5.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач

Функцией распределения случайной величины называется функция, определяемая выражением, $F(x) = \{\omega: \xi(\omega) < x\}$, где x – произвольное действительное число.

Плотностью распределения случайной величины называется функция, определяемая выражением

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P\{\omega: x < \xi(\omega) < x + \delta\} / \delta = F'(x).$$

Вероятность попадания случайной величины на интервал $[a, b]$ равна

$$P\{\omega: a < \xi(\omega) < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Математическим ожиданием случайной величины называется число, определяемое по формуле

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad \text{ - для дискретной случайной величины,}$$

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{ - для непрерывной случайной величины,}$$

где x_i - значения случайной величины, p_i - вероятности, с которыми она принимает эти значения.

Дисперсией случайной величины называется число, определяемое по формуле

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(\xi))^2 p_i \quad \text{ - для дискретной случайной величины,}$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f(x) dx \quad \text{ - для непрерывной случайной величины.}$$

Пример. Пусть $\xi(\omega)$ случайная величина, принимающая два значения 0 и 1 с вероятностями q и p . Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. По определению имеем:

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0 * (1 - p) + 1 * p = p,$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = p - p^2.$$

5.2 Набор типовых задач для решения на занятии

Непрерывные случайные величины

Задача 1. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

Найти вероятность того, что а) $\xi > 0.5$; б) $\xi \leq 0.25$; в) $0.3 < \xi \leq 0.7$.

Задача 2. Плотность распределения с.в. ξ имеет вид

$$f(x) = ku(x)e^{-2x},$$

где $u(t)$ – единичная функция. Определить а) чему равна величина k ; б) $P(\xi > 1)$; в) $P(\xi \leq 0.5)$.

Задача 3. Для с.в. ξ из задачи 1 определить а) среднее, в) средний квадрат, с) дисперсию.

Задача 4. Функция распределения с.в. ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq -1 \\ 0.5 + 0.5x, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что а) $\xi = 1.4$, в) $\xi > 3/4$, с) $-0.5 < \xi \leq 0.5$.

Задача 5. Функция распределения с.в. ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} A\{1 - \exp[-(x-1)]\}, & 1 < x < \infty \\ 0, & -\infty < x \leq 1. \end{cases}$$

1. При каком значении A эта функция может считаться функцией распределения вероятностей. 2. Чему равно $F(2)$. 3. Какова вероятность того, что $2 < \xi < \infty$, $1 < \xi \leq 3$.

Задача 6. 1. Найти плотность распределения с.в. ξ , описанной в задаче 5 и нарисуйте ее график. 2. Используя эту плотность найти вероятность того, что с.в. лежит в пределах от 2 до 3. 3. Найдите вероятность того, что с.в. примет значение меньше 2.

Задача 7. Для с.в. из задачи 6 определить среднее, средний квадрат, дисперсию.

Задача 8. Плотность распределения с.в. имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 < x \leq 6 \\ 0, & x \leq 0, x > 6. \end{cases}$$

Найти для этой с.в. среднее, средний квадрат, дисперсию.

Задача 9. Задана плотность распределения случайной величины: $f(x) = [(0, x < 1); (A/x^2, x \geq 1)]$. Определить:

- 1) коэффициент A ;
- 2) $F(x)$;
- 3) вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(2, 3)$;
- 4) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадет в интервал $(2, 3)$.

Задача 10. Случайная величина X задана следующей плотностью распределения: $f(X) = 2X$ в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(X) = 0$. Найти среднее, дисперсию и асимметрию.

Задача 11. Плотность распределения $f(X) = C(X^2 + 2X)$ случайной величины X задана в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(X) = 0$. Найти: а) параметр C ; б) 1; в) 2; г) 2.

Дискретные случайные величины

Задача 12. Производится 4 удара по футбольным воротам. Вероятность гола при каждом ударе равна 0.3. Считая случайной величиной X число голов, определить ее математическое ожидание, дисперсию и асимметрию.

Рекомендация. Предварительно составить ряд распределения X

Задача 13. Даны значения $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$ дискретной случайной величины. Заданы первые два начальных момента

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^3 (x_i)^k p_i, k = 1, 2, 3$$

этой случайной величины $\gamma_1 = 0.1$; $\gamma_2 = 0.9$. Определить: вероятности p_i значений x_i ($i = 1, 2, 3$) и дисперсию случайной величины.

Задача 14. Дискретная случайная величина X задана распределением вида $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $p_1 = q$; $p_2 = p$. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Задача 14. Дискретная случайная величина X задана распределением, приведенным ниже в таблице. Известно также $m_x = 8$. Определить x_3 и p_3 .

