

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ПЛАНИРОВАНИЕ НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания
для выполнения лабораторных работ
по дисциплине
для магистров очной формы обучения
по направлению 09.04.01 —
«Информатика и вычислительная техника»

Севастополь
СевГУ
2020

УДК 517.85
ПЗ7

Р е ц е н з е н т:

Е.А. Кожаяев - канд. техн. наук, доцент,
заместитель директора института ИТУТС

Составители : И.А. Балакирева, А.В. Скатков

ПЗ7 Планирование научного эксперимента : методические указания для выполнения лабораторных работ по дисциплине для магистров очной формы обучения по направлению 09.04.01 — «Информатика и вычислительная техника» / Сост. И.А. Балакирева, А.В. Скатков ; Министерство науки и высшего образования РФ, Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2020. – 60 с. – Текст : электронный.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в изучении теории планирования научного эксперимента и выполнения выпускной квалификационной работы магистра.

УДК 517.85

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры ИТиКС, протокол № 5 от 30 января 2020 г.

Изд. № 270/2020. Объем 3,75 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	5
1	Краткие сведения из теории планирования научного эксперимента.....	6
2	Лабораторная работа №1. Исследование характера изменения реакции технических систем на основе полного факторного эксперимента.....	8
2.1	Организация и проведение полного факторного эксперимента....	8
2.1.1	Стандартизация масштаба факторов.....	9
2.1.2	Составление матрицы планирования ПФЭ.....	9
2.1.3	Порядок постановки ПФЭ.....	12
2.1.4	Проверка воспроизводимости опытов.....	12
2.1.5	Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения.....	13
2.1.6	Исследование свойств регрессионной модели.....	13
2.1.7	Переход к физическим переменным.....	15
2.2	Задание для выполнения лабораторной работы №1.....	15
2.3	Содержание отчета о выполнении лабораторной работы № 1.....	15
2.4	Пример выполнения задания.....	16
2.5	Контрольные вопросы.....	18
3	Лабораторная работа № 2. Исследование технических систем методом дробного факторного эксперимента.....	19
3.1	Организация и проведение дробного факторного эксперимента...	19
3.1.1	Составление матрицы планирования ДФЭ.....	19
3.1.2	Определение смешанности оценок коэффициентов модели.....	20
3.2	Порядок постановки ДФЭ и исследования свойств регрессионной модели.....	22
3.3	Пример использования ДФЭ.....	22
3.3.1	Постановка задачи.....	22
3.3.2	Организация и проведение ДФЭ типа 2^{5-3}	22
3.3.3	Оценка коэффициентов математической модели.....	24
3.3.4	Система смешанности коэффициентов модели.....	25
3.3.5	Оценка адекватности построенной математической модели.....	26
3.3.6	Вычисление натуральных коэффициентов математической модели.....	26
3.4	Задание для выполнения лабораторной работы № 2.....	26
3.5	Содержание отчета о выполнении лабораторной работы № 2.....	27
3.6	Контрольные вопросы.....	27
4	Лабораторная работа № 3. Исследование характеристик технических систем на основе центрального композиционного планирования эксперимента.....	29

4.1	Композиционное планирование в задачах построения квадратичной регрессионной модели.....	30
4.2	Ортогональное центральное композиционное планирование.....	32
4.2.1	Ортогональный центральный композиционный план.....	32
4.2.2	Составление матрицы планирования ОЦКП.....	34
4.2.3	Порядок постановки эксперимента и проверка воспроизводимости опытов.....	35
4.2.4	Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения.....	36
4.2.5	Исследование свойств квадратичной регрессионной модели.....	37
4.2.6	Контрольные вопросы.....	39
4.2.7	Пример расчета ОЦКП.....	40
4.3	Рототабельное центральное композиционное планирование.....	42
4.3.1	Рототабельный центральный композиционный план.....	42
4.3.2	Составление матрицы планирования эксперимента.....	42
4.3.3	Порядок проведения эксперимента.....	44
4.3.4	Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения.....	44
4.3.5	Исследование свойств квадратичной регрессионной модели.....	46
4.3.6	Контрольные вопросы.....	48
4.3.7	Пример расчета РЦКП.....	49
4.4	Задание для выполнения лабораторной работы №3.....	51
4.5	Содержание отчета о выполнении лабораторной работы № 3....	52
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	52
	ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	53
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	54
	ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	55
	ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	56
	ПРИЛОЖЕНИЕ Д.....	57
	ПРИЛОЖЕНИЕ Е.....	58
	ПРИЛОЖЕНИЕ И.....	59

ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент является основным и наиболее совершенным методом познания. Различают активный и пассивный эксперименты. Осуществление пассивного эксперимента не зависит от экспериментатора, и ему приходится довольствоваться лишь ролью наблюдателя. Основной вид эксперимента - активный, проводится в контролируемых и управляемых условиях.

Все факторы, влияющие на исследуемые параметры объекта, предусмотреть, как правило, не удастся. Так, в сложных системах, зависящих от множества факторов, некоторые воздействия не могут контролироваться или управляться. Воздействие этих факторов рассматриваются как белый шум, наложенный на истинные результаты эксперимента. Чтобы отделить факторы, интересующие экспериментатора, от шумового фона, применяются специальные методы, называемые *рандомизацией эксперимента*.

Проведение активного эксперимента зачастую требует больших материальных затрат. Поэтому важной задачей является получение необходимых сведений при минимальном числе опытов. Раздел прикладной математики, теория планирования эксперимента позволяет решить эту проблему. В общем случае теория планирования эксперимента позволяет ответить на следующие вопросы:

- как спланировать эксперимент, обеспечивающий при требуемой точности результатов, минимальные затраты времени и средств;
- как обработать результаты, чтобы извлечь из них максимум информации об исследуемом объекте;
- какие выводы можно сделать по результатам эксперимента и какова достоверность этих выводов.

Активный эксперимент в сочетании с методами планирования позволяет получить требуемые результаты, затратив минимальные средства и время на проведение исследования.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения с требуемой точностью и достоверностью поставленной задачи.

1 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Целью планирования эксперимента, как правило, является получение математической модели (ММ) исследуемого объекта или процесса. Если на объект действует много факторов, механизм которых неизвестен, то обычно используют полиномиальные ММ (алгебраические полиномы), называемые *уравнениями регрессии*. Так, для двух факторов x_1 и x_2 **можно построить следующие уравнения регрессии:**

полином 0-й степени: $y = b_0$;

полином 1-й степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ – линейная модель;

полином 2-й степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2$
– полная квадратичная модель.

При планировании эксперимента исследуемый объект представляется в виде «черного ящика», на вход которого воздействуют факторы X_i , а на выходе под действием этих факторов и влияния случайных воздействий внешней среды v_s формируются выходные параметры (отклик или реакция) y_j объекта исследования.

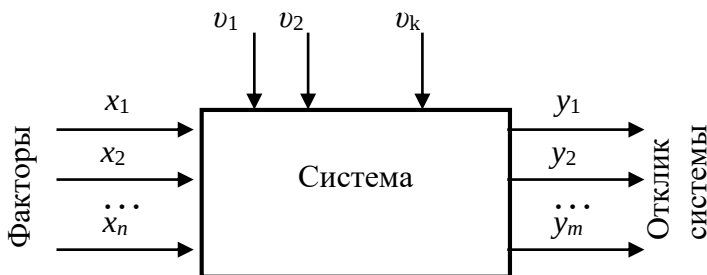


Рисунок 1.1 — Объект исследования

Каждый фактор x_i , может принимать определенное количество значений, называемых *уровнями факторов*. Множество возможных уровней фактора x_i , называется *областью его определения*. Эти области могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Должна существовать возможность управления факторами: либо поддерживать их на заданном уровне, либо изменять по установленной программе.

Факторы должны быть совместимыми и независимыми. Совместимость предполагает допустимость любой комбинации факторов, а независимость – отсутствие между факторами корреляционной связи.

Исследуемые параметры должны отвечать ряду требований. Они должны быть:

- эффективными, то есть способствовать скорейшему достижению цели;
- универсальными - быть характерными не только для исследуемого объекта;
- статистически однородными, то есть определенному набору значений факторов X_i , с точностью до погрешности эксперимента должно соответствовать определенное значение отклика объекта Y ;
- выражаться количественно одним числом;
- легко вычисляться и иметь физический смысл;
- существовать при любом состоянии объекта.

Геометрический аналог функции отклика называется *поверхностью отклика*, а пространство, в котором строят эту поверхность, - *факторным пространством*. Размерность факторного пространства равна числу факторов. Так, например, при двух факторах факторное пространство представляет собой факторную плоскость.

Выбор условий проведения опытов при планировании эксперимента позволяет добиться требуемых свойств ММ. Множество точек факторного пространства, в которых проводится эксперимент, представляется с помощью *плана эксперимента*:

$$X = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{Nn} \end{vmatrix},$$

где n — число факторов; N — число точек факторного пространства. Точка

$x^{(0)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$ называется *центром плана*. Если центр плана совпадает с

началом координат, то план называется *центральный*.

Условия проведения опытов могут свободно выбираться в пределах заданных границ. Выбор соответствующего плана эксперимента позволяет обеспечить ММ разные свойства. Наиболее распространенными являются критерии ортогональности и ротатабельности.

Критерий ортогональности заключается в том, что полученные оценки коэффициентов регрессии некоррелированы (не смешаны). В этом случае замена нулем любого коэффициента в ММ не изменяет значений остальных коэффициентов.

Критерий ротатабельности состоит в том, что дисперсия выходной переменной зависит только от расстояния от центра плана и является равной по всем направлениям.

2 Лабораторная работа №1. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ИЗМЕНЕНИЯ РЕАКЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

2.1 ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) исследуется один выходной параметр объекта и реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

Для каждого фактора выбираются два уровня - верхний и нижний, на которых фактор варьируется. Половина разности между верхним и нижним уровнями называется *интервалом варьирования*. Интервал варьирования должен быть больше погрешности измерения уровня фактора (ограничение снизу), а верхний и нижний уровни фактора не должны выходить за область его определения (ограничение сверху). На практике интервал варьирования составляет обычно 3-10% от области определения.

При двух уровнях для каждого из n факторов общее число опытов составляет 2^n , поэтому ПФЭ называют экспериментом типа 2^n .

ПФЭ позволяет получить математическую модель исследуемого объекта в виде уравнения множественной регрессии:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n b_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{ikl} x_i x_k x_l + \dots, \quad (2.1)$$

где b_0 — свободный член; b_i , b_{ik} , b_{ikl} — коэффициенты уравнения регрессии. Так, например, при $n=2$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2;$$

при $n=3$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3.$$

В зависимости от объема априорной информации в ММ включают не все, а лишь некоторые взаимодействия первого порядка, иногда - взаимодействия второго порядка и очень редко — взаимодействия выше третьего порядка. Связано это с тем, что учет всех взаимодействий приводит к громоздким расчетам. Зависимость количества взаимодействий различного порядка от числа факторов приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1 — Количество взаимодействий для числа факторов от 2 до 7

n	$N=2^n$	Число линейных эффектов	Порядок взаимодействия					
			1	2	3	4	5	
2	4	2	1	—	—	—	—	—
3	8	3	3	1	—	—	—	—
4	16	4	6	4	1	—	—	—
5	32	5	10	10	5	1	—	—
6	64	6	15	20	15	6	1	—
7	128	7	21	35	35	21	7	1

Полное число всех возможных эффектов (включая b_0) равно числу опытов ПФЭ.

2.1.1 Стандартизация масштаба факторов

Для удобства расчетов масштаб факторов выбирают так, чтобы значение верхнего уровня было равно +1, а нижнего -1. С этой целью делают преобразование начала координат факторов и переходят к нормированному (стандартному) масштабу

$$X_i = \frac{x_i - x_{0i}}{\Delta x_i}, \quad (2.2)$$

где x_{0i} – базовый или начальный уровень i -й переменной, Δx_i – интервал варьирования по i -й переменной.

2.1.2 Составление матрицы планирования ПФЭ

План ПФЭ изображают в виде таблицы, столбцы которой отражают уровни факторов, а строки — номера опытов. Эти таблицы называют **матрицами планирования** (МП) **эксперимента**. Поскольку значения уровней факторов по модулю всегда равны единице, то обычно в МП записывают только знак уровня (т. е. «+» вместо «1» и «-» вместо «-1»). В таблицах 2.2 и 2.3 в качестве примера приведены МП для ПФЭ типа 2^2 и 2^3 соответственно.

Таблица 2.2 — МП ПФЭ типа 2^2

N	x_1	x_2	y
1	-	-	y_1
2	+	-	y_2
3	-	+	y_3
4	+	+	y_4

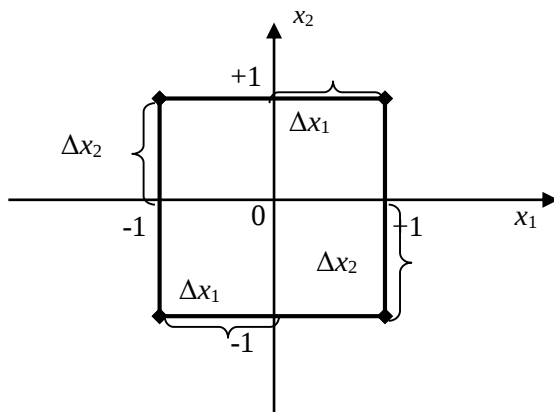
Таблица 2.3 — МП ПФЭ типа 2^3

N	x_1	x_2	x_3	y
1	-	-	-	y_1
2	+	-	-	y_2
3	-	+	-	y_3
4	+	+	-	y_4
5	-	-	+	y_5
6	+	-	+	y_6
7	-	+	+	y_7
8	+	+	+	y_8

Геометрической интерпретацией ПФЭ 2^2 является квадрат в факторной плоскости (рисунок 2.1), а ПФЭ 2^3 — куб.

Здесь нормированные координаты x_1 и x_2 проходят через точку пересечения основных уровней факторов, и масштабы их осей выбраны так, чтобы интервал варьирования равнялся 1. Тогда условия проведения опытов в МП эксперимента будут соответствовать вершинами квадрата, центром которого является основной уровень. Если $n > 3$, то фигуру, задающую в многомерном пространстве область эксперимента, называют *гиперкубом*.

Влияние факторов на выходной параметр может зависеть от уровня, на котором находится другой фактор, или от сочетания уровней нескольких факторов. Если априорно не известно, что такой зависимости между факторами нет, то строят развернутую МП, учитывающую не только факторы, но и их взаимодействия.

Рисунок 2.1 — Геометрическая интерпретация ПФЭ типа 2^2 .

Пример развернутой МП типа для ПФЭ 2^3 представлен в табл. 2.4. Фиктивный фактор x_0 вводят для удобства компьютерного расчета свободного члена b_0 (для идентичности формул).

Таблица 2.4 — Развернутая МП ПФЭ типа 2^3 .

N	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y
1	+	-	-	-	+	+	+	-	y_1
2	+	+	-	-	-	-	+	+	y_2
3	+	-	+	-	-	+	-	+	y_3
4	+	+	+	-	+	-	-	-	y_4
5	+	-	-	+	+	-	-	+	y_5
6	+	+	-	+	-	+	-	-	y_6
7	+	-	+	+	-	-	+	-	y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Для МП эксперимента при обозначениях i — номер фактора, j — номер опыта, N — число опытов должны выполняться следующие условия:

а) симметричности относительно центра эксперимента $\sum_{j=1}^N x_{ij} = 0$;

б) нормировки $\sum_{j=1}^N |x_{ij}| = N$;

в) ортогональности $\sum_{j=1}^N x_{ij} x_{fi} = 0$, если $f \neq i$.

г) ротатабельности — условия равноточного предсказания исследуемого параметра на равных расстояниях от центра эксперимента вне зависимости от направления.

Условие ортогональности позволяет упростить вычисления и получить независимые оценки коэффициентов регрессии. Это означает, в частности, что замена нулем любого коэффициента в уравнении ММ не изменит оценок остальных коэффициентов. Это свойство может быть полезным, когда точный вид модели не известен и требуется по экспериментальным данным отобрать факторы, существенно влияющие на исследуемый параметр. Если условие ортогональности не выполняется, после исключения каждого незначимого коэффициента необходимо пересчитывать оценки оставшихся коэффициентов и их дисперсии. При этом могут измениться как доверительные интервалы, так и выводы относительно коэффициентов значимости;

Матрица, удовлетворяющая условиям симметричности, нормировки и ортогональности, называется *оптимальной*.

МП ПФЭ является оптимальной для линейных ММ. Если же ММ содержит взаимодействия, то условие ротатабельности не выполняется.

2.1.3 Порядок постановки ПФЭ

Для оценки точности эксперимента для каждой i - точки факторного пространства (для каждого сочетания уровней факторов МП) проводят n опытов. В результате получают значения $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ исследуемого параметра, для которых находят среднее значение

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n y_{iq}. \quad (2.3)$$

При этом опыты в одной точке проводят не подряд, а обходят все точки в первой серии опытов, затем во второй, и так далее до n -й. Для уменьшения влияния внешней среды и неконтролируемых факторов внутри каждой серии точки факторного пространства обходят случайным образом – рандомизируют последовательность опытов. Рандомизацию опытов можно провести с помощью генератора случайных чисел.

2.1.4 Проверка воспроизводимости опытов (однородности дисперсий)

Опыт считается воспроизводимым, если дисперсия выходного параметра y , однородна в каждой точке факторного пространства. Оценка s^2 дисперсии определяется для каждой точки факторного пространства по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2. \quad (2.4)$$

Если сравниваемое количество дисперсий больше двух, можно воспользоваться критерием Кохрена (Приложение В). Этот критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов. Для этого формулируют нулевую гипотезу $H_0: s^2 y_1 = s^2 y_2 = \dots = s^2 y_n$ – дисперсии значений отклика в каждом опыте однородны.

Для этого подсчитывается дисперсия значений отклика для каждого из опытов эксперимента, а затем из всех дисперсий находится наибольшая $s_{\max}^2 = \max \{s_i^2, i = 1, n\}$, которая делится на сумму всех дисперсий:

$$G_{расч} = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2}, \quad (2.5)$$

Если полученное значение дисперсионного отношения $G_{\text{расч}} > G_{\text{табл}}(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)$ больше приведенного в таблице, это означает, что дисперсии значимо отличаются друг от друга, т. е. что они неоднородны. Здесь α — уровень значимости, γ_1 и γ_2 — степени свободы, при этом $\gamma_1 = m - 1$, $\gamma_2 = N$.

2.1.5 Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Расчет оценок коэффициентов уравнения регрессии производится по методу наименьших квадратов, при этом минимизируется сумма квадратов отклонений между экспериментальными значениями исследуемого параметра и значениями, вычисленными для тех же точек факторного пространства по уравнению регрессии:

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i, \quad j = 0, k. \quad (2.6)$$

Благодаря предварительной стандартизации масштаба факторов и ортогональности МП, расчет оценок коэффициентов регрессии в ПФЭ превращается в простую арифметическую процедуру.

2.1.6 Исследование свойств регрессионной модели

2.1.6.1 Проверка значимости коэффициентов регрессии проводится независимо друг от друга на основании t –критерия Стьюдента (Приложение Б):

$$t_{\text{расч}} = \frac{|b_j|}{s_{b_j}}, \quad (2.7)$$

где s_{b_j} — оценка среднего квадратичного отклонения погрешности определения коэффициента.

Оценка дисперсии коэффициентов, найденных по экспериментальным данным вычисляется в соответствии с выражением

$$s_{b_j}^2 = \frac{s_{\text{воспр}}^2}{N \cdot m}, \quad s_{b_j} = \sqrt{s_{b_j}^2}. \quad (2.8)$$

Оценкой генеральной дисперсии воспроизводимости $s_{\text{воспр}}^2$, характеризующая точность одного измерения, является средняя из всех построчных дисперсий

$$s_{\text{осп}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_{yi}^2. \quad (2.9)$$

При выбранном уровне статистической значимости α и при числе степеней свободы $\gamma = N(m-1)$ находят табличное значение коэффициента $t_{\text{табл}}$. Найденное табличное значение сравнивается с расчетным значением коэффициента. Если выполняется неравенство $t_{\text{табл}} > t_{\text{расч}}$, то принимается нуль-гипотеза, т.е. считается, что найденный коэффициент b_j является статистически незначительным и его следует исключить из уравнения регрессии.

Оценка среднего квадратичного отклонения погрешности определения коэффициента S_{bj} при достаточном числе степеней свободы может быть определена и через остаточную дисперсию: $S_{bj} = \sqrt{s_{\text{ост}}^2 \cdot C_{jj}}$, $j=0, n$, где C_{jj} является диагональным коэффициентом корреляционной матрицы факторов и равен $C_{jj} = \frac{1}{m}$, а $s_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N-m-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$, $\hat{y}_i$ — значение отклика, вычисленное по построенному уравнению регрессии и называется теоретическим значением отклика при заданном наборе факторов.

2.1.6.2 Проверка адекватности регрессионной модели. Математическая модель должна достаточно верно качественно и количественно описывать свойства объекта исследования. Для проверки адекватности оценивают отклонение предсказанного уравнением регрессии значения выходного параметра $\hat{y}_i$ от результатов эксперимента y_i . Для этого вычисляют дисперсию адекватности или остаточную дисперсию:

$$s_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N-m'-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (2.10)$$

где m' — число значимых коэффициентов модели, $m' \leq m$, причем коэффициент b_0 в расчет не берется.

Если $s_{\text{ост}}^2$ не превышает дисперсии опыта s_y^2 , то полученная ММ адекватно представляет результаты эксперимента, иначе — описание считается неадекватным объекту. Проверка гипотезы об адекватности проводится с помощью F -критерия Фишера (Приложение А).

$$F_{\text{расч}} = s_{\text{ост}}^2 / s_y^2, \quad (2.11)$$

По уровню значимости α и степеням свободы $\gamma_1 = N-m'$ и $\gamma_2 = N(m-1)$ определяется критическое значение $F(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$. Если $F \leq F(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, то уравнение регрессии считается адекватным.

В случае если $S_{ост}^2 \leq S_y^2$, то $F_{расч} \leq 1$ и неравенство $F \leq F(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ будет выполняться всегда.

Как правило, вначале проверяют адекватность линейной ММ. Если предположение об адекватности подтверждается, то в качестве окончательной ММ выбирают линейную; если отклоняется — добавляют эффект взаимодействия с наибольшим коэффициентом и вновь проверяют гипотезу, и так до тех пор, пока существуют степени свободы.

Если в результате модель все же оказалась неадекватной, это говорит о том, что тип математической модели выбран неудачно и при данном шумовом уровне и классе точности измерительных приборов ММ должна быть уточнена. Для этого следует использовать более сложные модели, например, квадратичные (ортогональное и рототабельное композиционное планирование).

2.1.7 Переход к физическим переменным

Для записи ММ в реальных физических величинах производят обратный переход от стандартизированного масштаба к натуральному. Это можно сделать с помощью соотношения (2.2). После чего записывают окончательный вид модели.

2.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 1

Задания выполняются в соответствии с индивидуальными вариантами, приведенными в Приложении Г. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Вариант задания представляет собой результаты ПФЭ типа 2^2 . В ходе эксперимента в каждой точке факторного пространства проводились три параллельных опыта. Порядок проведения опытов соответствует матрице эксперимента, представленной в таблице 2.2.

В ходе выполнения индивидуального задания требуется по предложенным экспериментальным данным построить регрессионные линейные модели и провести регрессионный анализ построенных моделей. Для этого необходимо:

- построить матрицу планирования экспериментов;
- проверить воспроизводимость опытов;
- рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения;
- проверить адекватность полученной модели;
- провести анализ результатов и сделать выводы.

2.3 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 1

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Цель работы.

2. Постановку задачи.
3. Матрицу планирования эксперимента.
4. Результаты проверки воспроизводимости опытов.
5. Результаты расчетов коэффициентов регрессионных моделей и проверки из статистической значимости.
6. Результаты проверки адекватности полученной модели исходным экспериментальным данным.
7. Выводы и предложения о ходе дальнейших исследований, составленные на основании анализа регрессионных моделей.

2.4 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Требуется исследовать влияние технологических факторов (номиналов резисторов R_1 и R_2) в интегральной транзисторно-транзисторной логической схеме на значение средней потребляемой мощности $P=f(R_1, R_2)$. Номинальные значения факторов: $R_1=7\text{кОм}$, $R_2=3\text{кОм}$, область изменения факторов соответственно $[5;9]$ и $[2;4]$ кОм. Функцию $f(R_1, R_2)$ будем искать в виде линейной модели (2.1).

Составим ПФЭ для четырех серий опытов при интервалах варьирования для R_1 — $0,4\text{кОм}$, R_2 — $0,2\text{кОм}$. Для стандартизации масштабов факторов вычислим значения нижнего и верхнего уровня согласно соотношению (2.2) и сведем результаты в таблицу 2.5.

Таблица 2.5 — Условия проведения ПФЭ.

Характеристика плана	Стандартный масштаб X_i	Натуральный масштаб	
		$X_1=R_1$, кОм	$X_2=R_2$, кОм
Нулевой уровень	0	7	3
Верхний уровень	+1	7,2	3,1
Нижний уровень	-1	6,8	2,9

Составим матрицу эксперимента с учетом рандомизации опытов. В таблице 2.6 представлены результаты параллельных опытов и вычислены среднее значение отклика и дисперсия для каждой точки факторного пространства соответственно соотношениям (2.3) и (2.4).

Проведем анализ воспроизводимости опыта на основе критерия Кохрена в соответствии с (2.5): $G_{расч}=0,485$, табличное значение критерия определяем при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1=m-1=4$, $\gamma_2=N=4$, получаем $G_{табл}(\alpha;\gamma_1;\gamma_2)=0,630$. Так как $G_{расч} < G_{табл}$, опыт является воспроизводимым, и его результаты можно использовать для оценки коэффициентов регрессионного уравнения.

Таблица 2.6 — Результаты эксперимента.

№	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{cp}	s^2_{yi}
1	1	-1	-1	6,54	6,29	6,51	6,42	6,56	6,46	0,02
2	1	1	-1	6,57	6,37	6,33	6,21	6,10	6,32	0,04
3	1	-1	1	6,28	6,37	6,37	6,15	6,46	6,33	0,02
4	1	1	1	6,21	6,00	6,01	6,07	6,13	6,08	0,01

В соответствии с расчетным соотношением (2.6) можно определить коэффициенты регрессионной модели.

Для анализа значимости коэффициентов необходимо вычислить погрешности определения коэффициентов модели и расчетное значение t – критерия Стьюдента на основании соотношений (2.7) — (2.9). Результаты расчетов в таблице 2.7.

Таблица 2.7 — Результаты анализа значимости коэффициентов.

	b_0	b_1	b_2
коэффициенты регрессионной модели	6,296	-0,097	-0,093
погрешности определения коэффициентов	0,011	0,020	0,020
$t_{расч}$	188,93	2,92	2,78
ВЫВОД	ЗН	ЗН	ЗН

Для принятия решения о значимости коэффициентов уравнения регрессии расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ сравнивается с табличным значением. Табличное значений критерия Стьюдента $t_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степени свободы $\gamma=N(m-1)=16$, $t_{табл}=2,12$. Неравенство $t_{расч} > t_{табл}$ выполняется для всех коэффициентов ММ, поэтому они все считаются значимыми и включаются в модель.

Проверка адекватности построенной модели выполняется в соответствии с критерием Фишера (2.11). Согласно выражению (2.9) дисперсия воспроизводимости равна $s^2_{воспр}=0,022$, остаточная дисперсия в соответствии с (2.10) составляет $s^2_{ост}=0,036$, Расчетное значение критерия Фишера (2.11) равно $F_{расч}=1,63$. Табличное значений критерия Фишера $F_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1 = N - m' - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$ и $\gamma_2 = N \cdot (m - 1) = 4 \cdot (5 - 1) = 16$,

$F_{табл}=4,49$. Неравенство $F_{расч} < F_{табл}$ выполняется, поэтому построенная регрессионная модель считается адекватной экспериментальным данным.

Перейдем от кодированных значений факторов к натуральному исчислению в соответствии с выражением (2.2) и условиями проведения эксперимента в таблице 2.5:

$$P=12,484-0,487R_1-0,925R_2, \quad (2.12)$$

Таким образом, выражение (2.12) представляет характер изменения средней потребляемой мощности P интегральной транзисторно-транзисторной логической схемы в области изменения номиналов резисторов $6,8 \leq R_1 \leq 7,2$ кОм, $2,9 \leq R_2 \leq 3,1$ кОм.

2.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем сущность планирования эксперимента? Поясните разницу между активным и пассивным экспериментом.
2. Какие задачи решает теория планирования эксперимента?
3. Что такое факторы и какие требования к ним предъявляются? Как выбрать уровни варьирования факторов?
4. Какие требования предъявляются к факторам?
5. В чем сущность ПФЭ и какие ММ он позволяет исследовать?
6. Какую область описывает уравнение регрессии, полученное с помощью ПФЭ и в каких границах его можно использовать?
7. В чем сущность и цели стандартизации масштаба факторов?
8. Как составляется и какими свойствами обладает МП ПФЭ?
9. Каков порядок постановки опытов при ПФЭ?
10. Как проверить воспроизводимость опытов?
11. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
12. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
13. Как проверить адекватность полученной ММ?
14. Как перейти к исходным физическим переменным?

3 Лабораторная работа №2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДРОБНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Число опытов полного факторного эксперимента (ПФЭ) 2^n быстро растет с увеличением числа факторов n , и при достаточно большом количестве факторов этот вид эксперимента оказывается практически неприемлемым. Для уменьшения числа опытов из множества точек факторного пространства может быть отобрана их некоторая часть, содержащая ПОДХОДЯЩЕЕ число опытов и представляющая собой дробный факторный план.

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ), как и ПФЭ, позволяет исследовать полиномиальные математические модели (ММ).

Дробным факторным экспериментом называется система опытов, представляющая собой часть ПФЭ, позволяющая рассчитать коэффициенты уравнения регрессии и сократить объем экспериментальных данных.

3.1 ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ ДРОБНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1.1. Составление матрицы планирования ДФЭ

Для построения матрицы планирования (МП) ДФЭ из имеющихся n факторов отбирают $(n-p)$ основных факторов, для которых строят МП ПФЭ. Эту матрицу дополняют затем p столбцами, соответствующими оставшимся факторам. Уровни дополнительных факторов определяют как поэлементное умножение уровней не менее двух и не более $(n-p)$ основных факторов. Говорят, что ДФЭ — это эксперимент типа 2^{n-p}

Выбранное для дополнительного фактора произведение называется *генератором плана* (поскольку определяет для дополнительного фактора правило чередования уровней варьирования в МП). Очевидно, что ДФЭ типа 2^{n-p} будет иметь p генераторов.

Например, для ДФЭ типа 2^{3-1} число опытов равно четырем опытам по сравнению с 16 опытами в случае ПФЭ (таблица 3.1). При трех основных факторах ДФЭ содержит 8 опытов, а генераторами для дробных планов могут служить произведения X_1X_2 , X_1X_3 , X_2X_3 , $X_1X_2X_3$.

При введении одного дополнительного фактора (ДФЭ типа 2^{4-1}) может использоваться любой из четырех возможных генераторов:

$$X_4 = X_1X_2,$$

$$X_4 = X_1X_3,$$

$$X_4 = X_2X_3,$$

$$X_4 = X_1X_2X_3.$$

В качестве генераторов плана используются незначимые взаимодействия.

Для нахождения математического описания процесса используются определенные части ПФЭ: 1/2, 1/4, 1/8 и т. д.

Таблица 3.1 — МП ДФЭ типа 2^{3-1}

№	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$
1	+	-	-	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	+	+	+

Эта система опытов называется дробными репликами, а сам метод ДФЭ — *методом дробных реплик*. Возможные дробные реплики от ПФЭ типа 2^4 приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 — МП ПФЭ типа 2^4

№	Факторы				у	Дробные реплики		
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	-	-	-	-	y_1	1/8	1/4	1/2
2	+	-	-	-	y_2			
3	-	+	-	-	y_3	1/8		
4	+	+	-	-	y_4			
5	-	-	+	-	y_5	1/8	1/4	
6	+	-	+	-	y_6			
7	-	+	+	-	y_7	1/8		
8	+	+	+	-	y_8			
9	-	-	-	+	y_9	1/8	1/4	1/2
10	+	-	-	+	y_{10}			
11	-	+	-	+	y_{11}	1/8		
12	+	+	-	+	y_{12}			
13	-	-	+	+	y_{13}	1/8	1/4	
14	+	-	+	+	y_{14}			
15	-	+	+	+	y_{15}	1/8		
16	+	+	+	+	y_{16}			

3.1.2. Определение смешанности оценок коэффициентов модели

По плану, представленному в таблице 2.2, можно определить коэффициенты b_0 , b_1 , b_2 и b_3 для модели вида $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$. Однако эти коэффициенты будут смешаны с парными взаимодействиями.

При значительном числе факторов и опытов определение смешанности по МП является трудоемким. Для нахождения, при каких факторах и взаимодей-

ствиях оценки коэффициентов будут смешанными, вводят понятие *определяющего контраста плана*. Контраст получают умножением обеих частей генератора плана вводимого дополнительного фактора X_j на этот фактор. Например, поскольку для ДФЭ (таблица 3.1) генератор плана $X_3 = X_1X_2$, то для контраста получим $X_3^2 = X_1X_2X_3$, так как $X_i = 1$, окончательно имеем:

$$1 = X_1X_2X_3.$$

Чтобы определить, с какими факторами и взаимодействиями смешана оценка фактора X_i необходимо умножить обе части контраста на это фактор. Например, для X_1 имеем: $X_1 = X_1^2X_2X_3 = X_2X_3$, то есть **b_1** оценивает одновременно **β_1** и **β_{23}** . Для фактора X_2 имеем $X_2 = X_1X_2^2X_3 = X_1X_3$, а для X_3 — $X_3 = X_1X_2X_3^2 = X_1X_2$. Записывается это так:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23},$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13},$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12},$$

где **β_i** — действительные значения коэффициентов b_i .

В зависимости от числа факторов, входящих в контраст, говорят о разрешающей способности ДФЭ. Так, если для ДФЭ типа 2^{4-1} в качестве генератора плана выбрано $X_4 = X_1X_2X_3$ (контраст соответственно будет **$1 = X_1X_2X_3X_4$**), то говорят, что у такого эксперимента разрешающая способность равна 4; если генератор $X_1X_2 = X_4$ и контраст **$1 = X_1X_2X_4$** , то разрешающая способность равна 3; генераторы плана с наибольшей разрешающей способностью называют *главными* и отдают им предпочтение.

Если вводится не один, а несколько дополнительных факторов, то получаем несколько генераторов плана (свой для каждого дополнительного фактора). В этом случае для определения смешанности оценок используют обобщающий контраст, который строится из отдельных контрастов, а также их произведений во всевозможных сочетаниях.

Пусть, например, для ДФЭ 2^{5-2} в качестве генераторов выбраны соотношения $X_4 = X_1X_2$ и $X_5 = X_1X_2X_3$, контрасты будут соответственно представлены как **$1 = X_1X_2X_4$** и **$1 = X_1X_2X_3X_5$** , тогда обобщающий контраст будет равен

$$1 = X_1X_2X_4 = X_1X_2X_3X_5 = X_3X_4X_5.$$

Для определения смешанности нужно перемножить все составляющие обобщающего контраста на соответствующие факторы:

для X_1 : $X_1 = X_2X_4 = X_2X_3X_5 = X_1X_3X_4X_5$;

для X_4 : $X_4 = X_1X_2 = X_1X_2X_3X_4 = X_3X_5$.

Тогда для смешанности оценок получим:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{24} + \beta_{235} + \beta_{1345},$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{12} + \beta_{35} + \beta_{1234}.$$

Необходимо отметить, что следствием уменьшения числа опытов по сравнению с ПФЭ является и уменьшение точности оценок, вызванное их смешанностью.

ПФЭ, в которых учитываются только линейные эффекты факторов, считаются ненасыщенными планами. При включении в план эксперимента взаимодействий факторов насыщение плана увеличивается. Планы, в которых учитываются все взаимодействия, называют насыщенными. ДФЭ, построенные на принципе введения дополнительных факторов вместо некоторых взаимодействий, являются насыщенными планами. Чем выше порядок дробной реплики, тем более насыщенным считается план.

Необходимо учитывать, что для насыщенного эксперимента невозможна проверка адекватности ММ, так как степени свободы использованы для вычисления эффектов взаимодействия факторов.

3.2 ПОРЯДОК ПОСТАНОВКИ ДФЭ И ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

При ДФЭ стандартизация масштабов факторов, порядок постановки опытов, проверка воспроизводимости опытов, расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения, исследование свойств регрессионной модели (проверка статистической значимости коэффициентов модели, анализ адекватности полученной ММ) и переход к физическим переменным производится так же, как и при ПФЭ, раздел 2.

3.3 ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДФЭ

3.3.1. Постановка задачи.

Рассматривается задача определения закономерности изменения времени задержки t_3 (измеряется в наносекундах) в интегральной транзисторно-транзисторной логической схеме в заданной области изменения параметров интегральных компонентов

$$t_3 = f(N, R1, R2, R3, R4), \quad (3.1)$$

где N — коэффициент разветвления по выходу, $R1$ – $R4$ — резисторы. Необходимо построить модель закономерности изменения времени задержки схемы на основе ДФЭ. Параметры схемы изменяются в следующих пределах: $N \geq 15$, $0,5 \leq R1 \leq 10$ кОм, $0,5 \leq R2 \leq 10$ кОм, $0,05 \leq R3 \leq 1$ кОм, $0,1 \leq R4 \leq 2$ кОм.

3.3.2 Организация и проведение ДФЭ типа 2⁵⁻³

Для планирования эксперимента выберем центр плана, интервал варьирования и определим уровни (2.2) изменения каждого фактора. Результаты планирования приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 — Условия проведения эксперимента

Характеристика плана	Стандартный масштаб x_i	Натуральный масштаб				
		$x_1=N$	$x_2=R1$, кОм	$x_3=R2$, кОм	$x_4=R3$, кОм	$x_5=R4$, кОм
Нулевой уровень	0	20	5	5	0,5	1
Верхний уровень	+1	22	6,4	6,4	6,2	1,25
Нижний уровень	-1	18	3,6	3,6	3,8	0,75

Для построения МП ДФЭ из имеющихся 5 факторов выберем 3 – коэффициент разветвления и резисторы $R1$, $R2$ – и построим МП ПФЭ (таблица 3.4).

Таблица 3.4 — Матрица планирования ПФЭ 2^3

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

В качестве генератора плана выберем соотношения для $x_4 = x_1x_2$ и для $x_5 = x_1x_3$. В этом случае будем иметь ДФЭ типа 2^{5-2} , МП которого представлена в таблице 3.5.

Таблица 3.5 — Матрица планирования ДФЭ 2^{5-2}

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

Для принятия решения о значимости коэффициентов уравнения регрессии расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ сравнивается с табличным значением. Табличное значение критерия Стьюдента $t_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степени свободы $\gamma=N(m-1)=48$, $t_{табл}=2,011$. В нашем случае для расчета γ : $N=8$ – определяется по числу опытов, а $m=7$ – количество значимых коэффициентов в ММ без учета свободного коэффициента b_0 . Неравенство $t_{расч} > t_{табл}$ выполняется для всех коэффициентов ММ, поэтому они все считаются значимыми и включаются в модель.

3.3.4. Система смешанности коэффициентов модели

Оценки коэффициентов ММ, полученные на основе ДФЭ являются смешанными с парными взаимодействиями факторов. Для определения, при каких факторах и взаимодействиях оценки коэффициентов будут смешанными, вычислим определяющий контраст. Для этого умножим обе части генератора плана вводимого дополнительного фактора на этот фактор:

а) генерирующее соотношение $X_4 = x_1 x_2$;

$$x_4 x_4 = x_1 x_2 x_4,$$

$$1 = x_1 x_2 x_4; \quad (3.2)$$

б) генерирующее соотношение $X_5 = x_1 x_3$;

$$x_5 x_5 = x_1 x_3 x_5,$$

$$1 = x_1 x_3 x_5. \quad (3.3)$$

Разрешающая способность реплик при выбранных генераторах плана одинакова и равна трем. Чтобы полностью охарактеризовать разрешающую способность реплики, необходимо определить обобщающий определяющий контраст, который получается умножением имеющихся контрастов (3.2) и (3.3):

$$1 = x_1 x_2 x_4 = x_1 x_3 x_5 = x_2 x_3 x_4 x_5. \quad (3.4)$$

Система смешивания определяется умножением обеих частей обобщающего определяющего контраста (3.4) последовательно на факторы x_i и их взаимодействия в соответствии с планом ДФЭ (таблица 3.3):

$$x_1 = x_2 x_4 = x_3 x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5,$$

$$x_2 = x_1 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_5 = x_3 x_4 x_5,$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_5 = x_2 x_4 x_5$$

$$x_4 = x_1 x_2 = x_1 x_3 x_4 x_5 = x_2 x_3 x_5$$

$$x_5 = x_1 x_2 x_4 x_5 = x_1 x_3 = x_2 x_3 x_4,$$

$$x_2 x_3 = x_1 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_5 = x_4 x_5,$$

$$x_1 x_2 x_3 = x_3 x_4 = x_2 x_5 = x_1 x_4 x_5.$$

Получается довольно сложная система смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия различных порядков. Если какие-либо коэффициенты в ММ не значимы, то их взаимодействия, определенные по системе смешивания, тоже, скорее всего, будут не значимы. В таком случае нет необходимости оценивать раздельно линейные эффекты и их взаимодействия. В противном случае, пренебрегать парными и взаимодействиями более высоких порядков нельзя. В этом случае необходимо поставить следующую серию опытов, выбрав нужным образом другую четверть реплику.

3.3.5. Оценка адекватности построенной математической модели

Для принятия решения об адекватности ММ необходимо учитывать то обстоятельство, что ДФЭ типа 2^{5-2} представляет собой насыщенный план. В таком случае воспользоваться критерием Фишера не представляется возможным, и об адекватности ММ судят по соотношению величин остаточной дисперсии и дисперсии воспроизводимости опыта. Дисперсия воспроизводимости равна $s^2_{воспр}=0,061$, остаточная дисперсия в соответствии с (2.10) равна $s^2_{ост}=2,15E-28$, то есть практически равна нулю. На основании этого можно сделать вывод об адекватности построенной ММ.

3.3.6. Вычисление натуральных коэффициентов математической модели.

Для построения полинома, характеризующего характер изменения времени задержки (3.1) интегральной схемы перейдем от кодированных значений факторов к натуральному исчислению в соответствии с выражением (2.2) и условиями проведения эксперимента в таблице 3.3:

$$t_3=17,248-0,824N-2,2977R1+4,453R2-3,965R3+2R4+ \\ +0,135NR1+0,135NR2-0,027NR1R2. \quad (3.5)$$

Таким образом, выражение (3.5) представляет характер изменения времени задержки t_3 интегральной транзисторно-транзисторной логической схемы в области изменения номиналов резисторов и коэффициента разветвления, указанных в таблице 3.3.

В дальнейшем выражение (3.5) можно использовать при планировании экстремального эксперимента для определения минимального времени задержки интегральной схемы.

3.4 ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №2

Задания выполняются в соответствии с индивидуальными вариантами, приведенными в Приложениях Д и Е. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Вариант задания представляет собой результаты ПФЭ типа 2^3 (Приложение Д). В ходе эксперимента в каждой точке факторного пространства проводились три параллельных опыта. Порядок проведения опытов соответствует матрице эксперимента, представленной в таблице 3.4. Необходимо ввести в план эксперимента два дополнительных фактора X_4 и X_5 , используя в качестве генераторов плана соотношения, представленные в Приложении Е, согласно варианту задания.

В ходе выполнения индивидуального задания требуется по предложенным экспериментальным данным построить регрессионные линейные модели и провести регрессионный анализ построенных моделей. Для этого необходимо:

- построить матрицу планирования ДФЭ типа 2^{5-3} ;
- проверить воспроизводимость опытов;
- рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения;
- на основе определяющих контрастов определить систему смешанности оценок коэффициентов модели;
- проверить адекватность полученной модели;
- провести анализ результатов и сделать выводы.

3.5 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 2

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Цель работы.
2. Постановку задачи.
3. Матрицу планирования эксперимента.
4. Результаты проверки воспроизводимости опытов.
5. Результаты расчетов коэффициентов регрессионных моделей и проверки из статистической значимости.
6. Систему смешанности оценок коэффициентов ММ.
7. Результаты проверки адекватности полученной модели исходным экспериментальным данным.

3.6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем сущность планирования эксперимента? Поясните разницу между активным и пассивным экспериментом.
2. Какие задачи решает теория планирования эксперимента?
3. Что такое факторы и какие требования к ним предъявляются?
4. Как выбрать уровни варьирования факторов?
5. В чем сущность ДФЭ и какие ММ он позволяет исследовать?
6. Какую область описывает уравнение регрессии, полученное с помощью ДФЭ, и в каких границах его можно использовать?

7. Что такое взаимодействие факторов и сколько их может быть в ДФЭ?
8. В чем сущность и цели стандартизации масштаба факторов?
9. Как составляется и какими свойствами обладает МП ДФЭ?
10. Что такое генератор плана и из каких соображений он выбирается?
11. Что такое контраст плана и что такое обобщающий контраст?
12. Что такое смешанность оценок коэффициентов регрессии и как ее найти?
13. Что такое разрешающая способность ДФЭ?
14. Принцип насыщенности плана.
15. Каков порядок постановки опытов при ДФЭ?
16. Как проверить воспроизводимость опытов?
15. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
17. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
18. Как проверить адекватность полученной ММ?
19. Как перейти к исходным физическим переменным?
20. Проведите сравнительный анализ ПФЭ и ДФЭ.

4 Лабораторная работа №3. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

В зависимости от решаемых экспериментальным путем задач используются различные приемы организации эксперимента и различные методы обработки экспериментальных данных. Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

- планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого – выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;
- планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;
- планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);
- планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;
- планирование при изучении динамических процессов и т.д.

Если цель эксперимента состоит в изучении поведения объекта исследования в определенном факторном пространстве, то построение линейной регрессионной модели является начальным этапом изучения объекта исследования. Этот этап может быть и завершающим, если построенная модель адекватна и цель эксперимента достигнута.

Но в практической деятельности может быть установлено, что линейные эффекты, входящие в регрессионную модель являются незначимыми, или регрессионная модель не адекватна. Такая ситуация может возникнуть из-за значительной нелинейности поверхности отклика. В таких случаях переходят к построению полиномиальной регрессионной модели более высокого порядка.

Если же цель эксперимента состоит в определении оптимального значения поверхности отклика (критерия эффективности), то линейная модель в окрестности оптимума отклика также становится не пригодной для изучения характера изменения критерия эффективности. В этом случае также необходимо переходить к построению полиномиальной модели более высокого порядка. В таких случаях для математического описания применяют полиномы второго порядка, реже – третьего порядка.

Планы 2-го порядка позволяют получить математическое описание в виде полной квадратичной модели, содержащей кроме основных эффектов b_i все парные взаимодействия b_{ij} и квадратичные эффекты b_{ii} :

$$y(x_1, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2. \quad (4.1)$$

Для построения полинома второго порядка необходимо выделить для каждого фактора три уровня, но применение полного факторного эксперимента (ПФЭ) типа 3^k для получения отдельных оценок коэффициентов полинома второго порядка не является рациональным, так как планирование на трех уровнях характеризуется резким увеличением объема эксперимента.

Задача минимизации числа опытов в эксперименте, цель которого — построение квадратичного полинома, решается на основе применения композиционных планов.

4.1 КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Композиционные планы используют обычно на заключительном этапе исследования: при описании экспериментальной области в ситуациях, когда отсутствует априорная информация об объекте, и его полиномиальную модель приходится подбирать последовательно, начиная с простейшего линейного уравнения, которое затем достраивается до полной квадратичной модели. В таких случаях применение композиционных планов оказывается наиболее выгодным по числу опытов.

Композиционный план формируется на основе полного 2^k или дробного 2^{k-p} факторного эксперимента путем добавления в матрицу планирования $2k$ «звездных» точек и точек в центре плана. Если матрица планирования содержит точки в центре плана, то такое планирование называется центральным композиционным планированием.

Центрально-композиционные планы (ЦКП) любой модификации состоят из трех частей. Первая часть — основа или ядро плана — это ПФЭ 2^k или дробного факторного эксперимента (ДФЭ) 2^{k-p} , где k — количество неизвестных коэффициентов регрессии, $p = 0, 1, 2$. При этом требуется, чтобы ядро плана обеспечивало отдельную оценку коэффициентов регрессии и всех парных взаимодействий. Данное условие накладывает весьма жесткое ограничение на возможную степень дробности используемого ДФЭ. В частности, при $k \leq 4$, как показывают расчеты, может применяться лишь ПФЭ 2^k ; если $5 \leq k \leq 7$, то кроме ПФЭ 2^k можно использовать и ДФЭ 2^{k-1} , а для $k > 7$ допустим также и ДФЭ 2^{k-2} . Вторая часть ЦКП — так называемые «звездные» точки, расположенные на координатных осях на расстоянии $\pm\alpha$ от центра эксперимента. Третья часть ЦКП — опыты в центре плана; число таких опытов $N_0 \geq 1$. Геометрическая интерпретация ЦКП представлена на рисунке 4.1, а матрица планирования для ЦКП произвольного вида — в таблице 4.1.

Конкретные значения α и N_0 выбираются исходя из тех или иных критериев оптимальности регрессионных экспериментов (α — звездное плечо,

N_0 — количество экспериментов в центре плана). В связи с этим принято выделять ортогональные (ОЦКП) и ротатабельные (РЦКП) центрально-композиционные планы.

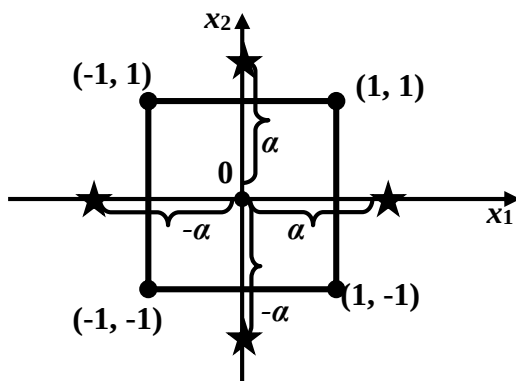


Рисунок 4.1 — Геометрическая интерпретация центрального композиционного плана произвольного вида для двух факторов..

Таблица 4.1 — матрица планирования центрального композиционного плана произвольного вида

Составные части ЦКП	G	Факторы				Число точек
		x_1	x_2	...	x_k	
Ядро плана (ПФЭ 2^k или ДФЭ 2^{k-p})	1	-1	-1	...	-1	2^{k-p} $p=0;1;2;$
	2	+1	-1	...	-1	
	3	-1	+1	...	-1	
	4	+1	+1	...	-1	
	...	...	...	...	...	
	2^{k-p}	+1	+1	...	-1	
«Звездные» точки	2^{k-p+1}	$-\alpha$	0	...	0	2k
	2^{k-p+2}	$+\alpha$	0	...	0	
	2^{k-p+3}	0	$-\alpha$	...	0	
	2^{k-p+4}	0	$+\alpha$	...	0	
	...	...	...	...	...	
	$2^{k-p+2k-1}$	0	0	...	$-\alpha$	
	2^{k-p+2k}	0	0	...	$+\alpha$	
Центральные точки	$2^{k-p+2k+1}$	0	0	...	0	N_0
	...	...	...	...	...	
	$2^{k-p+2k+N_0}$	0	0	...	0	

4.2 ОРТОГОНАЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

4.2.1 Ортогональный центральный композиционный план

В ОЦКП, как правило, количество испытаний в центре плана принимают равным $N_0=1$, а план целиком строится с учетом критерия ортогональности (сумма парных произведений значений уровней двух любых факторов (столбцов) равна нулю). Для обеспечения парной ортогональности столбцов, отвечающих свободному члену β_0 и квадратичным коэффициентам β_i^2 , $i=1, 2, \dots, k$, а также столбцов, отвечающих квадратичным членам между собой, необходимо принять специальные меры. С этой целью, прежде всего, несколько видоизменяют систему базисных функций, а именно – ищут регрессионную модель в виде:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \beta'_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} (x_i^2 - x_i'^2), \quad (4.2)$$

$$x_i'^2 = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N x_{ig}^2 = \frac{2^{k-p} + 2\alpha^2}{N}, \quad (4.3)$$

где p – число, определяющее дробность эксперимента, N – общее число точек плана:

$$N = 2^{k-p} + 2k + 1, \quad (4.4)$$

Свободный член в выражении (4.1) вычисляется по формуле

$$b_0 = \beta'_0 + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i'^2, \quad (4.5)$$

где β_{ii} – коэффициенты уравнения регрессии. Величину β'_0 вводят для обеспечения ортогональности плана. Как видно, в этой модели при квадратичных коэффициентах используются централизованные переменные. Переход к таким переменным обеспечивает ортогональность плана эксперимента.

Числовое значение α выбирается из условия ортогональности столбцов с квадратичными переменными, т.е.: $\sum_{\substack{g=1 \\ i=j}}^N (x_{ig}^2 - x_i'^2)(x_{jg}^2 - x_j'^2) = 0$. Подставив

(4.3) в данное выражение, после несложных преобразований получаем уравнение для требуемого значения α :

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{2^{k-p-2}(2^{k-p} + 2k + 1)} - 2^{k-p-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{N \cdot 2^{k-p}} - 2^{k-p}}{2}}. \quad (4.6)$$

С помощью этой формулы можно определить конкретные числовые значения величины «звездного» плеча α (таблица 4.2).

Таблица 4.2 — Параметры ОЦКП при $k=2÷8$

k	2	3	4	5			
Ядро ЦПК	ПФЭ 2^2	ПФЭ 2^3	ПФЭ 2^4	ПФЭ 2^5	ДФЭ 2^{5-1}		
N	9	15	25	43	27		
α	1,000	1,215	1,414	1,596	1,547		
k	6		7		8		
Ядро ЦПК	ПФЭ 2^6	ДФЭ 2^{6-1}	ПФЭ 2^7	ДФЭ 2^{7-1}	ПФЭ 2^8	ДФЭ 2^{8-1}	ДФЭ 2^{8-2}
N	77	45	143	79	273	145	81
α	1,761	1,724	1,909	1,885	2,045	2,029	2,000

Для удобства обработки результатов опытов проводится преобразование независимых переменных (факторов) X к безразмерным нормированным переменным. Для i -го фактора имеем

$$x_i = \frac{X_i - X_{0i}}{\Delta X_i}, \quad (4.7)$$

где X_{0i} – базовый или нулевой уровень i -й переменной, ΔX_i – интервал варьирования по i -му фактору. В результате нормировки значение верхнего уровня фактора равно $x_i^B = +1$, а нижнего уровня фактора $x_i^H = -1$. Матрица планирования эксперимента для двух факторов представлена в таблице 4.3, а геометрическая интерпретация эксперимента на рисунке 4.2. В качестве ядра плана используется ПФЭ 2^2 .

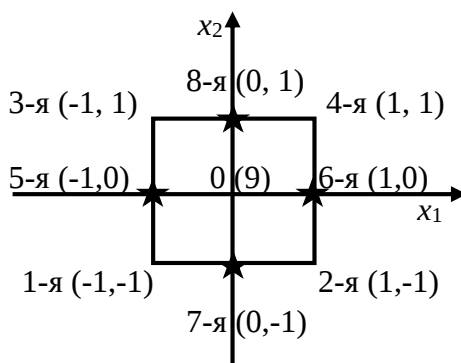


Рисунок 4.2 — Геометрическая интерпретация ортогонального центрального композиционного плана для двух факторов.

Таблица 4.3 — Матрица ОЦКП для двух факторов

G	x_0	x_1	x_2	Компоненты плана	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
1	1	-1	-1	ядро 2^2	1	-1	-1	1	1	1	y_1
2	1	1	-1		1	1	-1	-1	1	1	y_2
3	1	-1	1		1	-1	1	-1	1	1	y_3
4	1	1	1		1	1	1	1	1	1	y_4
5	1	$-\alpha$	0	звездные точки	1	-1	0	0	1	0	y_5
6	1	α	0		1	1	0	0	1	0	y_6
7	1	0	$-\alpha$		1	0	-1	0	0	1	y_7
8	1	0	α		1	0	1	0	0	1	y_8
9	1	0	0	точка в центре плана	1	0	0	0	0	0	y_9

4.2.2 Составление матрицы планирования ОЦКП

Перейдем к квадратичной модели (4.2) с центрированными квадратичными переменными (таблица 4.4). В этом случае можно добиться полной ортогонализации столбцов матрицы планирования.

Таблица 4.4 — Матрица ОЦКП для ядра ПФЭ 2^k

x_0	x_1	x_2	...	x_k	x_1x_2	...	$x_{k-1}x_k$	$x_1^2 - x_1'^2$	$x_2^2 - x_2'^2$	...	$x_k^2 - x_k'^2$
+1	-1	-1	...	-1	+1	...	+1	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	+1	-1	...	-1	-1	...	+1	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	-1	+1	...	-1	-1	...	...	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	+1	+1	...	-1	+1	...	...	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	+1	+1	...	+1	+1	...	+1	$1 - x_1'^2$	$1 - x_2'^2$	...	$1 - x_k'^2$
+1	$-\alpha$	0	...	0	0	...	0	$\alpha^2 - x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
+1	$+\alpha$	0	...	0	0	...	0	$\alpha^2 - x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
+1	0	$-\alpha$	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$\alpha^2 - x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
+1	0	$+\alpha$	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$\alpha^2 - x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	0	0	...	$-\alpha$	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$\alpha^2 - x_k'^2$
+1	0	0	...	$+\alpha$	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$\alpha^2 - x_k'^2$
+1	0	0	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	0	0	...	0	0	...	0	$-x_1'^2$	$-x_2'^2$	...	$-x_k'^2$

Вычислим для ПФЭ 2^2 в соответствии с выражением (3) значение $x_i'^2$

$$\beta = x_1'^2 = x_2'^2 = \frac{2^{k-p} + 2\alpha^2}{N} = \frac{6}{9} \cong 0,667, \text{ тогда матрица ОЦКП для двух}$$

факторов будет выглядеть следующим образом (таблица 4.5):

Таблица 4.5 — Матрица ОЦКП для двух центрированных факторов.

x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	$x_1^2 - x_1'^2$	$x_2^2 - x_2'^2$	y
1	-1	-1	1	$1 - 0,667 = 0,333$	$1 - 0,667 = 0,333$	y_1
1	1	-1	-1	$1 - 0,667 = 0,333$	$1 - 0,667 = 0,333$	y_2
1	-1	1	-1	$1 - 0,667 = 0,333$	$1 - 0,667 = 0,333$	y_3
1	1	1	1	$1 - 0,667 = 0,333$	$1 - 0,667 = 0,333$	y_4
1	-1	0	0	$1 - 0,667 = 0,333$	$0 - 0,667 = -0,667$	y_5
1	1	0	0	$1 - 0,667 = 0,333$	$0 - 0,667 = -0,667$	y_6
1	0	-1	0	$0 - 0,667 = -0,667$	$1 - 0,667 = 0,333$	y_7
1	0	1	0	$0 - 0,667 = -0,667$	$1 - 0,667 = 0,333$	y_8
1	0	0	0	$0 - 0,667 = -0,667$	$0 - 0,667 = -0,667$	y_9

4.2.3 Порядок постановки эксперимента и проверка воспроизводимости опытов

Для оценки точности эксперимента в каждой i -й точке факторного пространства проводят m параллельных опытов. В результате получают значения $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}$ для $i=1, N$ исследуемого параметра, для которых находят среднее значение

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m y_{iq}, \quad (4.8)$$

где y_{iq} — исследуемый параметр, q — номер измерения отклика при проведении параллельных опытов.

Чтобы исключить влияние систематических ошибок, вызванных влиянием внешней среды и неконтролируемых факторов, рекомендуется случайная последовательность при постановке опытов, которая называется рандомизацией. Рандомизацию опытов можно провести с помощью генератора случайных чисел.

Опыт считается статистически воспроизводимым. Если дисперсия выходного параметра $S^2_{\{y\}}$ однородна в каждой точке факторного пространства. Такую дисперсию называют также дисперсией воспроизводимости опыта и вычисляют по формуле

$$S^2_{\{y\}} = S^2_{воспр} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^m (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(m-1)}, \quad (4.9)$$

где $\bar{y}_i$ — среднее значение отклика в i -м опыте, y_{iq} — значение отклика.

Гипотезу о воспроизводимости опытов проверяют с помощью критерия Кохрена. Этот критерий используют тогда, когда во всех точках факторного пространства имеется одинаковое число повторных опытов. Для этого формулируют нулевую гипотезу

H_0 : $s^2_{y1} = s^2_{y2} = \dots = s^2_{yn}$ — дисперсии значений отклика в каждом опыте однородны.

Подсчитывается дисперсия значений отклика для каждого из опытов эксперимента:

$$s_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{q=1}^m (y_{iq} - \bar{y}_i)^2, \quad i=1, N, \quad (4.10)$$

а затем из всех дисперсий находится наибольшая $s^2_{max} = \max\{s_i^2, i=1, N\}$, которая делится на сумму всех дисперсий:

$$G_{расч} = \frac{s^2_{max}}{\sum_{i=1}^N s_i^2}. \quad (4.11)$$

Если $G_{расч} < G_{табл}(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)$, гипотеза об однородности дисперсий принимается. Здесь α — уровень значимости, γ_1 и γ_2 — степени свободы, при этом $\gamma_1 = m-1$, $\gamma_2 = N$. Таблицы распределения Кохрена приводятся в Приложении А. Если $G_{расч} > G_{табл}$ гипотеза отвергается, и тогда эксперимент необходимо повторить, изменив условия его проведения (набор факторов, интервалы их варьирования, точность измерительных приборов и др.).

4.2.4 Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Оценки коэффициентов регрессии для соответствующих групп равны ($\bar{y}_i$ — среднее значение отклика в i -м опыте):
— для свободного члена модели (4.2)

$$\beta'_0 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{0i} \bar{y}_i}{N}, \quad (4.12)$$

— для линейных слагаемых моделей (4.1), (4.2)

$$\beta_u = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ui} \bar{y}_i}{2^{k-p} + 2\alpha^2}, \quad u = 1, 2, \dots, k; \quad (4.13)$$

— для парных взаимодействий моделей (4.1), (4.2)

$$\beta_{uj} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{uij} \bar{y}_i}{2^{k-p}}, \quad j, u = 1, 2, \dots, k; j \neq u; \quad (4.14)$$

— для центрированных квадратичных переменных моделей (4.1), (4.2)

$$\beta_u = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ui}^2 \bar{y}_i}{2\alpha^4}, \quad u = 1, 2, \dots, k. \quad (4.15)$$

Приведем регрессионную модель (4.2) к виду (4.1). Для этого в выражение (4.5) подставим значение β'_0 , вычисленное в соответствии с (4.12) и β , определенное на основании (4.3):

$$b_0 = \beta'_0 - x_i'^2 \sum_{u=1}^k \beta_u = \beta'_0 - \beta \sum_{u=1}^k \beta_u. \quad (4.16)$$

Итак, получили для искомой регрессионной модели (4.1) следующие коэффициенты: b_0 , $b_i \equiv \beta_u$, $b_{ij} \equiv \beta_{uj}$, $b_{ii} \equiv \beta_u$, $i, u = 1, 2, \dots, k; j \neq u$.

4.2.5. Исследование свойств квадратичной регрессионной модели

4.2.5.1. Анализ значимости коэффициентов регрессии. Точность оценки коэффициентов регрессии для разных групп неодинакова, поскольку условие нормировки в случае ОЦКП не соблюдается, т.к. $\sum_{i=1}^N x_{iu}^2 \neq N$ (u – номер любого столбца, кроме нулевого).

Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии проводится по t -критерию Стьюдента. Гипотеза о равенстве коэффициента уравнения регрессии нулю принимается, если выполняется неравенство $t_{табл} > t_{расч}$. В этом случае считается, что найденный коэффициент b_j является статистически незначительным и его следует исключить из уравнения регрессии.

Критическое значение критерия $t_{табл}$ выбирается из таблиц t -распределения Стьюдента при выбранном уровне статистической значимости α и при числе степеней свободы $\gamma=N(m-1)$. Таблица t -распределения Стьюдента приведена в Приложении Б. Кроме этого критическое значение $t_{табл}$ можно определить, используя функции электронной таблицы Excel: СТЫОДРАСПОБР(α ; γ).

Расчетное значение t -критерия вычисляется по формуле

$$t_{расч} = \frac{|b_j|}{s\{b_j\}}, \text{ где } s\{b_j\} \text{ — оценка среднего квадратичного отклонения по-}$$

грешности определения коэффициента, $s\{b_j\} = \sqrt{s^2\{b_j\}}$.

Оценки дисперсий для каждой из четырех однородных групп для m параллельных опытов подсчитываются по следующим формулам:

$$s^2\{b_0\} = \frac{s_{воспр}^2}{m(N + 2\alpha^4)}, \quad (4.17)$$

$$s^2\{b_i\} = \frac{s_{воспр}^2}{m(2^{k-p} + 2\alpha^2)}, \quad (4.18)$$

$$s^2\{b_{ij}\} = \frac{s_{воспр}^2}{m \cdot 2^{k-p}}, \quad (4.19)$$

$$s^2\{b_{ii}\} = \frac{s_{воспр}^2}{m \cdot 2\alpha^4}, \quad (4.20)$$

где $s_{воспр}^2$ — дисперсия воспроизводимости, вычисленная в соответствии с (4.9).

Как было отмечено выше, если коэффициенты регрессии оказываются незначимыми, то они исключаются из уравнения регрессии. Так как при использовании ОЦКП все коэффициенты используются независимо, то изменение оценки любого коэффициента (например, исключение его из уравнения) не приводит к изменению других оценок и их дисперсий. Исключение составляет коэффициент b_0 . Необходимо помнить, что незначимость коэффициентов может быть обусловлена и неверным выбором интервала варьирования факторов. Поэтому иногда бывает полезно расширить интервал варьирования и провести новый эксперимент.

4.2.5.2. Проверка адекватности модели. Проверка адекватности полученного уравнения регрессии экспериментальным данным проводится на основании критерия Фишера, расчетное значение которого представляет собой следующее отношение

$$F_{расч} = \frac{s_{осм}^2}{s_{воспр}^2}, \quad (4.21)$$

где $s_{осм}^2$ — дисперсия, характеризующая расхождение между экспериментальными данными и теоретическими, полученными на основании и выражений (4.13)-(4.16) для коэффициентов модели (4.1) с учетом анализа значимости коэффициентов:

$$s_{осм}^2 = \frac{1}{N - m' - 1} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \quad (4.22)$$

где $\hat{y}_i$ — значение отклика в i -й точке факторного пространства, вычисленное на основании модели (4.1), m' — количество значимых коэффициентов в модели (4.1).

Если $F_{расч} < F_{табл}(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, то гипотеза об адекватности регрессионной модели принимается. Значение $F_{табл}$ выбирается из таблиц распределения Фишера при уровне значимости α и степенях свободы $\gamma_1 = N - m' - 1$ и $\gamma_2 = N \cdot (m - 1)$. Таблица F -распределения Фишера приведена в Приложении 3. Кроме этого критическое значение $F_{табл}$ можно определить, используя функции электронной таблицы Excel: $FRASPOBP(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)$.

4.2.6. Контрольные вопросы.

1. В чем сущность ортогонального ЦКП и какие ММ он позволяет построить?
2. В чем сущность и цель стандартизации масштаба факторов?
3. Как составляется и какими свойствами обладает МПортогонального ЦКП?
4. Что такое «звездное плечо» и из каким образом выбирается его значение?
5. Как определяется число опытов ОЦКП?
6. Что является ядром плана в ОЦКП?
7. Что является геометрической интерпретаций ОЦКП для двух факторов и для трех факторов?
8. Каков порядок постановки опытов в ОЦКП?
9. Как проверить воспроизводимость опытов?
10. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
11. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
12. Как проверить адекватность полученной ММ?
13. Как перейти к исходным физическим переменным?

4.2.7 Пример расчета ОЦКП.

Требуется исследовать влияние технологических факторов (номиналов резисторов R_1 и R_2) в интегральной транзисторно-транзисторной логической схеме на значение средней потребляемой мощности $P=f(R_1, R_2)$. Центр плана эксперимента: $R_1=5,3\text{кОм}$ и $R_2=3,75\text{кОм}$. Функцию $f(R_1, R_2)$ будем искать в виде квадратичного полинома (4.1).

Составим ОЦКП для пяти серий опытов при интервалах варьирования для $R_1 — 1,1\text{кОм}$, $R_2 — 0,55\text{кОм}$. Для стандартизации масштабов факторов условия проведения опытов вычислим значения нижнего и верхнего уровня согласно соотношению (4.7) и сведем результаты в таблицу 4.6.

Таблица 4.6 — Условия проведения ОЦКП

Характеристика плана	Стандартный масштаб x_i	Натуральный масштаб	
		$x_1=R_1, \text{кОм}$	$x_2=R_2, \text{кОм}$
Нулевой уровень	0	5,3	3,75
Верхний уровень	+1	6,4	4,3
Нижний уровень	-1	4,2	3,2
Звездные точки	+1	5,3	4,3
	-1	4,2	3,2

Составим матрицу эксперимента с учетом рандомизации опытов. В таблице 4.7 представлены результаты параллельных опытов и вычислены среднее значение отклика и дисперсия для каждой точки факторного пространства соответственно соотношениям (4.8) и (4.10).

Таблица 4.7. — Результаты эксперимента.

N_0	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{cp}	s_{yi}^2
1	1	-1	-1	1	0,3	0,3	6,7	3,7	5,9	4,5	4,3	5,0	1,6
2	1	1	-1	-1	0,3	0,3	14,1	13,2	14,7	12,9	14,3	13,8	0,6
3	1	-1	1	-1	0,3	0,3	1,3	1,1	1,5	0,9	0,7	1,1	0,1
4	1	1	1	1	0,3	0,3	18,8	20,2	17,7	19,1	20,1	19,2	1,1
5	1	-1	0	0	0,3	-0,7	3,6	5,5	4,1	3,5	3,8	4,1	0,7
6	1	1	0	0	0,3	-0,7	18,6	17,4	18,3	17,1	17,4	17,8	0,4
7	1	0	-1	0	-0,7	0,3	8,8	9,2	8,3	9,1	8,4	8,8	0,2
8	1	0	1	0	-0,7	0,3	10,7	10,2	10,1	10,2	11,1	10,5	0,2
9	1	0	0	0	-0,7	-0,7	11,9	10,6	11,9	12,2	10,4	11,4	0,7

Проведем анализ воспроизводимости опыта на основе критерия Кохрена в соответствии с (4.11): $G_{расч}=0,292$, табличное значение критерия определяем при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1=m-1=4$, $\gamma_2=N=9$, получаем $G_{табл}(\alpha;\gamma_1;\gamma_2)=0,502$. Так как $G_{расч} < G_{табл}$, опыт является воспроизводимым, и его результаты можно использовать для оценки коэффициентов регрессионного уравнения.

В соответствии с расчетными формулами (4.12)—(4.16) можно определить коэффициенты регрессионной модели. Для анализа значимости коэффициентов необходимо вычислить погрешности определения коэффициентов модели на основании соотношений (4.17)—(4.20). Результаты расчетов приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8 — Результаты анализа значимости коэффициентов.

	b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
расчетные формулы	12, 16	13	13	14	15	15
коэффициенты регрессионной модели	11,124	6,760	0,524	2,325	-0,050	-1,368
расчетные формулы	17	18	18	19	20	20
погрешности определения коэффициентов	0,011	0,020	0,020	0,030	0,061	0,061
$t_{расч}$	105,88	47,52	3,68	13,34	0,20	5,55
вывод	ЗН	ЗН	ЗН	ЗН	НЗН	ЗН

Для принятия решения о значимости коэффициентов уравнения регрессии расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ сравнивается с табличным значением. Табличное значений критерия Стьюдента $t_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степени свободы $\gamma=N(m-1)=45$, $t_{табл}=2,014$. Неравенство $t_{расч} < t_{табл}$ выполняется для коэффициента b_{11} , который приравняется к нулю и исключается из регрессионной модели.

Проверка адекватности построенной модели выполняется в соответствии с критерием Фишера (4.21). Согласно выражению (4.9) дисперсия воспроизводимости равна $s^2_{воспр}=0,607$, остаточная дисперсия в соответствии с (4.22) составляет $s^2_{ост}=0,169$. Расчетное значение критерия Фишера равно $F_{расч}=0,278$. Табличное значений критерия Фишера $F_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1 = N - m' - 1 = 9 - 5 - 1 = 3$ и $\gamma_2 = N \cdot (m - 1) = 9 \cdot (5 - 1) = 36$, $F_{табл}=2,87$. Неравенство $F_{расч} < F_{табл}$ выполняется, поэтому построенная регрессионная модель считается адекватной экспериментальным данным.

Перейдем от кодированных значений факторов к натуральному исчислению в соответствии с выражением (4.7) и условиями проведения эксперимента в таблице 4.6:

$$P = -12,15 - 8,27R_1 + 14,5R_2 + 3,84R_1R_2 - 4,52R_2^2. \quad (4.23)$$

Таким образом, выражение (4.23) представляет характер изменения средней потребляемой мощности P интегральной транзисторно-транзисторной логической схемы в области изменения номиналов резисторов $4,2 \leq R_1 \leq 6,4 \text{ кОм}$, $3,2 \leq R_2 \leq 4,3 \text{ кОм}$.

4.3 РОТОТАБЕЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

4.3.1. Рототабельный центральный композиционный план

Рототабельный центральный композиционный план (РЦКП) позволяет получить математическое описание отклика объекта исследования в виде уравнения множественной регрессии второго порядка:

$$y(x_1, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2$$

Рототабельные планы, как и ортогональные, являются композиционными. Они позволяют сохранить экспериментальную информацию, полученную с помощью ПФЭ или ДФЭ, которую исследователь затем дополняет опытами в «звездных точках» и в центре плана.

Метод РЦКП позволяет получить более точное математическое описание, что достигается благодаря увеличению числа опытов в центре плана и специальному выбору величины «звездного плеча» α .

Рототабельные планы — это планы, у которых точки плана располагаются на окружностях (сферах, гипербсферах). В таком случае точность оценивания функции отклика по любому направлению факторного пространства (для всех точек плана) одинаковая.

Число опытов РЦКП определяется по формуле $N = 2^{k-p} + 2k + N_0$, где 2^{k-p} — число опытов в ядре плана ПФЭ или ДФЭ, $2k$ — число опытов в «звездных» точках, имеющих координаты, N_0 — число опытов в центре плана.

Чтобы композиционный план был рототабельный величина «звездного» плеча α выбирается из условий

$$\alpha = 2^{n/4} \quad \text{при } n < 5$$

$$\alpha = 2^{(n-1)/4} \quad \text{при } n \geq 5.$$

Параметры РЦКП для различного количества факторов приведены в таблице 4.9.

4.3.2 Составление матрицы планирования эксперимента

Матрица планирования строится так же, как и при ортогональном плане.

Отличие состоит только в том, что число опытов в центре плана выбирается из условия, чтобы информация о значениях выходной переменной оставалась неизменной (или почти неизменной) для точек сферы единичного радиуса, т.е. чтобы информационный профиль мало отличался внутри этой сферы. Планы, удовлетворяющие этому условию, называются рототабельными равномерными.

Таблица 4.9 — Характеристики рототабельного планирования

Число факторов	2	3	4	5(ПФЭ)	5(ДФЭ)
Число опытов ПФЭ	4	8	16	32	16
Число опытов в звездных точках	4	6	8	10	10
Число опытов в центре плана	5	6	7	10	6
Общее число опытов	13	20	31	52	32
Величина звездного плеча α	1,414	1,680	2,000	2,378	2,000

Для получения рототабельного равномерного плана необходимо обеспечить равенство дисперсии в центре плана ($\rho = 0$) и на поверхности гипертотальности радиуса $\rho = 1$. Этого добиваются подбором числа наблюдений N_0 в центре плана.

Матрица РЦКП для двух факторов приведена в таблице 4.10, а геометрическая интерпретация плана эксперимента представлена на рисунке 4.3.

Таблица 4.10 — Матрица РЦКП для двух факторов

Системы опытов	№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
ПФЭ	1	1	1	1	1	1	1	y_1
	2	1	-1	1	-1	1	1	y_2
	3	1	1	-1	-1	1	1	y_3
	4	1	-1	-1	1	1	1	y_4
Опыты в «звездных» точках	5	1	1,41	0	0	2	0	y_5
	6	1	-1,41	0	0	2	0	y_6
	7	1	0	1,41	0	0	2	y_7
	8	1	0	-1,41	0	0	2	y_8
Опыты в центре плана	9	1	0	0	0	0	0	y_9
	10	1	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	1	0	0	0	0	0	y_{11}
	12	1	0	0	0	0	0	y_{12}
	13	1	0	0	0	0	0	y_{13}

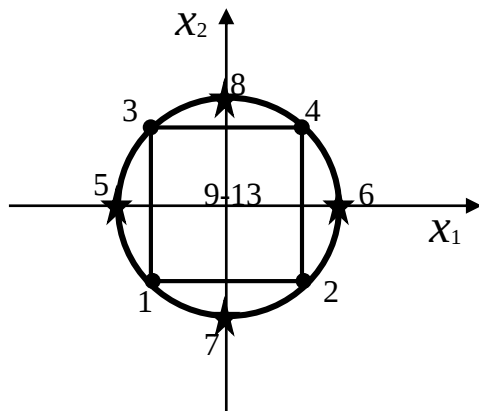


Рисунок 4.3 — Геометрическая интерпретация рототабельного центрального композиционного плана для двух факторов.

При анализе значимости коэффициентов регрессионного уравнения, построенного на основе РЦКП, необходимо иметь в виду, что матрица, приведенная в таблице 4.10, не обладает свойством ортогональности.

4.3.3 Порядок проведения эксперимента

При РЦКП стандартизация масштабов факторов, порядок постановки опытов, проверка воспроизводимости опытов проводятся так же, как и при ОЦКП. Несколько отличаются соотношения для расчета оценок коэффициентов регрессионного уравнения и их дисперсий. При реализации рототабельных планов можно отказаться от постановки параллельных опытов для оценки воспроизводимости эксперимента, что уменьшает число опытов по сравнению с ОЦКП. Дисперсия воспроизводимости может быть оценена в этом случае по экспериментам в центре плана.

4.3.4 Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Формулы для расчета коэффициентов полинома и их дисперсий при РЦКП значительно сложнее, чем при ОЦКП. При рототабельном планировании для вычисления оценок коэффициентов регрессии и соответствующих оценок дисперсии находят следующие вспомогательные величины:

$$A = \frac{1}{2B[(k+2)B - k]}, \quad (4.23)$$

$$B = \frac{kN}{(k+2)(N - N_0)}, \quad (4.24)$$

$$C = \frac{N}{N - N_0}, \quad (4.25)$$

где k — число факторов, N — общее число опытов рототабельного планирования, N_0 — число опытов в центре плана.

Далее на основании результатов эксперимента вычисляют следующие суммы:

— для свободного члена

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i, \quad (4.26)$$

— для линейных слагаемых

$$S_u = \sum_{i=1}^N x_{ui} \bar{y}_i, \quad u = 1, 2, \dots, k, \quad (4.27)$$

— для парных взаимодействий

$$S_{ju} = \sum_{i=1}^N x_{jui} \bar{y}_i, \quad j, u = 1, 2, \dots, k, \quad j \neq u, \quad (4.28)$$

— для квадратичных переменных

$$S_k = \sum_{i=1}^N x_{ki}^2 \bar{y}_i, \quad u = 1, 2, \dots, k, \quad (4.29)$$

Формулы для расчета коэффициентов регрессионной модели с учетом (4.23) — (4.29) будут иметь следующий вид:

— для свободного члена

$$b_0 = \frac{2AB}{N} \left[S_0 B(k+2) - C \sum_{j=1}^k S_k \right], \quad (4.30)$$

— для линейных слагаемых

$$b_j = \frac{CS_j}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (4.31)$$

— для парных взаимодействий

$$b_{ju} = \frac{C^2 S_{ju}}{BN}, \quad j, u = 1, 2, \dots, k, \quad j \neq u, \quad (4.32)$$

— для квадратичных переменных

$$b_k = \frac{AC}{N} \left\{ S_k C[B(k+2) - k] + C(1 - B) \sum_{i=1}^k S_k - 2BS_0 \right\}. \quad (4.33)$$

Оценку дисперсии воспроизводимости можно вычислить на основании результатов опытов, проведенных в центре плана. Среднее значение отклика равно

$$\bar{y} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} y_j, \quad (4.34)$$

тогда

$$s_{воспр}^2 = \frac{1}{N_0 - 1} \sum_{j=1}^{N_0} (y_j - \bar{y})^2.$$

Дисперсия вычислена для числа степеней свободы $\gamma = N_0 - 1$.

4.3.5. Исследование свойств квадратичной регрессионной модели

4.3.5.1. Анализ значимости коэффициентов регрессии. Как и для ОЦКП, точность оценки коэффициентов регрессии при использовании РЦКП для разных групп неодинакова, поскольку условие нормировки и в этом случае не соблюдается, т.к. $\sum_{i=1}^N x_{iu}^2 \neq N$ (u – номер любого столбца, кроме нулевого).

Проверка значимости коэффициентов проводится точно также, как и для коэффициентов, построенных на основании ОЦКП (пункт 2.5), однако, формулы для вычисления оценки дисперсий коэффициентов иные. Расчетные соотношения приведены ниже:

$$s^2 \{b_0\} = \frac{2AB(k+2)s_{воспр}^2}{N}, \quad (4.35)$$

$$s^2 \{b_i\} = \frac{s_{воспр}^2}{N - N_0}, \quad (4.36)$$

$$s^2 \{b_{ij}\} = \frac{C^2 s_{воспр}^2}{N}, \quad (4.37)$$

$$s^2 \{\beta_i^2\} = \frac{AC^2 s_{воспр}^2}{N} [B(k+1) - (k-1)], \quad (4.38)$$

где $s_{воспр}^2$ — дисперсия воспроизводимости, вычисленная в соответствии с (4.34).

Кроме того, если параллельные опыты проводились только в центре плана, то число степеней свободы для значения критерия Стьюдента вычисляется в соответствии с выражением $\gamma = N - K - 1 + N_0(m - 1)$, где K — количество коэффициентов регрессионной модели.

Необходимо помнить, что при РЦКП оценки коэффициентов регрессии при линейных членах и парных взаимодействиях не коррелированы с оценками других коэффициентов, а при квадратичных членах — коррелированы между собой и оценкой свободного члена. Исключение любого из квадратичных членов приводит к изменению оценок остальных, а также оценки свободного члена b_0 .

4.3.5.2. Проверка адекватности модели. Проверка адекватности полученной регрессионной модели проводится по критерию Фишера, в соответствии с расчетным соотношением (4.21).

Оценим остаточную дисперсию построенной регрессионной модели. Будем предполагать, что параллельные опыты проводятся только в центральных точках плана. Тогда остаточная сумма квадратов отклонений экспериментальных данных y_i и теоретических значений отклика $\hat{y}_i$ может быть записана:

$$S_R = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N-N_0} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

т.е. первое слагаемое представляет собой остаточную сумму квадратов отклонений в точках ПФЭ (или ДФЭ) и в «звездных» точках, а второе — сумму квадратов отклонений в центре плана. Эти слагаемые определяют общее рассеяние результатов наблюдений отклика относительно оценки регрессионной модели.

Перепишем последнее выражение в виде:

$$\begin{aligned} S_R &= \sum_{i=1}^{N-N_0} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0 + \bar{y}_0 - \hat{y}_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N-N_0} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (\bar{y}_0 - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0)^2, \end{aligned}$$

здесь $\bar{y}_0$ — среднее значение отклика в центре плана.

Общее рассеяние связано со случайными погрешностями наблюдений, возникающими в результате влияния неконтролируемых факторов и систематическими погрешностями в случае неадекватности регрессионной модели и функции отклика. Третье слагаемое остаточной суммы связано с дисперсией, характеризующейся только случайной погрешностью опыта. Следовательно, с остаточной дисперсией (дисперсией адекватности) связана сумма:

$$S_{ocm} = S_R - \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 - \sum_{i=N-N_0+1}^N (y_i - \bar{y}_0)^2.$$

Оценку остаточной дисперсии рассчитывают по формуле

$$s_{ocm}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 - s_{воспр}^2 (N_0 - 1)}{N - 0,5(k + 2)(k + 1) - (N_0 - 1)}, \quad (4.39)$$

где y_i и $\hat{y}_i$ — значения отклика экспериментальное и теоретическое, вычисленное в i -й точке факторного пространства, на основании модели (4.1). Степень свободы, связанная с числителем равна

$$\gamma_1 = N - 0,5(k + 2)(k + 1) - (N_0 - 1). \quad (4.40)$$

Если в каждой точке рототабельного центрального композиционного плана проводилось m параллельных опытов, то, проделав аналогичные выкладки, можно получить выражение для остаточной суммы, связанной с дисперсией адекватности. В этом случае значение отклика y_i в выше приведенных выражениях заменяется средним значением отклика $\bar{y}_i$, вычисленным по результатам экспериментов в каждой i -й точке факторного пространства.

Дисперсия воспроизводимости $s_{воспр}^2$ вычисляется по формуле (4.9), если проводились параллельные опыты в каждой точке факторного пространства, при этом степень свободы будет равна

$$\gamma_2 = N \cdot (m - 1). \quad (4.41)$$

Если параллельные опыты проводились только в центре плана, то дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле (34), а связанная с ней степень свободы равна $\gamma_2 = N_0 - 1$.

Расчетное значение критерия Фишера сравнивается с табличным значением, определенным при заданном уровне значимости α и степенях свободы γ_1 и γ_2 . Если $F_{расч} < F_{табл}$, то построенная модель является адекватной экспериментальным данным при уровне значимости α .

4.3.6. Контрольные вопросы

1. В чем сущность рототабельного ЦКП и какие ММ он позволяет построить?
2. В чем сущность и цель стандартизации масштаба факторов?
3. Как составляется и какими свойствами обладает МП рототабельного ЦКП?
4. Как определяется число опытов РЦКП?
5. Что такое «звездное плечо» и из каких соображений выбирается его значение?

6. Как проверить воспроизводимость опытов?
7. Как определяется оценка дисперсии воспроизводимости?
8. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
9. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
10. Как проверить адекватность полученной ММ?
11. Как перейти к исходным физическим переменным?
12. В чем различия планов РЦКП и ОЦКП?

4.3.7. Пример расчета РЦКП

Расчет РЦКП проведен для примера, представленного в пункте 4.2.7. Условия проведения эксперимента приведены в таблице 4.6. Воспроизводимость опыта исследуем на основе проведения пяти параллельных опытов в центре плана. Матрица планирования и результаты проведения экспериментов представлены в таблице 4.11.

Замечание 1. Для наборов факторов ядра и «звездных точек» параллельные опыты не проводились, поэтому в колонке 14 таблицы 11 приведены значения отклика y_i для $i=1, N-N_0$.

Замечание 2. Для наборов факторов в центре плана ставились параллельные опыты, $m=5$ и по значениям откликов вычислялись средние значения и дисперсия отклика в каждой точке факторного пространства. Результаты вычислений приведены соответственно в колонках 14 и 15 таблицы 11.

Воспроизводимость опыта определяется по результатам эксперимента в центральных точках плана в соответствии с (4.34). Проведем анализ воспроизводимости опыта на основе критерия Кохрена в соответствии с (4.11): $G_{расч}=0,385$, табличное значение критерия определяем при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы $\gamma_1=m-1=4$, $\gamma_2=N_0=5$, получаем $G_{табл}(\alpha; \gamma_1; \gamma_2)=0,589$. Так как $G_{расч} < G_{табл}$, опыт является воспроизводимым, и его результаты можно использовать для оценки коэффициентов регрессионного уравнения.

При расчете коэффициентов регрессионного уравнения используются значения отклика y_i для $i=1, N-N_0$ и значения $y_{срi}$ для $i= N-N_0+1, N$.

В соответствии с расчетными формулами (4.23)-(4.33) можно определить коэффициенты регрессионной модели. Для анализа значимости коэффициентов необходимо вычислить погрешности определения коэффициентов модели на основании соотношений (4.35)-(4.38). Результаты расчетов в таблице 4.12.

Для принятия решения о значимости коэффициентов уравнения регрессии расчетное значение критерия Стьюдента $t_{расч}$ сравнивается с табличным значением. Табличное значений критерия Стьюдента $t_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степени свободы $\gamma=N-K-1+N_0(m-1)=21$, $t_{табл}=2,08$. Неравенство $t_{расч} < t_{табл}$ выполняется для коэффициента b_{11} , который приравнивается к нулю и исключается из регрессионной модели.

Таблица 4.11 – Результаты эксперимента

1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Системы опытов		№	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_i	s^2_{yi}	
Ядро ПФЭ		1	1	-1	-1	1	1	1	Замечание 1 → Замечание 2 ↓						5,01	
		2	1	1	-1	-1	1	1							13,82	
		3	1	-1	1	-1	1	1							1,08	
		4	1	1	1	1	1	1							19,18	
Опыты в «звездных» точках		5	1	-1,41	0	0	2	0							4,12	
		6	1	1,41	0	0	2	0							17,76	
		7	1	0	-1,41	0	0	2							8,77	
		8	1	0	1,41	0	0	2							10,48	
Опыты в центре плана		9	1	0	0	0	0	0	11,17	10,75	10,72	10,52	10,89	10,81	0,05901	
		10	1	0	0	0	0	0	10,81	10,69	11,85	11,00	10,97	11,06	0,28780	
		11	1	0	0	0	0	0	10,75	10,60	10,90	11,57	10,97	10,96	0,16753	
		12	1	0	0	0	0	0	10,53	11,04	10,81	10,26	10,78	10,68	0,10978	
		13	1	0	0	0	0	0	10,59	10,25	10,65	10,52	10,62	10,53	0,12442	
										y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$y_{срi}$	s^2_{yi}

Таблица 4.12 — Результаты анализа значимости коэффициентов для РЦКП.

	b_0	b_1	b_2	b_{12}	b_{11}	b_{22}
расчетные формулы	26, 30	27, 31	27, 31	28, 32	29, 33	29, 33
коэффициенты регрессионной модели	10,81	5,78	0,48	2,32	-0,06	-0,72
расчетные формулы	35	36	36	37	38	38
погрешности определения коэффициентов	0,184	0,094	0,094	0,152	0,108	0,108
$t_{расч}$	25,177	18,883	1,573	5,962	0,185	2,194
ВЫВОД	ЗН	ЗН	ЗН	ЗН	НЗН	ЗН

Проверка адекватности построенной модели выполняется в соответствии с критерием Фишера (4.21). Согласно выражениям 4.(34) дисперсия воспроизводимости равна $S^2_{воспр}=0,749$, остаточная дисперсия в соответствии с (4.39) составляет $S^2_{ост}= 1,71$. Расчетное значение критерия Фишера равно $F_{расч}=2,29$. Табличное значение критерия Фишера $F_{табл}$ выбирается при уровне значимости $\alpha=0,05$ и степенях свободы (4.40) и (4.41), $F_{табл}=2,78$. Неравенство $F_{расч} < F_{табл}$ выполняется, поэтому построенная регрессионная модель считается адекватной экспериментальным данным.

Перейдем от кодированных значений факторов к натуральному исчислению в соответствии с выражением (4.7) и условиями проведения эксперимента в таблице 4.6:

$$P=22,66-9,165R_1-1,637R_2+3,843R_1R_2-2,38R_2^2.$$

Таким образом, полученное выражение может представлять, как и модель (4.23), характер функциональной зависимости средней потребляемой мощности P интегральной транзисторно-транзисторной логической схемы в области изменения номиналов резисторов $4,2 \leq R_1 \leq 6,4 \text{ кОм}$, $3,2 \leq R_2 \leq 4,3 \text{ кОм}$.

4.4 ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №3

Задания выполняются в соответствии с индивидуальными вариантами, приведенными в Приложении И. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Вариант задания представляет собой результаты ЦКП и содержит: ядро в виде ПФЭ типа 2^2 , четыре «звездные» точки и пять точек в центре плана. В ходе эксперимента в каждой точке факторного пространства проводились три параллельных опыта. Порядок проведения опытов соответствует матрице эксперимента, представленной в таблице 4.1. При использовании ОЦКП можно выбрать любую строчку из центральных точек плана.

В ходе выполнения индивидуального задания требуется по предложенным экспериментальным данным построить регрессионные квадратичные модели на основе применения ОЦКП и РЦКП и провести регрессионный анализ моделей. Для этого необходимо:

- построить матрицу планирования экспериментов;
- проверить воспроизводимость опытов;
- рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения для двух центральных композиционных планов;
- проверить адекватность полученных моделей;
- провести анализ результатов и сделать выводы.

4.5 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 3

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Цель работы.
2. Постановку задачи.
3. Матрицу планирования экспериментов.
4. Результаты проверки воспроизводимости опытов.
5. Результаты расчетов коэффициентов регрессионных моделей и проверки из статистической значимости.
6. Результаты проверки адекватности полученных моделей исходным экспериментальным данным.
7. Выводы и предложения о ходе дальнейших исследований, составленные на основании анализа регрессионных моделей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Космин В.В. Основы научных исследований: Учебное пособие для магистров / В.В. Космин. — М.: РИОР: ИНФРА-М, 2013. — 213 с.
2. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных. / Н.И. Сидняев — М.: Юрайт-Издат, ООО, 2012. — 399с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Распределение Фишера.

Значения F -критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.9	249.0	254.3
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Распределение Стьюдента.

Значения t -критерия Стьюдента при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	Значения t -критерия
1	12.71
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
8	2.306
9	2.262
10	2.228
11	2.201
12	2.179
13	2.160
14	2.145
15	2.131
16	2.120
17	2.110
18	2.101
19	2.093
20	2.086
21	2.080
22	2.074
23	2.069
24	2.064
25	2.060
26	2.056
27	2.052
28	2.048
29	2.045
30	2.042
∞	1.960

ПРИЛОЖЕНИЕ В

G-распределение Кохрена

(значение G^*100 в зависимости от числа степени свободы γ_1, γ_2) и $\alpha = 0.05$

$\gamma_2 \backslash \gamma_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	999	975	939	906	877	853	833	816	801	788	734	660	581	500
3	967	871	798	746	707	677	653	633	617	603	547	475	403	333
4	907	768	684	630	589	560	536	518	502	488	437	372	309	250
5	841	684	598	544	506	478	456	439	424	412	365	307	251	200
6	781	616	532	480	445	418	398	382	368	357	314	261	212	167
7	727	561	480	431	397	373	354	339	326	315	276	228	183	143
8	680	516	438	391	360	336	319	304	293	283	246	202	162	125
9	639	478	403	358	329	307	290	277	266	257	223	182	145	111
10	602	445	373	331	303	282	267	254	244	235	203	166	131	100
12	541	392	326	288	262	244	230	219	210	202	174	140	100	083
15	471	335	276	242	216	203	191	182	174	167	143	114	089	067
20	389	271	221	192	174	160	150	142	136	130	111	089	068	050
24	343	235	191	166	149	137	129	122	116	111	094	074	057	042
30	293	198	159	138	124	114	106	100	096	092	077	060	046	033
40	237	158	126	108	097	089	083	078	075	071	060	046	035	025
60	174	113	090	077	068	062	058	055	052	050	041	032	023	017
120	900	063	050	042	037	034	031	029	028	027	022	017	012	008

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

1

25,40	26,63	24,66
59,76	59,54	57,72
47,40	47,23	46,17
82,07	78,17	81,11

2

28,21	29,58	27,39
66,37	66,13	64,11
52,64	52,45	51,28
91,15	86,82	90,09

3

5,04	5,28	4,89
11,85	11,81	11,45
9,40	9,37	9,16
16,28	15,50	16,09

4

2,52	2,64	2,45
5,93	5,90	5,72
4,70	4,68	4,58
8,14	7,75	8,04

5

2,29	2,40	2,23
5,39	5,37	5,21
4,28	4,26	4,17
7,41	7,05	7,32

6

29,16	31,62	33,66
72,89	71,16	75,80
59,22	59,73	57,64
95,08	99,11	101,75

7

19,41	21,05	22,41
48,53	47,37	50,47
39,42	39,76	38,37
63,30	65,98	67,74

8

9,71	10,52	11,20
24,26	23,69	25,23
19,71	19,88	19,19
31,65	32,99	33,87

9

4,85	5,26	5,60
12,13	11,84	12,62
9,86	9,94	9,59
15,83	16,49	16,93

10

4,42	4,79	5,10
11,04	10,78	11,48
8,97	9,05	8,73
14,40	15,01	15,41

11

5,33	5,70	6,01
11,95	11,69	12,39
9,88	9,96	9,64
15,31	15,92	16,32

12

3,46	3,70	3,91
7,77	7,60	8,05
6,42	6,47	6,27
9,95	10,35	10,61

13

14,99	15,86	14,51
34,98	34,13	33,61
26,02	26,13	26,11
46,21	46,42	48,43

14

8,82	9,33	8,54
20,58	20,08	19,77
15,31	15,37	15,36
27,18	27,31	28,49

15

8,2	8,7	7,9
19,9	19,4	19,1
14,7	14,7	14,7
26,5	26,7	27,8

16

7,4	7,9	7,2
18,1	17,7	17,4
13,3	13,4	13,4
24,1	24,3	25,3

17

4,83	5,13	4,66
11,79	11,49	11,31
8,67	8,71	8,70
15,69	15,77	16,47

18

2,85	3,01	2,75
6,64	6,48	6,38
4,94	4,96	4,95
8,77	8,81	9,19

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Вариант 1

3,004	3,031	3,035	3,039	3,001
5,193	5,152	5,177	5,209	5,151
3,927	3,950	3,936	3,898	3,897
7,141	7,099	7,111	7,138	7,097
4,684	4,697	4,688	4,730	4,729
9,135	9,123	9,166	9,134	9,117
6,371	6,403	6,343	6,339	6,337
14,672	14,680	14,695	14,668	14,672

Вариант 2

4,307	4,284	4,284	4,316	4,286
8,387	8,396	8,430	8,389	8,404
5,832	5,873	5,856	5,843	5,862
13,329	13,304	13,328	13,340	13,312
7,379	7,415	7,415	7,368	7,368
20,255	20,278	20,304	20,279	20,261
11,226	11,238	11,271	11,234	11,273
66,599	66,605	66,588	66,595	66,562

Вариант 3

3,651	3,605	3,653	3,592	3,627
6,547	6,514	6,535	6,562	6,581
4,761	4,793	4,816	4,792	4,801
9,515	9,566	9,534	9,552	9,528
5,828	5,847	5,842	5,905	5,886
13,041	13,081	13,051	13,089	13,063
8,364	8,371	8,338	8,365	8,366
25,575	25,563	25,611	25,578	25,534

Вариант 4

3,583	3,605	3,623	3,623	3,587
6,555	6,564	6,523	6,559	6,511
4,795	4,790	4,776	4,798	4,744
9,504	9,530	9,524	9,557	9,530
5,855	5,839	5,827	5,881	5,863
13,040	13,011	13,045	13,061	13,036
8,328	8,301	8,303	8,319	8,310
25,586	25,544	25,578	25,562	25,556

Вариант 5

3,054	3,032	3,024	3,046	3,019
5,147	5,170	5,178	5,190	5,177
3,926	3,895	3,937	3,931	3,915
7,117	7,121	7,101	7,130	7,091
4,701	4,682	4,690	4,718	4,719
9,150	9,159	9,115	9,162	9,156
6,390	6,383	6,384	6,378	6,378
14,677	14,670	14,718	14,690	14,693

Вариант 6

2,124	2,150	2,139	2,140	2,157
3,382	3,394	3,368	3,374	3,372
2,705	2,652	2,655	2,674	2,713
4,307	4,242	4,276	4,317	4,255
3,107	3,089	3,096	3,119	3,137
5,081	5,148	5,123	5,092	5,073
3,948	3,901	3,914	3,951	3,919
6,873	6,920	6,932	6,858	6,869

Вариант 7

2,549	2,537	2,563	2,564	2,569
4,118	4,164	4,155	4,126	4,151
3,236	3,220	3,202	3,212	3,207
5,445	5,485	5,449	5,472	5,455
3,825	3,812	3,790	3,782	3,781
6,721	6,714	6,741	6,704	6,722
4,951	4,989	4,955	4,941	4,981
9,735	9,693	9,705	9,711	9,726

Вариант 8

2,588	2,597	2,542	2,537	2,539
4,191	4,165	4,152	4,129	4,138
3,201	3,231	3,202	3,199	3,248
5,509	5,453	5,448	5,511	5,445
3,793	3,830	3,850	3,789	3,852
6,718	6,752	6,760	6,709	6,743
4,963	4,966	5,001	4,952	5,007
9,738	9,753	9,702	9,746	9,737

Вариант 9

2,164	2,165	2,145	2,150	2,163
3,347	3,338	3,322	3,318	3,358
2,639	2,658	2,651	2,648	2,670
4,281	4,251	4,296	4,276	4,269
3,086	3,084	3,081	3,122	3,068
5,082	5,128	5,117	5,106	5,078
3,950	3,932	3,908	3,935	3,901
6,855	6,870	6,875	6,872	6,907

Вариант 11

2,164	2,165	2,145	2,150	2,163
3,347	3,338	3,322	3,318	3,358
2,639	2,658	2,651	2,648	2,670
4,281	4,251	4,296	4,276	4,269
3,086	3,084	3,081	3,122	3,068
5,082	5,128	5,117	5,106	5,078
3,950	3,932	3,908	3,935	3,901
6,855	6,870	6,875	6,872	6,907

Вариант 10

2,588	2,597	2,542	2,537	2,539
4,191	4,165	4,152	4,129	4,138
3,201	3,231	3,202	3,199	3,248
5,509	5,453	5,448	5,511	5,445
3,793	3,830	3,850	3,789	3,852
6,718	6,752	6,760	6,709	6,743
4,963	4,966	5,001	4,952	5,007
9,738	9,753	9,702	9,746	9,737

Вариант 12

3,072	3,028	3,080	3,049	3,069
5,193	5,159	5,163	5,220	5,168
3,932	3,955	3,893	3,915	3,939
7,094	7,126	7,149	7,102	7,158
4,740	4,704	4,668	4,698	4,724
9,163	9,167	9,160	9,133	9,191
6,336	6,396	6,369	6,405	6,357
14,676	14,668	14,725	14,722	14,741

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

№ варианта	Генератор плана	
	для x_4	для x_5
1	x_1x_2	$x_1x_2x_3$
2	x_1x_2	$-x_1x_2x_3$
3	$-x_1x_2$	$x_1x_2x_3$
4	$-x_1x_2$	$-x_1x_2x_3$
5	x_1x_3	$x_1x_2x_3$
6	x_1x_3	$-x_1x_2x_3$

№ варианта	Генератор плана	
	для x_4	для x_5
7	$-x_2x_3$	$x_1x_2x_3$
8	$-x_2x_3$	$-x_1x_2x_3$
9	x_1x_2	x_2x_3
10	x_1x_2	$-x_2x_3$
11	$-x_1x_2$	x_2x_3
12	$-x_1x_2$	$-x_2x_3$

ПРИЛОЖЕНИЕ И

1

25,40	26,63	24,66
59,76	59,54	57,72
47,40	47,23	46,17
82,07	78,17	81,11
33,49	35,05	36,70
67,32	67,22	68,83
41,47	41,13	43,81
59,59	59,77	60,86
49,84	49,01	48,80
45,64	52,89	48,00
48,15	45,02	52,92
49,15	45,87	51,74
53,34	48,89	45,61

2

28,21	29,58	27,39
66,37	66,13	64,11
52,64	52,45	51,28
91,15	86,82	90,09
37,20	38,93	40,77
74,77	74,66	76,45
46,05	45,68	48,66
66,18	66,39	67,60
55,35	54,44	54,20
50,69	58,74	53,31
53,48	50,00	58,78
54,58	50,94	57,47
59,24	54,30	50,65

3

5,04	5,28	4,89
11,85	11,81	11,45
9,40	9,37	9,16
16,28	15,50	16,09
6,64	6,95	7,28
13,35	13,33	13,65
8,22	8,16	8,69
11,82	11,85	12,07
9,88	9,72	9,68
9,05	10,49	9,52
9,55	8,93	10,50
9,75	9,10	10,26
10,58	9,70	9,05

4

2,52	2,64	2,45
5,93	5,90	5,72
4,70	4,68	4,58
8,14	7,75	8,04
3,32	3,48	3,64
6,68	6,67	6,83
4,11	4,08	4,34
5,91	5,93	6,04
4,94	4,86	4,84
4,53	5,24	4,76
4,78	4,46	5,25
4,87	4,55	5,13
5,29	4,85	4,52

5

2,29	2,40	2,23
5,39	5,37	5,21
4,28	4,26	4,17
7,41	7,05	7,32
3,02	3,16	3,31
6,08	6,07	6,21
3,74	3,71	3,95
5,38	5,39	5,49
4,50	4,42	4,40
4,12	4,77	4,33
4,35	4,06	4,78
4,43	4,14	4,67
4,81	4,41	4,12

6

29,16	31,62	33,66
72,89	71,16	75,80
59,22	59,73	57,64
95,08	99,11	101,75
43,84	46,29	45,24
85,31	83,32	83,95
54,15	50,54	48,13
75,02	69,40	74,06
59,83	60,40	57,93
58,64	62,57	57,97
66,69	63,47	61,58
61,56	57,30	63,35
59,90	59,99	60,06

7

19,41	21,05	22,41
48,53	47,37	50,47
39,42	39,76	38,37
63,30	65,98	67,74
29,18	30,82	30,11
56,79	55,47	55,89
36,05	33,64	32,04
49,94	46,20	49,30
39,83	40,21	38,57
39,04	41,65	38,59
44,40	42,25	40,99
40,98	38,15	42,17
39,88	39,94	39,98

8

9,71	10,52	11,20
24,26	23,69	25,23
19,71	19,88	19,19
31,65	32,99	33,87
14,59	15,41	15,06
28,40	27,74	27,95
18,02	16,82	16,02
24,97	23,10	24,65
19,91	20,10	19,28
19,52	20,83	19,30
22,20	21,13	20,50
20,49	19,07	21,09
19,94	19,97	19,99

9

4,85	5,26	5,60
12,13	11,84	12,62
9,86	9,94	9,59
15,83	16,49	16,93
7,30	7,70	7,53
14,20	13,87	13,97
9,01	8,41	8,01
12,49	11,55	12,33
9,96	10,05	9,64
9,76	10,41	9,65
11,10	10,56	10,25
10,25	9,54	10,54
9,97	9,98	10,00

10

4,42	4,79	5,10
11,04	10,78	11,48
8,97	9,05	8,73
14,40	15,01	15,41
6,64	7,01	6,85
12,92	12,62	12,72
8,20	7,65	7,29
11,36	10,51	11,22
9,06	9,15	8,77
8,88	9,48	8,78
10,10	9,61	9,33
9,32	8,68	9,59
9,07	9,09	9,10

11

5,33	5,70	6,01
11,95	11,69	12,39
9,88	9,96	9,64
15,31	15,92	16,32
7,55	7,92	7,76
13,83	13,53	13,63
9,11	8,56	8,20
12,27	11,42	12,13
9,97	10,06	9,68
9,79	10,39	9,69
11,01	10,52	10,24
10,23	9,59	10,50
9,98	10,00	10,01

12

3,46	3,70	3,91
7,77	7,60	8,05
6,42	6,47	6,27
9,95	10,35	10,61
4,91	5,15	5,04
8,99	8,79	8,86
5,92	5,57	5,33
7,98	7,42	7,88
6,48	6,54	6,29
6,36	6,75	6,30
7,16	6,84	6,65
6,65	6,23	6,83
6,49	6,50	6,50