

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
И НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Методические указания
к проведению практических занятий
по дисциплине
для магистрантов профилей
09.04.02 – “Информационные системы и технологии”
09.04.03 – “Прикладная информатика”
всех форм обучения



Севастополь
СевГУ
2021

УДК 004.1
М54

Р е ц е н з е н т :

Е.А. Кожаяев - кандидат техн. наук, доцент кафедры
информационно-вычислительной техники

Ответственный за выпуск:

И.П. Шумейко - заведующий кафедрой информационных систем,
канд. физ.-мат. наук, доцент

Составитель : Е.Н. Заикина, В.Ю. Карлусов

М54 Методы оптимизации и нелинейное программирование :
методические указания к проведению практических занятий по
дисциплине для магистрантов профилей 09.04.02 – “Информационные
системы и технологии” и 09.04.03 – “Прикладная информатика” всех
форм обучения / Сост. Е.Н. Заикина, В.Ю. Карлусов. – Севастополь :
СевГУ, 2021. – 38 с. – Текст : электронный.

Цель методических указаний: обеспечить качественное усвоение практических
положений курса для наиболее полного овладения математическим и
вычислительным алгоритмами, применяемыми в оптимизационных методах на
основе процедур нелинейного программирования.

УДК 004.1

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании
кафедры информационных систем, протокол № 09 от 29 апреля 2020 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на
заседании Учёного совета Института информационных технологий и
управления в технических системах, протокол № 05 от 17 июня 2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Практическое занятие № 1. Исследование целевых функций в задачах нелинейного программирования.....	4
Практическое занятие № 2. Освоение алгоритма решения задач нелинейного программирования прямым методом Хука - Дживса	12
Практическое занятие № 3. Освоение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом наискорейшего спуска	15
Практическое занятие № 4. Освоение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом сопряжённого градиента	17
Практическое занятие № 5. Освоение алгоритма решения задачи нелинейного программирования квазиньютоновскими методами	21
Практическое занятие № 6. Освоение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом Зойтендейка	24
Практическое занятие № 7. Освоение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом штрафных функций внутренней точки	27
Практическое занятие № 8. Освоение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом штрафных функций внешней точки	30
Практическое занятие № 9. Построение математических моделей нелинейного программирования по содержательной постановке задачи	32
Библиографический список.....	38

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее методическое пособие направлено на закрепление численных методов поисковой оптимизации, освоение соответствующих вычислительных алгоритмов и разработку тестовых численных наборов входных данных, отчасти позволяющих проводить верификацию означенных алгоритмов.

По замыслу авторов методического пособия, оно должно явиться составной частью и гармонично дополнять методическое руководство к выполнению лабораторных работ по дисциплине.

С этой целью материал практических занятий разбит на порции, сообразно изучаемым алгоритмам. Композиционно рубрики материала представлены краткими теоретическими сведениями, численными примерами, иллюстрирующими вычислительные процессы, и набором задач. Условия задач частично могут быть перерешены в ходе аудиторной работы, а частично использованы в качестве упражнений для самостоятельной работы в рамках углублённого освоения методов нелинейной оптимизации.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Цели и задачи занятия:

- изучение и освоение на практике аналитических методов исследования целевых функций в НП-задачах;
- подготовка тестовых материалов к лабораторной работе.

2. Краткие теоретические положения

2.1. Описание нелинейной функции многих переменных второго порядка

Квадратичная форма (функция) описывается развёрнутым выражением вида [1]

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,$$

либо эквивалентной матричной записью

$$f(X) = X^T \cdot C \cdot X,$$

где $C = [c_{ij}]$ – симметрическая матрица, $X = [x_r]$ – вектор переменных. Диагональные элементы матрицы c_{ii} являются коэффициентами при x_i^2 , а недиагональные $c_{ij} = c_{ji}$ – равны половине коэффициента при произведении $x_i \cdot x_j$.

2.2. Характер поведения квадратичной функции

- Если при любом X° , за исключением точки $X^\circ = 0$, выполняется неравенство $f(X^\circ) > 0$ (либо $f(X^\circ) < 0$), то функция называется *положительно (отрицательно) определённой*.
- Если при выполнении условий положительной (отрицательной) определённости функции, для отдельных $X^\circ \neq 0$ возможно равенство $f(X^\circ) = 0$, то функция именуется *неотрицательной (неположительной)*.
- Когда для одних X значения $f(X) > 0$, а для других $f(X) < 0$, функция называется *неопределённой*.

Оценку поведения функции можно получить, анализируя знаки корней характеристического уравнения матрицы, основанного на вычислении определителя:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{n,n-1} & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Существует ряд правил, связывающих поведение функции со знаками значений корней λ :

- для того чтобы квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были положительными;
- для того чтобы квадратичная функция была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были отрицательными;
- если среди корней характеристического уравнения одного знака существуют нулевые значения, то функция считается неположительной или неотрицательной;
- если корни характеристического уравнения имеют разные знаки, то квадратичная функция считается неопределённой.

Неотрицательная (положительная) функция, в терминах математического программирования, является вогнутой, а неположительная (отрицательная) – выпуклой.

2.3. Отыскание стационарных точек нелинейной функции

Точки, в которых все компоненты вектора частных производных первого порядка от функции многих переменных равны нулю, называются стационарными. В указанных точках находится локальный максимум (или минимум) функции. Точки так же именуются точками экстремума или экстремальными точками. Сам вектор называется градиентом:

$$\nabla f(X) = \left\{ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right\}.$$

Условие $\nabla f(X) = 0$ представляет сокращённую запись системы уравнений, решением которой будут являться координаты стационарной точки.

2.4. Проверка на экстремум с помощью матрицы Гессе

Матрица Гессе составляется из вторых частных производных нелинейной функции.

$$H(X) = \nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Угловыми (диагональными) минорами матрицы H называются определители вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = h_{11}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}; \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

Главными минорами m -ого порядка ($m \leq n$) матрицы H называются определители, составленные из элементов исходной матрицы, получающейся вычёркиванием $(n - m)$ её строк и столбцов с одинаковыми номерами.

По значениям этих миноров в стационарной точке можно судить о характере экстремума. Указанные суждения оформлены в виде критериев.

2.4.1. Достаточные условия экстремума с использованием угловых миноров (на основании критерий Сильвестра).

- Для того чтобы точка X^0 являлась точкой локального **минимума**, необходимо и достаточно, чтобы знаки определителей угловых миноров были строго положительны, то есть $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.
- Для того чтобы точка X^0 являлась точкой локального **максимума**, необходимо и достаточно, чтобы знаки определителей угловых миноров чередовались, начиная с отрицательного:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$$

2.4.2. Необходимые условия второго порядка с использованием главных миноров.

- Для того чтобы точка X^0 являлась точкой локального **минимума**, необходимо и достаточно, чтобы определители всех главных миноров матрицы Гессе были неотрицательны.
- Для того чтобы точка X^0 являлась точкой локального **максимума**, необходимо и достаточно, чтобы определители всех главных миноров матрицы Гессе были неположительны.

2.4.3. Достаточные условия экстремума с использованием собственных значений матрицы Гессе.

- Для того чтобы точка X^0 являлась точкой локального **минимума**, необходимо и достаточно, чтобы знаки собственных значений матрицы Гессе были строго положительны: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$.
- Для того чтобы X^0 являлась точкой локального **максимума**, необходимо и достаточно, чтобы знаки собственных значений матрицы Гессе были строго отрицательны: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0$.

2.4.4. Необходимые условия экстремума с использованием собственных значений матрицы Гессе

- Для того чтобы точка X^0 являлась точкой локального **минимума**, необходимо и достаточно, чтобы знаки собственных значений матрицы Гессе были неотрицательны: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$.
- Для того чтобы X^0 являлась точкой локального **максимума**, необходимо и достаточно, чтобы знаки собственных значений матрицы Гессе были неположительны: $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$.

