

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт информационных технологий и
управления в технических системах
Кафедра информатики и управления в технических системах

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК САУ

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
по дисциплине "Теория автоматического управления"
для студентов направления подготовки
27.03.04 – "Управление в технических системах"



Севастополь
СевГУ
2020

УДК 681.5.012:004.942 (076.5)

ББК 32.965.4

И 87

Рецензент:

А.А. Кабанов – зав. кафедрой "Информатика и управление в технических системах", кандидат техн. наук, доцент

Составители: Карапетьян В.А., Крамарь В.А.

И 87 Исследование динамических характеристик САУ: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине "Теория автоматического управления" для студентов направления подготовки 27.03.04 – "Управление в технических системах" / Сост. В.А. Карапетьян, В.А. Крамарь. – Севастополь: СевГУ, 2020. – 20 с.

В методических указаниях приводится описание лабораторной работы, целью которой является построение и исследование динамических характеристик САУ и освоение возможностей среды MATLAB для решения соответствующих задач.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения направления подготовки 27.03.04 – "Управление в технических системах".

УДК 681.5.012:004.9 (076.5)

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 6 от 28 февраля 2020 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании ученого совета Института информационных технологий и управления в технических системах, протокол № 4 от 3 марта 2020 г.

В авторской редакции

Изд. № 112/2020. Объем 1,25 п.л.

РИИЦМ ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет"

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	3
2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	3
2.1 Общие положения	3
2.2 Взаимосвязь между свойствами сигнала и расположением полюсов его изображения	6
2.3 Динамические характеристики типовых звеньев.....	9
2.3.1 Идеальное усилительное (безынерционное) звено.....	10
2.3.2 Аperiodическое (инерционное) звено.....	10
2.3.3 Колебательное звено	11
2.3.4 Идеальное интегрирующее звено.....	13
2.3.5 Инерционное дифференцирующее звено.....	13
2.4. Показатели качества САУ	14
3 ИССЛЕДУЕМЫЕ МОДЕЛИ	16
4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	16
5 РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ.....	17
6 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.....	19
7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	19
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	20

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Построение и анализ динамических характеристик систем автоматического управления (САУ) и получение навыков исследования линейных динамических моделей с использованием пакета Control System Toolbox среды научных и инженерных расчетов Matlab.

2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 Общие положения

В теории автоматического управления (ТАУ) поведенческие свойства линейных стационарных систем (ЛСС) изучаются на основе построения и анализа динамических характеристик систем. Исследования этих характеристик для ЛСС основывается как на изучении алгебраических параметров математических моделей, так и на анализе функциональных характеристик во временной и частотных областях.

Алгебраический подход – анализ динамических характеристик на основе изучения алгебраических свойств различных видов моделей ЛСС: собственных

чисел матрицы динамических коэффициентов A ; коэффициентов полиномов числителя и знаменателя, нулей и полюсов ПФ $W(s)$.

Функциональный подход – анализ динамических характеристик на основе изучения временных и частотных функций ЛСС:

– временные характеристики – построение реакций (переходных процессов) ЛСС в виде аналитических выражений (формул) или графических построений (графиков) на типовые воздействия: функцию единичного скачка, дельта-функцию, линейно нарастающую и гармоническую функции;

– частотные характеристики – построение частотных функций ЛСС в виде аналитических выражений (формул) или графических построений (графиков, годографов) в обычном или логарифмическом масштабах: амплитудно- и фазо-частотные характеристики ($A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$), амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)$ (годограф Найквиста), логарифмические частотные характеристики (характеристики Боде) и др.

Рассмотрим линейную стационарную одномерную (SISO) систему автоматического управления (САУ), описываемую обыкновенным линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами [1 ÷ 6]:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u(t)$ – входной процесс; $y(t)$ – выходной процесс; $a_i, b_j, (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ – постоянные коэффициенты; $n, m (n \geq m)$ – целые неотрицательные числа.

В ТАУ системы (2.1) часто представляют в виде передаточной функции (ПФ) $W(s)$ – алгебраического выражения в форме дробно-рациональной функции комплексной переменной s :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (2.2)$$

где $Y(s) = L\{y(t)\}$ и $U(s) = L\{u(t)\}$ – изображения по Лапласу выходного и входного процессов системы соответственно; $B(s)$ и $A(s)$ – полиномы числителя и знаменателя ПФ $W(s)$. Полином (многочлен) $A(s)$ называют характеристическим полиномом системы (2.1).

Комплексные числа, являющиеся нулями многочлена $B(s)$, называются нулями передаточной функции, а нули многочлена $A(s)$ – полюсами ПФ.

Динамические свойства САУ во временной области характеризуются её реакциями на входные воздействия специального вида, в частности, на функцию единичного скачка $1(t)$ и $\delta(t)$ -функцию (дельта-функцию) [1].

Пусть $u(t) = 1(t)$, то есть на вход системы подается функция Хэвисайда (функция единичного скачка), определяемая как

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Реакция САУ на единичный скачок называется единичной переходной функцией системы и обозначается $h(t)$. График единичной переходной функции – кривую зависимости функции $h(t)$ от времени t – называют переходной или разгонной характеристикой.

Если $u(t) = \delta(t)$, т.е., на вход системы поступает функция Дирака (δ -функция), определяемая как

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

то реакция САУ называется импульсной переходной функцией системы и обозначается $g(t)$. График импульсной переходной функции называют импульсной переходной характеристикой.

Импульсная и единичная переходные функции связаны соотношением:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau; \quad \frac{d}{dt} h(t) = g(t).$$

Если модель системы задана в виде передаточной функции $W(s)$, то единичную $h(t)$ и импульсную $g(t)$ переходные функции можно получить, применяя обратное преобразование Лапласа к их изображениям $H(s)$ и $G(s)$:

$$H(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s}; \quad G(s) = W(s).$$

Для систем (2.2) особыми точками $W(s)$ являются полюсы и удобным средством вычисления и исследования функций $h(t)$ и $g(t)$ выступает теорема вычетов [7]. Согласно этой теореме функция-оригинал $x(t)$ определяется как сумма вычетов в окрестности полюсов изображения $X(s)$

$$x(t) = \sum_{s_k} \operatorname{res}_{s_k} (e^{st} X(s)),$$

где s_k – полюсы изображения $X(s)$, а символ res – обозначает вычет.

