

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
для студентов очной и очно-заочной
формы обучения

Севастополь
СевГУ
2020

УДК 519.8:004.056(075.8)

ББК 22.18я73

Т33

Р е ц е н з е н т:

Л.В. Третьякова – д. ф.-м. н., профессор кафедры ВМ института ИТиУТС

Составители: Маслова М.А., Шумейко И.П.

Т33 Теория игр и исследование операций в информационной безопасности : учебно-методическое пособие для студентов очной и очно-заочной формы обучения / Сост. М.А. Маслова, И.П. Шумейко; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Севастопольский государственный университет, Институт радиоэлектроники и информационной безопасности. – Севастополь : СевГУ, 2020. – 40 с. – Текст : электронный.

Учебно-методическое пособие содержит теоретический материал, примеры решения задач, методические рекомендации по выполнению расчетно-графической работы, контрольные вопросы для самопроверки и подготовки к зачету для студентов очной и очно-заочной формы обучения.

Данное пособие может быть использовано для самостоятельной подготовки студентов очной и очно-заочной форм обучения по направлению: 10.04.01 «Информационная безопасность», профиль обучения «Организация и технология защиты информации».

УДК 519.8:004.056(075.8)

ББК 22.18я73

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Информационная безопасность» СевГУ, протокол № 8 от 11 марта 2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР	5
1.1 Основные понятия и определения	5
1.2 Матричные игры и понятие седловой точки	7
1.3 Графические методы решения игр	11
2. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ	14
2.1 Понятие среды принятия управленческих решений.....	14
2.2 Методы выбора альтернатив в условиях определенности.....	14
2.3 Методы выбора альтернатив в условиях риска.....	17
2.4 Методы выбора альтернатив в условиях неопределенности.....	20
2.5 Экспертные методы.....	21
3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР	24
3.1 Удачный поиск седловой точки.....	24
3.2 Уменьшение размерности игровой матрицы.....	24
3.3 Графоаналитический метод	26
3.4. Построение эквивалентной задачи линейного программирования.....	28
ЛИТЕРАТУРА	30
БАЗОВЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ	31
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ	33
ПРИЛОЖЕНИЕ А	
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА	34
ПРИЛОЖЕНИЕ В	
ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РГР	37
ПРИЛОЖЕНИЕ С	
КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА	38
1. Система и формы контроля	38
2. Критерии оценки качества знаний студентов.....	39
3. Критерии оценки качества работы расчетно-графической работы	40

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория игр и исследование операций в информационной безопасности» относится к вариативной части дисциплин по выбору студентов математического и естественнонаучного модуля образовательной программы направления 10.04.01 «Информационная безопасность».

Цель преподавания дисциплины «Теория игр и исследование операций в информационной безопасности» является: знакомство студентов с основными элементами теории игр, основными понятиями, определениями и методами решения задач.

Содержание дисциплины входит в необходимый минимум профессиональных знаний выпускников по соответствующим специальностям и направлениям, а также является необходимой основой для выполнения магистерских работ.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен

знать:

- основные понятия и определения теории игр;
- решения игр графическим способом;
- матричные игры;
- методы оценки и выбора альтернатив.

уметь:

- осуществлять методологический анализ процесса решения задач методом оценки и выбора альтернатив;
- проводить анализ полученных данных;
- применять методы выбора альтернатив в условиях неопределенности.

владеть:

- навыками решения задач матричных игр;
- методиками выбора альтернатив в условиях неопределенности;
- методами выбора альтернатив в условиях риска;
- экспертными методами.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

1.1 Основные понятия и определения

Лицу, принимающему решение (ЛПР), приходится принимать решения и в тех случаях, когда на развитие ситуации оказывали влияние и другие участники общественной жизни. В экономике иногда приходится сталкиваться с ситуацией, когда при наличии многих участников эффективность решения зависит от того, какие решения приняли другие участники. Например, доход предприятия от продажи изделия зависит не только от установленной на него цены, но и от количества купленных покупателем изделий. Или, при выборе ассортимента товаров, выпускаемых предприятием, нужно учитывать, какой ассортимент товаров выпускают другие предприятия.

В связи с этим в теории управления существенно возросло значение теории игр, и теория игр проникла в практику принятия управленческих решений. При разработке управленческих решений она применима для принятия оптимальных решений в неопределенных ситуациях.

Уже в момент ее зарождения, которым считают публикацию в 1944 г. монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», можно было предвидеть революцию в процессе разработки управленческих решений благодаря использованию нового подхода.

Теория игр – это область математического анализа, разработанная выдающимся математиком Дж. фон Нейманом. Теория игр возникла вовсе не из желания математически описать развлекательные игры. В гораздо большей степени на ее появление сказалась потребность исследовать математическими методами экономические проблемные ситуации, например:

- конкурентную борьбу на рынке,
- политические (противостояние стран НАТО и Варшавского договора),
- социальные (спрос и предложение на рынке труда) и т.д.

Теория игр предназначена для поиска оптимального управленческого решения на основе математического анализа поведения заинтересованных сторон в конкретной ситуации.

Такие тематические области, как стратегическое поведение, конкуренция, кооперация, риск и неопределенность, являются ключевыми в теории игр и непосредственно связаны с управленческими задачами. Вполне вероятно, что теория игр будет восприниматься как один из эффективных методов разработки управленческих решений.

Играть, конечно, умеет каждый, но играть с максимальным успехом (или минимальным проигрышем), т.е. **играть оптимально** – это искусство, которым владеет далеко не каждый. Здесь следует понимать о каких играх идет речь: игры счастливого случая (такие как «русское лото») и игры с

естественными силами не поддаются анализу с позиций теории игр. Это не означает отсутствие математического аппарата для данных категорий игр (например, игра счастливого случая хорошо описывается теорией вероятности), а лишь говорит о том, что в этих играх отсутствует оптимальное поведение, наилучший образ действия.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других, можно разбить на два типа:

- интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях;
- интересы участников не совпадают.

В этих случаях может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит большой выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются **конфликтными**. Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается область математики - теория игр.

Задачи теории игр относятся к области принятия решений в условиях неопределенности, а их специфика состоит в том, что, как правило, подразумевается неопределенность, возникающая в результате действий двух или более «разумных» противников, способных оптимизировать свое поведение за счет других. Среди типичных примеров такого поведения могут быть названы действия конкурирующих фирм на одном рынке или планирование военных операций.

Одним из основных вопросов в задачах с коллективным выбором решений является вопрос об определении оптимальности, т. е. вопрос, какие решения следует признавать наилучшими в ситуации оптимизации по нескольким критериям, отражающим различные интересы. Многие методы решения проблем теории игр основываются на сведении их к задачам математического программирования.

Особенностью теории игр как научной дисциплины стала употребляемая в ней специфическая терминология. Термин «**игра**» применяется для обозначения совокупности правил и соглашений, которыми руководствуются субъекты, поведение которых мы изучаем. Каждый такой субъект k , где $k \in 1:K$ или игрок, характеризуется наличием индивидуальной системы целевых установок и стратегий $s_1^k, s_2^k, \dots, s_{m_k}^k$, т.е. возможных вариантов действий в игре.

Достаточно распространенный способ математического описания игры основан на задании функций $f_k(s_1^k, s_2^k, \dots, s_{i_k}^k, \dots, s_{i_K}^K)$ i, каждая из которых определяет результат платеж, выигрыш, получаемый k -м игроком в зависимости от набора стратегий $S = (s_1^k, s_2^k, \dots, s_{i_k}^k, \dots, s_{i_K}^K)$, примененного всеми участниками игры. Функции $f_k, k \in 1:K$ также называют **функциями выигрыша**, или **платежными функциями**. В том случае, если для любых S

$$\sum_{k=1}^K f_k(S) = 0. \quad (1.1)$$

Игра называется **игрой с нулевой суммой**. Игру с двумя участниками и нулевой суммой называют **антагонистической** - это игры, в которых выигрыш одного участника равен проигрышу другого. Они в силу относительно простой постановки задачи являются наиболее изученным разделом теории игр, но не исчерпываются ими.

В классификации игровых моделей выделяют игры с **конечными и бесконечными** наборами стратегий у игроков, выделяют игры **по возможным количествам ходов** участников.

Также игры делят на **некооперативные и кооперативные**, т. е. те, в которых функции выигрыша участников зависят от образуемых ими коалиций.

Помимо этого игры можно различать по объему информации, имеющейся у игроков относительно прошлых ходов. В этой связи они делятся на игры с полной и неполной информацией.

1.2 Матричные игры и понятие седловой точки

Рассмотрим более подробно антагонистические игры и их основные свойства.

Удобным способом задания игры двух участников с нулевой суммой является платежная матрица. Отсюда, кстати, происходит еще одно их название — матричные игры.

Каждый элемент платежной матрицы **i, j** а содержит числовое значение выигрыша игрока **I** (проигрыша игрока **II**), если первый применяет стратегию **i**, а второй — стратегию **j**. Термины выигрыш и проигрыш следует понимать в широком смысле, т.к. они могут принимать отрицательные значения и с житейской точки зрения означать противоположное. Нетривиальность задачи, прежде всего, заключается в том, что каждый из игроков делает свой выбор, не зная о выборе другого, что существенно осложняет процесс оптимизации выбираемой стратегии.