$x_1 = 0.4$	$x_2 = 6$	x_3
$p_1 = 0.5$	$p_2 = 0.3$	p_3

Задача 15. Дискретная случайная величина X принимает два значения: 3 и 5 с вероятностями 0.2 и 0.8 соответственно. Определить начальные и центральные моменты распределения первого и второго порядков.

Задача 16. Автомобиль должен проехать по улице, на котором установлены три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 90 секунд, желтый - 180 секунд, красный - 80 секунд. Найти среднее, дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа остановок автомобиля.

5.3 Контрольные вопросы

1. Какие типы случайных величин вы знаете?
2. Перечислите свойства функции и плотности распределения, математического ожидания и дисперсии.

6 РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.1 Краткие теоретические сведения и примеры решения задач

Приведем наиболее часто встречающиеся законы распределения.

Биномиальное распределение

$$P(\xi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где n – натуральное число, $0 < p < 1, k = 0, 1, \dots, n$.

Пуассоновское распределение

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!,$$

где λ – положительное число.

Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) = 1/(b-a), x \in [a, b], f(x) = 0, x \notin [a, b].$$

Гауссовское распределение:

$$f(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \exp\{-(x-a)^2/(2\sigma^2)\},$$

где a – среднее, σ – среднее квадратичное отклонение.

Вероятность попадания гауссовской случайной величины на интервал $[c, d]$ определяется по формуле

$$P(c < \xi < d) = 1/2[\Phi(\frac{d-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{c-a}{\sigma})],$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt - \text{функция Лапласа.}$$

Экспоненциальное распределение:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), x > 0, \lambda > 0.$$

Пример 1. Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0.001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух элементов за год?

Решение. Считая число отказавших элементов, подчиняющихся закону Пуассона с $\lambda = np = 1000 \cdot 0.001 = 1$, получим

$$P(\xi = 2) = \lambda^2 e^{-\lambda} / 2! = 0.184,$$

$$P(\xi \geq 2) = \sum_{m=2}^{\infty} P_m = 1 - P_0 - P_1 = 0.264.$$

Пример 2. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 100 м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

Решение. Имеем для случайной дальности X :

$$P(|X| < 150) = 1/2[\Phi(\frac{150+50}{100}) - \Phi(\frac{-150+50}{100})] = 0.8186.$$

6.2 Набор типовых задач для решения на занятии

Биномиальное распределение

Задача 1. В скольких партиях с равными по силе противниками выигрыш более вероятен: в 3 из 4 или 5 из 8.

Задача 2. Из одной ЭВМ в другую необходимо передать из 8000 символов. Вероятность ошибки при передаче символа составляет 0.001. 1. Определить вероятность безошибочной передачи файла. 2. Определить вероятность, что в передаваемом файле будет 10 ошибок. 3. Определить, какова должна быть вероятность ошибки при передаче одного символа, чтобы вероятность передаче всего файла без ошибок составляла 0.99.

Задача 3. Предполагается, что в цифровой системе связи появление ошибок при передаче отдельных двоичных сигналов характеризуется статистической независимостью и вероятность ошибки равна 0.062. Определить вероятность того, что при приеме 6 следующих друг за другом символов: 1. Не будет допущено ни одной ошибки. 2. Будет допущена ровно одна ошибка. 3. Будет допущено более одной ошибки. 4. Возникают одна или большее число ошибок.

Задача 4. Пусть вероятность попадания в 10 при одном выстреле равна 0.2. Определить наименьшее число выстрелов, которые надо произвести, чтобы с вероятностью не меньшей 0.9, попасть хотя бы один раз в 10.

Задача 5. Изготовитель радиоэлектронного оборудования закупает 1000 интегральных микросхем, каждая из которых с вероятностью 0.01 может оказаться неисправной. Какова вероятность того, что: 1. Неисправными будут ровно 10 микросхем. 2. Все будут исправны. 3. Из всех неисправной будет лишь одна.

Задача 6. К источнику питания могут подключаться на некоторый промежуток времени в произвольном сочетании любые из пяти нагрузок, каждая из которых рассеивает мощность 10 Вт. При этом каждая из них подключается к источнику лишь на одну четвертую часть всего времени его работы и действует независимо от других. 1. Определить среднюю мощность потребления нагрузками от источника. 2. Определить дисперсию мощности, потребляемую нагрузками от источника. 3. Если источник может обеспечить только 40 Вт, то какова вероятность его перегрузки.

Задача 7. В спутниковой системе используются обычно несколько каналов связи (н-р, для повышения надежности). Предположим, что должно использоваться 6 каналов и нужно, чтобы после пяти лет службы вероятность исправной работы хотя бы одного канала составляла 0.95. Найти 1. Среднее время наработки на отказ для одного канала, позволяющее достичь заданной степени надежности. 2. Сколько нужно каналов, чтобы вероятность того, что после 5 лет эксплуатации хотя бы один из каналов будет работать, равнялась 0.93.