В случае определения вычета в окрестности простого полюса s_k изображения, вычет вычисляется следующим образом:

$$\operatorname{res}_{s_k} (e^{st} X(s)) = \lim_{s \rightarrow s_k} e^{st} (s - s_k) X(s).$$

Пример. Рассмотрим изображение сигнала

$$X(s) = \frac{-4 - 10s}{s(s^2 + 4s + 3)}.$$

Найдем оригинал $x(t)$ сигнала. Полюсы указанного изображения простые и вещественные: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = -1$; $\alpha_3 = -3$. Найдем вычеты для каждого полюса:

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow 0} X(s) e^{st} = -\frac{4}{3}; \quad \operatorname{res}_{s \rightarrow -1} X(s) e^{st} = -3e^{-t}; \quad \operatorname{res}_{s \rightarrow -3} X(s) e^{st} = \frac{13}{3} e^{-3t}.$$

Оригинал сигнала равняется сумме указанных вычетов

$$x(t) = -\frac{4}{3} - 3e^{-t} + \frac{13}{3}e^{-3t}.$$

В случае определения вычета в окрестности кратного полюса изображения (s_k кратности m), вычет вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}_{s_k} e^{st} X(s) = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [e^{st} (s - s_k)^m X(s)].$$

Пример. Рассмотрим изображение сигнала

$$X(s) = \frac{k}{s^2}.$$

Найдем оригинал $x(t)$ сигнала. Изображение имеет полюс $s_1=0$ кратности $m=2$. Тогда, оригинал сигнала равняется вычету в окрестности указанного полюса.

$$x(t) = \operatorname{res}_{s \rightarrow 0} X(s) e^{st} = \frac{d}{ds} (k e^{st}) \Big|_{s=0} = t \cdot k e^{st} \Big|_{s=0} = t \cdot k.$$

Динамические свойства ЛСС в частотной области определяются частотными характеристиками. В практике использования частотных методов исследования динамических свойств ЛСС основными объектами рассмотрения являются именно частотные характеристики – графики и частотные годографы частотных передаточных функций $W(j\omega)$ и её элементов: вещественной $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ и мнимой $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ частотных характеристик; амплитудно-частотной $A(\omega) = |W(j\omega)|$ и фазо-частотной $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ характеристик; амплитудно-фазовой частотной характеристики $W(j\omega)$ или годографа Найквиста; логарифмической амплитудно-частотной характеристики ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ и логарифмической фазо-частотной характеристикой $\varphi(\omega) = \varphi(\lg \omega)$ или характеристиками Боде. Взаимосвязь частотных характеристик определяется следующими известными соотношениями:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega); & W(j\omega) &= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}; \\ U(\omega) &= \operatorname{Re} W(j\omega); & V(\omega) &= \operatorname{Im} W(j\omega); \\ A(\omega) &= |W(j\omega)|; & \varphi(\omega) &= \arg W(j\omega); \\ U(\omega) &= A(\omega) \cos \varphi(\omega); & V(\omega) &= A(\omega) \sin \varphi(\omega); \\ A^2(\omega) &= U^2(\omega) + V^2(\omega); & \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \end{aligned}$$

2.2 Взаимосвязь между свойствами сигнала и расположением полюсов его изображения

Рассмотрим два случая.

1. *Простые полюсы изображения:*

а) Пусть $s_k = \alpha$ – простой вещественный полюс изображения $X(s)$. Тогда исходное изображение сигнала можем представить в виде

$$X(s) = \frac{\varphi(s)}{(s - \alpha)},$$

где $\varphi(s)$ – аналитическая функция, причем $\varphi(\alpha) \neq 0$. Вычет в окрестности указанного полюса будет иметь вид

$$f(t) = \operatorname{res}_{\alpha} e^{st} X(s) = \lim_{s \rightarrow \alpha} e^{st} \varphi(s) = \varphi(\alpha) e^{\alpha t}.$$

При $\alpha > 0$ сигнал $\varphi(\alpha) e^{\alpha t}$ возрастает по модулю, при $\alpha < 0$ – убывает по модулю, при $\alpha = 0$ – функция равна $\varphi(0) = \text{const}$.

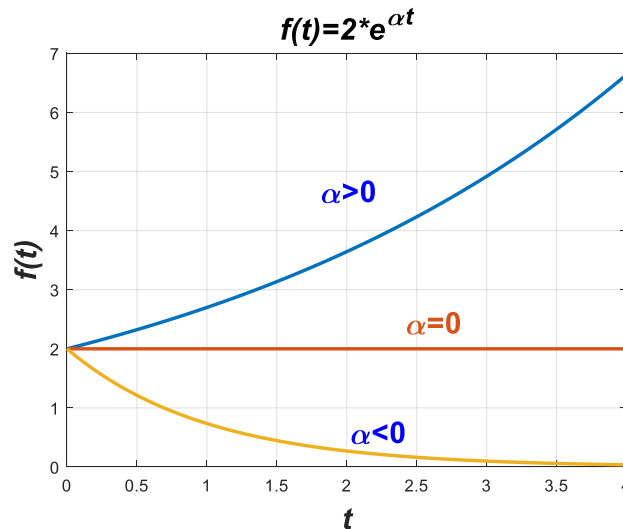


Рис. 2.1 – Поведение сигнала $f(t) = 2e^{\alpha t}$, $\alpha \in \{0.3; 0; -0.3\}$

Пример. Пусть $X(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s-2)}$. Указанное изображение имеет полюсы $\alpha_1 = -1$ и $\alpha_2 = 2$. Полюсы простые и вещественные. Оригинал определяется как сумма вычетов в окрестности этих полюсов:

$$x(t) = -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{7}{3}e^{2t}.$$

Указанный сигнал будет возрастать;

б) Пусть s_k – комплексный полюс, т.е. $s_k = \alpha + j\beta$. Следовательно, существует и комплексно сопряженный полюс $s_{k+1} = \alpha - j\beta$. Тогда изображение сигнала, например, представимо в виде

$$X(s) = \frac{\varphi(s)}{(s - \alpha - j\beta)(s - \alpha + j\beta)},$$

где $\varphi(s_k) = a + jb$, $\varphi(s_{k+1}) = a - jb$.

Сумма вычетов в полюсах будет равна:

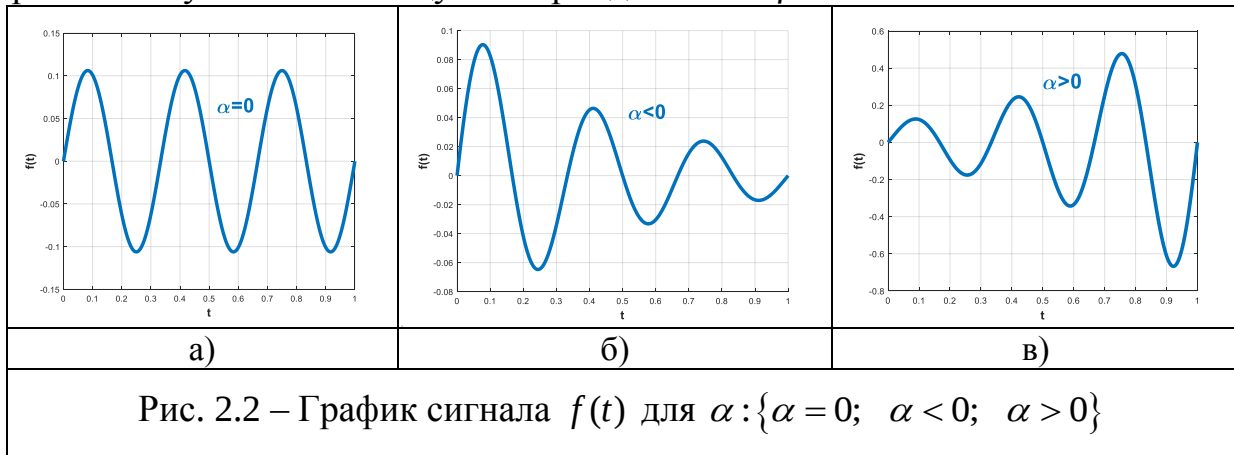
$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}_{s_k} e^{st} X(s) + \operatorname{res}_{s_{k+1}} e^{st} X(s) = \frac{a + jb}{2j\beta} e^{\alpha t + j\beta t} + \frac{a - jb}{-2j\beta} e^{\alpha t - j\beta t} = \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} (a \sin \beta t + b \cos \beta t). \end{aligned}$$

$$f(t) = \underset{s_k}{\text{res}} e^{s_k t} X(s) + \underset{s_{k+1}}{\text{res}} e^{s_{k+1} t} X(s) = \frac{a + jb}{2j\beta} e^{\alpha t + j\beta t} + \frac{a - jb}{-2j\beta} e^{\alpha t - j\beta t} =$$

$$= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \left[a \left(\frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j} \right) + b \left(\frac{e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}}{2} \right) \right] = \frac{e^{\alpha t}}{\beta} (a \sin \beta t + b \cos \beta t).$$

В зависимости от знака α примерные графики функции $f(t)$ приведены на рисунках 2.2а ($\alpha=0$ – амплитуда сигнала не меняется), 2.2б ($\alpha<0$ – амплитуда сигнала экспоненциально уменьшается), 2.2в ($\alpha>0$ – амплитуда сигнала экспоненциально увеличивается).

– $\alpha = 0$. График сигнала, определяемого суммой двух указанных вычетов, приведен на рисунке 2.2. Каждый из трёх сигналов содержит явно выраженную гармоническую составляющую с периодом $T=2\pi/\beta$.



Пример. Пусть $x(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}$. Указанное изображение сигнала имеет полюсы $s_1 = 2j$ и $s_2 = -2j$. Полюсы – простые и комплексно-сопряженные. Сигнал, соответствующий указанному изображению, будет гармоническим с постоянной амплитудой ($\alpha=0$) и периодом ($\beta=2$), равным $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

2. *Кратные полюсы изображения:*

а) Пусть $s_k = \alpha$ – вещественный полюс изображения $X(s)$ кратности m . Тогда,

$$X(s) = \frac{\varphi(s)}{(s - \alpha)^m},$$

где $\varphi(\alpha) \neq 0$. Вычет в окрестности указанного полюса имеет вид

$$f(t) = \underset{s_k}{\text{res}} e^{st} X(s) = \lim_{s \rightarrow \alpha} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [e^{st} X(s) (s - \alpha)^m] = \lim_{s \rightarrow \alpha} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [e^{st} \varphi(s)].$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{ds} [\varphi(s) e^{st}]_{s=s_k} = [\varphi'(s) e^{st} + t \varphi(s) e^{st}]_{s=s_k} = \{ [\varphi'(s) + t \varphi(s)] e^{st} \}_{s=s_k},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} [\varphi(s)e^{st}]_{s=s_k} &= [\varphi''(s)e^{st} + 2t\varphi'(s)e^{st} + t^2\varphi(s)e^{st}]_{s=s_k} = \\ &= \left\{ [\varphi''(s) + 2t\varphi'(s) + t^2\varphi(s)] e^{st} \right\}_{s=s_k}, \end{aligned}$$

и т.д., получаем, что вычет имеет вид

$$\operatorname{res}_{s_k=\alpha} e^{st} X(s) = P_{m-1}(t)e^{\alpha t},$$

где $P_{m-1}(t)$ – полином степени $m-1$, старший коэффициент которого равен $\frac{\varphi(\alpha)}{(m-1)!}$, а остальные зависят от производных $\varphi^k(\alpha)$.

Таким образом, наличие кратного полюса приводит к тому, что вычет в этом полюсе содержит многочлен от t $(m-1)$ -ой степени, где m – кратность полюса;

б) Пусть s_k – комплексный полюс изображения $X(s)$ кратности m . Рассуждая по аналогии с вышеизложенными случаями, получаем, что сумма вычетов в окрестности комплексного полюса s_k и сопряженного ему s_{k+1} имеет вид

$$\operatorname{res}_{s_k} e^{st} X(s) + \operatorname{res}_{s_{k+1}} e^{st} X(s) = P_{m-1}(t) \frac{e^{\alpha t}}{\beta} (a \sin \beta t + b \cos \beta t).$$

2.3 Динамические характеристики типовых звеньев

Для проведения анализа динамических свойств САУ её разбивают на отдельные "элементарные" динамические звенья, имеющие порядок не выше второго. В ТАУ выделяют несколько групп типовых (элементарных) звеньев: звенья позиционного типа (полиномы числителя и знаменателя ПФ имеют ненулевые свободные члены, $b_0 \neq 0$ и $a_0 \neq 0$), интегрирующего типа (полином знаменателя ПФ не имеет свободного члена, $b_0 \neq 0$ и $a_0 = 0$), дифференцирующего типа (полином числителя ПФ не имеет свободного члена, $b_0 = 0$ и $a_0 \neq 0$), звено запаздывания $W(s) = e^{-\tau s}$. Здесь следует заметить, что при формальном разбиении системы на элементарные звенья, мы могут получиться так называемые "физически нереализуемые" звенья – это звенья с "неправильными" передаточными функциями. Неправильная ПФ – это ПФ, у которой порядок (степень) полинома числителя m превышает порядок (степень) полинома знаменателя n .

Общее выражение для ПФ (2.2) может быть формально представлено как произведение простейших множителей вида [1]:

$$K, \quad s, \quad \frac{1}{s}, \quad Ts \pm 1, \quad \frac{1}{Ts \pm 1}, \quad T^2 s^2 \pm 2\xi Ts + 1, \quad \frac{1}{T^2 s^2 \pm 2\xi Ts + 1}, \quad \frac{1}{T^2 s^2 \pm 1}. \quad (2.3)$$

Здесь константу K называют передаточным коэффициентом (коэффициентом усиления), константу T – постоянной времени, а константу ξ ($0 < \xi < 1$) – коэффициентом демпфирования. Все эти константы, в силу их естественной физической природы, являются вещественными числами.

Каждое из этих звеньев имеет собственное название. В перечне (2.3) звенья именуются так: пропорциональное, дифференцирующее, интегрирующее, фор-

сирующее 1-го порядка, апериодическое (инерционное), форсирующее 2-го порядка, колебательное, консервативное.

Среди множителей (2.3) передаточной функцией не может быть второй (s), четвёртый ($Ts \pm 1$) и шестой ($T^2s^2 \pm 2\xi Ts + 1$) множители – их "передаточные функции" физически нереализуемы. Поэтому, при разбиении физически реализуемой ПФ общего вида (2.2), этим множителям-числителям всегда соответствуют множители-знаменатели необходимого порядка. Это приводит к замене таких множителей формально физически реализуемыми передаточными функциями вида:

$$\frac{s}{Ts \pm 1}, \quad \frac{Ts \pm 1}{s}, \quad \frac{T_1s \pm 1}{T_2s \pm 1}, \quad \frac{T_1s \pm 1}{T^2s^2 \pm 2\xi Ts + 1}, \quad \frac{T_1s \pm 1}{T^2s^2 + 1},$$

$$\frac{T^2s^2 \pm 2\xi Ts + 1}{s(T_1s \pm 1)}, \quad \frac{T^2s^2 \pm 2\xi Ts + 1}{(T_1s \pm 1)(T_2s \pm 1)}, \quad \frac{T^2s^2 \pm 2\xi Ts + 1}{T_1^2s^2 \pm 2\xi_1 T_1s + 1}, \quad \frac{T^2s^2 \pm 2\xi Ts + 1}{T_1^2s^2 + 1}.$$

Некоторые из этих звеньев также имеют свои особые названия: первое – реальное дифференцирующее; второе – изодромное; третье – реальное форсирующее первого порядка.

Динамическими характеристиками типовых звеньев называют их временные и частотные характеристики:

– переходные реакции этих звеньев на типовые воздействия – единичную переходную $h(t)$ и импульсную переходную (весовую) $g(t)$ характеристики;

– частотные характеристики ВЧХ $U(\omega)$, МЧХ $V(\omega)$, АЧХ $A(\omega)$, ФЧХ $\varphi(\omega)$, АФЧХ $W(j\omega)$, ЛАЧХ $L(\omega)$.

2.3.1 Идеальное усилительное (безынерционное) звено

Передаточная функция идеального усилительного (безынерционного) звена имеет вид

$$W(s) = k.$$

Переходная и весовая характеристики указанного звена определяются как:

$$h(t) = k, \quad (t > 0); \quad g(t) = k \cdot \delta(t).$$

Частотные характеристики безынерционного звена:

$$\forall \omega \in [0, \infty) : W(j\omega) = k; U(\omega) = k; V(\omega) = 0; A(\omega) = k; \varphi(\omega) = 0; L(\omega) = 20 \lg k.$$

2.3.2 Апериодическое (инерционное) звено

Передаточная функция апериодического звена имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

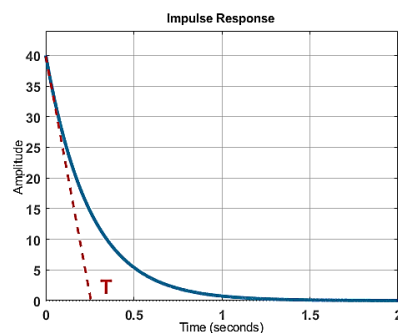
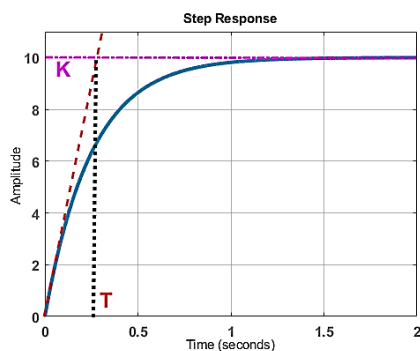
Переходная функция указанного звена определяется выражением

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t > 0,$$

а весовая функция –

$$g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t > 0.$$

Графики этих функций изображены на рисунке 2.3.



$h(t)$ – единичная переходная характеристика $g(t)$ – импульсная переходная характеристика

Рис. 2.3 – Временные характеристики апериодического звена 1-го порядка

Постоянная времени T определяет наклон касательной в начале кривой, следовательно, величина T характеризует степень инерционности звена, т.е. длительность переходного процесса.

Практически, с точностью до 5 %, переходный процесс заканчивается за время $t_{nn} = (3 \div 4)T$.

Частотные характеристики апериодического звена 1-го порядка:

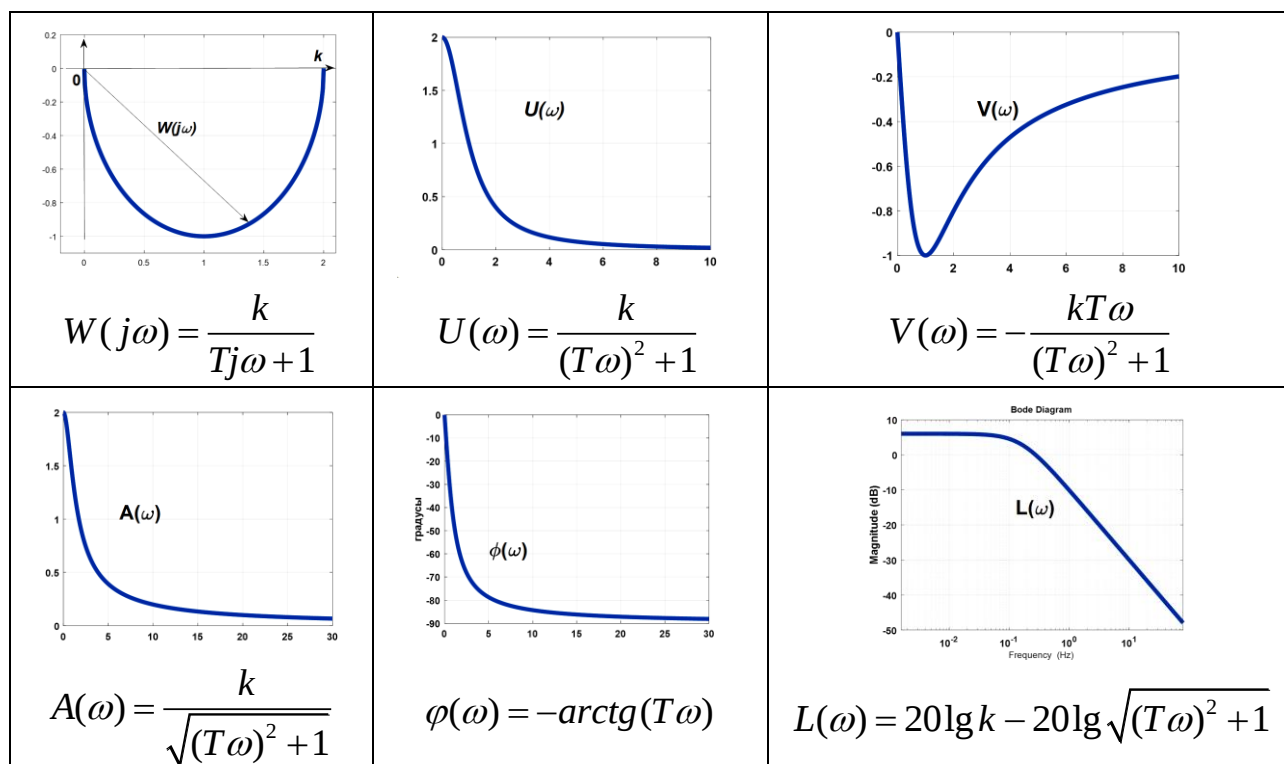


Рис. 2.4 – Частотные характеристики апериодического звена 1-го порядка

2.3.3 Колебательное звено

Дифференциальное уравнение колебательного звена имеет вид

$$T^2 x''(t) + 2\xi T x'(t) + x(t) = ku(t),$$

причем $0 < \xi < 1$, а передаточная функция –

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

Два комплексно-сопряженных полюса ПФ определяются как

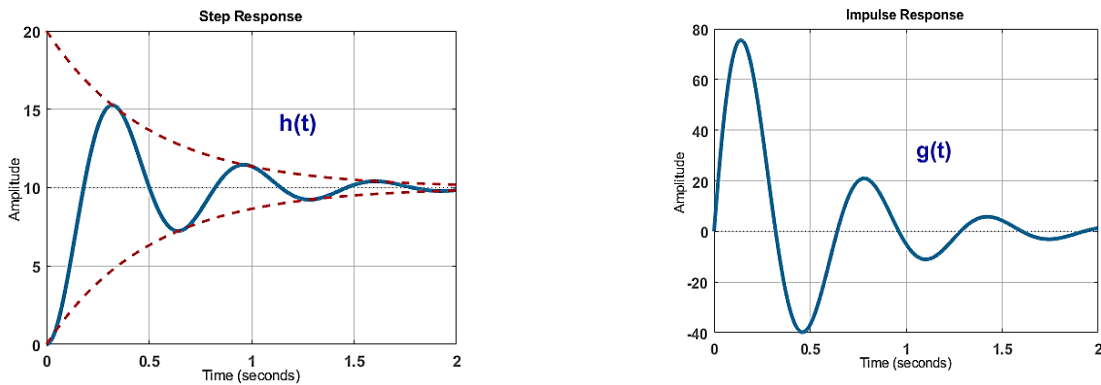
$$s_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\alpha \pm j\Omega; \quad \alpha = \frac{\xi}{T}; \quad \Omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}.$$

Единичная переходная $h(t)$ и весовая $g(t)$ функции колебательного звена представлены следующими соотношениями:

$$h(t) = k \left[1 - Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) \right], \quad g(t) = \frac{k}{T} Ae^{-\alpha t} \sin \Omega t, \quad t > 0,$$

где $A = 1/\sqrt{1 - \xi^2}$; $\varphi = \arctg(\sqrt{1 - \xi^2}/\xi)$.

Временные характеристики колебательного звена изображены на рисунке 2.5.



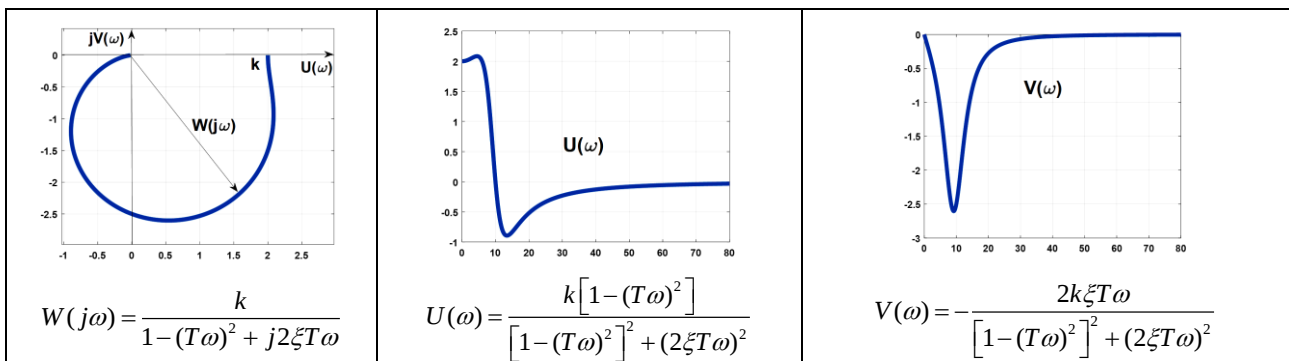
$h(t)$ – единичная переходная характеристика $g(t)$ – импульсная переходная характеристика

Рис. 2.5 – Временные характеристики колебательного звена

Огибающая (красный пунктир) на рисунке 2.5 и частота колебаний определяется соответственно формулами $ke^{-\frac{\xi}{T}t}$ и $\sqrt{1 - \xi^2}/T$.

Длительность переходного процесса определяется как $t_{nn} = (3 \div 4) \frac{T}{\xi}$.

Частотные характеристики колебательного звена:



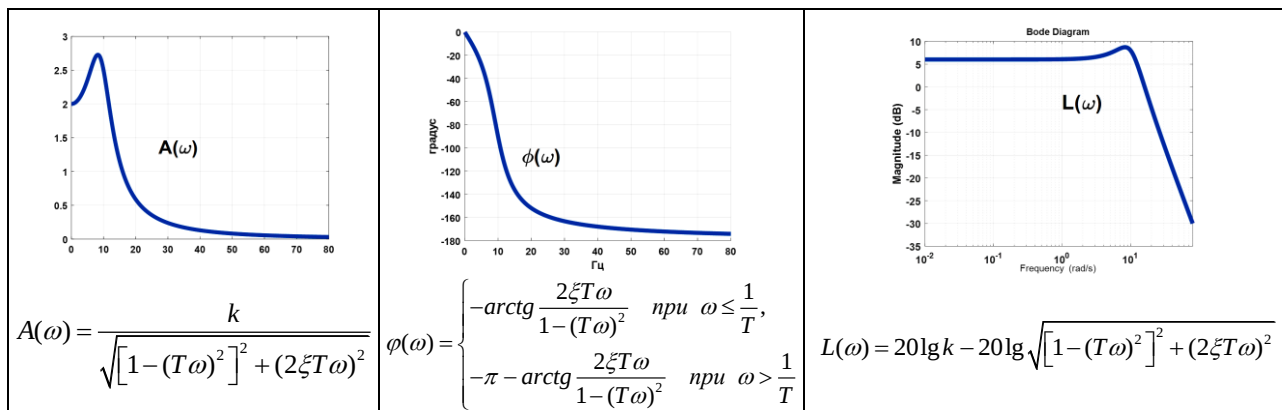


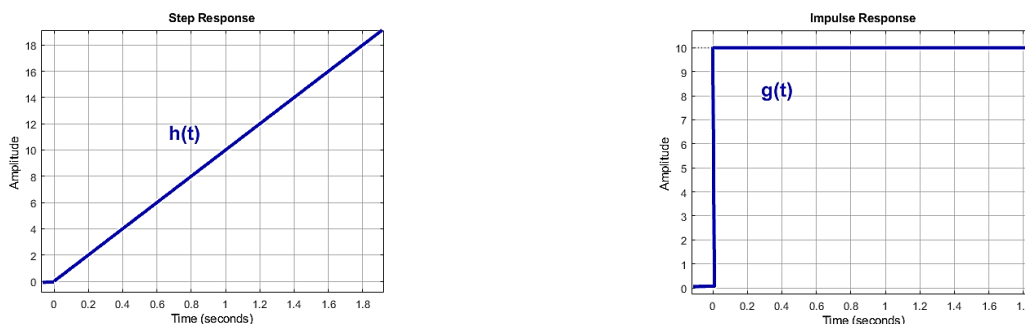
Рис. 2.6 – Частотные характеристики колебательного порядка

2.3.4 Идеальное интегрирующее звено

Дифференциальное уравнение и передаточная функция звена имеют вид:

$$x'(t) = ku(t), \quad W(s) = \frac{k}{s}.$$

Переходная и весовая характеристики звена приведены на рисунке 2.7.



$h(t)$ – единичная переходная характеристика $g(t)$ – импульсная переходная характеристика

Рисунок 2.7 – Временные характеристики идеального интегрирующего звена

Единичная переходная $h(t)$ и весовая $g(t)$ функции идеального интегрирующего звена определены как:

$$h(t) = k \cdot t; \quad g(t) = k.$$

Частотные характеристики идеального интегрирующего звена:

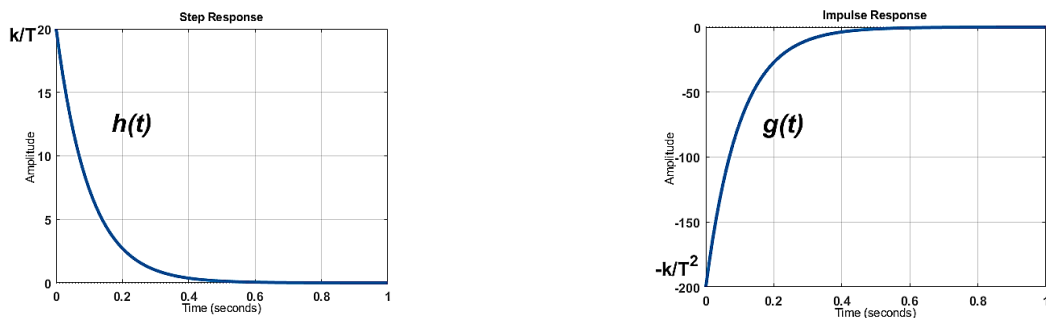
$$W(j\omega) = -jk/\omega; \quad U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = -k/\omega; \quad A(\omega) = k/\omega; \quad \varphi(\omega) = -\pi/2; \quad L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega.$$

2.3.5 Инерционное дифференцирующее звено

Дифференциальное уравнение и передаточная функция звена имеют вид:

$$Tx'(t) + x(t) = ku'(t), \quad W(s) = \frac{ks}{Ts + 1}.$$

Переходная и весовая характеристики звена приведены на рисунках 2.9.



$h(t)$ – единичная переходная характеристика $g(t)$ – импульсная переходная характеристика

Рис. 2.9 – Временные характеристики реального дифференцирующего звена

Частотные характеристики инерционного дифференцирующего звена:

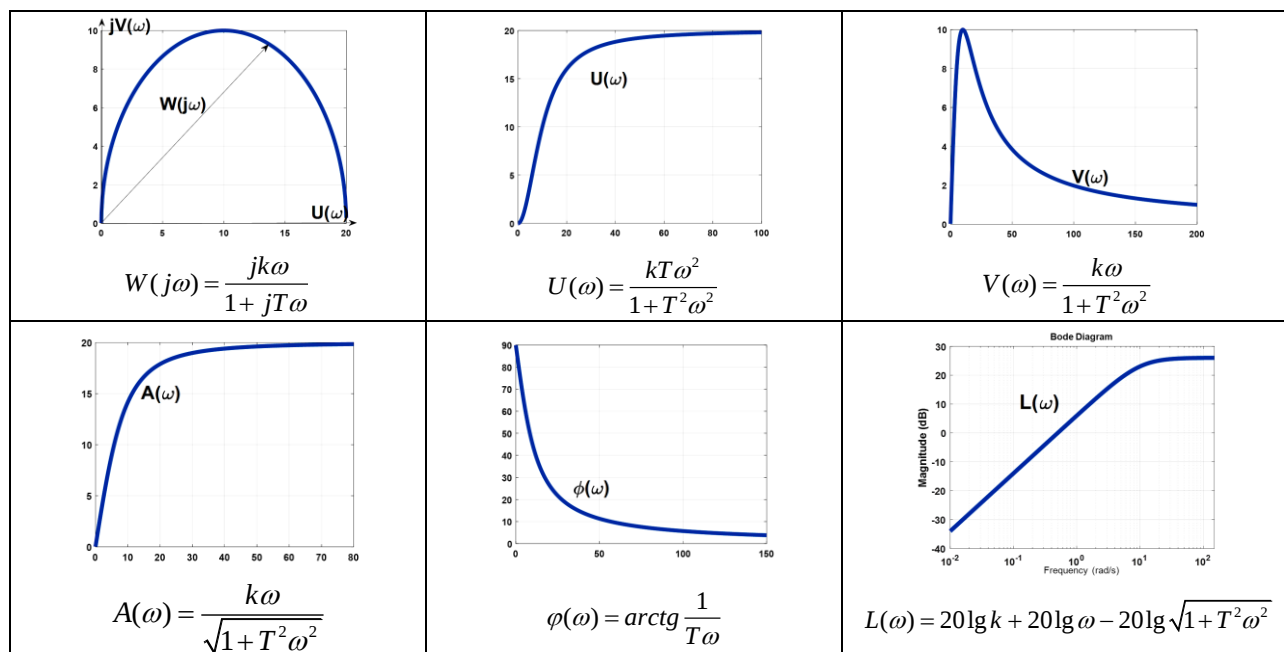


Рис. 2.10 – Частотные характеристики инерционного дифференцирующего звена

2.4. Показатели качества САУ

Качество работы системы управления характеризуется, с одной стороны, точностью в установившемся режиме, а с другой – переходным процессом от одного установившегося состояния к другому. Как указывалось выше, при исследовании переходных процессов чаще всего полагают, что входной сигнал является единичной ступенчатой функцией. В этом случае кривая переходного процесса называется переходной функцией и характеризуется некоторыми показателями, принимаемыми за меру качества системы управления. Эти показатели называют прямыми показателями качества. К их числу относят [1, 2]:

– время нарастания t_H – время, необходимое для достижения 90%-го уровня установившегося значения;

– время регулирования (установления) t_y – время, необходимое для попадания выходного сигнала в 5%-ю зону, прилегающую к установившемуся значению и далее остающуюся в ней;

– перерегулирование – максимальная относительная величина выброса переходной функции (выражается в процентах %)

$$\sigma = \frac{h_{\max}(t) - h_{уст}(t)}{h_{уст}(t)} \cdot 100\%;$$

– показатель колебательности – число полных колебаний до перехода системы в установившийся режим;

– статическая ошибка – разность между значением постоянного входного сигнала (равного единице) и установившимся значением выхода.

На рисунке 2.11 приведен график типового переходного процесса и указаны основные параметры как переходного, так и установившегося режимов.

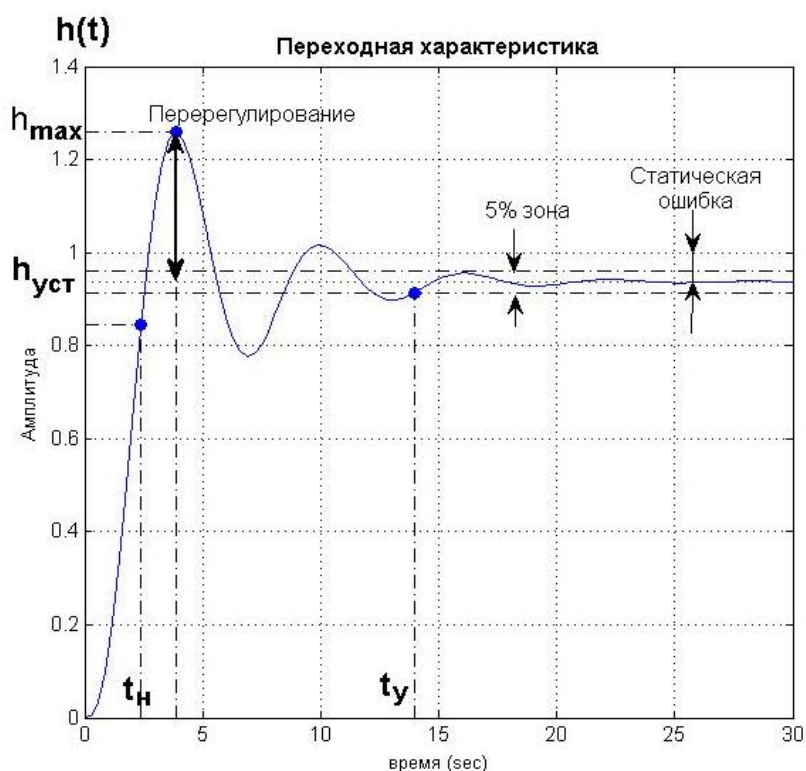


Рис. 2.11 – Прямые показатели качества САУ

3 ИССЛЕДУЕМЫЕ МОДЕЛИ

Исследуемая система задана в форме математической модели "вход/выход"

$$a_4 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 5u(t). \quad (3.1)$$

Коэффициенты модели системы, в соответствии с вариантом задания, приведены в таблице.

Вариант	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	1	5	25	55	34
2	1	9	46	124	120
3	1	14	88	290	375
4	1	12	77	296	464
5	1	10	41	110	150
6	1	7	31	93	68
7	1	9	28	38	24
8	1	13	61	127	78
9	1	13	85	341	580
10	1	9	29	55	50
11	1	8	22	28	16
12	1	12	69	198	200

Вариант	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
13	1	13	79	247	300
14	1	7	31	93	68
15	1	12	73	280	348
16	1	14	76	194	195
17	1	9	41	139	170
18	1	15	92	282	360
19	1	8	40	96	80
20	1	7	27	47	26
21	1	8	34	112	85
22	1	13	69	197	260
23	1	7	51	193	148
24	1	7	24	58	40

4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретические сведения, приведенные в разделе 2.
2. По модели "вход/выход" получить передаточную функцию системы $W(s)$;
3. Построить по ПФ системы основные динамические характеристики: $h(t)$, $g(t)$, $W(j\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega)$, $V(\omega)$, $L(\omega)$;
4. Получить ПФ системы $W(s)$ в терминах коэффициентов усиления k , постоянных времени T , параметров затухания ξ (демпфирования);
5. Представить ПФ $W(s)$ в виде произведения передаточных функций физически реализуемых элементарных звеньев;
6. Используя LTI Viewer и необходимые функции пакета Control System Toolbox, построить для всех элементарных звеньев, определённых в пункте 5, основные динамические характеристики: $h(t)$, $g(t)$, $W(j\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega)$, $V(\omega)$, $L(\omega)$;
7. Получить ПФ замкнутой системы $\Phi(s)$ – замкнуть исследуемую ПФ $W(s)$ единичной отрицательной обратной связью;
8. Определить нули и полюсы ПФ замкнутой системы $\Phi(s)$;
9. Применяя теорему вычетов, получить и построить средствами Matlab временные характеристики для замкнутой системы – переходную функцию $h(t)$, импульсную переходную функцию $g(t)$;
10. Построить временные характеристики для замкнутой системы в утилите LTI Viewer и сравнить их с графиками из пункта 9.

5 РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Для выполнения лабораторной работы (ЛР) используется пакет Control System Toolbox (CST) среды инженерных и научных расчетов Matlab. Пакет предназначен для работы с LTI-моделями систем управления [7 ÷ 12].

В CST модели линейных стационарных систем управления могут быть сформированы в виде **tf**-объекта (**transfer function** – передаточная функция), **ss**-объекта (**state space** – пространство состояний) или **zpk**-объекта (**zero-pole-gain** – нули-полюсы-коэффициент усиления).

Для первоначального формирования модели LTI-объекта в соответствии с заданием рекомендуется использовать класс **tf**-объектов. Синтаксис команды, создающий LTI-объект в виде ПФ с одним входом и одним выходом, имеет вид:

$$\text{tf}([b_m, \dots, b_1, b_0], [a_n, \dots, a_1, a_0])$$

где $b_m, \dots, b_0$ – значения коэффициентов полинома $B(s)$ в (2.2);

$a_n, \dots, a_0$ – значения коэффициентов полинома $A(s)$ в (2.2).

Преобразование **tf**-модели в модель типа **zpk** необходима, в том числе, для другой форму представления ПФ, в которой применяют параметры типа постоянных времени T , коэффициентов демпфирования ξ и усиления k . Подобную форму LTI-объекта в форме **zpk** можно получить при использовании функции **zpk**, изменив атрибут '**DisplayFormat**' со значения '**roots**' на значение '**time constant**'.

При организации обратной связи применяют функцию **feedback**. Простейший случай использования данной функции – получение ПФ замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью. Для этого следует задать команду:

$$\text{feedback}(W_s, 1)$$

где W_s – передаточная функция прямой цепи; 1 – передаточная функция обратной связи (ОС). По умолчанию функция реализует отрицательную ОС.

Для построения типовых временных характеристик $h(t)$ и $g(t)$ используют, соответственно, функции **step** и **impulse**. Нули и полюсы ПФ определяют функциями **pole** и **zero**. Решение этих задач можно выполнить и в утилите Linear System Analyzer (ранее эта утилита называлась LTI Viewer). Вызов данной утилиты может быть выполнен либо командой **linearSystemAnalyzer** (или, по старому, **ltiview**), либо **linearSystemAnalyzer(W)** – с передачей в утилиту ПФ исследуемого LTI-объекта, либо вызовом утилиты из главного окна Matlab из закладки Apps в разделе CONTROL SYSTEM DESIGN AND ANALYSIS.

Частотные характеристики LTI-объекта строят с помощью функций **bode**, **nyquist**, **freqresp**, утилиты Linear System Analyzer или собственных Matlab-программ [7].

При выполнении пункта 9 задания необходимо определить вычеты в полюсах ПФ замкнутой системы и построить графики временных характеристик.

Обычная последовательность действий здесь такова:

- а) вычисление значений полюсов и их кратностей;
- б) определение вычетов в найденных полюсах по формулам, учитывающим кратность полюсов;
- в) формирование математического выражения (сумма экспоненциальных слагаемых) для функции выхода системы;
- г) построение графика полученной функции на выбранном временном интервале.

Решение этой задачи можно полностью автоматизировать с помощью стандартных средств системы **Matlab**. Основную нагрузку здесь несёт функция **residue**. Эта функция предназначена для разложения дробно-рациональной функции в сумму "простейших" дробей [7, 10]:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} + k_1 + k_2 s + k_3 s^2 + \dots + k_{m-n+1} s^{m-n},$$

где **B(s)** и **A(s)** – полиномы числителя и знаменателя дробно-рациональной функции порядков **m** и **n**, соответственно; **p_i** и **r_i** – полюсы функции (нули знаменателя) и соответствующие им вычеты; **k_i** – коэффициенты "целой части" от деления полиномов, если степень полинома числителя **m** меньше степени полинома знаменателя **n**, т.е. **m < n**, то множество коэффициентов **k** пусто.

Вызов функции **residue** осуществляется следующей командой

$$[r, p, k] = \text{residue}(B, A)$$

где **B, A, r, p, k** – массивы соответствующих коэффициентов.

Наиболее наглядным получается решение задачи построения оригинала по изображению, когда все полюсы функции-изображения простые. Последовательность следующих команд позволяет получить график (рисунок 5.1) импульсной переходной функции для ПФ от входа **u** до выхода **y**.

```
>> [r,p,k]=residue(sys_oc.num{1,1},sys_oc.den{1,1});
>> t=0:0.01:7;
>> y=0;
>> for i=1:4 y=y+r(i)*exp(p(i)*t); end;
>> plot(t,y); grid on
```

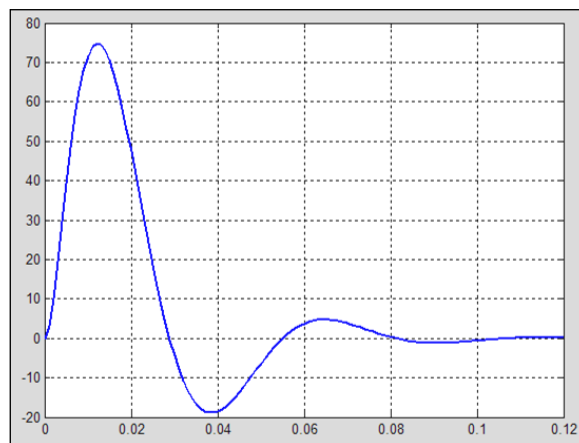


Рис. 5.1 – График импульсной переходной функции системы **sys_oc**

6 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; краткие теоретические сведения в части построения математических моделей линейных стационарных САУ; все необходимые предварительные соотношения, расчеты, графические построения, Matlab-программы; результаты работы – схемы, числовые и графические данные; подробные выводы по каждому пункту и общие выводы по работе в целом; библиографический список реально использованных источников.

7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Представьте систему в виде последовательного соединения типовых звеньев.
2. Сформулируйте определение, свойства и физический смысл единичной переходной функции.
3. Сформулируйте определение, свойства и физический смысл импульсной переходной функции.
4. Приведите основные соотношения для динамических характеристик типовых звеньев во временной и частотной областях.
5. Покажите взаимосвязь между расположением полюсов передаточной функции и видом переходного процесса.
6. Покажите, как зная уравнение пространства состояний системы получить характеристический многочлен системы.
7. Покажите применение теоремы вычетов для нахождения временных характеристик.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Линейные системы: учебник и практикум для академического бакалавриата / Д.П. Ким. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Изд-во Юрайт, 2019. — 311 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/437043>
2. Востриков А. С. Теория автоматического регулирования: учебник и практикум для академического бакалавриата / А.С. Востриков, Г.А. Французова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 279 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/438141>
3. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.Н. Попов. — 4-е изд. — СПб.: "Профессия", 2003. — 752 с.
4. Дорф Р. Современные системы управления /Р. Дорф, Р. Бишоп. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. — 832 с.
5. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью /Ч. Филлипс, Р. Харбор. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. — 616 с.
6. Математические основы теории автоматического управления: Учебное пособие для студентов вузов: в 3 т. /Под ред. Б.К. Чемоданова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006–2009 гг.
7. Карапетьян В.А. Средства Matlab в задачах анализа и синтеза линейных стационарных САУ: учеб. пособие / В.А. Карапетьян, В.А. Крамарь. — М.: Центркаталог, 2019. — 216 с. — (Вузовский учебник).
8. Гайдук А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: Учебное пособие. — 3-е изд. /А.Р. Гайдук, В.Е. Беляев, Т.А. Пьявченко. — СПб.: Изд-во "Лань", 2016. — 464 с.
9. Перельмутер В.М. Пакеты расширения Matlab. Control System Toolbox и Robust Control Toolbox / В.М. Перельмутер. — М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. — 224 с.
10. Лазарев Ю.Ф. Моделирование процессов и систем в Matlab. Учебный курс /Ю.Ф. Лазарев. — СПб.: Питер; К.: Издательская группа BHV, 2005. — 512 с.
11. Control System Toolbox™. User's Guide. — The MathWorks, Inc. (PDF-файл).
12. Control System Toolbox™. Reference — The MathWorks, Inc. (PDF-файл).
13. Symbolic Math Toolbox™. User's Guide. — The MathWorks, Inc. (PDF-файл).
14. Исследование САУ средствами пакета Simulink: Методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине "Теория автоматического управления" для студентов направления подготовки 27.03.04 — "Управление в технических системах" / Сост. В.А. Карапетьян, В.А. Крамарь. — Севастополь: СевГУ, 2019. — 20 с.