Общий алгоритм проведения исследований выглядит так

```

if (Выполнены необходимые условия 1-го порядка)
{
    if (Выполнены достаточные условия)
        { Задача решена }
    else if (Выполнены необходимые условия 2-го порядка)
        {Необходимо проводить дополнительные
        исследования}
    else
        {Экстремума нет}
}
else {Экстремума нет}

```

3. Примеры выполнения упражнений

3.1. Задана матрица C :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0,5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0,5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Построить развёрнутую функцию, соответствующую этой матрице.

Ответ:

$$f = 4 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_3^2.$$

3.2. Задана функция

$$f = 2 \cdot x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2.$$

Восстановить матрицу, соответствующую функции

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3. Задана матрица квадратичной формы:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оценить определённость функции.

Решение.

Составим характеристическое уравнение заданной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0.$$

Ответ. Корни характеристического уравнения суть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Оба корня положительны, следовательно, квадратичная функция определена положительно.

3.4. Рассчитать координаты стационарной точки для функции

$$f = 3 \cdot x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 12 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2.$$

Решение.

Отыщем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 12; \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 10.$$

Приравняв их к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 12 = 0, \\ 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 - x_2 \end{cases} \Rightarrow 30 - 6 \cdot x_2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = 18 : 4 = 4,5; x_1 = 0,5.$$

Решив её, получим координаты стационарной точки $X_c^T = (0,5; 4,5)$.

3.5. Используя матрицу Гессе, определить тип экстремума нелинейной функции в стационарной точке.

3.5.1. Функция:

$$f = 3 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_3^2 - 6 \cdot x_1 \cdot x_2 + 8 \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 + 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - x_3.$$

Решение.

Определим частные производные функции

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 6 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 6.$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = -6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 7.$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_3} = 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 - 7.$$

Отыщем стационарные точки, положив частные производные нулю и решив систему полученных уравнений. В результате имеем координаты стационарной точки: $X^o = [0.971; 0.324; -1.235]^T$.

Определим компоненты матрицы Гессе – вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} = 6; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = -6; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \cdot \partial x_3} = 8; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2} = 4; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} = 2; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_3^2} = 6$$

и составим матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 8 \\ -6 & 4 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

отметим, что указанная матрица постоянна в любой точке области определения функции, поскольку не зависит от переменных. В противном случае необходимо было бы подставить в выражения вторых частных производных координаты стационарной точки.

Определим диагональные миноры H :

$$\Delta_1 = 6; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -12; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 8 \\ -6 & 4 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -544.$$

Поскольку диагональные миноры имеют различные знаки, то о выпуклости или вогнутости функции в точке X^o ничего сказать нельзя. Эта точка, скорее всего, точка перегиба или седловая точка.

Исследуем на необходимые условия 2-го порядка (хотя в этом нет нужды), определим главные миноры.

1-ого порядка (вычёркиваем $3 - 1 = 2$ строки и столбца с одинаковыми номерами матрицы, остаётся всего 1 элемент):

$$\mu_{1(2,3)} = 6; \mu_{1(1,3)} = 4; \mu_{1(2,3)} = 6.$$

2-ого порядка (вычёркиваем $3 - 2 = 1$ строку и столбец с одинаковыми номерами матрицы, получаются матрицы 2×2):

$$\mu_{2(1,1)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 20; \mu_{2(2,2)} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -28; \mu_{2(3,3)} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -12.$$

3-ого порядка (вычёркиваем $3 - 3 = 0$ строк и столбцов, остаётся исходная матрица):

$$\mu_{3(0,0)} = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 8 \\ -6 & 4 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -544.$$

Знаки полученных миноров не положительны и не отрицательны. Необходимые условия не выполнены. Точка $X^o = [0.971; 0.324; -1.235]^T$ не является экстремальной.

Проверим достаточные условия второго порядка с помощью собственных значений матрицы Гессе.

Характеристическое уравнение в матричной форме для нашего случая записывается так:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 & 8 \\ -6 & 4-\lambda & 2 \\ 8 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

что эквивалентно кубическому уравнению

$$\lambda^3 - 16\lambda^2 - 20\lambda + 544 = 0,$$

решение которого даёт $\Lambda = [10,79; -3,637; -8,549]^T$.

Расчёты показывают, что собственные значения матрицы Гессе знакопеременны. Согласно критерию, необходимые условия экстремума второго порядка не выполнены. Поэтому, точка $X^o = [0.971; 0.324; -1.235]^T$ не является точкой локального экстремума.

3.5.2. Функция:

$$f = 3 \cdot x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 12 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2.$$

Решение

Координаты стационарной точки найдём с использованием градиента:

$$\nabla^T f(X) = \{6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 12; 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 10\}.$$

Положив компоненты вектора равным нулю, найдём искомое.

$$X^o = [0, 5; 4, 5]^T.$$

Найдём частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} = 6; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2} = 2; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} = 2$$

и составим из них матрицу Гессе, которая в нашем частном случае не зависит от значений аргумента:

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

и воспользуемся критериями.

Главные миноры суть $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$, что указывает на локальный минимум.

Для полноты исследования определим собственные значения матрицы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (6 + \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 4 = 0.$$

В результате решения получаем корни: $\lambda_1 = 4 - 2 \cdot \sqrt{2}$; $\lambda_2 = 4 + 2 \cdot \sqrt{2}$.

Это подтверждает наличие минимума в точке $X^0 = [0, 5; 4, 5]^T$.

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

4.1. Построение развёрнутых целевых функций по матричной форме записи

$$\begin{array}{ll} 1. b^T = [3 \quad 2], \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}. & 2. b^T = [-2 \quad -3 \quad 0], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 3. b^T = [5 \quad 4], \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. & 4. b^T = [1 \quad 4], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \\ 5. b^T = [5 \quad 6], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. & \end{array}$$

4.2. Восстановление матричной формы записи по развёрнутой записи целевой функции

$$\begin{array}{ll} 1. f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2. & 2. f = x_1^2 - x_2^2. \\ 3. f = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2. & 4. f = x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2. \\ 5. f = x_1 \cdot x^2. & 6. f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \\ 7. f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3 - x_2^2 - x_3^2. & \end{array}$$

4.3. Исследование целевых функций на выпуклость (вогнутость) по корням характеристического уравнения

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. & 2. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \\ 3. f = x_1^2 - x_1 \cdot x_2. & 4. f = x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2. \\ 5. f = x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2. & 6. f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 \cdot x_3. \end{array}$$

$$7. f = x_1 \cdot x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

4.4. Нахождение стационарных и экстремальных точек целевой функции

$$1. f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2.$$

$$2. f = x_1^2 - x_2^2.$$

$$3. f = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2.$$

$$4. f = x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2.$$

$$5. f = 2 \cdot x_1 \cdot x^2.$$

$$6. f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

$$7. f = x_1^2 - + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3.$$

$$8. f = x_1^2 - x_1 \cdot x_2.$$

$$9. f = x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3.$$

$$10. f = x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2.$$

$$11. f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

$$12. f = x_1 \cdot x_3 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2.

ОСВОЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ХУКА - ДЖИВСА

1. Цели и задачи занятия:

- изучение алгоритма решения задач нелинейного программирования прямым методом Хука - Дживса;
- приобретение навыков разработки тестовых примеров для отладки программ решения НП-задач методом Хука - Дживса.

2. Краткие теоретические положения

Метод Хука-Дживса, известный как метод траекторий имеет много модификаций. В версии [2] рассматривается двухходовая схема, предполагающая поиск вокруг текущей точки на первом этапе направления убывания функции, и поиск в выбранном направлении при заданном шаге наиболее удалённой точки, значение оптимизируемой функции в которой будет самым минимальным по отношению к текущей точке. Если убывания функции обнаружить не удаётся, шаг поиска уменьшается. Когда значение текущего шага укладывается в точность, вычислительный процесс завершается.

Исходными данными к алгоритму являются

- координаты начальной точки X_0 ;
- список возможных направлений $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, это набор векторов ортов;
- начальное значение поискового шага λ ;
- значение ускоряющего множителя (как правило, единичное, если отсутствует априорное знание о поведении функции) α ;

- показатель точности вычислений ε .

Конспективно алгоритм выглядит так.

```

Y = X0;
do while ( $\varepsilon \leq \lambda$ )
{
    for j = 1 to n do
    {
        flag = 1;
        do while (flag)
        {
            if ( $f(Y + \lambda \times s_j) < f(Y)$ ) then Y = Y +  $\lambda \times s_j$ ;
            else if ( $f(Y - \lambda \times s_j) < f(Y)$ ) then Y = Y -  $\lambda \times s_j$ ;
            else flag = 0;
        }
    }
    if ( $f(Y) < f(X_0)$ ) then {Y = X0 +  $\alpha \times (Y - X_0)$ ; X0 = Y}
    else if ( $\varepsilon \leq \lambda$ ) then  $\lambda = 0.5 \times \lambda$ ;
}

```

3. Пример выполнения упражнений

Решение ЗНП методом Хука – Дживса при поиске минимума

Исходные данные [9].

Функция цели: $f = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2$.

Начальные условия: $X_0^T = (2, 0; 3, 0)$; $\alpha = 1, 0$; $\lambda = 0, 2$; $\varepsilon = 0, 02$.

Траектория решения представлена далее в таблице 1

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

Выполнить поиск минимума методом Хука - Дживса. Начальную точку, величины поискового шага, ускоряющего множителя и точность задать самостоятельно.

- | | |
|--|--|
| 1. $f = (x_1^3 - x_2)^2 + 2 \cdot (x_2 - x_1)^4$. | 2. $f = (1 - x_1)^2 + 5 \cdot (x_2 - x_1^2)^2$. |
| 3. $f = x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1^2 + 2 \cdot x_2^2$. | 4. $f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. |
| 5. $f = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. | 6. $f = x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. |
| 7. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. | 8. $f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3$. |
| 9. $f = x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2$. | 10. $f = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - x_2^2$. |

Таблица 1 – Ход решения методом Хука – Дживса

k	α	X_k $f(X_k)$	j	Y_j $f(Y_j)$	s_j	$Y_j + \lambda s_j$ $f(Y_j + \lambda s_j)$	$Y_j - \lambda s_j$ $f(Y_j - \lambda s_j)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	0,2	2,0; 3,0 16	1	2,0; 3,0 16	1,0	2,2; 3,0 14,44	–
			2	2,2; 3,0 14,44	0,1	2,2; 3,2 17,64	2,2; 2,8 11,56
1	0,2	2,2; 2,8 11,56	1	2,4; 2,6 7,81	1,0	2,6; 2,6 6,89	2,6; 2,4 4,47
			2	2,6; 2,6 6,89	0,1	2,6; 2,8 9,13	
3	0,2	2,6; 2,4 4,47	1	3,0; 2,0 2,00	1,0	3,2; 2,0 2,71	2,8; 2,0 1,85
			2	2,8; 2,0 1,85	0,1	2,8; 2,2 2,97	2,8; 1,8 1,05
4	0,2	2,8; 1,8 1,05	1	3,0; 1,2 1,36	1,0	3,2; 1,2 2,71	2,8; 1,2 0,57
			2	2,8; 1,2 0,57	0,1	2,8; 1,4 0,49	2,6; 1,0 0,49
5	0,2	2,8; 1,4 0,49	1	2,8; 1,4 1,05	1,0	3,0; 1,0 2,0	
			2	2,6; 1,0 0,49	0,1	2,6; 1,2 0,17	2,2; 1,0 0,04
6	0,2	2,6; 1,2 0,17	1	2,4; 1,0 0,19	1,0	2,6; 1,0 0,49	
			2	2,2; 1,0 0,04	0,1	2,2; 1,2 0,04	2,2; 0,8 0,36
7	0,2	2,2; 1,2 0,04	1	1,8; 0,8 0,04	1,0	2,0; 0,8 0,16	1,6; 0,8 0,03
			2	1,6; 0,8 0,03	0,1	1,6; 1,0 0,19	1,6; 0,6 0,19
8	0,1	1,6; 0,8 0,03	1	1,6; 0,8 0,03	1,0	1,7; 0,8 0,02	1,7; 0,7 0,10
			2	1,7; 0,8 0,02	0,1	1,7; 0,9 0,02	

Жирным курсивом отмечены “удачные” точки, в которых функция цели меньше, нежели в начальной точке итерации

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3.

ОСВОЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

1. Цели и задачи занятия:

- изучение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом наискорейшего спуска;
- приобретение навыков разработки тестовых примеров для отладки программ решения нп-задач методом наискорейшего спуска.

2. Краткие теоретические положения

Метод наискорейшего спуска [3] относится к градиентным методам решения задач нелинейного программирования.

Исходными данными к алгоритму являются

- координаты начальной точки X ;
- показатель точности вычислений ε .

Структура алгоритма является тривиальной.

$s = -\nabla f(X)$;

do while ($\varepsilon \leq \|s\|$)

{

Вычислить шаг λ ;

$X = X + \lambda \times s$;

$s = -\nabla f(X)$;

}

Вычислять шаг Л. О. Коши предложил в ходе одномерной минимизации

$$\lambda_k^* \Rightarrow \min_{\lambda > 0} f(X_k + \lambda s_k).$$

Указанная задача может быть решена как численно, так и аналитически, приёмами математического анализа:

$$\frac{\partial f(X_k + \lambda s_k)}{\partial \lambda} = 0.$$

В частности, для задач квадратичного программирования возможно получения расчётной формулы в общем виде.

Как известно, функция цели в задачах квадратичного программирования имеет вид:

$$f(X) = b^T X + \frac{1}{2} X^T C X \rightarrow \min ,$$

а градиент указанной функции определяется выражением

$$\nabla f(X) = b + CX$$

а поскольку вектор $b = \text{const}$, то направление градиента определяется вектором $s = CX$.

Найдём аналитическое выражение для вычисления оптимального ускоряющего множителя λ по методу Коши как решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{\lambda > 0} f(X - \lambda s) = \min_{\lambda > 0} \left\{ b^T (X - \lambda CX) + \frac{1}{2} (X - \lambda CX)^T C (X - \lambda CX) \right\}.$$

Часть этого выражения представимо в виде

$$(X - \lambda CX)^T C (X - \lambda CX) = X^T (1 - \lambda C) C (1 - \lambda C) X$$

и может быть преобразовано к записи:

$$(1 - \lambda C) C (1 - \lambda C) = C - 2\lambda C^2 + \lambda^2 C^3.$$

Нахождение стационарной точки из уравнения

$$\frac{df(X - \lambda s)}{d\lambda} = -b^T CX - X^T C^2 X + \lambda X^T C^2 X = 0$$

даёт формулу

$$\lambda = \frac{b^T CX + X^T C^2 X}{X^T C^2 X}.$$

3. Пример выполнения упражнений

Решение ЗНП методом наискорейшего спуска

Исходные данные [9].

Функция цели: $\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2$.

Начальные условия: $X_0^T = (0, 0; 3, 0)$; $\varepsilon = 0, 1$.

Выражения для расчёта вектора градиента и его нормы:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3; \frac{\partial f}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2 \cdot x_2); \|\nabla f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}$$

Таблица 2 – Ход решения НП-задачи методом наискорейшего спуска

k	X_k	f_k	∇f_k	$\ \nabla f_k\ $	s_k	λ_k	X_{k+1}
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	0,0; 3,0	52	-44; -24	50,12	44; 24	0,062	2,7; 1,51
2	2,7; 1,51	0,034	0,73; 1,28	1,47	-0,73; -1,28	0,24	2,52; 1,20
3	2,52; 1,20	0,09	0,8; -0,48	0,93	-0,8; 0,48	0,11	2,43; 1,25
4	2,43; 1,25	0,04	0,18; 0,28	0,33	-0,18; -0,28	0,31	2,37; 1,16
5	2,37; 1,16	0,02	0,3; -0,2	0,36	-0,3; 0,2	0,12	2,33; 1,18
6	2,33; 1,18	0,01	0,08; 0,12	0,14	-0,08; -0,12	0,36	2,30; 1,14
7	2,30; 1,14	$9 \cdot 10^{-3}$	0,15; -0,08	0,17	-0,15; 0,08	0,13	2,28; 1,15
8	2,28; 1,15	$7 \cdot 10^{-3}$	0,05; 0,08	0,09			

Примечание. Значение модуля градиента в строке 8 и столбце 5 таково, что оно уложилось в заданную точность, и вычислительный процесс был остановлен.

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

Выполнить поиск минимума методом наискорейшего спуска. Начальную точку, величины поискового шага, ускоряющего множителя и точность задать самостоятельно.

1. $f = (x_1^3 - x_2)^2 + 2 \cdot (x_2 - x_1)^4$.
2. $f = (1 - x_1)^2 + 5 \cdot (x_2 - x_1^2)^2$.
3. $f = x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1^2 + 2 \cdot x_2^2$.
4. $f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.
5. $f = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.
6. $f = x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.
7. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
8. $f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3$.
9. $f = x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2$.
10. $f = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - x_2^2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4.

ОСВОЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ СОПРЯЖЁННОГО ГРАДИЕНТА

1. Цели и задачи занятия:

- изучение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом сопряжённого градиента;

- приобретение навыков разработки тестовых примеров для отладки программ решения нп-задач методом сопряжённого градиента.

2. Краткие теоретические положения

Направление спуска S_{n+1} будет сопряжено направлению S_n , когда выполняется условие:

$$S_n^T \nabla^2 f(x_n) S_{n+1} = 0.$$

Благодаря тому, что направления спуска совпадают (в случае поиска максимума) с направлением на возрастание функции, либо прямо противоположны (для поиска минимума), метод получил своё название. Иногда метод называют по имени своих создателей Флетчера и Ривса.

Исходными данными к алгоритму являются

- координаты начальной точки X_1 ;
- показатель точности вычислений ε .

Пусть исходное направление спуска (антиградиент) в некоторой точке X_n есть

$$S_n = -\nabla f(x_n),$$

а сопряжённое направление построено по алгоритму

$$S_{n+1} = -\nabla f(x_{n+1}) + \omega_{n+1} S_n,$$

где ω_{n+1} – весовой коэффициент сопряжения направлений. Этот коэффициент должен обеспечивать выполнение условия сопряжённости, то есть выполняться. Показано [4], что он вычисляется как отношению квадратов норм (длин) векторов текущего и предшествующего градиентов:

$$\omega_{n+1} = \frac{\|\nabla f(x_{n+1})\|^2}{\|\nabla f(x_n)\|^2}.$$

$$Y_1 = X_1;$$

$$s_1 = -\nabla f(Y_{j+1});$$

$$k = j = 1;$$

do while ($\varepsilon \leq \|\nabla f(Y_j)\|$)

{

 Вычислить шаг λ_j ;

$$Y_{j+1} = Y_j + \lambda_j \times s_1;$$

```

if (j < 2) then
    {
        Рассчитать множитель  $\omega_j$ ;
         $S_{j+1} = -\nabla f(Y_{j+1}) + \omega_j \times S_j$ ;
         $j = j + 1$ ;
    }
    else
        {
             $X_{j+1} = Y_1 = Y_{j+1}$ ;
             $j = 1$ ;
             $k = k + 1$ ;
        }
}

```

3. Пример выполнения упражнений

Пример решения ЗНП методом сопряжённого градиента

Исходные данные.

Функция цели: $\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2$.

Начальные условия: $X_0^T = (0, 0; 3, 0)$; $\varepsilon = 0,03$.

Выражения для расчёта вектора градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2 \cdot x_2);$$

$$s_1 = -\nabla f(Y_1); \quad s_2 = -\nabla f(Y_2) + \omega_1 \cdot s_1; \quad \omega_1 = \frac{\|\nabla f(Y_2)\|^2}{\|\nabla f(Y_1)\|^2}.$$

Ход расчётов показан в таблице 3.

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

Выполнить поиск минимума методом сопряжённого градиента. Начальную точку, величины поискового шага, ускоряющего множителя и точность задать самостоятельно.

1. $f = (x_1^3 - x_2)^2 + 2 \cdot (x_2 - x_1)^4$.
2. $f = (1 - x_1)^2 + 5 \cdot (x_2 - x_1^2)^2$.
3. $f = x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1^2 + 2 \cdot x_2^2$.
4. $f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.
5. $f = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.
6. $f = x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.
7. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
8. $f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3$.
9. $f = x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2$.
10. $f = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - x_2^2$.

Таблица 3 – Ход решения НП-задачи методом Флетчера-Ривса

k	X_k	$f(X_k)$	j	Y_j	$f(Y_j)$	$\nabla f(Y_j)$	$\ \nabla f(Y_j)\ $	ω_j	S_j	λ_j	Y_{j+1}
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	0,0; 3,0	52,00	1	0,0; 3,0	52,00	– 44,0; 24,0	50,12	—	44,0; – 24,0	0,062	2,7; 1,51
			2	2,7; 1,51	0,34	0,73; 1,28	1,47	0,009	– 0,69; 1,3	0,23	2,54; 1,21
2	2,54; 1,21	0,10	1	2,54; 1,21	0,1	0,87; – 0,48	0,99	—	– 0,87; 0,48	0,11	2,44; 1,26
			2	2,44; 1,26	0,04	0,18; 0,32	0,37	0,14	– 0,30; – 0,25	0,63	2,25; 1,10
3	2,25; 1,10	0,08	1	2,25; 1,10	0,008	0,16; – 0,20	0,32	—	– 0,16; 0,20	0,10	2,23; 1,12
			2	2,23; 1,12	0,003	0,03; 0,04	0,05	0,04	– 0,036; – 0,03	1,02	2,19; 1,09
4	2,19; 1,09	0,0017	1	2,19; 1,09	0,0017	0,05; – 0,04	0,06	—	– 0,05; 0,04	0,11	2,185; 1,094
			2	2,185; 1,094	0,0012	0,02; 0,01	0,022	—	—	—	—

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5.
ОСВОЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИМИ МЕТОДАМИ

1. Цели и задачи занятия:

- изучение алгоритма решения задач нелинейного программирования квазиньютоновскими методами;
- приобретение навыков разработки тестовых примеров для отладки программ решения НП-задач квазиньютоновскими методами.

2. Краткие теоретические положения

Квазиньютоновские методы, в отличие от метода Ньютона, исключают процедуру обращения матрицы Гессе на каждом шаге, заменяя её итерационной процедурой [5]. Обращённая матрица строится по мере спуска, используя выражение

$$D_{j+1} = D_j - \frac{D_j \cdot \Delta g_j \cdot (D_j \cdot \Delta g_j)^T}{\Delta^T g_j \cdot \Delta g_j} + \frac{p_j \cdot p_j^T}{p_j^T \cdot g_j}, p_j = \lambda_j \cdot s_j,$$

где

$$\Delta g_j = \nabla f(X_{j+1}) - \nabla f(X_j); s_j = -\nabla f(X_j).$$

В качестве начального приближения используется единичная матрица. Исходными данными к алгоритму являются

- координаты начальной точки X_1 ;
- симметрическая положительно определённая матрица D_1 ;
- показатель точности вычислений ε .

$$Y_1 = X_1;$$

$$k = j = 1;$$

do while ($\varepsilon \leq \|\nabla f(Y_j)\|$)

{

$$s_j = -D_j \cdot \nabla f(Y_{j+1});$$

Вычислить шаг λ_j ;

$$Y_{j+1} = Y_j + \lambda_j \cdot s_j;$$

if ($j < 2$) **then**

{

Рассчитать множитель D_{j+1} ;

$$j = j + 1;$$

}

else

{

$$X_{j+1} = Y_1 = Y_{j+1};$$

```

    j = 1;
    k = k + 1;
  }
}

```

3. Пример выполнения упражнений

Решение ЗНП методом Дэвидона - Флетчера - Пауэлла.

Исходные данные [9].

Функция цели: $\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2$.

Начальные условия: $X_0^T = (0, 0; 3, 0)$; $\varepsilon = 0,01$.

Выражение для расчёта аппроксимирующей матрицы:

Выражение для расчёта вектора градиента:

$$\nabla^T f(X) = (4(x_1 - 2)^3; -4(x_1 - 2 \cdot x_2)).$$

Результаты расчётов представлены в таблице 4.

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

Выполнить поиск минимума методом переменной метрики им. Дэвидона-Флетчера-Пауэлла. Начальную точку, величины поискового шага, ускоряющего множителя и точность задать самостоятельно.

- | | |
|--|--|
| 1. $f = (x_1^3 - x_2)^2 + 2 \cdot (x_2 - x_1)^4$. | 2. $f = (1 - x_1)^2 + 5 \cdot (x_2 - x_1^2)^2$. |
| 3. $f = x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1^2 + 2 \cdot x_2^2$. | 4. $f = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. |
| 5. $f = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. | 6. $f = x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. |
| 7. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. | 8. $f = x_1^2 - + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3$. |
| 9. $f = x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2$. | 10. $f = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - x_2^2$. |

Таблица 4 – Ход решения НП-задачи методом Дэвидона-Флетчера-Пауэлла

k	X_k	$f(X_k)$	j	Y_j	$f(Y_j)$	$\nabla f(Y_j)$	$\ \nabla f(Y_j)\ $	S_j	λ_j	Y_{j+1}
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1	0,0; 3,0	52,00	1	0,0; 3,0	52,00	– 44,0; 24,0	50,12	44,0; – 24,0	0,062	2,7; 1,51
			2	2,7; 1,51	0,34	0,73; 1,28	1,47	– 0,69; 1,31	0,22	2,55; 1,22
2	2,55; 1,22	0,1036	1	2,55; 1,22	0,1036	0,89; – 0,44	0,99	– 0,89; 0,44	0,11	2,45; 1,27
			2	2,45; 1,27	0,05	0,18; 0,36	0,40	– 0,18; – 0,36	0,64	2,27; 1,11
3	2,27; 1,11	0,008	1	2,27; 1,11	0,008	0,18; – 0,20	0,27	– 0,18; 0,20	0,10	2,25; 1,13
			2	2,25; 1,13	0,0075	0,10; – 0,14	0,15	– 0,10; 0,14	0,12	2,12; 1,05
4	2,12; 1,05	0,0005	1	2,12; 1,05	0,0005	0,05; – 0,08	0,09	– 0,05; 0,08	0,10	2,115; 1,058
			2	2,115; 1,058	0,0002	0,004; 0,004	0,006	—	—	—

Таблица 5 – Ход решения ЗНП по методу Зойтендейка

k	X_k	$f(X_k)$	Поиск возможного направления			$\lambda_{\max}$	λ_k	X_{k+1}
			$\nabla f(X_k)$	S_k	z_k			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0,00; 0,75	– 3,375	– 5,5; – 3,00	0,714; – 0,0357	– 0,714	0,84	0,84	0,6; 0,72
2	0,6; 0,72	– 5,827	– 3,04; – 4,32	– 0,0712; – 0,117	– 0,288	1,562	1,562	0,489; 0,902
3	0,489; 0,902	– 6,145	– 3,849; – 3,369	0,0957; – 0,0555	– 0,1816	1,564	1,564	0,6385; 0,8154
4	0,6385; 0,8154	– 6,343	– 5,63; – 4,02	– 0,016; 0,0433	– 0,84	1,419	1,419	0,616; 0,877
5	0,616; 0,877	– 6,508	– 3,29; – 3,725	0,0268; – 0,132	– 0,0303	1,455	1,455	0,655; 0,858

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6.
ИЗУЧЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ЗОЙТЕНДЕЙКА

1. Цели и задачи занятия:

- изучение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом Зойтендейка;
- приобретение навыков разработки тестовых примеров для отладки программ решения НП-задач методом Зойтендейка.

2. Краткие теоретические положения

Метод Зойтендейка относится к классу методов линеаризации, использующих идею построения задачи линейного программирования, эквивалентной НП-задачи. Известно несколько модификаций данного метода [4]. Остановимся на алгоритме улучшенной сходимости в случае нелинейных ограничений.

В самом общем случае, задача нелинейного программирования описывается математической моделью

$$\begin{aligned} \min f(X); \\ \begin{cases} g_i(X) \geq 0, & i = 1, \overline{m}; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \overline{n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Предположим, что текущая координата X – допустимая точка, а I – номера активных ограничений в этой точке, сиречь $I = \{i: g_i(X) = 0\}$. Если для некоторого вектора s выполняются соотношения $\nabla^T f(X) \cdot s < 0$ и $\nabla^T g_i(X) \cdot s < 0$, то s – возможное направление спуска: функция убывает, ограничения не нарушаются. Это позволяет построить задачу линейного программирования, в ходе решения которой можно отыскать s .

$$\begin{aligned} \min z \\ \begin{cases} \nabla^T f(X) S - z \leq 0; \\ \nabla^T g_i(X) S - z \leq -g_i(X), \quad i = 1, m; \\ -1 \leq s_j \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Если в ходе решения ЗЛП функция цели оказывается ненулевой, то необходимо решить задачу одномерной минимизации Коши поиска ускоряющего множителя λ :

$$\min_{0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} f(X + \lambda S),$$

$$\lambda_{\max} = \max \{ \lambda : g_i(X + \lambda S) \leq 0, i = 1, m \}.$$

Множитель λ позволяет переместиться в новую текущую точку в многомерном пространстве на расстояние $s \cdot \lambda$. В противном случае, текущая точка является точкой решения (точка Куна-Таккера).

Исходными данными к алгоритму являются координаты допустимой начальной точки X_0 .

```

k = 1;
Xk = X0;
zk = 100;
do while (zk ≠ 0)
{
    Построить и решить ЗЛП, найти zk и sk.
    if (zk ≠ 0) then
    {
        Решить задачу поиска λk.
        Xk+1 = Xk + λk × sk;
        k = k + 1;
    }
}

```

3. Пример выполнения упражнений

Решение ЗНП методом Зойтендейка

Исходная математическая модель [9]

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ 2x_1^2 - 2x_2 \leq 0; \\ -x_1 \leq 0; \\ -x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Для данной задачи построим модель ЗЛП вида

$$\min z$$

$$\nabla^T g_i(X_k) S - z \leq -g_i(X_k), \quad i = 1, m.$$

в начальной точке с координатами (0,00; 0,75).

Определим градиенты ограничений:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_1 - 4 \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 \end{bmatrix};$$

$$\nabla g_1(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}; \nabla g_2(X) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}; \nabla g_3(X) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \nabla g_4(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Имеем модель ЗЛП, отметим, что все ограничения в этой начальной точке не являются активными

$$\min z$$

$$\begin{cases} -5,5s_1 - 3s_2 - z \leq 0; \\ s_1 + 5s_2 - z \leq 1,25; \\ -s_2 - z \leq 0,75; \\ -s_1 - z \leq 0; \\ -1 \leq s_j \leq 1, j = 1, 2. \end{cases}$$

В ходе решения задачи получим:

$$S = \begin{bmatrix} 0,7143 \\ -0,0357 \end{bmatrix}; z = -0.7145.$$

Поскольку значение функции цели отрицательное необходимо найти ускоряющий множитель в ходе одномерного поиска решения вспомогательной задачи

$$\min_{0 < \lambda < \lambda_{\max}} f(X_0 + \lambda S_0) = \min_{0 < \lambda < \lambda_{\max}} f(0,7143\lambda; 0,75 - 0,0357\lambda) =$$

$$= \min_{0 < \lambda < \lambda_{\max}} [0,972\lambda^2 - 4,036\lambda - 3,375]$$

Перебором установим значение $\lambda_{\max}$.

$$g_i(X_0 + \lambda S_0) \leq 0, i = 1, 4 \Rightarrow 0,84 = \lambda_{\max}.$$

Решение поисковой задачи даст это же значение в качестве решения. Рассчитывается очередная точка:

$$X_1 = X_0 + \lambda_0 S_0 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,75 \end{bmatrix} + 0,84 \cdot \begin{bmatrix} 0,7143 \\ 0,0357 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 \\ 0,72 \end{bmatrix}.$$

Далее итерационный процесс продолжается.

Вычисления помещены в таблицу 5.

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min$$

$$1. \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 \leq 0, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \leq 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 \rightarrow \min \\ 2 \cdot x_1^2 + x_2 - 13 \leq 0, \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 3 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- $$x_1^3 + 2 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_3 \rightarrow \min$$
- $$3. \begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1^2 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \leq 0. \end{cases}$$
- $$x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$
- $$5. \begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \leq 0, \\ -x_2^2 + 1 \leq 0. \end{cases}$$
- $$4 \cdot x_1^2 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_2^2 \rightarrow \min$$
- $$7. \begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 - 6 \leq 0. \end{cases}$$
- $$x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 \rightarrow \min$$
- $$9. \begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1^2 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \leq 0. \end{cases}$$
- $$(1 - x_1)^2 - 10 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$$
- $$4. \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0, \\ (x_2 - x_1)^2 + x_1 - 7 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0. \end{cases}$$
- $$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$
- $$6. \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 - 3 \leq 0, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$
- $$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min$$
- $$8. \begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \leq 0, \\ x_1^2 + 2 \cdot x_2 - 4 \leq 0. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7.

ОСВОЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ

1. Цели и задачи занятия:

- изучение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом внутренней точки;
- приобретение навыков разработки тестовых примеров для отладки программ решения НП-задач методом внутренней точки.

2. Краткие теоретические положения

Метод внутренней точки реализует разновидность подхода, основанного на сведении процесса решения задачи оптимизации функции цели при наличии ограничений, к нахождению безусловного экстремума специально сконструированной функции.

Для поставленной задачи нелинейной оптимизации

$$\begin{aligned} &\min f(X); \\ &\begin{cases} g_i(X) \geq 0, & i = 1, \overline{m}; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \overline{n}, \end{cases} \end{aligned}$$

может быть построена штрафная функция вида

$$P(X, r, \Omega) = f(X) + \Delta, \text{ где } \Delta = r \cdot \sum_{i=1}^m \omega_i R[g_i(X)].$$

В формулах обозначены: множитель $r > 0$, убывающий по мере вычислений и Ω – вектор положительных весовых коэффициентов, учитывающих важность (значимость) ограничений модели; R функция барьера. Функция получила своё название из-за неограниченного возрастания при приближении к нулю справа.

Обычно используют единичный вектор Ω , а в качестве барьерной функции применяют $R[Y] = Y^{-1}$ или $R[Y] = -\ln Y$.

Исходными данными к алгоритму являются

- координаты начальной точки X_0 ;
- переменный множитель $r_0 > 0$;
- константа пропорционального уменьшения множителя $0 < \beta < 1$;
- показатель точности вычислений ε .

$k = 1$;

$X_k = X_0$;

$r_k = r_0$;

$\Delta = 2 \cdot \varepsilon$;

do while ($\varepsilon \leq \Delta$)

{

Вычислить значение $\Delta(X_k, r_k)$;

$\min P(X_k, r_k) \Rightarrow X_{k+1}$;

$k = k + 1$;

$r_{k+1} = r_k \beta$;

}

3. Пример выполнения упражнений

Решение ЗНП методом внутренней точки

Исходные данные [9].

Функция цели: $\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2$.

Ограничение: $-x_1 - x_2 \geq 0$

Функционал: $R[f] = 1 / f$.

Штрафная функция: $P(X, r) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2 + r \cdot (x_2 - x_1)^{-1}$

Начальные условия: $X_0^T = (0, 0; 1, 0)$; $\varepsilon = 0,02$; $r_0 = 10$; $\beta = 0,1$.

Таблица 5 – Ход решение ЗНП методом внутренней точки

k	r_k	X_{k+1}	$f(X_{k+1})$	$R(X_{k+1})$	$P(X_k, r_k)$	$r_k \cdot R(X_{k+1})$
(10)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	10,0	0,708; 1,532	8,334	0,970	18,039	9,705
1	1,0	0,828; 1,110	3,821	2,359	6,180	2,359
2	0,1	0,899; 0,964	2,528	6,419	3,170	0,642
3	0,01	0,924; 0,916	2,129	19,078	2,320	0,191
4	0,001	0,940; 0,901	2,004	59,046	2,063	0,059
5	0,0001	0,9439; 0,8964	1,964	184,445	1,983	0,0184

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

1. $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 \leq 0, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \leq 0. \end{cases}$$
2. $x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1^2 + x_2 - 13 \leq 0, \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 3 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$
3. $x_1^3 + 2 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1^2 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \leq 0. \end{cases}$$
4. $(1 - x_1)^2 - 10 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0, \\ (x_2 - x_1)^2 + x_1 - 7 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0. \end{cases}$$
5. $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \leq 0, \\ -x_2^2 + 1 \leq 0. \end{cases}$$
6. $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 - 3 \leq 0, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$
7. $4 \cdot x_1^2 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_2^2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \cdot x_2 - 6 \leq 0. \end{cases}$$
8. $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \leq 0, \\ x_1^2 + 2 \cdot x_2 - 4 \leq 0. \end{cases}$$
9. $x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1^2 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \leq 0. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8.

ОСВОЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ВНЕШНЕЙ ТОЧКИ

1. Цели и задачи занятия:

- изучение алгоритма решения задач нелинейного программирования методом внешней точки;
- приобретение навыков разработки тестовых примеров для отладки программ решения НП-задач методом внешней точки.

2. Краткие теоретические положения

Метод внешней точки использует преобразование задачи нелинейного программирования с ограничениями в функцию специального вида, называемую штрафной. Пусть НП-задача представлена в общей постановке

$$\begin{aligned} \min f(X); \\ \begin{cases} h_i(X) = 0, & i = 1, \overline{m}; \\ g_i(X) \geq 0, & i = m+1, \overline{l}. \end{cases} \end{aligned}$$

Штрафная функция, которая может быть построена по представленной выше модели, описывается выражением

$$P(X, r) = f(X) + rL(X),$$

где r – коэффициент штрафа, а величина штрафа в текущей точке X рассчитывается по формуле

$$L(X) = \sum_{i=1}^m H[h_i(X)] + \sum_{i=m+1}^l R[g_i(X)].$$

Для построения штрафной функции, в этом случае используется две разновидности функционалов: $R[Y] = [\max \{0, -Y\}]^P$ и $R[Y] = |Y|^P$, где $P \geq 1$ – показатель степени, целое число.

Исходными данными к алгоритму являются

- координаты начальной точки X_0 ;
- показатель степени P ;
- переменный множитель $r_0 \gg 0$;
- константа пропорционального увеличения множителя $\beta \gg 1$;

- показатель точности вычислений ε .

```

 $k = 1;$ 
 $X_k = X_0;$ 
 $r_k = r_0;$ 
 $\Delta = 2 \cdot \varepsilon;$ 
do while ( $\varepsilon \leq \Delta$ )
{
    Вычислить значение  $L(X_k)$ ;
    Положить  $\Delta = r_k \cdot L(X_k)$ ;
     $\min P(X_k, r_k) = \min [f(X_k) + \Delta] \Rightarrow X_{k+1};$ 
     $k = k + 1;$ 
     $r_{k+1} = r_k \cdot \beta;$ 
}

```

3. Пример выполнения упражнений

Решение ЗНП методом внешней точки

Функция цели [9]: $\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2$.

Ограничение: $x_1 - x_2 = 0$

Функционал: $R[f] = f^2$.

Штрафная функция: $P(X, r) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2 \cdot x_2)^2 + r \cdot (x_1 - x_2)^2$

Начальные условия: $X_0^T = (0, 0; 1, 0)$; $\varepsilon = 0,02$; $r_0 = 0,1$; $\beta = 10,0$.

Таблица 5 – Ход решение ЗНП методом внешней точки

k	r_k	X_{k+1}	$f(X_{k+1})$	$R(X_{k+1})$	$P(X_k, r_k)$	$r_k \cdot R(X_{k+1})$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0,1	1,4539; 0,7608	9,35	7,8307	10,133	0,78307
1	1,0	1,1687; 0,7407	5,763	0,3908	6,154	0,3908
2	10,0	0,9906; 0,8425	2,5203	0,01926	2,713	0,1926
3	100,0	0,9507; 0,8875	1,8917	0,000267	1,9184	0,0267
4	1000,0	0,9461; 0,8934	1,9405	0,0000028	1,9433	0,0028

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

$$\begin{aligned}
 &(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min \\
 1. \quad &\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 \leq 0, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 \rightarrow \min \\
 2. \quad &\begin{cases} 2 \cdot x_1^2 + x_2 - 13 \leq 0, \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 3 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

- $$x_1^3 + 2 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_3 \rightarrow \min$$
- $$(1 - x_1)^2 - 10 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$$
3. $\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1^2 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \leq 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0, \\ (x_2 - x_1)^2 + x_1 - 7 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0. \end{cases}$
- $$x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$
- $$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$
5. $\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \leq 0, \\ -x_2^2 + 1 \leq 0. \end{cases}$
6. $\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 - 3 \leq 0, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \leq 0. \end{cases}$
- $$4 \cdot x_1^2 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_2^2 \rightarrow \min$$
- $$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min$$
7. $\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 - 6 \leq 0. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \leq 0, \\ x_1^2 + 2 \cdot x_2 - 4 \leq 0. \end{cases}$
- $$x_1^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 \rightarrow \min$$
9. $\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2 + x_3^2 - 4 \leq 0, \\ x_1^2 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \leq 0. \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

1. Цели и задачи занятия.

Научиться построению математических моделей нелинейного программирования по содержательной постановке задачи:

- правильно выбирать независимые переменные;
- формулировать нелинейную функцию цели;
- выполнять построение области допустимых значений.

2. Краткие теоретические положения

Чтобы построить математическую модель для последующего решения методами нелинейного программирования, необходимо выполнить следующие шаги [6].

1. Определить переменные, для которых будет составлена целевая функция и ограничения на нее.
2. Сформулировать цель решение и составить функцию.
3. Составить ограничения задачи.

Отметим, что данная последовательность действий справедлива для всех задач математического программирования

3. Пример выполнения упражнений [7]

Фирма, специализирующая на разработке и установке охранной сигнализации, выпускает для нужд МЧС изделия двух видов: комбинированные датчики (КД) проникновения/пожара и интеллектуальные решающие устройства оповещения (УО). Из-за производственного брака и некондиционных комплектующих стоимость изделий линейно зависит от объёма производства, а себестоимость увеличивается на одну десятую от объёма. Фирма выпускает, согласно договору с МЧС не менее 10 КД и одного УО. Нормы расхода приведены в таблице 6, известна себестоимость единицы изделия, договорная цена и текущие складские запасы.

Таблица 6 – Содержательные условия задачи

Комплектующие	Нормы расхода на вид изделия		Объёмы запасов
	(КД)	(УО)	
Микросхемотехника	10	20	1500
Аналоговые элементы	20	10	2700
Стеклогетинакс	40	20	5300
Себестоимость 1 шт.	5 \$	10 \$	
Цена 1 шт.	7 \$	13 \$	

Требуется спланировать выпуск изделий охранной сигнализации, обеспечивающий максимальную прибыль для фирмы-производителя.

Решение.

Сперва отметим, что измерение продукции в штуках подразумевает целочисленность переменных. Таким образом, данная задача относится к области нелинейного целочисленного программирования, поэтому к ограничениям задачи, определяемым нормами и ограничениями на ресурсы, добавится ограничение целочисленности.

1. Обозначим как x_1 – количество комбинированных датчиков, а как x_2 – количество устройств оповещения.

2. Прибыль по единице каждого образца продукции есть разница между ценой и себестоимостью (с учётом брака, который увеличивает себестоимость). Поэтому функция цели примет вид

$$f(X) = [7 - (5 + 0,1 \cdot x_1)] \cdot x_1 + [13 - (10 + 0,1 \cdot x_2)] \cdot x_2 = \\ = 2 \cdot x_1 - 0,1 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2 - 0,1 \cdot x_2^2.$$

3. При формулировании ограничений также необходимо учитывать потери на некондиционные комплектующие и брак. Ограничения по условиям задачи можно разделить на “производственные” и определяемые “договором о поставках”.

Ограничения, обусловленные производством, и учитывающие потери:

$$\begin{cases} (10 + 0,1 \cdot x_1) \cdot x_1 + (20 + 0,1 \cdot x_2) \cdot x_2 \leq 1500, \\ (20 + 0,1 \cdot x_1) \cdot x_1 + (10 + 0,1 \cdot x_2) \cdot x_2 \leq 2700, \\ (40 + 0,1 \cdot x_1) \cdot x_1 + (20 + 0,1 \cdot x_2) \cdot x_2 \leq 5300. \end{cases}$$

Ограничения, обусловленные договором

$$\begin{cases} x_1 \geq 10, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

В целом, математическая модель для поставленной задачи выглядит так:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - 0,1 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_2^2 \rightarrow \max \\ (10 + 0,1 \cdot x_1) \cdot x_1 + (20 + 0,1 \cdot x_2) \cdot x_2 \leq 1500, \\ (20 + 0,1 \cdot x_1) \cdot x_1 + (10 + 0,1 \cdot x_2) \cdot x_2 \leq 2700, \\ (40 + 0,1 \cdot x_1) \cdot x_1 + (20 + 0,1 \cdot x_2) \cdot x_2 \leq 5300, \\ x_1 \geq 10, \\ x_2 \geq 1, \\ X \in N, \end{cases}$$

где N – натуральные числа.

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы [8]

1. Вкладчик желает выбрать портфель ценных бумаг $X^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где x_j – доля актива, вложенного в ценные бумаги j -го. Доходность портфеля имеет среднее значение $C^T \cdot X$, а дисперсия равна $X^T \cdot V \cdot X$, где C – вектор ожидаемых доходов от вида бумаг, V – матрица вторых моментов этих доходов. Необходимо увеличить ожидаемый доход с одновременной минимизации дисперсии.

2. Элемент, сохраняющий тепло имеет габариты: L – длина, W – ширина, H – высота. Коэффициенты потери тепла из-за конвекции h_c и излучения h_r , заданы соотношениями

$$h_c = k_c \cdot S \cdot (T - T_\alpha), h_r = k_r \cdot S \cdot (T^4 - T_\alpha^4)$$

В последнем выражении k_c и k_r постоянные, T – температура элемента, S – площадь его поверхности, T_α – температура окружающей среды. Объем тепловой энергии, запасаемой элементом равен

$$Q = k \cdot V \cdot (T - T_\alpha),$$

где k – константа, V – объем элемента. Требования заказчика на габариты

$$L \leq L_{\max}, W \leq W_{\max}, H \leq H_{\max},$$

и минимально запасаемую энергию $Q \geq Q_{\max}$.

2.1. Сформулировать математическую модель НП-задачи нахождения размеров: L , W , и H при которых тепловые потери минимальны.

2.2. В предположении, что k_c и k_r являются линейными функциями от толщины изоляции t , построить математическую модель нахождения размеров L , W , и H при которых издержки изоляции минимальны.

2.3. Построить математическую модель НП-задачи в условиях, когда энергосберегающий элемент является цилиндром с габаритами D – диаметр цилиндра, H – высота цилиндра, и ограничения на габариты $D \leq D_{\max}$, $H \leq H_{\max}$.

3. Семья с бюджетом b покупает n продуктов. Цена единицы j -го продукта равна c_j , а минимальное число закупаемого продукта – l_j . После того, как эти минимальные виды продуктов приобретены, оставшийся бюджет распределяется между продуктами. Часть a_j от остатков бюджета при повторном распределении будет использовано на покупку продукта j . Проведены необходимые статистические исследования на протяжении m месяцев для оценки величин $l_1, l_2, \dots, l_n$ и $a_1, a_2, \dots, a_n$. Построить нелинейную регрессионную модель для следующих ситуаций.

3.1. Минимизировать сумму квадратов ошибок.

3.2. Минимизировать максимальное абсолютное значение ошибки.

3.3. Минимизировать сумму абсолютных значений ошибок.

4. Пусть n предприятий сбрасывают отходы в воду реки. Принятый текущий коэффициент сбрасывания отходов j -м предприятием равен μ_j , $j = 1, \dots, n$. Качество воды проверяется на протяжении реки в m пунктах контроля. Наименьшее требуемое улучшение качества воды в пункте i равно b_i , $i = 1, \dots, m$. Пусть x_j – объем отходов, подлежащих очистке на предприятии j . Соответствующие затраты j -ого предприятия равны $c_j \cdot x_j^2$. Обозначим через a_{ij} улучшение воды в пункте контроля i для каждой единицы отходов, очищенных на предприятии j . Минимизировать потери на очистке.

5. Лифт имеет в момент времени t вертикальное ускорение $u(t)$. пассажиры хотели бы подняться от цокольного этажа, находящегося на нулевой высоте над уровнем моря, до 16-го этажа, находящегося на высоте 50 М над уровнем моря, по возможности быстрее, но не испытывая при этом сильного ускорения. Пусть пассажир оценивает единицу времени в α рублей и готов заплатить в единицу времени сумму $\beta \cdot u^2(t)$ рублей, дабы избежать сильного ускорения. Построить математическую модель для определения оптимального ускорения $u(t)$ лифта на участке от цокольного до шестнадцатого этажа.

6. Пусть в каждом из n временных периодов известен спрос $d_1, \dots, d_n$ на некоторый продукт. Для удовлетворения спроса в j -м периоде может быть использован как произведённый в этом периоде, так и хранимый на складе продукт. В j -м периоде выпускается x_j единиц продукта. При этом производственные затраты задаются функцией $f(x_j)$, $j = 1, \dots, n$. Выпущенный в некотором периоде в избытке продукт можно хранить на складе. Ёмкость склада равна K , а стоимость хранения единицы продукта в течение одного периода равна R рублям. Постройте нелинейную модель планирования производства, считая заданным запас I_0 , хранимый на складе.

7. Некая промышленная фирма производит четыре различных продукта. При этом один из видов необходимого сырья имеет ограниченное предложение, и фирма может получить его в количестве не более R кг. Для выпуска 1 кг i -го продукта используется a_i кг этого сырья. Переменные издержки, включающие и затраты сырья при производстве x_i кг i -го продукта равны $k_i \cdot x_i^2$, коэффициент k_i известен. Продажная цена i -го продукта равна S_i рублей за килограмм. Постройте нелинейную модель планирования производства.

8. Пусть суточный запас на j -й продукт равен d_j , $j = 1, 2$. Спрос удовлетворяется из запасов на складе, которые пополняются производством, как только запасы исчерпываются. Время производства и доставки продуктов на склад предполагается несущественным. В течение каждого периода может быть произведено Q_j единиц продукта при фиксированных организационных затратах в k_j рублей и переменных затратах в $c_j \cdot Q_j$ рублей. Плата за хранение запасов равна h_j рублей за единицу продукта в день. Плата за хранение взимается, исходя из среднего запаса T дней. Таким образом, общие затраты, связанные с j -м продуктом за T дней равны

$$T \cdot \left(\frac{d_j \cdot k_j}{Q_j} + c_j \cdot d_j + \frac{Q_j \cdot h_j}{2} \right) [\text{руб}].$$

Для каждого продукта j должна быть зарезервирована достаточная площадь склада. Для хранения единицы j -го продукта необходимо s_j квадратных метров площади склада. Общая площадь склада равна S .

8.1. Найдите оптимальные объёмы выпуска Q_1 и Q_2 этих продуктов, при которых общие затраты минимальны.

8.2. Пусть допускается неудовлетворение спроса и производство продуктов не обязательно начинать, когда запасы достигают нуля. В течение времени, когда запасов нет, и спрос не удовлетворён, сбыт отсутствует. При этом убытки на единицу неудовлётворённого спроса на j -й продукт равны l_j рублей. С другой стороны, если бы продажа была совершена, то доход от единицы продукта был равен p_j долларам. Постройте формальную модель рациональной организации производства и хранения продуктов в указанной ситуации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию [Текст]: / И. Л. Калихман. – М.: ВШ, 1975. – 270 с.
2. Базара М. Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы [Текст]: / М. Базара, К. Шетти. – М.: ВШ, 1975. – 270 с.
3. Введение в нелинейное программирование [Текст]: / Под. ред. К.-Х. Эльстера. – М.: Наука, 1985. – 263 с.
4. Фиакко А.В. Нелинейное программирование: Методы последовательной безусловной оптимизации [Текст]:/ А.В. Фиакко, Г.П. Мак-Кормик – М.: Мир, 1972. – 240 с.
5. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. [Текст]: / И.В. Бейко, Б.Н. Бублик, П.Н. Зинько. - Киев: Вища школа, 1983. - 512 с.
6. Гончаров, В. А. Методы оптимизации : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Гончаров. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 191 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3642-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/book/metody-optimizacii-425157> (дата обращения: 06.04.2019).
7. Электронный ресурс. — [Текст]: электронный URL: https://studref.com/375516/economika/reshenie_zadach_nelineynoy_optimizatsii (дата обращения: 08.03.2020).
8. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы [Текст]: / М. Базара, К. Шетти. - М.: Мир, 1975. – 583 с.
9. Зайченко Ю.П. Исследование операций. [Текст]: сборник задач / Ю.П. Зайченко, С.А. Шумилова. – Киев: Вища школа, 1990. - 239 с.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Методические указания
к проведению практических занятий
по дисциплине*

*Составители: **Заикина** Елена Николаевна,
Карлусов Вадим Юрьевич*

В авторской редакции

Изд. № 318/2020. Объем 2,5 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»