Задача 8. В процессе проверки качества деталей на контроль взято 10 деталей, из которых наугад осуществляется выборка отдельных деталей с возвращением в контрольную группу после проверки. Доля некондиционных деталей

во всей партии равна 0.05. Каковы вероятности обнаружить в контрольной группе:

- 1) некондиционные детали?
- 2) не более 2 некондиционных деталей?
- 3) не менее 2 некондиционных деталей?

Задача 9. Пусть вероятность брака в массовом производстве деталей равна 0.1. Какова вероятность того, что из 400 наугад выбранных деталей 50 окажутся бракованными?

Задача 10. В условиях задачи 10 найти вероятность того, что событие А появится: а) не более, чем 50 раз в $n = 400$ испытаниях; б) не менее 50 и не более 80 раз в n испытаниях.

Пуассоновское распределение

Задача 11. В окрестностях города А среднегодовое число погибших в автокатастрофах за период 1985 - 1991 гг. составило 0.5. В 1992 г. погибло 3 человека. Не указывает ли это на реальный рост катастроф.

Задача 12. При выборе случайных цифр с одинаковой вероятностью может быть взята каждая цифра 0, 1, ..., 9. В выборке объема 3 все 3 отобранные цифры превосходят 6. Можно ли считать это неожиданным событием.

Гауссовское распределение

Задача 13. Построенный на интегральной микросхеме триггер переходит от состояния соответствующему 0 к состоянию 1 каждый раз, когда напряжение на его входе превосходит 2.5 В. Пусть нулевое состояние входного сигнала соответствует напряжению 0.5 В, но к нему добавляется случайный гауссовский шум, дисперсия которого равна 0.2 В^2 . Необходимо определить вероятность того, что из-за превышения входным сигналом уровня 2.5 В произойдет ложное срабатывание триггера в одной операции, в n операциях.

Задача 14 Стрелок стреляет из лука по мишени диаметром 0.6 м, с центром, который совпадает с началом прямоугольной системой координат. Расстояния от него до точек попадания стрел – это с.в. X и Y . Пусть σ разброса по абсциссе и ординате одинаковы и равны 0.076 м. Пусть X и Y распределены по нормальному распределению. Найти среднее разброса, σ , вероятность непопадания в мишень, вероятность попадания в яблоко ($D = 0.05 \text{ м}$). Определить вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отклоняется от своего математического ожидания m не более чем на λ .

Экспоненциальное распределение

Задача 15. В спутниковой системе используются обычно несколько каналов связи (н-р, для повышения надежности). Предположим, что должно использоваться 6 каналов и нужно, чтобы после пяти лет службы вероятность исправной работы хотя бы одного канала составляла 0.95. Найти 1. Среднее время наработки на отказ для одного канала, позволяющее достичь заданной степени надежности. 2. Сколько нужно каналов, чтобы вероятность того, что

после 5 лет эксплуатации хотя бы один из каналов будет работать, равнялась 0.93.

Задача 16. Известно, что средняя продолжительность службы ламп накаливания составляет 700 часов. Две лампы из одной партии одновременно устанавливаются в патроны. Считая, что сроки службы этих двух ламп независимыми с.в., определить вероятность того, что обе лампы перегорят, не проработав 700 часов, одна из ламп перегорит до истечения 700 часов, а другая после этого срока.

6.3 Контрольные вопросы

1. Перечислите известные вам законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин и опишите практические ситуации, когда они могут применяться.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. — М.: Наука, 1988. — 480 с.
2. Трухан, А.А. Теория вероятностей в инженерных приложениях [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А. Трухан, Г.С. Кудряшев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 368 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/56613>.
3. Горлач, Б. А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б. А. Горлач. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 320 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4864>.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — 7-е издание, стереотипное. — Москва: Высшая школа, 2000. — 480 с.: ил. — ISBN 5-06-003464-X.
5. Малугин, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / В. А. Малугин. — Москва: Юрайт, 2018. — 470 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/409566>. — ISBN 978-5-534-05470-5.
6. Буре, В. М. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник / В. М. Буре, Е. М. Парилина. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 416 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/10249>.
7. Сапожников, П. Н. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие. / Сапожников П. Н., Макаров А. А., Радионова М. В. — М.: КУРС: ИНФРА-М, 2016. — 496 с: 60x90 1/16. — (Бакалавриат и магистратура). — Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/548242>. — ISBN 978-5-906818-47-8.

В авторской редакции

Изд. № 137/2020. Объем 1,25 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет"