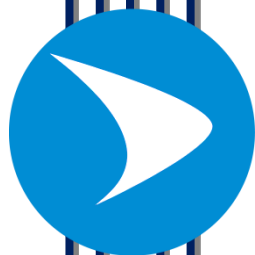


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий
и управления в технических системах
Кафедра информатики и управления в технических системах



**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ**

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
по дисциплине "Теория автоматического управления"
для студентов направления подготовки
27.03.04 – "Управление в технических системах"



Севастополь
СевГУ
2020

УДК 681.5.012:004.942 (076.5)
ББК 32.965.5
М 74

Рецензент:

А.А. Кабанов – зав. кафедрой "Информатика и управление
в технических системах", кандидат техн. наук, доцент

Составители: Карапетян В.А., Крамарь В.А.

М 74 Моделирование движения динамических управляемых объектов:
методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине "Теория автоматического управления" для студентов направления подготовки 27.03.04 – "Управление в технических системах" / Сост. В.А. Карапетян, В.А. Крамарь. – Севастополь: СевГУ, 2020. – 36 с.

В методических указаниях приводится описание лабораторной работы, целью которой является построение движений динамических управляемых объектов средствами пакета Matlab&Simulink.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения направления подготовки 27.03.04 – "Управление в технических системах".

УДК 681.5.012:004.9 (076.5)

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 6 от 28 февраля 2020 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании ученого совета Института информационных технологий и управления в технических системах, протокол № 4 от 3 марта 2020 года.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	3
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ	3
2.1 Математическая модель химического реактора.....	4
2.2 Математическая модель робота-манипулятора	7
2.3 Математическая модель перевёрнутого маятника.....	10
2.4 Математическая модель обычного маятника	12
2.5 Математическая модель маятника Фуруты.....	14
2.6 Математическая модель электромагнитного подвеса	19
3 ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	20
4 НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	22
5 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА И ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ РАБОТЫ	26
6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	26
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	27
ПРИЛОЖЕНИЕ А Пример решения основных задач лабораторной работы	28

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование свойств динамических управляемых объектов по результатам моделирования их движений; функций стандартных и специальных математических библиотек Matlab; операторов управления вычислительным процессом и применение этих средств к задачам анализа систем автоматического управления. Формирование навыков профессиональной работы в среде Matlab&Simulink.

2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

В данном разделе приводятся несколько примеров математических моделей функционирования (движения) динамических управляемых объектов. Математические модели динамики объектов и процессов составлены на основе применения известных законов физики, химии, электротехники и др. и представлены системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В современной теории автоматического управления основным способом математического (аналитического) описания динамики системы является представление в форме *вход-состояние-выход*. В качестве *входов* выступают переменные, описывающие внешние и внутренние причины возникновения движения (изменения состояния, эволюции) системы. *Состоянием* системы обозначают совокупность переменных, знание которых, наряду со знанием

входов и уравнений математической модели, позволяет определить дальнейшее поведение (движение) системы. *Выходы* – это переменные, значения которых доступны наблюдению (измерению).

2.1 Математическая модель химического реактора

Рассматривается химический реактор с непрерывным перемешиванием (CSTR – Continuous Stirred Tank Reactor), в котором происходит экзотермическая реакция первого порядка $A \rightarrow B$ [1]. Реактор имеет охлаждающую оболочку (cooling jacket). Схема реактора приведена на рисунке 2.1.

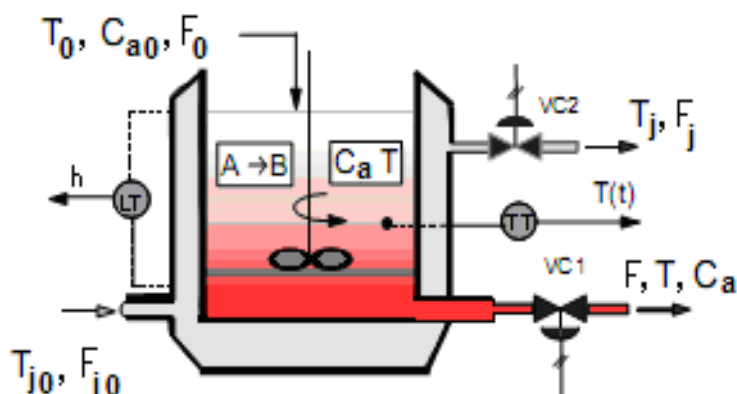


Рис. 2.1 – Химический реактор с непрерывным перемешиванием и охлаждающей оболочкой [1]

В химический реактор поступает поток F_0 водного раствора вещества A , имеющего концентрацию C_{a0} и температуру T_0 . В результате прохождения химической экзотермической (с выделением теплоты) реакции и перемешивания из реактора вытекает поток F раствора концентрации C_a и температуры T . Отвод тепла осуществляется потоком F_{j0} охлаждающей жидкости с начальной температурой T_{j0} . Температура и поток жидкости на выходе из охлаждающей оболочки равны T_j и F_j , соответственно.

Применим законы материального и энергетического баланса для составления уравнений математической модели физическо-химических процессов в реакторе [1]:

а) *уравнение баланса масс химического раствора и охлаждающей жидкости, поступающих соответственно в реактор и в оболочку охладителя.* Скорость изменения объёма V химического раствора в баке определяется разностью величин втекающего (F_0) и вытекающего потоков (F)

$$\frac{dV}{dt} = F_0 - F, \quad (2.1a)$$

а скорость изменения объёма V_j охлаждающей жидкости в охладителе – разностью величин втекающего (F_{j0}) и вытекающего потоков (F_j)

$$\frac{dV_j}{dt} = F_{j0} - F_j; \quad (2.16)$$

б) *уравнение баланса масс химического вещества А*. Скорость изменения количества вещества в баке обусловлена поступлением и удалением вещества входящим ($F_0 C_{a0}$) и вытекающим (FC_a) потоками, а также результатом химических превращений (закон Аррениуса – зависимость скорости экзотермической химической реакции от количества реагента и температуры). В законе Аррениуса фигурируют универсальная газовая постоянная R , энергия активации E , константа скорости реакции α , температура T

$$\frac{d(VC_a)}{dt} = F_0 C_{a0} - FC_a - \alpha VC_a e^{-\frac{E}{RT}}.$$

С учётом выражения для изменения объёма раствора в реакторе (2.1а), последнее уравнение можно представить в следующем виде

$$\frac{dC_a}{dt} = \frac{F_0}{V} (C_{a0} - C_a) - \alpha C_a e^{-\frac{E}{RT}}; \quad (2.2)$$

в) *уравнение энергетического баланса в реакторе*. Прирост тепловой энергии раствора в баке обусловлен поступающей в бак жидкостью и выделением тепла при прохождении химической реакции. Уменьшение тепловой энергии раствора вызвано истечением раствора из реактора и принудительным охлаждением

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_0}{V} (T_0 - T) + \frac{H\alpha}{\rho C_p} C_a e^{-\frac{E}{RT}} - \frac{UA}{\rho C_p V} (T - T_j). \quad (2.3)$$

Здесь H – тепловая энергия реакции, ρ и C_p – плотность и теплоёмкость жидкости в реакторе, U – коэффициент теплопередачи стенки реактора и охлаждающей оболочки, A – площадь стенки теплообмена реактора и охлаждающей оболочки;

г) *уравнение энергетического баланса в охлаждающей оболочке реактора*. Изменение температуры охлаждающей жидкости T_j (V_j , ρ_j , C_{pj} – объём охлаждающей оболочки, плотность и теплоёмкость охлаждающей жидкости) вызывается передачей тепла от раствора в реакторе через стенку оболочки охладителя

$$\frac{dT_j}{dt} = \frac{F_{j0}}{V_j} (T_{j0} - T_j) + \frac{UA}{\rho_j C_{pj} V_j} (T - T_j). \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1) – (2.4) представляют собой нелинейную динамическую математическую модель процессов, протекающих в химическом реакторе с непрерывным перемешиванием. При построении модели приняты некоторые упрощения и допущения: предполагается полная термоизоляция реактора и охлаждающей оболочки от окружающей среды; считается, что перемешивание приводит к полной однородности концентрации и температуры раствора по всему объёму реактора; не учитываются потери массы раствора на испарение и т.п.

Рассматривается некоторый определённый режим работы химического реактора. Числовые значения параметров номинального (установившегося, невозмущённого) режима сведены в таблицу 2.1. В Таблице в качестве основных приняты следующие единицы измерения физических величин: метр; час; килограмм; градус Кельвина; килоДжоуль; килоМоль.

Таблица 2.1

Параметры номинального режима работы реактора [1]

Переменная	Описание	Значение
C_{a0}	Входная концентрация $\text{kmol} \cdot \text{A} / \text{m}^3$	8
V	Объём раствора в реакторе m^3	1,36
T_0	Температура входного раствора К	294,7
V_j	Объём воды в охлаждающей оболочке m^3	0,085
α	Константа в законе Аррениуса h^{-1}	$7,08 \cdot 10^{10}$
E	Энергия активации kJ/kmol	69815
U	Коэффициент теплопередачи $\text{kJ/hm}^2 \cdot \text{K}$	3065
A	Площадь поверхности теплопередачи m^2	23,22
T_{j0}	Входная температура охлаждающей жидкости К	294,7
R	Универсальная газовая постоянная $\text{kJ/kmol} \cdot \text{K}$	8,314
H	Удельная теплота реакции kJ/kmol	69815
C_p	Теплоёмкость раствора $\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$	3,13
C_{pj}	Теплоёмкость охлаждающей жидкости $\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$	4,18
ρ	Плотность раствора kg/m^3	800
ρ_j	Плотность охлаждающей жидкости kg/m^3	1000
F_0	Входной поток раствора m^3/h	1,13
F_{j0}	Входной поток охлаждающей жидкости m^3/h	1,41

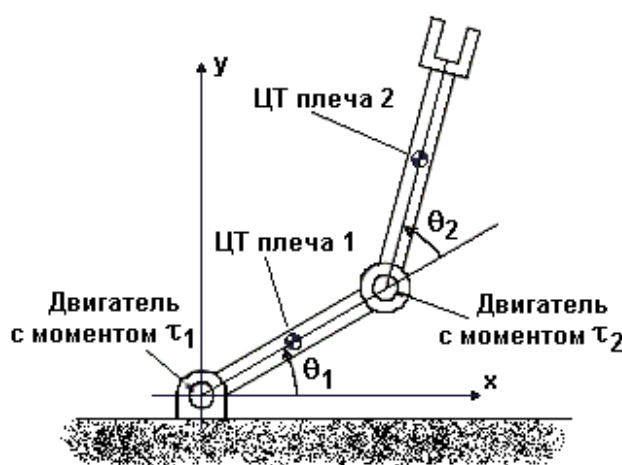
Подставляя значения параметров невозмущённого режима работы реактора в уравнения модели (2.1) – (2.4), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных $C_a(t)$, $T(t)$, $T_j(t)$, V и V_j :

$$\begin{cases} \frac{dC_a}{dt} = \frac{F_0}{V} (8 - C_a) - 7,08 \cdot 10^{10} C_a e^{-\frac{8397,3}{T}}, \\ \frac{dT}{dt} = \frac{F_0}{V} (294,7 - T) + 197,4 \cdot 10^{10} C_a e^{-\frac{8397,3}{T}} - \frac{28,4222}{V} (T - T_j), \\ \frac{dT_j}{dt} = \frac{F_{j0}}{V_j} (294,7 - T_j) + \frac{17,0261}{V_j} (T - T_j), \\ \frac{dV}{dt} = F_0 - F, \\ \frac{dV_j}{dt} = F_{j0} - F_j. \end{cases} \quad (2.5)$$

В качестве компонентов вектора состояния математической модели химического реактора установлены значения объёма и концентрации вещества в реакторе, температуры раствора, температуры охлаждающей жидкости, текущих объёмов раствора и охладителя, т.е. $x(t) = [C_a(t) \ T(t) \ T_j(t) \ V(t) \ V_j(t)]^T$. Управляемым выходом объекта будем считать вектор $y(t) = [C_a(t) \ T(t)]^T$. Управление процессом в реакторе осуществляется с помощью изменения значений выходных потоков раствора и охлаждающей жидкости – вектор управляющих воздействий $u(t) = [F(t) \ F_j(t)]^T$.

2.2 Математическая модель робота-манипулятора

Схема двухзвенного робота-манипулятора [1] показана на рисунке



x, y – координатные оси; ЦТ – центр тяжести плеча манипулятора;
 θ_1 и θ_2 – углы поворота первого и второго плеча манипулятора;

Рис. 2.2 – Схема двухзвенного робота-манипулятора

Положение плеч манипулятора определяется двумя углами – θ_1 и θ_2 . Длины, массы и моменты инерции каждого плеча характеризуются величинами m_1, m_2, l_1, l_2, J_1 и J_2 соответственно. Предполагается, что массы распределены по длинам плеч равномерно и центры масс располагаются по серединам каждого плеча. Управляемые вращения плеч манипулятора обеспечивают два двигателя, развивающие соответствующие моменты τ_{m1} и τ_{m2} .

Уравнения движения манипулятора получены на основе применения метода Лагранжа [2]. Метод предполагает введение обобщённых координат, полностью и однозначно описывающих положение и скорость движения механического объекта. Здесь в качестве обобщённых координат выбраны углы поворота плеч манипулятора θ_1 и θ_2 . Лагранжиан определяется как разность кинетической и потенциальной энергий механической системы $L = K - P$. Кинетическая и потенциальная энергии задаются в виде функций обобщённых координат θ_1 и θ_2 и их производных $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$ – обобщённых скоростей.

Уравнения движения манипулятора могут быть получены из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2. \quad (2.6)$$

Здесь τ_1 и τ_2 соответственно суммарные моменты, действующие на осях вращения в положительном направлении изменения углов θ_1 и θ_2 . Каждый из этих моментов являются векторными суммами моментов, развиваемых двигателями τ_{m1} и τ_{m2} , и противодействующих моментов вязкого трения $C_1 \dot{\theta}_1$ и $C_2 \dot{\theta}_2$ в сочленениях:

$$\tau_1 = \tau_{m1} - C_1 \dot{\theta}_1, \quad \tau_2 = \tau_{m2} - C_2 \dot{\theta}_2.$$

Общая кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движений каждого плеча манипулятора [1]:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2.$$

Для перехода в последнем выражении исключительно к обобщённым координатам (θ_1 и θ_2) и их производным следует выразить переменные линейных скоростей $v_{G_1}^2(t)$ и $v_{G_2}^2(t)$ через обобщённые координаты. Если предположить, что центры масс располагаются в серединах каждого плеча, то координаты центров масс можно выразить следующим образом:

$$(x_{G_1}, y_{G_1}) = \left(\frac{l_1}{2} \cos \theta_1, \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right), \quad (x_{G_2}, y_{G_2}) = \left(l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2), l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right).$$

Здесь $x_{G_1}, y_{G_1}, x_{G_2}, y_{G_2}, \dot{v}_{G_1}^2 = \dot{x}_{G_1}^2 + \dot{y}_{G_1}^2, \dot{v}_{G_2}^2 = \dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2$ представляют декартовы координаты центров масс и квадраты векторов линейных скоростей центров масс плеч манипулятора.

С учётом последних обозначений и соотношений выражение для общей кинетической энергии манипулятора может быть записано в виде

$$K = \left(\frac{1}{2} m_1 \frac{l_1^2}{4} + \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2} m_2 \frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2} J_2 \right) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).$$

Потенциальная энергия P манипулятора выражается формулой [1]

$$P = m_1 g \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 + m_2 g \left(l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right).$$

Систему уравнений движения (2.6), после подстановки в неё полученных выше соотношений, можно записать так

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{\theta}_1 + M_{12} \ddot{\theta}_2 + K_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + G_1(\theta_1, \theta_2) &= \tau_{m1}, \\ M_{21} \ddot{\theta}_1 + M_{22} \ddot{\theta}_2 + K_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + G_2(\theta_1, \theta_2) &= \tau_{m2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь M_{ij} – элементы матрицы инерций M ; K_i – моменты центробежных и кориолисовых сил; G_i – моменты сил тяжести:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4} m_1 + m_2 \right) l_1^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 \end{bmatrix},$$

$$K_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + C_1 \dot{\theta}_1, \quad K_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_1^2 + C_2 \dot{\theta}_2,$$

$$G_1(\theta_1, \theta_2) = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 + m_2 g \left(l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right), \quad G_2(\theta_1, \theta_2) = m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2).$$

Определим векторы состояния $x(t)$, управления $u(t)$ и выхода $y(t)$ как

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix},$$

а также введём матрицу $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = M^{-1}$, обратную матрице инерций M .

Систему уравнений (2.7) теперь можно представить в виде нелинейных уравнений состояния в следующей форме

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -H_{11}(K_1 + G_1) - H_{12}(K_2 + G_2) \\ x_4(t) \\ -H_{21}(K_1 + G_1) - H_{22}(K_2 + G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} u(t), \quad (2.8)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

Значения параметров плеч робота-манипулятора следующие [1]:

Первое плечо				Второе плечо			
$m_1=3$ кг	$l_1=0,6$ м	$J_1=0,12$ кг·м ²	$C_1=0,5$	$m_2=2,5$ кг	$l_2=0,8$ м	$J_2=0,15$ кг·м ²	$C_2=0,5$

Например, удерживающие, в неподвижном угловом положении плеч манипулятора $\theta_{10} = 45^\circ$ и $\theta_{20} = -30^\circ$, значения моментов двигателей могут быть рассчитаны из соотношений (2.7) в виде:

$$G_1(\theta_{10}, \theta_{20}) = \tau_{m10}, \quad G_2(\theta_{10}, \theta_{20}) = \tau_{m20}. \quad (2.8a)$$

Подстановка в эти соотношения исходных данных позволяет получить начальные значения моментов

$$\tau_{m10} = G_{10}(45^\circ, -30^\circ) = 26,124 \text{ Н} \times \text{м}, \quad \tau_{m20} = G_{20}(45^\circ, -30^\circ) = 9,476 \text{ Н} \times \text{м}.$$

2.3 Математическая модель перевёрнутого маятника

Рассматривается перевёрнутый маятник, расположенный на движущейся тележке [3, 4]. Схема маятника показана на рисунке 2.3а. Ось маятника монтируется на тележке, которая может перемещаться в горизонтальном направлении. Тележка приводится в действие мотором, который в момент времени t прикладывает к тележке силу $u(t)$. При отсутствии каких-либо внешних воздействий на тележку, маятник, находящийся в равновесии в строго вертикальном положении, при малейших внешних возмущениях теряет это равновесие. То есть, данное положение маятника является неустойчивым.

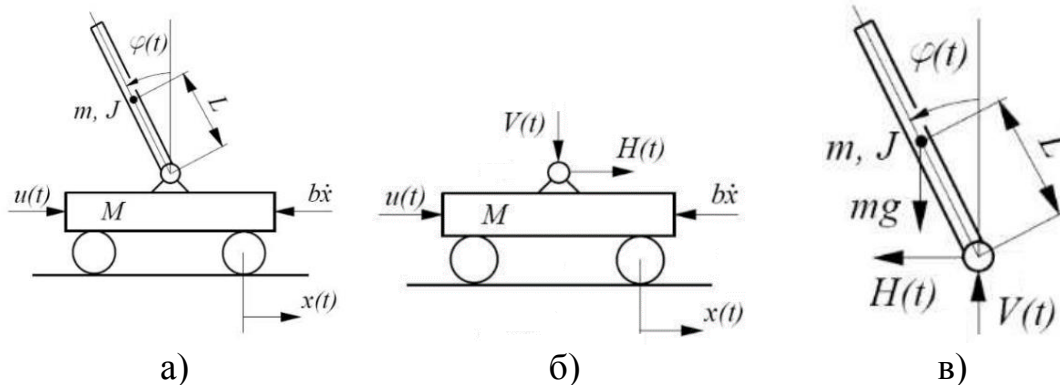


Рис. 2.3 – Схема перевёрнутого маятника на тележке

На рисунках 2.3 б) и в) изображены силы и точки их приложения, а также линейные и угловые перемещения собственно для тележки и маятника.