Классическим примером антагонистической игры является игра с двумя участниками, загадывающими независимо друг от друга числа. Предполагается, что если их сумма оказывается четной, то выигрыш, равный 1, достается первому игроку, а если нечетной, то второму. Положив, что для обоих игроков загадывание нечетного числа является первой стратегией, а четного — второй, можем записать платежную матрицу данной игры:

$$\begin{array}{c|cc} & \text{н/ч} & \text{ч} \\ \hline \text{н/ч} & 1 & -1 \\ \text{ч} & -1 & 1 \end{array} \quad (1.2)$$

Строки матрицы соответствуют стратегиям игрока **I**, столбцы — стратегиям игрока **II**, а ее элементы — результатам первого игрока. Также из определения игры следует, что элементы данной матрицы, взятые с обратным знаком, соответствуют выигрышам второго игрока.

Более сложная и содержательная платежная матрица может быть получена, если несколько модифицировать игру. Допустим, что оба участника имеют право загадывать числа от 1 до 4, что составляет их соответствующие стратегии. В случае если результат сложения задуманных чисел будет четным, то второй игрок выплачивает первому получившуюся сумму, а если нечетным, то первый — второму. Запишем платежную матрицу для такой игры:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & -7 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (1.3)$$

Некоторая условность и искусственность в постановке проблемы не должны в данном случае нас смущать, так как к подобной форме может быть сведена модель, описывающая, например, соревнование двух фирм за вновь открывшийся рынок сбыта продукции и т. п.

Важнейшим в теории игр является вопрос об оптимальности решения (выбора стратегии) для каждого из игроков. Проанализируем с этой точки зрения некоторую матричную игру, для которой задана платежная матрица $A = \|a_{i,j}\|_{m \times n}$.

При выборе игроком **I** стратегии **i** его гарантированный доход независимо от действий игрока **II** составит $\max_j a_{i,j}$. Поскольку он может выбирать **i** самостоятельно, то целесообразно этот выбор сделать таким, чтобы он при любой стратегии противника максимизировал величину гарантированного дохода, т. е. обеспечивал получение $\max_i (\min_j a_{i,j})$.

Такой принцип выбора стратегии получил название «**принцип максимина**». С другой стороны, аналогичные рассуждения могут быть проведены по поводу действий второго игрока. Его наибольший проигрыш при выборе стратегии **j** составит $\max_i a_{i,j}$ следовательно, ему следует выбирать стратегию так, чтобы минимизировать величину проигрыша при любых действиях соперника, т. е. обеспечить $\min_j (\max_i a_{i,j})$. В этом суть **принципа минимакса**.

Можно доказать справедливость следующего соотношения:

$$\max_i (\min_j a_{i,j}) \leq \min_j (\max_i a_{i,j}) \quad (1.4)$$

Однако очевидный интерес представляет ситуация, при которой значение выигрыша (платежа), получаемого игроком I при выборе им максиминной стратегии, равно платежу (проигрышу) II игрока при минимаксной стратегии

$$\max_i(\min_j a_{i,j}) = \min_j(\max_i a_{i,j}) \quad (1.5)$$

В этом случае говорят, что игра имеет седловую точку. Совпадение значений гарантированных выигрышей игроков при максиминной и минимаксной стратегии означает возможность достижения в игре некоторого оптимального (стабильного, равновесного) состояния, от которого невыгодно отклоняться ни одному из участников. Понятие «оптимальность» здесь означает, что ни один разумный (осторожный) игрок не стремится изменить свою стратегию, так как его противник, в принципе, сможет выбрать такую стратегию, которая даст худший для первого результат. Стратегии i^* и j^* , образующие седловую точку, называются оптимальными, а значение $v = a_{i^*,j^*}$ называют **ценой игры**.

Тройка (i^*, j^*, v) считается **решением матричной игры с седловой точкой**.

Нетрудно заметить, что не всякая игра обладает седловой точкой. В частности, как игра (1), так и игра (2) седловой точки не имеют. Примером игры, имеющей седловую точку, является игра с платежной матрицей (1.6).

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5^* & 17 \\ 8 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

В данной матрице минимальные (гарантированные) выигрыши первого игрока по строкам равны 1, 5 и (-3). Следовательно, его максиминному выбору будет отвечать стратегия 2, гарантирующая выигрыш 5. Для второго игрока максимальные проигрыши по столбцам матрицы составят 8, 10, 5, 17, поэтому имеет смысл остановиться на стратегии 3, при которой он проиграет только 5. Таким образом, вторая стратегия первого игрока и третья стратегия второго образуют седловую точку со значением 5, т.е. для игры с матрицей (1.6) имеет решение (2; 3; 5).

Дальнейшее развитие теории матричных игр основывается на исследовании игры как некоторого повторяющегося процесса. Действительно, вряд ли можно дать содержательные рекомендации по такому вопросу, как следует поступать участникам однократно проводимой игры, не имеющей седловой точки. В случае же ее многократных повторов естественной и плодотворной представляется идея рандомизации выбора стратегий игроками, т. е. внесение в процесс выбора элемента случайности. Действительно, систематическое отклонение, например, игрока I от максиминной стратегии с целью увеличения выигрыша может быть

зафиксировано вторым игроком и наказано. В то же время абсолютно хаотичный выбор стратегий не принесет в среднем наилучшего результата.

Смешанной стратегией игрока I в игре с матрицей $A = \|a_{i,j}\|_{m \times n}$ называется упорядоченный набор действительных чисел $x_i, i \in 1:m$, удовлетворяющих условиям

$$x_i \geq 0, i \in 1:m; \sum_{i=1}^m x_i = 1. \quad (1.7)$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ интерпретируются как вероятности применения игроком I стратегий 1, 2, ..., m, которые, в отличие от смешанных, также называют **чистыми стратегиями**.

Аналогично вводится понятие смешанных стратегий игрока II, которые определяются как набор чисел $y_j, j \in 1:n$, удовлетворяющих условиям:

$$y_j \geq 0, j \in 1:n; \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (1.8)$$

Тогда, если игрок I применяет смешанную стратегию $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ а игрок II смешанную стратегию $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то математическое ожидание выигрыша игрока (проигрыша игрока II) определяется соотношением

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j. \quad (1.9)$$

В дальнейшем через X будем обозначать множество допустимых смешанных стратегий игрока I, определяемое условием (4) а через Y — определяемое условием (5) множество допустимых смешанных стратегий игрока II.

Стратегии $x \in X$ и $y \in Y$ называют **оптимальными смешанными стратегиями**, если для любых $x \in X$ и $y \in Y$ справедливо равенство:

$$F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right] = \min_{y \in Y} \left[\max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right] \quad (1.10)$$

$v = F(x^*, y^*)$ называют **ценой игры**, и если x^* и y^* существуют, то говорят, что **игра имеет решение в смешанных стратегиях** (x^*, y^*, v). Справедлива фундаментальная теорема Дж. Неймана:

Теорема: (основная теорема матричных игр). Любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Значение и нетривиальность этой теоремы обусловлены прежде всего тем, что в общем случае матричные игры в чистых стратегиях решения не имеют.

1.3 Графические методы решения игр

Следует отметить, что применение для решения задач стандартных алгоритмов линейного программирования далеко не всегда является рациональным. Помимо этого существуют иные методы, которые основываются на использовании специфики данных задач. Остановимся на очень простом классическом способе поиска оптимальных смешанных стратегий в матричных играх, где один из участников имеет только две стратегии (это так называемые $2 \times n$ и $m \times 2$ игры).

Для определенности положим, что игрок **I** имеет возможность выбирать между двумя стратегиями с вероятностями x_1 и $x_2 = 1 - x_1$, тогда его ожидаемые выигрыши, соответствующие чистым стратегиям игрока **II**, примут вид

$$a_{1,1} \cdot x_1 + a_{2,1} \cdot (1 - x_1), a_{1,2} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot (1 - x_1), \dots, a_{1,n} \cdot x_1 + a_{2,n} \cdot (1 - x_1) \quad (1.11)$$

или

$$(a_{1,1} - a_{2,1}) \cdot x_1 + a_{2,1}, (a_{1,2} - a_{2,2}) \cdot x_1 + a_{2,2}, \dots, (a_{1,n} - a_{2,n}) \cdot x_1 + a_{2,n} \quad (1.12)$$

т.е. ожидаемые выигрыши могут быть представлены в виде графиков линейных функций, зависящих от переменной (рис. 1.1, где предполагается, что игрок **II** имеет три стратегии).

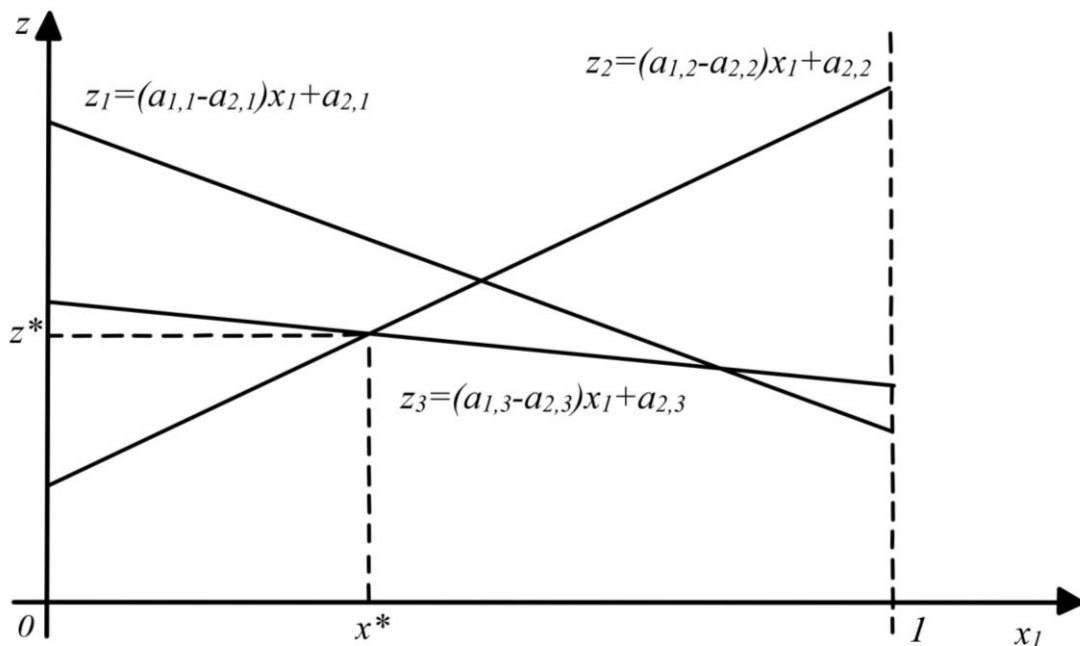


Рисунок 1.1 – Стратегии игрока II

Линии, изображенные на рис. 1.1, задают зависимости среднего выигрыша игрока **I** от значения вероятности, с которой он выбирает свою первую стратегию, для случаев, когда его противник выбирает первую, вторую или третью чистую стратегию. Тогда значениям минимального гарантированного дохода первого игрока соответствует нижняя огибающая всех трех прямых. Согласно принципу максимина, оптимальному выбору игрока **I** будет соответствовать наивысшая точка, лежащая на данной огибающей, отмеченная на рисунке как (x_1^*, z^*) . Зная ее, можно определить оптимальную смешанную стратегию первого игрока:

$$x^* = (x_1^*, 1 - x_2^*) \quad (1.13)$$

и цену игры, равную z^* .

Исходя из отношения двойственности, которым связаны задачи обоих игроков, по оптимальной стратегии первого участника x^* однозначно определяется оптимальная стратегия его противника y^* . Поскольку y^* является результатом решения задачи линейного программирования, то он обладает всеми свойствами допустимого базисного плана, т. е. в случае $2 \times n$ игры имеет не более чем две ненулевых компоненты и не менее чем $(n-2)$ нулевых. Номера ненулевых элементов y^* определяются номерами линий, пересечение которых определило оптимальную стратегию первого игрока. Действительно, игрок **II** знает оптимальную стратегию соперника, и применение им стратегий, соответствующих прямым, проходящим выше точки (x_1^*, z^*) , только увеличило бы его проигрыш.

В рассматриваемом примере это линии z_2 и z_3 , и, следовательно, в своей оптимальной стратегии второй игрок должен с ненулевыми вероятностями применять вторую и третью чистые стратегии ($y_2 > 0, y_3 > 0$). На основе этого, а также учитывая условие нормировки

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1 \quad (1.14)$$

можем выразить: $y_3 = 1 - y_2$, тогда оптимальное значение y_2^* может быть найдено из условия

$$a_{1,1} \cdot x_0 + a_{2,1} \cdot y_2^* + a_{1,3} \cdot (1 - y_2^*) = a_{2,1} \cdot 0 + a_{2,2} \cdot y_2^* + a_{2,3} \cdot (1 - y_2^*) \quad (1.15)$$

или

$$(a_{1,2} - a_{1,3}) \cdot y_2^* + a_{1,3} = (a_{2,2} - a_{2,3}) \cdot y_2^* + a_{2,3} \quad (1.16)$$

В результате получаем оптимальную стратегию игрока **II**:

$$y^* = (0, y_2^*, y_3^*). \quad (1.17)$$

Очевидно, что поиск решения в игре $m \times 2$ осуществляется аналогичным образом с точностью до наоборот: строятся графики ожидаемого проигрыша игрока II, находится их верхняя огибающая и т.д.

Безусловно, графический способ в силу ограниченности круга задач, к которым он может быть применен, имеет скорее теоретическое, чем практическое значение. Однако он хорошо иллюстрирует содержательную сторону процесса поиска решения в игре.

Контрольные вопросы

1. Кратко сформулируйте предмет теории игр как научной дисциплины.
2. Какой смысл вкладывается в понятие «игра»?
3. Для описания каких экономических ситуаций может быть применен аппарат теории игр?
4. Какая игра называется антагонистической?
5. Чем однозначно определяются матричные игры?
6. В чем заключаются принципы максимина и минимакса?
7. При каких условиях можно говорить о том, что игра имеет седловую точку?
8. Приведите примеры игр, которые имеют седловую точку и в которых она отсутствует.
9. Какие подходы существуют к определению оптимальных стратегий?
10. Что называют «ценой игры»?
11. Дайте определение понятию «смешанная стратегия».

2. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

2.1 Понятие среды принятия управленческих решений

Решения в бизнесе обычно требуют выбора между различными стратегиями. Часто такой выбор производится в условиях таких сред, которые лицо, принимающее решения, контролирует слабо или не контролирует вовсе. Используют основной термин «сущность изменения» для обозначения подобных условий. Решения тем самым прямо зависят от знания лицом, принимающим решения, сущности явления и того, как каждая из рассматриваемых стратегий может быть реализована при определенном состоянии этой сущности. Состояния знания лица, принимающего решения, могут быть классифицированы как состояния определенности, риска, неопределенности. Различия между определенностью, риском и неопределенностью отражают различия в степени знания лица, принимающего решения. Если представить состояние его знания как линию спектра, то на одном ее конце будет определенность (полное знание), а на другом – неопределенность (полное отсутствие знания). Риск (частичное знание) будет лежать между ними. Положение на линии спектра будет отражать имеющуюся степень определенности (или неопределенности).

Концепция определенности. Определенность понимается как такое состояние знания, когда лицо, принимающее решение, заранее знает конкретный исход для каждой альтернативы. Иначе говоря, лицо, принимающее решение, обладает исчерпывающим знанием состояния среды и результатов каждого возможного решения.

Концепция риска. Риск определяется как состояние знания, когда известны один или несколько исходов по каждой альтернативе и когда вероятность реализации каждого исхода достоверно известна лицу, принимающему решение. В условиях риска лицо, принимающее решение, обладает неким объективным знанием среды действий и способно объективно прогнозировать вероятную сущность явлений и исход или отдачу по каждой из возможных стратегий.

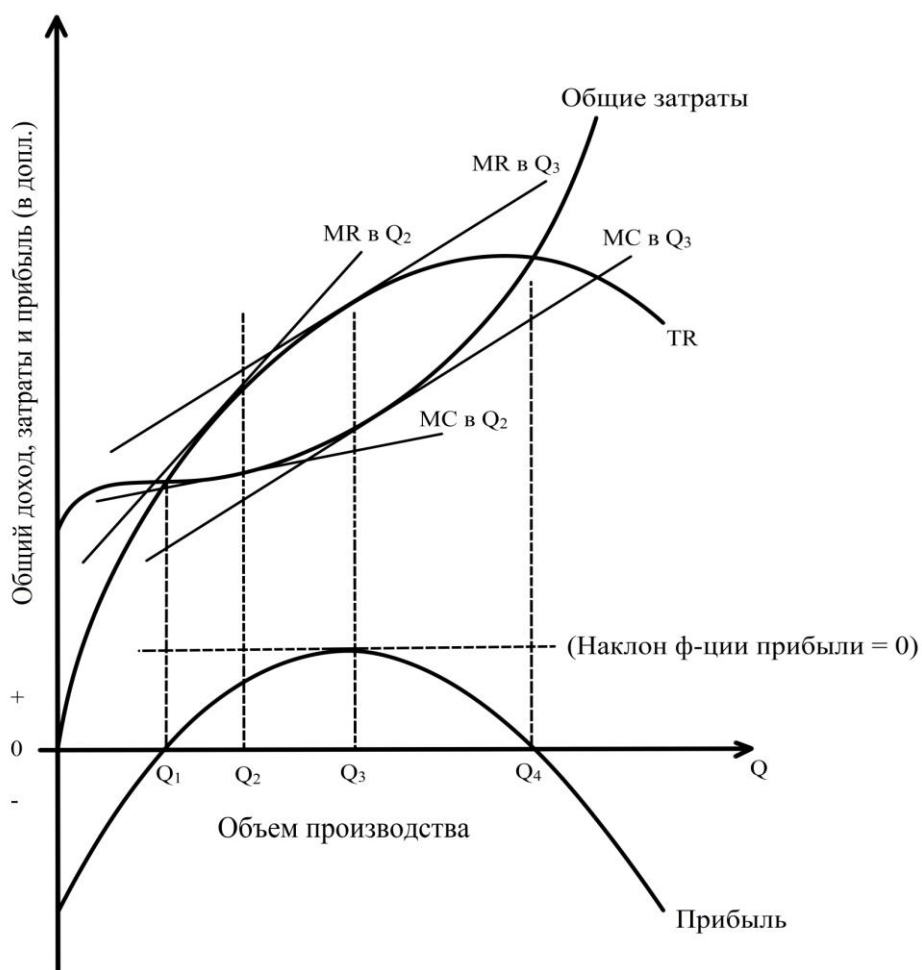
Концепция неопределенности. Неопределенность – это такое состояние знания, когда одна или более альтернатив имеют ряд возможных исходов, вероятность которых либо неизвестна, либо не имеет смысла. Поэтому, в отличие от риска, неопределенность будет субъективным явлением. Неопределенность часто бывает обусловлена быстрыми изменениями структурных переменных и явлений рынка, определяющих экономическую и социальную среду действия фирмы.

2.2 Методы выбора альтернатив в условиях определенности

В условиях определенности лицо, принимающее решение, знает все о возможных состояниях сущности явлений, влияющих на решение, и знает, какое решение будет принято. Лицо, принимающее решение, просто

Три метода оптимизации, используются лицом, принимающим решение:

- Предельный анализ.** В условиях определенности доходы и затраты будут известны для любого уровня производства и продаж. Задача состоит в том, чтобы найти их оптимальное соотношение, позволяющее максимизировать прибыль. Предельный анализ позволяет сделать это. В нем используются концепции предельных затрат и предельного дохода (рис. 2.1). На этом рисунке представлены кривые дохода, затрат и прибыли, типичные для микроэкономической теории.



Предельный доход (MR) определяется как дополнительный доход (изменение общего дохода), получаемый от продажи дополнительной

единицы продукта. Графически он выражается наклоном кривой общего дохода (TR). Предельные затраты (MC) определяются как дополнительные затраты (изменение величины общих затрат) на приобретение или производство дополнительной единицы продукции. Графически они выражаются наклоном кривой общих затрат (TC). Так же обратим внимание на следующее:

1. При уровнях производства Q_1 и Q_4 TR в точности равно TC , так что прибыль равна нулю. Объем производства меньше Q_1 или больше Q_4 ведет к убыткам (т.е. характеризуется отрицательной прибылью).

2. При уровнях производства больше Q_1 или меньше Q_4 – прибыль положительная.

3. Предельный анализ показывает, что до тех пор, пока MR превышает MC , производство и продажа дополнительной единицы продукции будут повышать прибыль. Прибыль, соответственно, максимизируется при том уровне производства, при котором $MR = MC$.

Равенство $MR = MC$ верно при Q_3 . При этом уровне производства, если мы проведем одну касательную для кривой TC , а другую – для кривой MC , то мы увидим, что они будут параллельны, т.е. наклоны обеих кривых будут равны между собой. Это означает, что при уровне производства, равном Q_3 , $MR = MC$. При таком уровне производства наклон функции прибыли, или предельная прибыль (MP), будет равна нулю.

Приростной анализ. Приростной анализ прибыли оперирует с любыми и всеми изменениями в доходах, затратах и прибылях, явившимися следствием определенного решения. Таким образом, концепция приростного анализа охватывает изменения, как самих функций, так и их значений. Основное правило решения состоит в том, чтобы принять любое предложение, повышающее прибыль, или отвергнуть любое предложение, ее уменьшающее.

Линейное программирование. Модели линейного программирования отличаются наглядностью и относительной простотой. Их использование во многих практически важных задачах, связанных с принятием решений, оказалось высокоэффективным, в связи с чем они получили довольно широкое распространение. К числу наиболее известных задач линейного программирования относятся:

- задачи о распределении ограниченных ресурсов (задачи оптимального планирования);
- задачи об оптимальной корзине продуктов (задачи о диете, задачи оптимального смешения);
- задачи оптимального раскроя (материалов, заготовок);
- транспортные задачи;
- задачи о назначениях;
- задачи оптимизации финансовых потоков;
- задачи оптимизации графиков платежей.

Например. Предприятие может выпускать n видов продукции $P_1, P_2, \dots, P_n$, располагая для этого m различными ресурсами $R_1, R_2, \dots, R_m$ в количествах

Требуется так спланировать производственную программу – объемы выпуска каждого вида продукции (в штуках, тоннах и т.п.), чтобы максимизировать доход предприятия. Необходимо найти совокупность значений $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, обращающих в максимум целевую функцию

При условии, что переменные $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ удовлетворяют системе ограничений:

2.3 Методы выбора альтернатив в условиях риска

Таблица 2.1 – Платежная матрица решений

17

$A1, A2, A3$ – альтернативные стратегии действий; $S1, S2, S3$ – состояние экономики (стабильность, спад, рост и др.); $E11; E12; E13; E21; \dots E33; \dots$ – результаты решений.

Числа в ячейках матрицы представляют собой результаты реализации E_{ij} стратегии A_i в условиях S_j . При этом в условиях риска вероятность наступления S_j известна – $w_j(S_j)$.

Методы принятия решений в условиях риска используют теорию выбора, получившую название **теории полезности**. В соответствии с этой теорией ЛПР выбирает A_i из совокупности $\{A_i\}$ ($i = 1 \dots n$), которая максимизирует ожидаемую стоимость его функции полезности E_{ij} .

В условиях риска при принятии решения основным моментом является определение вероятности наступления состояния среды S_j , т.е. степени риска.

После определения вероятности $w_j(S_j)$ наступления состояния среды S_j , определяют ожидаемую стоимость реализации каждой альтернативы, которая представляет собой средневзвешенную стоимость $E(A_i)$:

$$E(A_i) = \sum_j E_{ij} w_j(S_j), \quad (2.3)$$

где $E(A_i)$ – результат реализации A_i ; $w_j(S_j)$ – вероятность наступления S_j .

Оптимальной стратегией является та, которая обеспечивает наибольшую ожидаемую стоимость:

$$E(A_i^*) = \sum_j E_{ij} w_j(S_j) \rightarrow \max_i, \quad (2.4)$$

при $\sum_j w_j(S_j) = 1$.

Дерево решений. Следующий метод, применяемый для принятия решений в условиях риска, носит название дерева решений. Его применяют тогда, когда необходимо принимать последовательный ряд решений. Дерево решений – графический метод, позволяющий увязать точки принятия решения, возможные стратегии A_i , их последствия E_{ij} с возможными факторами, условиями внешней среды. Построение дерева решений начинается с более раннего решения, затем изображаются возможные действия и последствия каждого действия (событие), затем снова принимается решение (выбор направления действия) и т.д., до тех пор, пока все логические последствия результатов не будут исчерпаны. Дерево решений строится с помощью пяти элементов:

1. Момент принятия решения.
2. Точка возникновения события.
3. Связь между решениями и событиями.
4. Вероятность наступления события (сумма вероятностей в каждой точке должна быть равна 1).
5. Ожидаемое значение (последствия) – количественное выражение каждой альтернативы, расположенное в конце ветви. Простейшее решение представляет собой выбор из двух вариантов – «Да» или «Нет» (рис. 2.2).

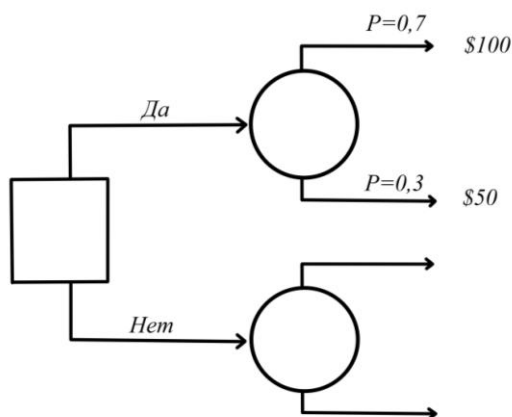


Рисунок 2.2 – Простейшее дерево решений

Пример. Формула Ж. Поля Гетти «Как стать богатым»: «Вставай рано»; «Работай усердно»; «Найдешь нефть!».