Здесь введены следующие обозначения:

- M – масса тележки;
- m – масса маятника;
- J – момент инерции маятника относительно центра тяжести;
- b – коэффициент вязкого трения при движении тележки;
- C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника;
- L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести;
- $u(t)$ – сила, прикладываемая к тележке (управление);
- $x(t)$ – значение горизонтального перемещения тележки;
- $\varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали;
- g – ускорение свободного падения.

К тележке (см. рисунок 2.3б) приложены: внешняя управляющая сила $u(t)$; сила вязкого трения $b \cdot \dot{x}(t)$; вертикальная $V(t)$ и горизонтальная $H(t)$ силы воздействия маятника на тележку.

К маятнику (см. рисунок 2.3в) приложена сила тяжести $m \cdot g$ в центре тяжести, а к точке крепления маятника к тележке – силы реакции опоры – вертикальная $V(t)$ и горизонтальная $H(t)$.

Сформируем систему уравнений движения перевёрнутого маятника на тележке и самой тележки, используя соотношения баланса сил и моментов.

Тележка – баланс сил по горизонтали –

$$M \cdot \ddot{x}(t) = -b \cdot \dot{x}(t) + H(t) + u(t) . \quad (2.9)$$

Маятник:

– баланс сил по горизонтали –

$$m \frac{d^2}{dx^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) = -H(t); \quad (2.10)$$

– баланс сил по вертикали –

$$m \frac{d^2}{dx^2} (L \cos \varphi(t)) = V(t) - mg; \quad (2.11)$$

– баланс моментов (вращение маятника) –

$$J \ddot{\varphi}(t) = L \cdot V(t) \sin \varphi(t) - L \cdot H(t) \cdot \cos \varphi(t) - C \cdot \dot{\varphi}(t). \quad (2.12)$$

Выразив $H(t)$ из соотношения (2.10) и $V(t)$ из соотношения (2.11), подставим $H(t)$ в уравнение (2.9), и $H(t)$ и $V(t)$ – в уравнение (2.12). В результате, получим:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) &= u(t) - m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)), \\ J \ddot{\varphi}(t) &= L \left[m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \varphi(t)) + mg \right] \sin \varphi(t) + L \left[m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) \right] \cos \varphi(t) - C \cdot \dot{\varphi}(t). \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые, эти два уравнения можно переписать так:

$$\begin{aligned} (M + m) \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) &= u(t) + mL \frac{d^2}{dt^2} (\sin \varphi(t)), \\ J \ddot{\varphi}(t) - mL \ddot{x}(t) \cos \varphi(t) - mLg \sin \varphi(t) + C \cdot \dot{\varphi}(t) &= mL^2 \left[\sin \varphi(t) \frac{d^2}{dt^2} (\cos \varphi(t)) - \cos \varphi(t) \frac{d^2}{dt^2} (\sin \varphi(t)) \right] \end{aligned}$$

Вычислив вторые производные по времени от функций $\sin \varphi(t)$ и $\cos \varphi(t)$, последние уравнения представим в виде:

$$(M + m) \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + mL \dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t) - mL \ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) = u(t), \quad (2.13)$$

$$(J + mL^2) \ddot{\varphi}(t) - mL \ddot{x}(t) \cos \varphi(t) + C \cdot \dot{\varphi}(t) - mLg \sin \varphi(t) = 0. \quad (2.14)$$

В векторно-матричной форме уравнения (2.13), (2.14) запишем как:

$$\begin{bmatrix} M + m & -mL \cos \varphi(t) \\ -mL \cos \varphi(t) & J + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & mL \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mLg \sin \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (2.15)$$

Разрешим систему (2.15) относительно вектора из вторых производных переменных x и φ . Для этого необходимо найти обратную матрицу инерций H :

$$H = \begin{bmatrix} M + m & -mL \cos \varphi(t) \\ -mL \cos \varphi(t) & J + mL^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\varphi(t))} \begin{bmatrix} J + mL^2 & mL \cos \varphi(t) \\ mL \cos \varphi(t) & M + m \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

где $\Delta(\varphi(t))$ – детерминант матрицы инерций

$$\Delta(\varphi(t)) = (M + m)(J + mL^2) - m^2 L^2 \cos^2 \varphi(t). \quad (2.17)$$

С учётом (2.16) и (2.17) систему (2.15) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta(\varphi(t))} \begin{bmatrix} (J + mL^2)b & (J + mL^2)mL\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) + mL C \cos\varphi(t) \\ mLb \cos\varphi(t) & 0,5 \cdot m^2 L^2 \dot{\varphi}(t) \sin 2\varphi(t) + (M + m)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{\Delta(\varphi(t))} \begin{bmatrix} -0,5 \cdot m^2 L^2 g \sin 2\varphi(t) \\ -(M + m)mLg \sin\varphi(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\varphi(t))} \begin{bmatrix} J + mL^2 \\ mL \cos\varphi(t) \end{bmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Определив векторы состояния $X(t)$, управления $U(t)$ и выхода $Y(t)$ как:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = [u(t)], \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix},$$

уравнения (2.18) теперь можно представить в виде системы дифференциальных уравнений состояния в нормальной форме – системы из четырёх дифференциальных уравнений первого порядка.

Численные параметры объекта "перевёрнутый маятник" выбраны следующими:

M – масса тележки = **0,5** кг;

m – масса маятника = **0,2** кг;

J – момент инерции маятника относительно центра тяжести = **0,006** кг·м²;

b – коэффициент вязкого трения при движении тележки = **0,1** Н/м/сек;

C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника = **0.01** Н*м/рад/сек;

L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести = **0,3** м;

$u(t)$ – сила, прикладываемая к тележке (управление);

$x(t)$ – значение горизонтального перемещения тележки;

$\varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали;

g – ускорение свободного падения = **9,81** м/сек².

2.4 Математическая модель обычного маятника

Рассматривается обычный маятник, расположенный на движущейся тележке. Схема маятника показана на рисунке 2.4. Такой маятник часто используют в качестве физической модели мостового (портального) крана.

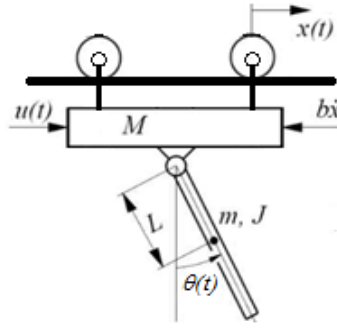


Рис. 2.4 – Схема обычного маятника на тележке (мостовой кран)

Для получения математической модели движения мостового крана введём угол θ для представления угла поворота маятника, отсчитываемого от вертикали, направленной вниз. Для упрощения рассматриваемой здесь задачи будем считать, что обычный маятник и перевернутый являются взаимно инвертируемыми. В этом случае угол отклонения θ обычного маятника от вертикали, направленной вниз, и угол отклонения φ перевернутого маятника от вертикали, направленной вверх, будут связаны следующими соотношениями:

$\theta = \pi + \varphi$	$\cos \varphi = \cos(\theta - \pi) = -\cos \theta$	$\sin 2\varphi = \sin 2(\theta - \pi) =$
$\dot{\varphi} = \dot{\theta}$	$\sin \varphi = \sin(\theta - \pi) = -\sin \theta$	$= \sin(2\theta - 2\pi) = \sin 2\theta$
$\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}$		

Уравнения движения обычного маятника на тележке с учётом последних замечаний и соотношений для угла $\theta = \pi + \varphi$, могут быть получены из системы (2.18):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta(\varphi(t))} \begin{bmatrix} (J + mL^2)b & (J + mL^2)mL\dot{\varphi}(t)\sin(\pi + \varphi(t)) + mLC\cos(\pi + \varphi(t)) \\ mLb\cos(\pi + \varphi(t)) & 0,5 \cdot m^2L^2\dot{\varphi}(t)\sin 2\varphi(t) + (M + m)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta(\varphi(t))} \begin{bmatrix} -0,5 \cdot m^2L^2g\sin 2\varphi(t) \\ -(M + m)mLg\sin(\pi + \varphi(t)) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\varphi(t))} \begin{bmatrix} J + mL^2 \\ mL\cos(\pi + \varphi(t)) \end{bmatrix} u(t)$$

в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta(\theta(t))} \begin{bmatrix} (J + mL^2)b & -(J + mL^2)mL\dot{\theta}(t)\sin \theta(t) - mLC\cos \theta(t) \\ -mLb\cos \theta(t) & 0,5 \cdot m^2L^2\dot{\theta}(t)\sin 2\theta(t) + (M + m)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta(\theta(t))} \begin{bmatrix} -0,5 \cdot m^2L^2g\sin 2\theta(t) \\ (M + m)mLg\sin \theta(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta(t))} \begin{bmatrix} J + mL^2 \\ -mL\cos \theta(t) \end{bmatrix} u(t). \quad (2.19)$$

Определив, как и в предыдущем пункте, векторы состояния $X(t)$, управления $U(t)$ и выхода $Y(t)$ в форме:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = [u(t)], \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix},$$

уравнения (2.19) также можно представить в нормальной форме.

Численные параметры объекта "обычный маятник" выбраны равными соответствующим параметрам перевернутого маятника (мостового крана):

M – масса тележки = **0,5** кг;

m – масса маятника = **0,2** кг;

J – момент инерции маятника относительно центра тяжести = **0,006** кг·м²;

b – коэффициент вязкого трения при движении тележки = **0,1** Н/м/сек;

C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника = **0.01** Н*м/рад/сек;

L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести = **0,3** м;

$u(t)$ – сила, прикладываемая к тележке (управление);

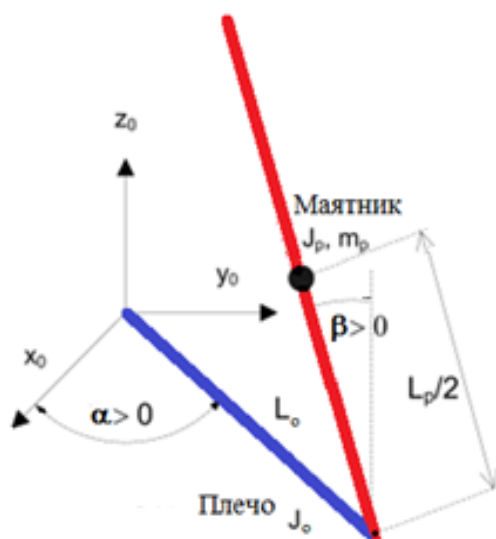
$x(t)$ – значение горизонтального перемещения тележки;

$\varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали;

g – ускорение свободного падения = **9,81** м/сек².

2.5 Математическая модель маятника Фуруты

Вращающийся перевернутый маятник – маятник Фуруты [5, 6] – представляет собой перевернутый маятник с подвижной вращающейся точкой подвеса (см. рисунок 2.5). Плечо маятника формы соединено с валом электродвигателя и вращается в пределах 300 градусов. Задача управления решается за счет изменения положения плеча маятника: двигатель поворачивает опору, подводя ее под маятник. Сам маятник подвешен на горизонтальной оси на конце плеча. Углы отклонения маятника β и плеча α измеряются энкодером. Управляющая переменная – входное напряжение, подаваемое на усилитель ШИМ-сигнала, который управляет двигателем. Двигатель постоянного тока установлен вертикально в металлической камере. Выходные переменные – угол отклонения маятника β и угол поворота плеча маятника α . Получение динамической математической модели маятниковой системы основывается на геометрической модели и массо-моментных характеристиках.



Геометрическая модель маятника



Лабораторный стенд с маятником Фуруты
Quanser QNET Rotary Inverted Pendulum 2.0

Рис. 2.5 – Маятник Фуруты

Перевернутая маятниковая система состоит из двух секций – плеча и собственно маятника. На рисунке приняты следующие условные обозначения:

- L_0 – длина плеча маятника; – α – угловое положение плеча маятника;
- l_p – половина длины маятника; – β – угловое положение маятника.
- m_p – масса маятника;

Для получения математической модели необходимо ввести следующие исходные константы и переменные, представленные в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Основные обозначения переменных

Символ	Мера	Определение
α	рад	угловое положения плеча маятника
β	рад	угловое положения маятника
J_0	кг*м ²	момент инерции плеча маятника
J_p	кг*м ²	момент инерции маятника
C_0	кг*м ² /с	коэффициент вязкого трения оси вращения α
C_p	кг*м ² /с	коэффициент вязкого трения оси вращения β
m_p	кг	масса маятника
l_p	м	половина длины маятника
l_0	м	длина плеча маятника
g	м/с ²	ускорение свободного падения

Математическую модель динамики маятника Фуруты получим на основе уравнения Лагранжа [2]. В нашем случае уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.20)$$

Здесь $L=T-P$ – лагранжиан – разность кинетической K и потенциальной P энергий механической системы; θ_1 и θ_2 – обобщённые координаты системы, у нас – это углы α и β соответственно; Q_1 и Q_2 – суммарные внешние моменты, инициирующие движения элементов маятниковой системы относительно осей вращения.

Обобщёнными координатами выбраны угловые положения плеча α и собственно маятника β , отсчитываемые в положительном направлении. Используя геометрическую модель рисунка 2.5, можно получить вид модели сверху (рисунок 2.6).

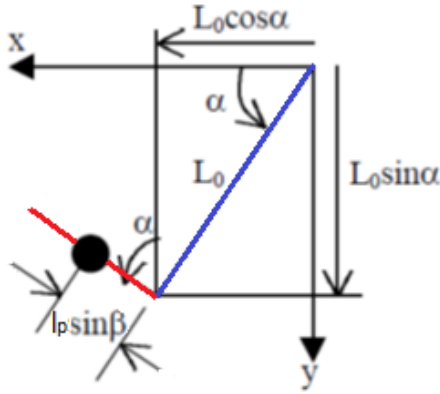


Рис. 2.6 – Вид сверху

Из схемы рисунка 2.6 следуют выражения для координат центра тяжести маятника:

$$\begin{cases} x_p = L_0 \cos \alpha + l_p \sin \alpha \sin \beta, \\ y_p = L_0 \sin \alpha - l_p \cos \alpha \sin \beta, \\ z_p = l_p \cos \beta. \end{cases}$$

Продифференцировав эти соотношения по времени, получим выражения для линейных скоростей центра масс маятника по координатным осям

$$\begin{cases} \dot{x}_p = -L_0 \dot{\alpha} \sin \alpha + l_p \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + l_p \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta, \\ \dot{y}_p = L_0 \dot{\alpha} \cos \alpha + l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta + l_p \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta, \\ \dot{z}_p = -l_p \dot{\beta} \sin \beta. \end{cases}$$

Квадрат нормы скорости центра масс маятника вычисляется как сумма квадратов линейных скоростей по трём координатам:

$$\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2 = L_0^2 \dot{\alpha}^2 + l_p^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + l_p^2 \dot{\beta}^2 - 2L_0 l_p \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta.$$

Запишем кинетическую T_0 и потенциальную P_0 энергии плеча маятника:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_0 \dot{\alpha}^2, \quad P_0 = 0.$$

Кинетическая T_p и потенциальная P_p энергии маятника определяются как:

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} J_p \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) = \\ &= \frac{1}{2} m_p L_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (J_p + m_p l_p^2) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta - m_p L_0 l_p \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta, \\ P_p &= m_p g l_p \cos \beta. \end{aligned}$$

Составим общий для всей маятниковой системы лагранжиан как сумму лагранжианов для плеча и для маятника:

$$L = T_0 - P_0 + T_p - P_p = \frac{1}{2}(J_0 + m_p L_0^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(J_p + m_p l_p^2) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta - m_p L_0 l_p \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta - m_p g l_p \cos \beta. \quad (2.21)$$

Уравнение Лагранжа (2.20) для первой обобщённой координаты θ_1 (угла поворота плеча α), с учётом выражения для внешних моментов $Q_1 = \tau_m - C_0 \dot{\alpha}$, после всех преобразований примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \tau_m - C_0 \dot{\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow (J_0 + m_p L_0^2) \ddot{\alpha} + m_p l_p^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \beta + m_p l_p^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + C_0 \dot{\alpha} - \\ - m_p L_0 l_p \ddot{\beta} \cos \beta + m_p L_0 l_p \dot{\beta}^2 \sin \beta &= \tau_m. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь τ_m – момент, развиваемый двигателем постоянного тока, поворачивающий плечо маятника, а C_0 – коэффициент вязкого трения для оси вращения плеча.

Уравнение Лагранжа (2.20) для второй обобщённой координаты θ_2 (угла поворота маятника β), с учётом выражения для внешнего момента трения $Q_2 = -C_p \dot{\beta}$, после аналогичных преобразований примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} &= -C_p \dot{\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow -m_p L_0 l_p \ddot{\alpha} \cos \beta + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\beta} - \\ - \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta - m_p g l_p \sin \beta + C_p \dot{\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь C_p – коэффициент вязкого трения для оси вращения маятника.

Объединив уравнения Лагранжа (2.22) и (2.23) в систему, запишем математическую модель движения маятниковой системы в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} J_0 + m_p L_0^2 + m_p l_p^2 \sin^2 \beta & -m_p L_0 l_p \cos \beta \\ -m_p L_0 l_p \cos \beta & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} C_0 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\beta} \sin 2\beta & \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta + m_p L_0 l_p \dot{\beta} \sin \beta \\ -\frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p g l_p \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_m \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Поворот плеча маятника осуществляется с помощью двигателя постоянного тока (ДПТ). ДПТ управляется напряжением V_m и развивает вращающий момент τ_m . Напряжение V_m формируется широтно-импульсным модулятором

(ШИМ) из управляющего напряжения u . Электрическая схема цепи двигателя представлена на рисунке 2.7.

Математическая модель двигателя может быть представлена уравнением Кирхгофа (3.4) для данной цепи ротора:

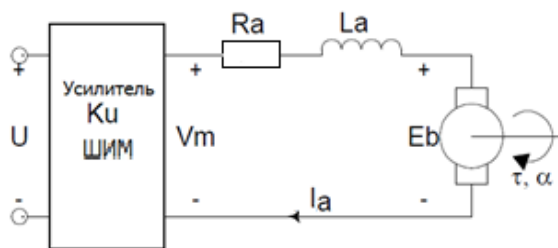


Рис. 2.7 – Схема цепи двигателя

$$L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + R_a I_a(t) + E_b = V_m(t)$$

или, с учётом соотношений для ШИМ и противо-ЭДС, имеем

$$L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + R_a I_a(t) + k_b \dot{\alpha} = k_u u(t).$$

Здесь L_a , I_a , R_a – величины индуктивности, тока и активного сопротивления обмотки ротора ДПТ; k_b , k_u – коэффициенты противо-ЭДС и усиления двигателя. Значение момента, развиваемого ДПТ, пропорциональна величине тока обмотки ротора: $\tau_m = k_t I_a$, где k_t – коэффициент пропорциональности.

В силу пренебрежимо малого влияния индуктивности обмотки L_a и имея ввиду выражение для момента τ_m , получим соотношение для τ_m в виде:

$$\tau_m(t) = \frac{k_t k_u}{R_a} u(t) - \frac{k_t k_b}{R_a} \dot{\alpha}(t) \quad (2.25)$$

Учитывая динамику двигателя, подставим выражение для момента τ_m (2.25) в уравнение модели (2.24):

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} J_0 + m_p L_0^2 + m_p l_p^2 \sin^2 \beta & -m_p L_0 l_p \cos \beta \\ \hline -m_p L_0 l_p \cos \beta & J_p + m_p l_p^2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \\ & + \left[\begin{array}{c|c} C_0 + \frac{k_t k_b}{R_a} + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\beta} \sin 2\beta & \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta + m_p L_0 l_p \dot{\beta} \sin \beta \\ \hline -\frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta & C_p \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \\ & + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -m_p g l_p \sin \beta \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \frac{k_t k_u}{R_a} \\ \hline 0 \end{bmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Коэффициенты математической модели маятниковой системы Quanser QNET Rotary Pendulum взяты из документации к учебному макету [6] и приведены в таблице 2.3. Коэффициенты вязкого трения для маятника C_p и плеча C_0 в данной системе подбираются на основе экспериментальных данных конкретно для каждого экземпляра макета.

Коэффициенты модели Quanser QNET Rotary Pendulum System

Символ	Описание	Значение
R_a	Terminal resistance DC Motor	8.4 Ом
k_t	Torque constant DC Motor	0.042 Nm/A
k_b	DC Motor back-EMF constant	0.042 V/(rad/s)
k_u	DC Motor driver amplifier gain	0.0636 V/count
m_a	Rotary arm mass	0.095 kg
L_a	Rotary arm length (pivot to end of metal rod)	0.085 m
m_p	Pendulum link mass	0.024 kg
L_p	Pendulum link length	0.129 m
J_a	Moment of inertia of Arm section	5.72e-5 kgm ²
J_p	Moment of inertia of Pendulum section	1.0e-4 kg*m ²
C_a	Arm viscus damping	0.00015 N*m/(rad/s)
C_p	Pendulum viscous damping	0.00005 N*m/(rad/s)

2.6 Математическая модель электромагнитного подвеса

Рассмотрим электромагнитную подвеску показанную на рисунке 2.8 [4]. Электромагнитная сила f , порождённая приложенным напряжением e , удерживает металлический шар на расстоянии y от нижней кромки электромагнита.

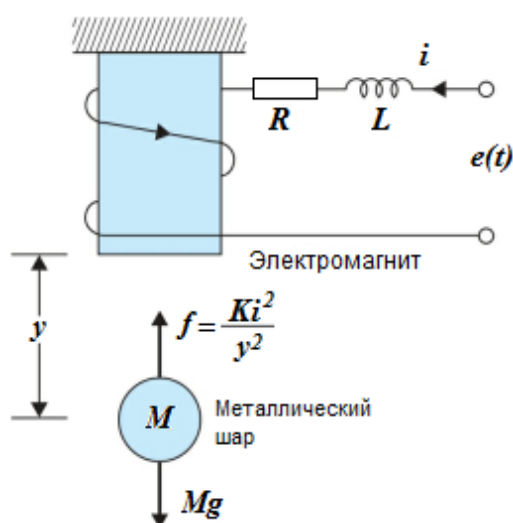


Рис. 2.8 – Электромагнитная подвеска

Математическая модель, описывающая динамику электромагнитной подвески, содержит два дифференциальных уравнения:

– уравнение движения шара

$$M \frac{dy^2(t)}{dt^2} = Mg - \frac{Ki^2(t)}{y^2(t)}; \quad (2.27)$$

– уравнение электрической цепи

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t). \quad (2.28)$$

Здесь M – масса металлического шара; g – ускорение свободного падения; K – коэффициент электромагнитного усилия; L и R – индуктивность и активное сопротивление обмотки электромагнита.

Выражение для величины электромагнитной силы $f=K(i^2/y^2)$ связывает в систему уравнение механического движения шара с уравнением электрических процессов в цепи электромагнита.

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (2.27), (2.28) к нормальной форме (форме Коши). Для этого введём переменные состояния:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t); \quad x_3(t) = i(t)$$

и перепишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = g - \frac{K}{M} \frac{x_3^2(t)}{x_1^2(t)}, \\ \dot{x}_3(t) = -\frac{R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} e(t). \end{cases} \quad (2.29)$$

Значения коэффициентов модели (2.29) приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Коэффициенты модели электромагнитного подвеса

L	индуктивность обмотки электромагнита	0,508 Гн
R	активное сопротивление обмотки электромагнита	23,2 Ом
M	масса металлического шара	1,75 кг
K	коэффициент электромагнитной силы	$2,9 \times 10^{-4}$ Нм ² /А ²
Y₀	рабочая точка (расстояние до точки равновесия)	$\sqrt{\frac{K \cdot I_0^2}{M \cdot g}}$ м
I₀	рабочая точка по току	1,06 А
g	ускорение свободного падения	9,81 м/с ²

3 ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

В работе исследуются динамические свойства управляемых объектов, представленных своими математическими моделями в виде систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с сосредоточенными параметрами.

Выполнение лабораторной работы предполагает реализацию следующих этапов и действий:

- а) представление математической модели движения объекта управления в виде системы ОДУ в нормальной форме;
- б) назначение параметров номинального движения (рабочей точки) объекта;
- в) разработка схемы алгоритма и Matlab-программы решения задачи моделирования собственного движения объекта (численное решение системы ОДУ и графическая визуализация результатов стандартными средствами пакета Matlab);
- г) разработка Simulink-схемы и проведение моделирования собственного движения объекта управления;
- д) проведение сравнительного анализа результатов моделирования, полученных в двух предыдущих пунктах;
- е) формулировка общих выводов по работе.

При выполнении лабораторной работы студентом проводится исследование одной из предложенных, во втором разделе, моделей объектов управления (ОУ). Для выполнения заданий лабораторной работы создаются Matlab-программа в виде двух m-файлов (вызывающая программа и функция вычисления правых частей системы ОДУ) и одна Simulink-схема.

И Matlab-программа и Simulink-схема предназначены для решения одной и той же задачи – моделирования движения ОУ по номинальной траектории (в рабочей точке) и движения ОУ при малых отклонениях его начальных условий от номинальных.

Для приведённых выше моделей ОУ параметры номинальных движений (траекторий, режимов) и величины отклонений от них задаются следующими значениями.

1. Химический реактор:

– параметры рабочей точки (Таблица 2.1):

концентрация входного раствора –	C_{a0} ;
температура входного раствора –	T_0 ;
температура охладителя на входе –	T_{j0} ;
начальный объём раствора в реакторе –	V ;
начальный объём охладителя –	V_j ;
выходной поток раствора –	F_0 ;
выходной поток охладителя –	F_{j0} .

Первые пять характеристик – переменные состояния процесса, последние две – управляющие переменные;

– отклонения от номинального режима:

уменьшить концентрацию входного раствора C_{a0} на 10%.

2. Робот-манипулятор:

– параметры рабочей точки (исходное произвольное неподвижное положение двухзвенной конструкции робота-манипулятора):

начальное угловое положение первого плеча робота – $\theta_{10}=0^0$;

начальное угловое положение второго плеча робота – $\theta_{20}=0^0$;

начальные значения моментов τ_{m10} и τ_{m20} , развиваемых двигателями для удержания исходного положения плеч манипулятора, рассчитываются по формулам (2.8а);

– отклонения от номинального режима:

– увеличить момент первого двигателя τ_{m1} в 1,01 раз, а второй двигатель – отключить;

– обнулить начальные моменты двигателей и установить манипулятор в неподвижное состояние со значениями углов: $\theta_{10}=90^0$ и $\theta_{20}=3^0$.

3. Перевернутый маятник на тележке:

– параметры рабочей точки (тележка неподвижна и маятник в строго вертикальном неподвижном положении):

- начальное угловое положение маятника – $\varphi_0=0^0$;
 начальное положение тележки произвольное, например – $x_0=0$ м;
 сила, действующая на тележку – $u_0=0$ Н;
- отклонения от номинального режима:
- начальное угловое положение маятника – $\varphi_0=20^0$, сила – $u_0=0$ Н;
 - начальное угловое положение маятника – $\varphi_0=-20^0$, сила – $u_0=3,3$ Н.
4. *Обычный маятник на тележке (портальный кран):*
- параметры рабочей точки (тележка неподвижна и маятник в строго вертикальном неподвижном положении):
 - начальное угловое положение маятника – $\varphi_0=0^0$;
 - начальное положение тележки произвольное, например – $x_0=0$ м;
 - сила, действующая на тележку – $u_0=0$ Н;
 - отклонения от номинального режима:
 - начальное угловое положение маятника – $\varphi_0=20^0$, сила – $u_0=0$ Н.
5. *Маятник Фуруты:*
- параметры рабочей точки:
 - начальное угловое положение плеча маятника – $\alpha_0=0^0$;
 - начальное угловое положение маятника – $\beta_0=0^0$;
 - входное напряжения на обмотке ротора ДПТ – $U_0=0$ В;
 - отклонения от номинального режима:
 - начальное угловое положение маятника – $\beta_0=90^0$.
6. *Электромагнитный подвес:*
- параметры рабочей точки (Таблица 2.1):
 - начальный ток в обмотке электромагнита – I_0 ;
 - расстояние до шара в режиме равновесия – Y_0 ;
 - значение напряжения в режиме равновесия – $U_0=R \cdot I_0$;
 - отклонения от номинального режима:
 - установить значение тока обмотки электромагнита $I=0,95 \cdot I_0$.

4 НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Выполнение задачи моделирования поведения ОУ стандартными средствами Matlab предполагает численное решение системы ОДУ, представляющей математическую модель движения этого объекта.

Для решения систем ОДУ, представленных в нормальной форме, в Matlab имеются несколько стандартных функций, реализующих известные методы численного решения таких систем [7–9]. Эти функции называют решателями (solver) ОДУ. Решатели реализуют следующие методы решения систем дифференциальных уравнений [8]:

– **ode45** – одношаговые явные методы Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядков в модификации Дорманда и Принца. Это классический метод, рекомендуемый для начальной пробы решения. Во многих случаях он дает хорошие результаты – если система решаемых уравнений не жесткая.

– **ode23** – одношаговые явные методы Рунге-Кутты 2-го и 4-го порядков в модификации Богацки и Шампина. При умеренной жесткости системы ОДУ и низких требованиях к точности этот метод может дать выигрыш в скорости решения.

– **ode113** – многошаговый метод Адамса–Башворта–Мултона переменного порядка класса предиктор–корректор. Это адаптивный метод, который может обеспечить высокую точность решения.

– **ode15s** – многошаговый метод переменного порядка (от 1-го до 5-го, по умолчанию 5-го), использующий формулы численного «дифференцирования назад». Это адаптивный метод, его стоит применять, если решатель **ode45** не обеспечивает решения и система дифференциальных уравнений жесткая.

– **ode23s** – одношаговый метод, использующий модифицированную формулу Розенброка 2-го порядка. Может обеспечить высокую скорость вычислений при низкой точности решения жесткой системы дифференциальных уравнений.

– **ode23t** – неявный метод трапеций с интерполяцией. Этот метод дает хорошие результаты при решении задач, описывающих колебательные системы с почти гармоническим выходным сигналом. При умеренно жестких системах дифференциальных уравнений может дать высокую точность решения.

– **ode23tb** – неявный метод Рунге-Кутты в начале решения и метод, использующий формулы «дифференцирования назад» 2-го порядка в последующем. Несмотря на сравнительно низкую точность, этот метод может оказаться более эффективным, чем **ode15s**.

Рассмотрим синтаксис решателя на примере функции **ode45**. Эта функция осуществляет интегрирование численным методом Рунге-Кутты 4-го порядка, а с помощью 5-го порядка контролируют величину шага так, чтобы обеспечить заданные пределы ошибок интегрирования.

Обращение к функции **ode45**, в случае минимально возможного набора параметров, имеет вид

$$[T, Y] = \text{ode45}(@\langle \text{имя_функции_правых_частей} \rangle, tspan, x0),$$

где $\langle \text{имя_ф-ции_правых_частей} \rangle$ – строка символов, являющаяся именем **m**-файла, в котором вычисляется вектор-функция правых части системы ОДУ; **tspan** – вектор-строка, определяющая интервал интегрирования $[t_0, t_f]$ и содержащая два значения: **t0** – начальное значение аргумента, **tf** – конечное значение аргумента; **x0** – вектор начальных условий (значения искомых функций системы ОДУ в начальный момент времени t_0); **T** – массив-столбец значений аргумента, размер которого зависит от способа задания интервала интегрирования **tspan**; **Y** – матрица решений системы дифференциальных уравнений. Решения системы ОДУ упакованы в массиве **Y** по столбцам. В приведённом

варианте вызова функции **ode45** предполагается, что **m**-файл с вычислениями правых частей системы ОДУ находится в текущем каталоге. Если этот файл находится в другом каталоге, то в качестве первого аргумента функции **ode45** приводится полное имя **m**-файла в апострофах.

Указание параметра **tspan** в виде **[t0, tf]** не даёт возможности получать значения решений в интересующих точках интервала интегрирования. Для обеспечения такой возможности необходимо указывать всё интересующее нас множество точек в виде вектора-строки чисел, например, так **[t0:stp:tf]**. Здесь **stp** – шаг выдачи значений решений в матрицу решений **Y**. В таком случае вектор-столбец **T** представляет собой массив значений аргумента, соответствующих шагам выдачи решений, а **Y** – матрица, каждый столбец которой, представляет собой массив решений системы ОДУ по соответствующей компоненте системы уравнений.

Приведём пример Matlab-программы для решения системы двух ОДУ и построения графиков этих решений. Пусть задана система ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) + U \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, постоянными коэффициентами **A** и **B** и постоянным входом **U**. Необходимо решить систему уравнений и построить графики решений на интервале $0 \leq t \leq 10$.

Script-файл основной программы:

```
global A B U;
A=-1; B=-5; U=0.75;
[T,Y] = ode45(@right, [0 10], [0.5 0]);
plot(T,Y(:,1), '- ', T,Y(:, 2), '-.');
```

m-файл функции правых частей:

```
function dxdt = right(t,x)
global A B U;
dxdt = zeros(2,1);
dxdt(1,1) = x(2);
dxdt(2,1) = A*x(1)+B*x(2)+U;
```

Решение задачи моделирования поведения ОУ средствами системы Simulink можно проиллюстрировать примером. На рисунке 4.1 приведена Simulink-схема моделирования процессов в химическом реакторе на основе первых трёх уравнений (объёмы **V** и **V_j** считаем неизменными) системы ОДУ (2.5). В схеме определены два входа Inp_F, Inp_F_j и два выхода Out_Ca, Out_T.

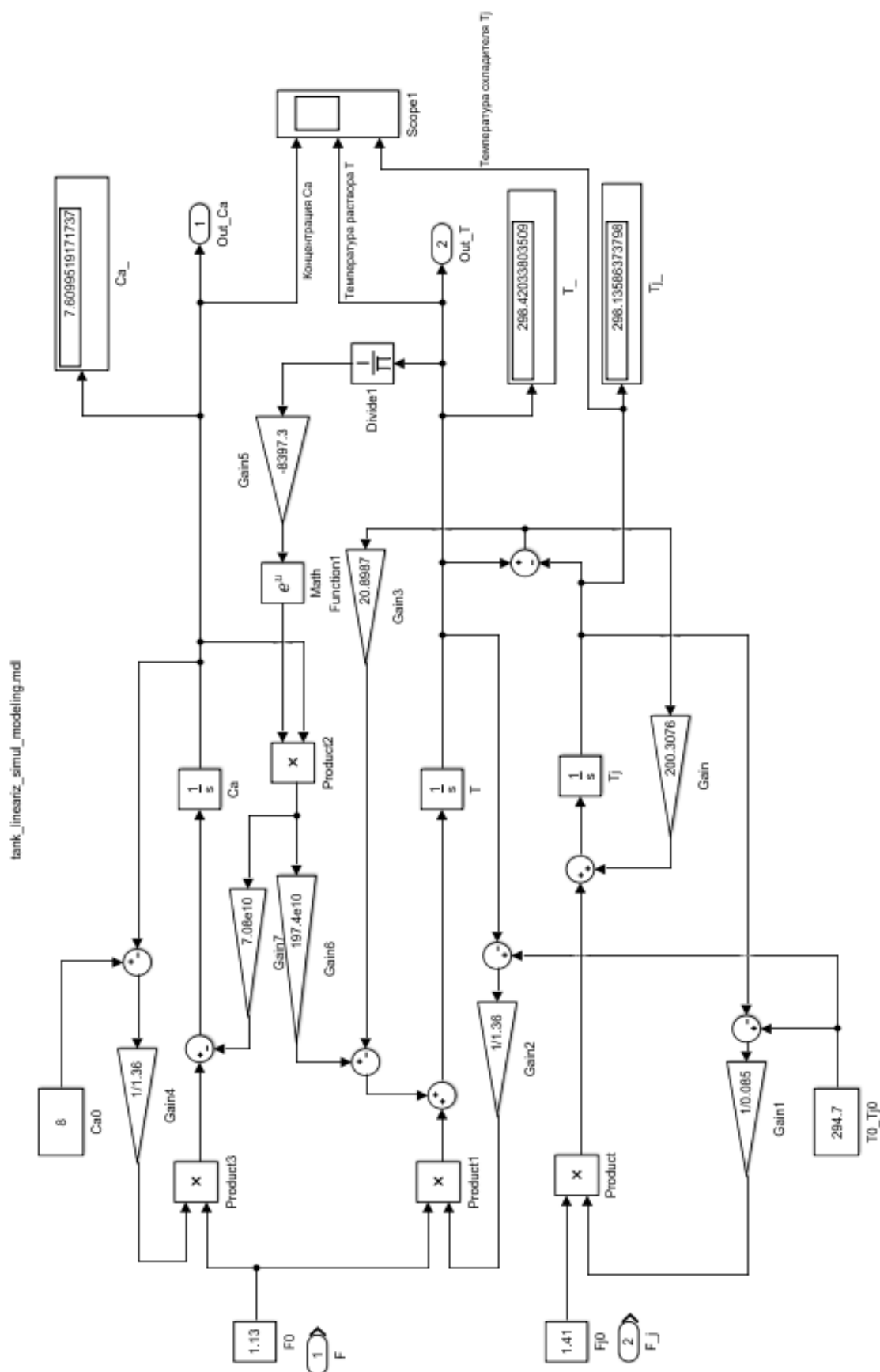


Рис. 4.1 – Simulink–схема нелинейной модели химического реактора

5 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА И ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ РАБОТЫ

В отчёте по лабораторной работе должны быть отражены цель, предварительные математические построения и расчёты, необходимые сведения о методах решения рассматриваемых задач и средствах системы Matlab, тексты программ, схемы моделирования, численные и графические результаты расчётов и построений, выводы по работе.

Защита результатов лабораторной работы производится за компьютером при наличии работающих программ и полностью оформленного отчёта. В ходе защиты студент может получить дополнительные теоретические вопросы и практические задания по существу работы.

6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие законы физики (механики, химии, электротехники и т.п.) были использованы при формировании математической модели исследуемой динамической системы (процесса)?

2. По каким признакам математическая модель Вашей динамической системы относится к классу нелинейных непрерывных динамических систем с сосредоточенными параметрами?

3. Изложите последовательность и содержание этапов метода Эйлера-Лагранжа при получении математической модели динамической системы.

4. Поясните переход от системы ОДУ второго порядка к нормальной форме.

5. Прокомментируйте структуру Matlab-программы моделирования движения динамической системы.

6. Для чего в программе используется модель глобальных параметров?

7. Поясните структуру и состав заголовка функции вычисления правых частей системы ОДУ.

8. Поясните структуру и содержание Simulink-схемы моделирования движения динамической системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карапетьян В.А. Средства Matlab в задачах анализа и синтеза линейных стационарных САУ: учеб. пособие / В.А. Карапетьян, В.А. Крамарь. — М.: Центркаталог, 2019. — 216 с. — (Вузовский учебник).
2. Колюбин С.А. Динамика робототехнических систем: Учебное пособие / С.А. Колюбин. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — 117 с.
3. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления /Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Наука, 1977. — 650 с.
4. Дорф Р. Современные системы управления /Р. Дорф, Р. Бишоп. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. — 832 с.
5. Furuta K. Swing-up Control of Inverted Pendulum Using Pseudo-State Feedback / K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi. — Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering 1992, Vol 206, pp. 263-269.
6. QNET 2.0 Rotary Pendulum. Student Workbook. — Quanser Inc., 2014. — 26 p.
7. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 /И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 1104с.
8. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель / В.П. Дьяконов. — М.: ДМК Пресс, 2012. — 768 с.
9. Лазарев Ю.Ф. Моделирование процессов и систем в Matlab. Учебный курс /Ю.Ф. Лазарев. — СПб.: Питер; К.: Издательская группа BHV, 2005. — 512 с.
10. Гайдук А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: Учебное пособие. — 3-е изд. /А.Р. Гайдук, В.Е. Беляев, Т.А. Пьявченко. — СПб.: Изд-во "Лань", 2016. — 464 с.
11. Linear Pendulum Gantry Experiment for Matlab/Simulink Users. Student Workbook. — Quanser Inc., 2012. — 28 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Пример решения основных задач лабораторной работы

Рассмотрен пример выполнения задач лабораторной работы. В качестве исследуемого ОУ выбрана учебная физическая модель линейной обычной маятниковой системы на тележке с электрическим мотором [11]. Схема этой системы показана на рисунке А.1.

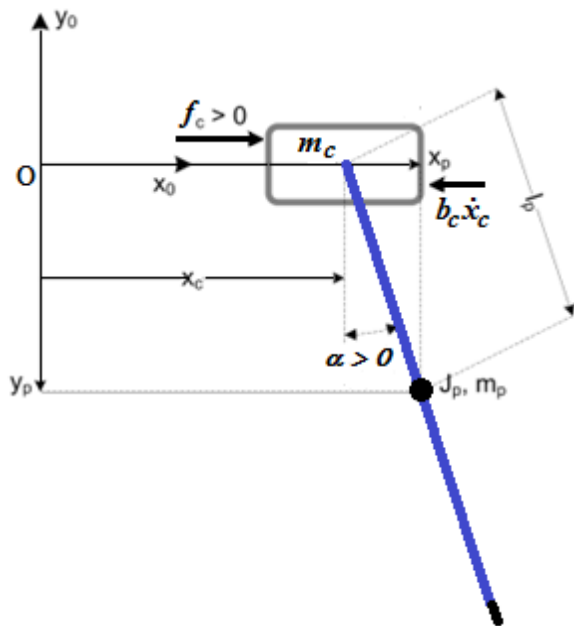


Рис. А.1 – Схема маятниковой системы

Стержень маятника массой m_p и моментом инерции J_p укреплен на шарнире к движущейся вдоль оси x_0 тележке. Центр масс маятника расположен на расстоянии l_p от точки крепления и имеет координаты (x_p, y_p) в декартовой системе координат (x_0, y_0) . Угол поворота маятника α отсчитывается в положительном направлении от строго вертикального положения вниз. Положительное направление движения тележки – слева направо.

Для формирования математической модели движения меха-

нической динамической маятниковой системы будем использовать метод Лагранжа (Эйлера-Лагранжа) [2]. Суть метода состоит в следующем:

- основные вычисления связаны с нахождением полных кинетической и потенциальной энергий системы в целом;
- динамика механической системы рассматривается в целом;
- внутренние силы реакции связей исключаются из уравнений модели;
- уравнения представляются в символьной форме.

Альтернативой методу Лагранжа является метод Ньютона, который основан на составлении динамических уравнений баланса сил и моментов для звеньев и тел, составляющих механическую систему, а также сил реакций связей звеньев системы.

Уравнения математической модели движения механической системы, получаемые на основе применения метода Лагранжа, порождаются уравнениями Лагранжа второго рода следующего вида:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (\text{А.1})$$

где $L = K - P$ – функция Лагранжа или лагранжиан механической системы, K – суммарная кинетическая энергия всех звеньев системы, P – суммарная потен-

циальная энергия всех звеньев системы, f_i – обобщённые силы (моменты τ_i), q_i – обобщённые координаты, n – число степеней свободы системы.

Число степеней свободы n – минимальное количество независимых переменных, полностью описывающих параметры геометрической конфигурации системы.

Обобщённые координаты $q_i, i=1,2,...,n$ – минимальный набор независимых переменных, полностью и однозначно описывающих структуру механической системы в пространстве. Могут быть сформированы различные варианты комплектов (векторов) обобщённых координат. Выбирают обычно тот вариант, который позволяет представить уравнения модели в наиболее простом для записи и решения виде. Производные по времени обобщённых координат $\dot{q}_i, \ddot{q}_i$ называют обобщёнными скоростями и обобщёнными ускорениями соответственно. Обобщённой силой f_i (моментом τ_i), соответствующей обобщённой координате q_i , называют причину, порождающую перемещение – линейное (f_i) или вращательное (τ_i).

Возвращаясь к нашему примеру – маятниковой системе (Рисунок А.1) – выберем в качестве обобщённых координат системы две переменных: $q_1(t)=x_c(t)$ – линейное перемещение тележки вдоль оси x_0 и $q_2(t)=\alpha(t)$ – угол поворота маятника, отсчитываемого в положительном направлении от нижнего вертикального положения.

Вектор обобщённых координат (переменных) $q(t)$ маятниковой системы будет иметь вид:

$$q(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) & \alpha(t) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.2})$$

а вектор обобщённых скоростей $\dot{q}(t)$:

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_c(t)}{dt} & \frac{d\alpha(t)}{dt} \end{bmatrix}^T.$$

В соответствии с введёнными обобщёнными переменными (А.2), уравнения Лагранжа (А.1) для нашего случая можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = f_T, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau_\alpha. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Теперь следует сформировать выражение для лагранжиана L , чтобы подставить его в соотношения (А.3) и получить уравнения движения маятниковой системы. Как следует из предварительного анализа вида соотношений (А.3), уравнения модели будут состоять из двух ОДУ второго порядка относительно переменных $x_c(t)$ и $\alpha(t)$. Чтобы получить выражение для лагранжиана L следует иметь представления для полной кинетической K и полной потенциальной P энергий маятниковой системы.

Для определения кинетической и потенциальной энергий необходимо иметь выражения для текущих координат центра масс маятника (x_p, y_p). Из рисунка А.1 следует, что:

$$x_p = x_c + l_p \sin(\alpha); \quad y_p = -l_p \cos(\alpha),$$

а составляющие линейной скорости центра масс маятника по осям –

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c + l_p \dot{\alpha} \cos(\alpha); \quad \dot{y}_p = l_p \dot{\alpha} \sin(\alpha). \quad (\text{A.4})$$

Потенциальная энергия маятниковой системы определяется исключительно гравитационной потенциальной энергией отклонённого на угол α маятника:

$$P = m_p g l_p (1 - \cos(\alpha)). \quad (\text{A.5})$$

Полная кинетическая энергия маятниковой системы складывается из кинетических энергий поступательного движения тележки, движения центра масс маятника и кинетической энергии вращательного движения маятника вокруг точки крепления его к тележке:

$$K = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2.$$

С учётом выражений для линейных скоростей центра масс маятника (А.4), последнее соотношение примет вид:

$$K = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_c^2 + 2 \dot{x}_c l_p \dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_p^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$K = \frac{1}{2} (m_c + m_p) \dot{x}_c^2 + m_p l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} (J_p + m_p l_p^2) \dot{\alpha}^2. \quad (\text{A.6})$$

Лагранжиан $L = K - P$, с учётом (А.5) и (А.6), определяется следующим выражением:

$$L = K - P = \frac{1}{2} (m_c + m_p) \dot{x}_c^2 + m_p l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} (J_p + m_p l_p^2) \dot{\alpha}^2 - m_p g l_p (1 - \cos(\alpha)). \quad (\text{A.7})$$

Запишем представления для обобщённых сил (моментов) в системе (А.3):

– силы, определяющие горизонтальное перемещение тележки

$$f_T = f_c - b_c \dot{x}_c; \quad (\text{A.8})$$

– момент, влияющий на параметры вращательного движения маятника

$$\tau_\alpha = -b_\alpha \dot{\alpha}. \quad (\text{A.9})$$

Здесь f_c – внешняя горизонтальная сила, приложенная к тележке; $b_c \dot{x}_c$ – сила вязкого трения, обусловленная движением тележки по горизонтальной поверхности (b_c – коэффициент вязкого трения); $b_\alpha \dot{\alpha}$ – сила вязкого трения,

обусловленная трением в шарнире крепления маятника к тележке (b_α – коэффициент вязкого трения).

Теперь можно получить уравнения модели движения маятниковой системы, подставив в систему (А.3) выражение для лагранжиана (А.7) и представления для обобщённых сил (А.8) и моментов (А.9).