Моделирование последовательности решений (рис. 2.3):

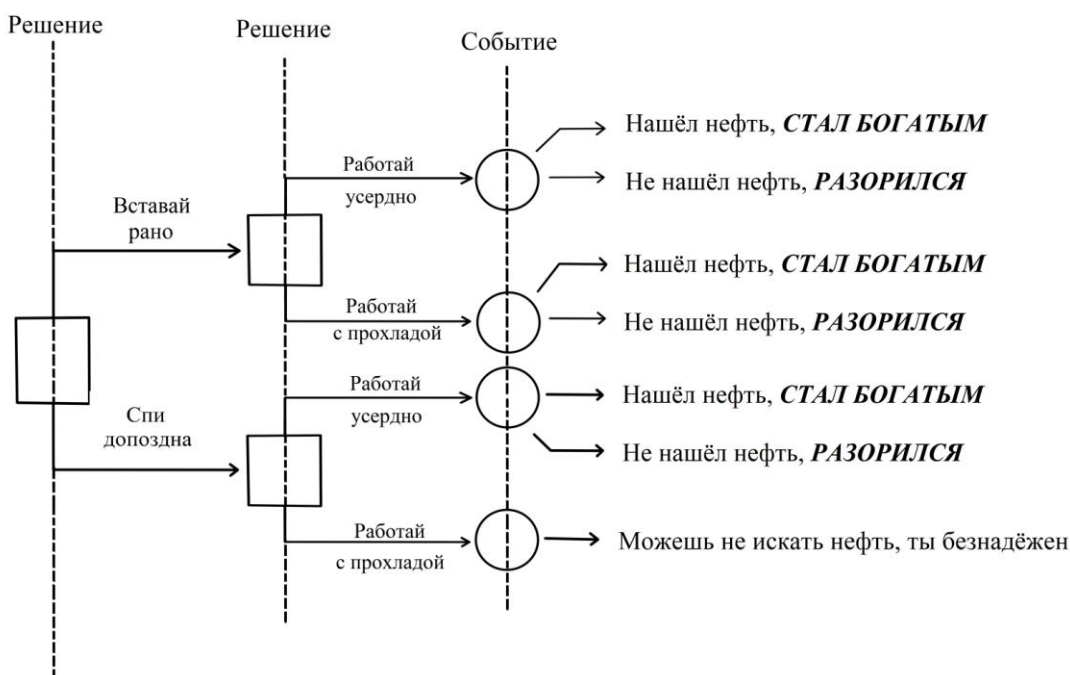


Рисунок 2.3 – Моделирование последовательности решений

1. *Решение*: Нужно сделать выбор между тем, чтобы «Вставать рано» или «Спать допоздна» – простейший выбор.

2. *Решение*: Нужно сделать выбор между тем, чтобы «Работать усердно» или «Спустя рукава» – простейший выбор.

3. *Событие*: «Найдешь нефть», происходит с определенной вероятностью, зависящей от последовательности принимаемых решений.

2.4 Методы выбора альтернатив в условиях неопределенности

Выбор наилучшего решения в условиях неопределенности существенно зависит от того, какова степень этой неопределенности, т.е. от того, какой информацией располагает ЛПР.

Поскольку предположения являются субъективными, постольку должны различаться степени неопределенности со стороны лица, принимающего решение. Практикуются два основных подхода к принятию решения в условиях неопределенности. Лицо, принимающее решение, может использовать имеющуюся у него информацию и свои собственные личные суждения, а также опыт для идентификации и определения субъективных вероятностей возможных внешних условий, а также оценки, вытекающие в результате отдачи, для каждой имеющейся стратегии в каждом внешнем условии. Это, в сущности, делает условия неопределенности аналогичными условиям риска, а процедура принятия решения, обсуждавшаяся ранее для условий риска, выполняется и в этом случае.

Если степень неопределенности слишком высока, то лицо, принимающее решение, предпочитает не делать допущений относительно вероятностей различных внешних условий, т.е. это лицо может или не учитывать вероятности, или рассматривать их как равные, что практически одно и то же. Если применяется данный подход, то для оценки предполагаемых стратегий имеются четыре критерия решения:

- а) критерий решения Вальда, называемый также максимином;
- б) альфа-критерий решения Гурвица;
- в) критерий решений Сэвиджа, называемый также критерием отказа от минимакса;

- г) критерий решений Лапласа, называемый также критерием решения Бэйеса.

Критерий решения Вальда. Критерием Вальда «рассчитывай на худшее» (критерий крайнего пессимизма или максимин) называют критерий, предписывающий обеспечить значение параметра эффекта, равного:

$$\alpha = \max \min a_{ij} \quad (2.5)$$

Этот критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на наихудшие условия и рекомендует выбрать ту стратегию, для которой выигрыш максимален. В других, более благоприятных условиях использование этого критерия приводит к потере эффективности системы или операции.

Альфа-критерий решения Гурвица. Этот критерий рекомендует при выборе решения в условиях неопределенности не руководствоваться ни крайним пессимизмом (всегда «рассчитывай на худшее», $\alpha=0$), ни крайним оптимизмом («все будет наилучшим образом», $\alpha=1$). Рекомендуется некое среднее решение ($0 \leq \alpha \leq 1$). Этот критерий имеет вид

$$H = \max [\alpha \min e_{ij} + (1 - \alpha) \max e_{ij}], \quad (2.6)$$

где α – некий коэффициент, выбираемый экспериментально из интервала между 0 и 1.

Использование этого коэффициента вносит дополнительный субъективизм в принятие решений с использованием критерия Гурвица.

Критерий решения Сэвиджа. Минимаксный критерий Сэвиджа. В соответствии с этим критерием, если требуется в любых условиях избежать большого риска, то оптимальным будет то решение, для которого риск, максимальный при различных вариантах условий, окажется минимальным. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. При его использовании обеспечивается наименьшее значение максимальной величины риска:

$$S = \min \max r_{ij}, \quad (2.7)$$

где r_{ij} где риск r_{ij} определяется выражением:

$$r_{ij} = \beta_j - e_{ij}. \quad (2.8)$$

β – максимально возможный выигрыш.

Критерий Сэвиджа, как и критерий Вальда, – это критерий крайнего пессимизма, но только пессимизм здесь проявляется в том, что минимизируется максимальная потеря в выигрыше, по сравнению с тем, чего можно было бы достичь в данных условиях.

Критерий решения Лапласа. Критерий Лапласа, или Байесов критерий гласит, что если вероятности состояния среды неизвестны, то они должны приниматься как равные.

В этом случае выбирается стратегия, характеризующаяся самой предполагаемой стоимостью при условии равных вероятностей. Критерий Лапласа позволяет условие неопределенности сводить к условиям риска. Критерий Лапласа называют критерием рациональности, и он подходит для стратегических долгосрочных решений, как и все вышеназванные критерии. Кроме вышеназванных четырех критериев, для принятия решений в условиях неопределенности существуют неколичественные методы, такие как приобретение дополнительной информации, хеджирование, гибкое инвестирование и др.

2.5 Экспертные методы

Метод экспертного оценивания относится к инструментарию количественной оценки качества альтернатив в условиях слабоформализуемой проблемной ситуации.

Экспертные оценки – это качественные оценки, основанные на информации неколичественного (качественного) характера, которые могут

быть получены только с помощью специалистов – экспертов. Эксперт – это высококвалифицированный специалист, полагающийся на свои знания, опыт, интуицию и умение оценивать сложные факторы (явления) и способный создать собственную обоснованную (интуитивную) модель анализируемого явления (проблемы), если он располагает необходимой для этого исходной информацией

Сущность метода экспертных оценок заключается в логико-интуитивном анализе внутренней и внешней среды организации, разработке альтернатив и количественной оценке их качества. Обобщенное мнение экспертов служит основанием для осуществления выбора.

Методом экспертного оценивания решаются следующие типовые задачи:

- определение состава возможных событий в какой-либо системе в определенном интервале времени;
- определение вероятностей событий и временных интервалов во множестве событий;
- структурирование проблемного поля организации и определение приоритетности решения проблем;
- дифференциация целей управления до задач и определение приоритетности их решения;
- генерирование альтернатив;
- фильтрация множества альтернатив и оценка их предпочтительности.

Экспертные суждения – содержательные высказывания (определяющие состав, структуру, функциональность исследуемой системы, сущностей и их атрибутов), количественная или качественная оценка какой-либо сущности (т.е. определение количественных и качественных атрибутов и их значений).

Экспертное ранжирование. Ранжирование применяется в случаях, когда невозможна или нецелесообразна непосредственная оценка. При этом ранжирование объектов содержит лишь информацию о том, какой из них более предпочтителен, и не содержит информации о том, насколько или во сколько раз один объект предпочтительнее другого.

Ранг – степень отличия по какому-либо признаку, а **ранжирование** – процесс определения рангов, относительных количественных оценок степеней отличий по качественным признакам. Используются следующие методы ранжирования:

- метод простой ранжировки;
- метод непосредственной оценки;
- метод парных сравнений и др.

Метод простой ранжировки. Заключается в том, что эксперты располагают объекты ранжирования (например, критерии) в порядке убывания их значимости (скажем, для альтернатив это убывание предпочтительности). Ранги обозначаются цифрами от 1 до n , где n –

количество рангов. Сумма рангов S_n при этом будет равна сумме чисел натурального ряда:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.9)$$

Метод непосредственной оценки заключается в отнесении объекта оценки к определенному значению по оценочной шкале (т.е. в присвоении объекту оценки балла в определенном интервале), например, от 0 до 10 – в соответствии с предпочтением по какому-либо признаку или их группе (альтернативы, например, по предпочтению; критерии – по значимости; факторы внешней среды – по оказываемому влиянию; проблемы – по приоритетности решения).

Метод парных сравнений заключается в определении предпочтений элементов, расположенных в левом столбце, над элементами, расположенными в верхней строке. При этом составляется матрица, по строкам и столбцам которой располагают сравниваемые объекты (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Матрица парных сравнений для четырех объектов

	A_1	A_2	A_3	A_4	Ранг
A_1	---	1 ($A_{1,2}$)	0	1	2
A_2	0 ($A_{2,1}$)	---	0	1	1
A_3	1	1	---	1	3
A_4	0	0	0	---	0

В ячейке $A_{1,2}$ вписана единица, это означает, что элемент A_1 получает большую оценку, чем элемент A_2 . Соответственно в ячейке $A_{2,1}$ пишут 0, а в ячейке $A_{1,4}$ вписана 1, и затем, суммируя значения по строкам, получают ранги объектов.

Контрольные вопросы

1. Что такое среда принятия управленческих решений? Чем она определяется?
2. Сущность концепции определенности (среды принятия решения).
3. Сущность концепции риска.
4. Сущность концепции неопределенности.
5. Выбор альтернатив в условиях определенности.
6. Выбор альтернатив в условиях неопределенности.
7. Выбор альтернатив в условиях риска.
8. Сущность экспертных методов.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

3.1 Удачный поиск седловой точки

Задана платёжная матрица Н (табл. 3.1), нумерация стратегий «красного» игрока совпадает с нумерацией строк, «синего» - с нумерацией столбцов.

Таблица 3.1 – Платёжная матрица

	1	2	3	4	5	min
1	5	4	4	6	7	4
2	7	5	5	5	6	5
3	6	4	3	7	8	3
4	6	5	5	9	9	5
5	8	2	4	9	6	2
max	8	5	5	9	9	

Отыщем пару оценок: $V_1 = \max_i \min_j h[i, j]$ - характеризующего стратегию поведения «красного» игрока и $V_2 = \min_j \max_i h[i, j]$ - для «синего» игрока.

Для удобства, припишем к таблице условий столбец, в котором будем помещать в соответствующих строках минимальные значения строк матриц и строку для размещения максимальных значений соответствующих столбцов. Заполним их. $V_1 = V_2 = 5$. Это свидетельствует о наличии, по крайней мере, одной седловой точки.

Элементы матрицы Н, являющиеся седловыми точками, обладают тем свойством, что являются одновременно максимальными в столбце и минимальными в строке. В нашем примере это $h[2,2]$, $h[2,3]$, $h[4,2]$, $h[4,3]$. Все они равноправны. «Красный» должен использовать 2-ю либо 4-ю стратегии, а «синий» - 2-ю либо 3-ю, разницы нет. Игра, таким образом, решена в оптимальных стратегиях. Цена игры - 5.

3.2 Уменьшение размерности игровой матрицы

Имеется матрица игры (табл. 3.2).

Таблица 3.2 – Матрица игры

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	min
A ₁	4	7	2	3	4	2
A ₂	3	5	6	8	9	3
A ₃	4	4	2	2	8	2
A ₄	3	6	1	2	4	1
A ₅	3	5	6	8	9	3
max	4	7	6	8	9	

Исследование платёжной матрицы на седловую точку, проведённое вышеизложенным способом, показало:

- 1) седловая точка отсутствует;
- 2) нижняя граница цены игры $V_1 = 3$ (максимин);
- 3) верхняя граница цены игры $V_2 = 4$ (минимакс);
- 4) цена игры определяется двойным неравенством $3 < V < 4$, игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Строка A_4 доминируется строкой A_1 и, поэтому, может быть исключена из рассмотрения, как содержащая с точки зрения «красного» худшее решение.

Таблица 3.3 – Доминирование строк

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	7	2	3	4
A_2	3	5	6	8	9
A_3	4	4	2	2	8
A_5	3	5	6	8	9

Столбец B_5 доминирует любой из столбцов матрицы, поэтому с позиции «синего» может быть исключён как результат заведомо худшей стратегии.

Таблица 3.4 – Доминирование столбца B_5

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	7	2	3
A_2	3	5	6	8
A_3	4	4	2	2
A_5	3	5	6	8

Стратегия B_2 доминирует стратегию B_1 и, следовательно, исключается как худшая.

Таблица 3.5 – Доминирование стратегии B_1

	B_1	B_3	B_4
A_1	4	2	3
A_2	3	6	8
A_3	4	2	2
A_5	3	6	8

Стратегия A_1 несколько лучше, нежели A_3 , так как A_3 доминируется A_1 .

Таблица 3.6 – Доминирование стратегии A_3

	B_1	B_3	B_4
A_1	4	2	3
A_2	3	6	8
A_5	3	6	8

Стратегия В4 так же исключается из рассмотрения, ибо столбец В4 доминирует В3.

Таблица 3.7 – Доминирование столбца В4

	В₁	В₃
А₁	4	2
А₂	3	6
А₅	3	6

Стратегии А2 и А5 одинаковы. Их можно заменить некой обобщённой стратегией А25. Причём

$$P^*(A_{25}) = P^*(A_2) + P^*(A_5), P^*(A_2) \neq P^*(A_5), \quad (3.1)$$

т.е. в оптимальной стратегии применяется в любой пропорции, но не нарушая это соотношение. Получили матрицу [2 x 2].

Таблица 3.8 – Конечная матрица

	В₁	В₂
А₁	4	2
А₂	3	6

Примечание. Различают строгое доминирование вектора α вектором β одинаковой размерности, когда $\forall i, \alpha[i] < \beta[i]$, и не строгое, когда $\exists i, \alpha[k] = \beta[k]$. Иногда сокращение стратегий при нестрогом доминировании ведёт к их потере и искажению результата решения. Эту задачу можно решить, используя графическую интерпретацию.

3.3 Графоаналитический метод

Данный метод используется, когда хотя бы одно из измерений платёжной матрицы равно 2-м. Графическая часть метода применяется, когда одно из измерений матрицы более 2-х, для определения пары стратегий, формирующих максимин, в игре $2 \times m$, или минимакс в игре $n \times 2$. На единичном отрезке строится семейство прямых $(0, h[2,j] ; 1, h[1,j])$, $j = 1, m$, и визуально определяется точка максимина, совместно с парой чистых стратегий, образующим оптимальную. Либо строится семейство $(0, h[i,2] ; 1, h[i,1])$, $i = 1, n$, на котором устанавливается точка минимакса.

Если платёжная матрица квадратная, то применяют аналитический расчёт минуя графическую часть. В противном случае, к расчётам приступают после графического определения максимина и минимакса.

В качестве примера рассмотрим платёжную матрицу предыдущего пункта, дополнив её, по соображениям иллюстрации графической части, отброшенной стратегией А4.

Таблица 3.9 – Платежная матрица

	B ₁	B ₃
A ₁	4	2
A ₂ (A ₅)	3	6
A ₄	3	1

Из рис. 3.1а видно, что стратегия A₄ не участвует в формировании оптимальной; рис. 3.1б сделан для демонстрационных целей. Расчёты показывают:

$$q_1^* = \frac{6-2}{4+6-2-3} = \frac{4}{5}; \quad q_2^* = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}; \quad P_1^* = \frac{6-3}{5} = \frac{3}{5}; \quad P_2^* = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$V = \frac{4 \cdot 6 - 3 \cdot 2}{5} = \frac{18}{5}$$
(3.2)

Таким образом, оптимальная стратегия “красных” есть $\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$, “синих” - $\left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$, а цена игры - $\frac{18}{5}$.

Графическая часть метода имеет вид (рис. 3.1а - функция проигрыша “синего” игрока при смешанной стратегии; рис 3.1б - функция выигрыша “красного” игрока при смешанной стратегии):

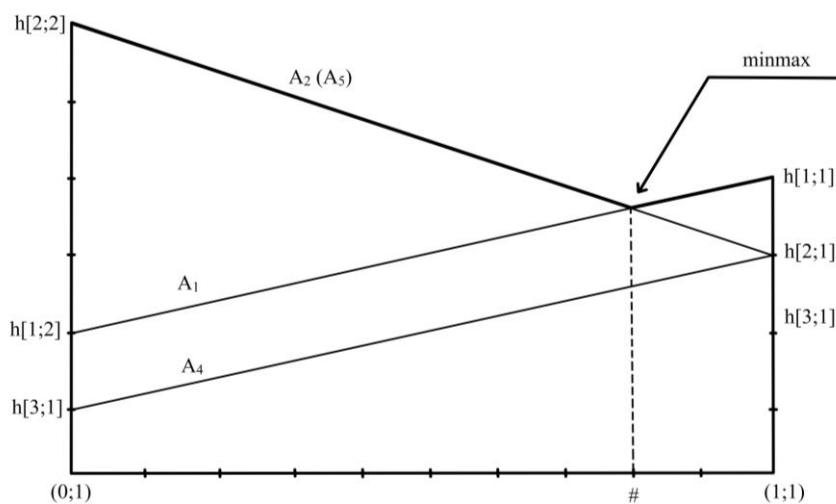


Рисунок 3.1а - Функция проигрыша “синего” игрока при смешанной стратегии

$$Q = \{q_1, 1 - q_1\}$$
(3.3)

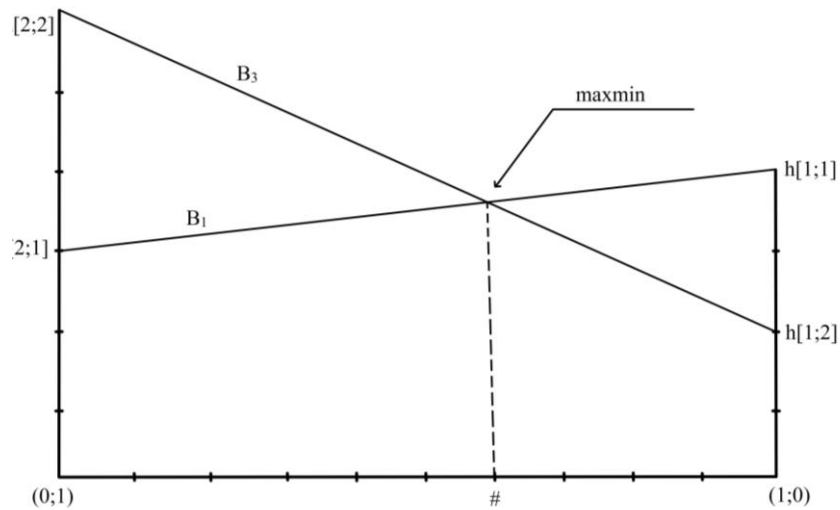


Рисунок 3.1б - Функция выигрыша “красного” игрока при смешанной стратегии

$$P = \{p_1, 1 - p_1\} \quad (3.4)$$

3.4. Построение эквивалентной задачи линейного программирования

На примере матрицы игры, приведённой выше, рассмотрим метод решения игры сведением к задаче линейного программирования. Обозначим:

$$x_i = \frac{1}{p_i}, \quad i = 1, 2; \quad (3.5)$$

$$y_j = \frac{1}{q_j}, \quad j = 1, 2. \quad (3.6)$$

Тогда прямая задача линейного программирования:

1. Целевая функция

$$F \rightarrow \min = x_1 + x_2 \quad (3.7)$$

2. Система ограничений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

при $x_1, x_2 \geq 0$.

Двойственная задача линейного программирования:

$$F \rightarrow \max = y_1 + y_2, \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \leq 1, \\ 3y_1 + 6y_2 \leq 1, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Решаем двойственную задачу симплекс-методом. Получено следующее оптимальное решение (табл. 3.10).

Таблица 3.10 – Оптимальное решение

		С	1	1	0	0
Б	С _б	А ₀	А ₁	А ₂	А ₃	А ₄
А ₁	1	2/9	1	0	1/3	-1/9
А ₂	1	1/18	0	1	-1/6	2/9
	δ	5/18	0	0	1/6	1/9

Получаем: $F = \frac{5}{18}$; цена игры $V = \frac{1}{F} = 3,6$. Вероятности
 $q_1 = y_1 \cdot V = \frac{2}{9} \cdot 3,6 = 0,8$, $q_2 = y_2 \cdot V = \frac{1}{18} \cdot 3,6 = 0,2$.

По двойственной задаче восстанавливаем прямую:

$$x_j = \delta(m + j) \text{ дв.з.} \quad (3.11)$$

$$x_1 = \delta(2 + 1) = \delta 3; \quad x_1 = \frac{1}{6}; \quad p_1 = \frac{1}{6} \cdot 3,6 = 0,6 \quad (3.12)$$

$$x_2 = \delta(2 + 2) = \delta 4; \quad x_2 = \frac{1}{9}; \quad p_2 = \frac{1}{9} \cdot 3,6 = 0,4 \quad (3.13)$$

Ответ : $V = 3,6$; $P_a = (0,6, 0,4)$; $P_b = (0,2, 0,8)$.

Это совпадает с проведённым выше решением графоаналитическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костер, Р. Разработка игр и теория развлечений / Р. Костер ; перевод с английского О.В. Готлиб. — Москва : ДМК Пресс, 2018. — 288 с. — ISBN 978-5-97060-478-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/111430>
2. Рыжков, И.Б. Основы научных исследований и изобретательства : учебное пособие / И.Б. Рыжков. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 224 с. — ISBN 978-5-8114-4207-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/116011>
3. Остроух, А.В. Интеллектуальные информационные системы и технологии : монография / А.В. Остроух, А.Б. Николаев. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 308 с. — ISBN 978-5-8114-3409-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/115518>
4. Кудрявцев, К. Я. Методы оптимизации : учеб. пособие для вузов / К. Я. Кудрявцев, А. М. Прудников. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 140 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-08523-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/442329>
5. Косников, С. Н. Математические методы в экономике : учеб. пособие для вузов / С. Н. Косников. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 170 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04098-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/438041>
6. Колемаев, В. А. Математические методы и модели исследования операций [Электронный ресурс] : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 080116 «Математические методы в экономике» и другим экономическим специальностям / В. А. Колемаев; под ред. В. А. Колемаева. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. - 592 с. - ISBN 978-5-238-01325-1. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/391871>
7. <http://znanium.com> – Электронная библиотечная система «ZNANIUM.COM»
8. <http://www.biblio-online.ru> – Электронная библиотечная система «ЮРАЙТ»
9. <http://e.lanbook.com> – Электронная библиотечная система «Лань»

БАЗОВЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ

1. Кратко сформулируйте предмет теории игр как научной дисциплины.
2. Какой смысл вкладывается в понятие «игра»?
3. Для описания каких экономических ситуаций может быть применен аппарат теории игр?
4. Какая игра называется антагонистической?
5. Чем однозначно определяются матричные игры?
6. В чем заключаются принципы максимина и минимакса?
7. При каких условиях можно говорить о том, что игра имеет седловую точку?
8. Приведите примеры игр, которые имеют седловую точку и в которых она отсутствует.
9. Какие подходы существуют к определению оптимальных стратегий?
10. Что называют «ценой игры»?
11. Дайте определение понятию «смешанная стратегия».
12. Что такое среда принятия управленческих решений? Чем она определяется?
13. Сущность концепции определенности (среды принятия решения).
14. Сущность концепции риска.
15. Сущность концепции неопределенности.
16. Выбор альтернатив в условиях определенности.
17. Выбор альтернатив в условиях неопределенности.
18. Выбор альтернатив в условиях риска.
19. Сущность экспертных методов.
20. Сущность концепции риска.
21. Дайте определение - оптимизационный анализ.
22. Какие три метода оптимизации используются ЛПР?
23. Что такое предельный анализ и предельный доход?
24. Дайте определение линейного программирования.
25. Оптимизационный анализ.
26. Выработка решения в условиях риска.
27. Что такое теория полезности и где ее используют?
28. Что такое дерево решений и с помощью каких элементов происходит его построение?
29. Охарактеризуйте критерий решения Сэвиджа.
30. Охарактеризуйте критерий решения Вальда.
31. Охарактеризуйте критерий решения Лапласа
32. Охарактеризуйте альфа-критерий решения Гурвица.

33. Экспертные оценки. Сущность экспертных оценок.
34. Какие типовые задачи решают с помощью экспертного оценивания?
35. Охарактеризуйте экспертные суждения.
36. Охарактеризуйте метод простой ранжировки.
37. Охарактеризуйте метод непосредственной оценки
38. Охарактеризуйте метод парных сравнений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Предмет теории игр.
2. Парные игры с нулевой суммой. «Принцип минимакса». Решение в чистых стратегиях.
3. Основные теоремы теории игр.
4. Геометрическая интерпретация игр.
5. Порядок сведения парной игры к задаче линейного программирования.
6. Использование альтернативных критериев определения оптимальных стратегий.
7. Равновесие Нэша.
8. Битва полов.
9. Доминирующая стратегия.
10. Дилемма заключенного.
11. Игра в орлянку.
12. Кооперативная/некооперативная игра.
13. Метаигры.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Задание 1. Решение задач теории игр

1. В ходе выполнения решения задачи, студент обязан выполнить следующие шаги.

1.1 Попытаться отыскать седловую точку в платежной матрице. Если попытка удалась, то задача решена в чистых стратегиях, иначе перейти к следующим шагам.

1.2 Попытаться уменьшить, руководствуясь принципом доминирования, одно из измерений платежной матрицы до двух и применить графоаналитический метод.

1.3 В случае неудачи двух первых попыток, необходимо построить эквивалентную задачу линейного программирования.

2. Выбор варианта производится согласно номеру классного журнала и выбирается в табл. А.1

Таблица А.1– Варианты для решения задач по теории игр

№ Варианта	Задание	№ Варианта	Задание	№ Варианта	Задание
1	$\begin{vmatrix} 10 & 9 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & 6 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & 6 \\ 11 & 9 & 8 & 11 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$	5	$\begin{vmatrix} 4 & 12 & 9 & 12 \\ 6 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 & 4 \\ 7 & 10 & 6 & 12 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \\ 12 & 3 & 11 & 2 \\ 9 & 8 & 10 & 6 \end{vmatrix}$

10	$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 7 \\ 8 & 8 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \\ 9 & 11 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 7 & 12 & 9 & 12 \\ 6 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 12 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 9 & 12 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 & 12 \\ 4 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 7 \\ 9 & 11 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 8 & 10 \\ 4 & 12 & 3 & 8 \\ 12 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 11 & 8 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 8 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 12 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 10 \\ 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 & 5 \\ 8 & 8 & 1 & 2 \\ 11 & 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 12 & 12 & 11 & 1 \\ 8 & 10 & 11 & 9 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \\ 8 & 12 \\ 10 & 9 \end{vmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 11 & 6 \\ 12 & 12 & 7 & 11 \\ 12 & 9 & 12 & 8 \\ 9 & 8 & 11 & 7 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 & 2 \\ 4 & 10 & 2 & 8 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 7 \\ 10 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 12 & 5 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 9 & 3 \\ 5 & 1 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 11 & 9 & 8 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 3 & 9 \\ 7 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 12 & 9 \\ 12 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 12 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$
31	$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 6 & 6 \\ 11 & 5 & 12 & 9 \\ 12 & 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$	32	$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 11 & 10 \\ 7 & 8 & 6 & 6 \\ 11 & 5 & 12 & 9 \\ 12 & 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$		

Задание 2. Игры с природой. Найти оптимальные стратегии 1-го игрока (игрок А) исходя из различных критериев в игре с полной неопределенностью относительно второго игрока (игрок В - природа). Данные даны в табл. А.2.

Таблица А.2 – Варианты задания игр с природой

Параметр	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a_{11}	4	4	8	5	4	7	5	8	1	5
a_{12}	2	2	2	7	7	3	2	2	7	4
a_{13}	6	6	2	7	1	2	3	9	6	5
a_{21}	3	3	3	10	6	1	7	8	4	1
a_{22}	6	7	7	4	4	6	6	8	7	6
a_{23}	10	10	6	5	4	3	4	4	1	6
a_{31}	1	1	6	6	4	7	8	8	4	2
a_{32}	5	5	6	6	2	9	1	2	5	7
a_{33}	9	9	4	9	5	2	5	9	2	6
γ	0,9	0,2	0,7	0,6	0,8	0,1	0,5	0,6	0,7	0,9
p_1	0,36	0,67	0,40	0,23	0,31	0,16	0,37	0,70	0,13	0,25
p_2	0,53	0,15	0,08	0,54	0,12	0,40	0,37	0,03	0,74	0,35
p_3	0,11	0,18	0,52	0,23	0,57	0,44	0,26	0,28	0,13	0,40

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РГР

Работа представляется в печатном виде или в письменном виде (тетрадке в клетку) и должна включать в себя решение заданий по своему варианту (номер варианта совпадает с порядковым номером студента в классном журнале. Варианты заданий представлены в ПРИЛОЖЕНИИ А).

Если работа выполняется в печатном виде, то она должна быть оформлена следующим образом:

1) РГР выполняется на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210 x 297 мм);

2) Текстовый редактор Microsoft Word;

3) Страницы работы должны быть пронумерованы арабскими цифрами сквозной нумерацией через весь текст (кроме титульного листа, но в общую нумерацию включается) сверху по ширине листа;

4) Предусматриваются следующие размеры полей (с отклонениями в пределах + 2 мм): левое – 30 мм; правое – 15 мм; верхнее – 20 мм; нижнее – 20 мм;

5) Размер шрифта – 14 (Times New Roman), межстрочный интервал – 1,5 или размер шрифта – 12 (Times New Roman), межстрочный интервал – 1,0. В таблицах можно использовать уменьшенный шрифт ниже того, которым оформлялся текст (10-12 пт) с одинарным интервалом.

6) Выравнивание текста по ширине;

7) Абзацы в тексте начинаются отступом от левого поля. Отступ равен 1,25 см.

КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

1. Система и формы контроля

Для обеспечения объективности в оценке результатов обучения, активизации учебной деятельности, повышения ответственности студентов путем планомерной, систематической работы над учебным материалом, используется накопительная балльно-рейтинговая система.

Рейтинговая оценка по дисциплине формируется по итогам текущего и итогового контроля. Максимальный балл, накопленный студентом за семестр по всем видам учебной деятельности для дисциплины, составляет 100 баллов.

Из 100 баллов 60 баллов отводится на оценку работы в течение семестра – текущий рейтинг, 40 баллов – на оценку итогового контроля (экзамена) – итоговый рейтинг.

Текущий рейтинг по дисциплине (максимальное количество баллов – 60) составляется в ходе промежуточного контроля знаний студентов по результатам контроля посещаемости занятий, выполнения заданий выносимых на самостоятельное изучение и выполнения индивидуальных заданий.

В случае если за работу в семестре студентом набрано небольшое количество баллов (30 баллов и менее), в отношении него предусмотрен комплекс дополнительных контрольных учебных мероприятий (тематическое тестирование, устный опрос и т.д.), в ходе которых студент может «добрать» необходимое количество баллов.

При активном участии студента в подготовке к лекционным занятиям, работе студенческого научного общества на кафедре (выступление с докладами, выполнение научно- или учебно-исследовательской работы и др.) начисляются поощрительные баллы (1-10), которые добавляются к текущему рейтингу.

Итоговый рейтинг (максимальное количество баллов – 40) формируется в результате сдачи экзамена, и состоит из трех составляющих:

- тестовая часть – максимальное количество баллов 10;
- индивидуальная беседа по одному теоретическому вопросу – максимальное количество баллов 10;
- выполнение индивидуального практического задания – максимальное количество баллов 20.

Результирующий рейтинг представляет собой сумму текущего и итогового контроля.

Результат учебной деятельности по результирующему рейтингу (максимальное количество баллов – 100) переводится в качественную оценку по схеме представленной в табл. С.1.

Студенты, набравшие в течение семестра (на лекциях, практических занятиях и контрольных отчетах) 61 и более баллов (за счет поощрительных баллов), могут претендовать на получение оценки по дисциплине без итогового контроля.

Таблица С.1. – Результат учебной деятельности по результирующему рейтингу

Сумма баллов	Оценка ECTS	Качественная оценка
90 – 100	A	отлично
82 – 89	B	хорошо
75 – 81	C	
69 – 74	D	удовлетворительно
60 – 68	E	
35 – 59	FX	неудовлетворительно
1 – 34	F	

2. Критерии оценки качества знаний студентов

Проверка качества подготовки заканчивается выставлением отметок по принятой пятибалльной шкале («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»).

Общие критерии оценок:

«Отлично» – студент владеет знаниями предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину; самостоятельно, в логической последовательности и исчерпывающе отвечает на все вопросы билета, подчеркивал при этом самое существенное, умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделять в нем главное: устанавливать причинно-следственные связи; четко формирует ответы, свободно читает результаты анализов и других исследований и решает ситуационные задачи повышенной сложности; хорошо знаком с основной литературой и методами проектирования архитектур информационных систем; владеет знаниями основных принципов построения архитектур информационных систем.

«Хорошо» – студент владеет знаниями дисциплины почти в полном объеме программы (имеются пробелы знаний только в некоторых, особенно сложных разделах); самостоятельно и отчасти при наводящих вопросах дает полноценные ответы на вопросы билета; не всегда выделяет наиболее существенное, не допускает вместе с тем серьезных ошибок в ответах; умеет решать легкие и средней тяжести ситуационные задачи; умеет трактовать лабораторные и инструментальные исследования в объеме, превышающем обязательный минимум.

«Удовлетворительно» – студент владеет основным объемом знаний по дисциплине; проявляет затруднения в самостоятельных ответах, оперирует неточными формулировками; в процессе ответов допускаются ошибки по существу вопросов. Студент способен решать лишь наиболее легкие задачи, владеет только обязательным минимумом методов исследований.

«Неудовлетворительно» – студент не освоил обязательного минимума знаний предмета, не способен ответить на вопросы билета даже при дополнительных наводящих вопросах экзаменатора.

При проведении промежуточного тестирования, пересчете баллов полученных за индивидуальные задания, оценке тестовой части на экзамене:

«отлично» – 90 % правильных ответов,

«хорошо» – 75-89 % правильных ответов,

«удовлетворительно» – 68-74 % правильных ответов,

«неудовлетворительно» – 1-59 % правильных ответов.

3. Критерии оценки качества работы расчетно-графической работы

При проверке ргр используют следующие критерии оценивания:

– оценка "отлично" выставляется студенту, который безошибочно решает все предложенные задачи;

– оценка "хорошо" выставляется студенту, который безошибочно решил все предложенные задания, правильно применив алгоритмы решения задач, но при этом были допущены ошибки, которые качественно не влияют на конечный результат;

– оценка "удовлетворительно" выставляется студенту, который безошибочно решил 50 % предложенных задач;

– оценка "неудовлетворительно" выставляется студенту, который решил меньше 50 % предложенных задач.

В авторской редакции