Из первого уравнения из системы (А.3) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} &= f_T \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[(m_c + m_p) \dot{x}_c(t) + m_p l_p \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \right] &= f_c - b_c \dot{x}_c(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_c + m_p) \ddot{x}_c(t) + m_p l_p \ddot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) - m_p l_p \dot{\alpha}^2(t) \sin \alpha(t) &= f_c - b_c \dot{x}_c(t). \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Из второго уравнения из системы (А.3) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \tau_\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[m_p l_p \dot{x}_c(t) \cos \alpha(t) + (J_p + m_p l_p^2) \dot{\alpha}(t) \right] + \\ + m_p l_p \dot{x}_c(t) \sin \alpha(t) + m_p g l_p \sin \alpha(t) &= -b_\alpha \dot{\alpha}(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_p l_p \ddot{x}_c(t) \cos \alpha(t) + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\alpha}(t) + m_p g l_p \sin \alpha(t) &= -b_\alpha \dot{\alpha}(t). \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

Уравнения (А.10) и (А.11) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l_p \cos \alpha \\ m_p l_p \cos \alpha & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_c & -m_p l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 & b_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Введём обозначения для векторов и матриц коэффициентов уравнения (А.12):

– матрица инерций – $M(x_c, \alpha) = \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l_p \cos \alpha \\ m_p l_p \cos \alpha & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix};$

– матрица демпфирования (затухания) –

$$C(x_c, \alpha, \dot{x}_c, \dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} b_c & -m_p l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 & b_\alpha \end{bmatrix};$$

– вектор гравитационной силы – $G(x_c, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \sin \alpha \end{bmatrix};$

– вектор внешних сил и моментов – $F = \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}.$

Чтобы выполнить моделирование движения маятниковой системы по уравнениям (А.12), следует привести эту систему к нормальной форме (форме Коши) – системе ОДУ первого порядка, разрешённую относительно первых производных:

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(x, f, t), \quad (\text{А.13})$$

где $x(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ – n –вектор-функция искомых переменных;

$h(t)=[h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)]^T$ – n –вектор-функция правых частей системы (А.13);

$f(t)=[f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)]^T$ – m –вектор-функция внешних воздействий.

Переход от системы (А.12) к нормальной форме (А.13) можно осуществить, например, в два этапа – разрешить систему (А.12) относительно старших производных (в нашем случае – относительно вторых производных $\ddot{x}_c(t)$ и $\ddot{\alpha}(t)$), а затем, введя вектор состояния $x(t)$ из четырёх переменных, сформировать систему вида (А.13).

Выполнение первого этапа преобразования состоит в умножении левой и правой частей системы (А.12) на матрицу, обратную матрице инерций H , тогда векторно-матричное уравнение (А.12) примет вид:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = -H \cdot \begin{bmatrix} b_c & -m_p l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 & b_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} - H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \sin \alpha \end{bmatrix} + H \cdot \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{А.14})$$

где матрица H вычисляется обычным обращением матрицы инерций M :

$$H = \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l_p \cos \alpha \\ m_p l_p \cos \alpha & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\alpha)} \begin{bmatrix} J_p + m_p l_p^2 & -m_p l_p \cos \alpha \\ -m_p l_p \cos \alpha & m_c + m_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{А.15})$$

где $\Delta(\alpha) = (m_c + m_p)(J_p + m_p l_p^2) - m_p^2 l_p^2 \cos^2 \alpha$ – определитель матрицы инерций M .

Существование обратной матрицы инерций H очевидно для любой физически реализуемой маятниковой системы. Этот факт следует из очевидного неравенства для детерминанта матрицы инерций:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \det M(x_c, \alpha) = (m_c + m_p)(J_p + m_p l_p^2) - m_p^2 l_p^2 \cos^2 \alpha = \\ &= (m_c + m_p) J_p + m_c m_p l_p^2 + m_p l_p^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= (m_c + m_p) J_p + m_c m_p l_p^2 + m_p l_p^2 \sin^2 \alpha > 0, \quad \forall (m_c > 0, m_p > 0, J > 0, \alpha). \end{aligned} \quad (\text{А.16})$$

Выполним второй этап преобразования (А.12) к нормальной форме. Введём вектор состояния будущей нормальной системы, например, следующим образом:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix},$$

тогда систему (А.14) можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & H_{11}b_c & -H_{11}m_p l_p x_4 \sin x_2 + H_{12}b_\alpha \\ 0 & 0 & H_{21}b_c & -H_{21}m_p l_p x_4 \sin x_2 + H_{22}b_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{12}m_p g l_p \sin x_2 \\ H_{22}m_p g l_p \sin x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ H_{11} & 0 \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

где H_{ij} – элементы обратной матрицы инерций H из (А.15).

Первая матричная функция из (А.17) в развёрнутом виде представляется как

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_c (J_p + m_p l_p^2) / \Delta(\alpha) & [(J_p + m_p l_p^2) m_p l_p x_4 \sin x_2 + b_\alpha m_p l_p \cos x_2] / \Delta(\alpha) \\ 0 & 0 & b_c m_p l_p \cos x_2 / \Delta(\alpha) & -[0, 5 m_p^2 l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2x_2 + b_\alpha (m_c + m_p)] / \Delta(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\text{вторая} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0, 5 m_p^2 l_p^2 g \sin 2x_2 / \Delta(\alpha) \\ -(m_c + m_p) m_p g l_p \sin x_2 / \Delta(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \text{третья} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (J_p + m_p l_p^2) / \Delta(\alpha) & 0 \\ -m_p l_p \cos x_2 / \Delta(\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Параметры маятниковой системы приведены в Таблице А.1 [11].

Таблица А.1

Значения параметров маятниковой системы

Параметр	Значение	Ед. изм.	Пояснение
m_c	0.37	кг	Масса тележки
m_p	0.127	кг	Масса маятника
l_p	0.1778	м	Расстояние от крепления до ЦМ маятника
J_p	$1.1987 \cdot 10^{-3}$	кг·м ²	Момент инерции маятника

b_α	0.0024	Н·м·сек/рад	Коэффициент вязкого трения в шарнире
b_c	0.0005	Н/(м/сек)	Коэффициент вязкого трения тележки
g	9.81	м/сек ²	Ускорение свободного падения

Далее, по уравнениям модели (А.17), выражений для матриц (А.18) и значений параметров маятниковой системы из таблицы А.1, можно составить Matlab-программу моделирования движения системы. По сути, назначение этой программы – численное решение системы нелинейных ОДУ (А.17). Пример текста такой программы и графические результаты счёта приведены ниже. Программа включает в себя собственно вызывающую программу (script-файл **Pendulum_Nonlinear_LR.m**) и файл с функцией для вычисления правых частей для решателя системы ОДУ (m-файл **RP_Nonlinear_LR.m**).

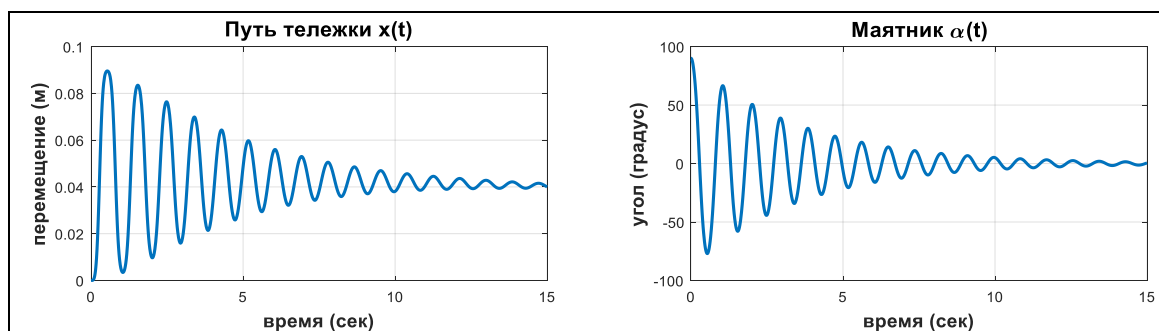
Текст (листинг) script-файл **Pendulum_Nonlinear_LR.m**

```
clc; clear all;
%% Передача данных в функцию вычисления правых частей системы ОДУ
global mc_mp Jp_mplp2 mp2lp2 mplp bc ba g U;
%% Значения параметров маятниковой системы
mc=0.37;      % - масса тележки [кг]
mp=0.127;     % - масса груза [кг]
bc=0.0005;    % - коэффициент вязкого трения тележки [Н/м/сек]
ba=0.0024;    % - коэффициент вязкого трения в маятнике [Н*м/(rad/сек)]
lp=0.1778;    % - расстояние между осью маятника ЦМ [м]
Jp=1.1987e-3;% - момент инерции массы маятника [кг*м^2]
g = 9.81;     % - ускорение свободного падения [м/сек^2]
% X=[xc alpha Dxc Dalpha]' - вектор состояния
%% Вспомогательные постоянные функции правых частей системы ОДУ
mc_mp=mc+mp;
Jp_mplp2=Jp+mp*lp^2;
mp2lp2=mp^2*lp^2;
mplp=mp*lp;
%% Установка исходных данных и решение системы ОДУ
x0=deg2rad([0 90 0 0]');
t_end=15;
U=0.0;
[t,y]=ode23tb(@RP_NonLinear_LR,[0 t_end],x0);
%% Построение графиков перемещения тележки и изменения угла маятника
subplot(2,1,1); plot(t,y(:,1)); grid on; title('Путь тележки x(t)');
subplot(2,1,2); plot(t,y(:,2)*180/pi); grid on; title('Маятник
\alpha(t)');
```

Текст (листинг) m-файла **RP_Nonlinear_LR.m**

```
function Y=RP_NonLinear_LR(t,X)
global mc_mp Jp_mplp2 mp2lp2 mplp bc ba g U;
D=mc_mp*Jp_mplp2 - mp2lp2*cos(X(2))^2;
Y=zeros(4,1);
Y(1)=X(3);
Y(2)=X(4);
Y(3)=(-
bc*Jp_mplp2*X(3)+(ba*mplp*cos(X(2))+mplp*sin(X(2))*X(4)*Jp_mplp2)*X(4)+...
0.5*g*mp2lp2*sin(2*X(2))+Jp_mplp2*U)/D;
Y(4)=(bc*mplp*cos(X(2))*X(3)+(-ba*(mc_mp)-0.5*mp2lp2*sin(2*X(2))*X(4))*X(4)-
...
g*mplp*sin(X(2))*mc_mp-mplp*cos(X(2))*U)/D;
```

Результаты работы программы моделирования движения маятниковой системы



Simulink-схема для проведения процедуры моделирования движения маятниковой системы строится в соответствии со схемой рисунка 4.1.

Учебное издание

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ**

Методические указания

Составители:

Карапетьян Валерий Артёмович,
Крамарь Вадим Александрович

В авторской редакции

Изд. № 108/2020. Объем 2,25 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет"