

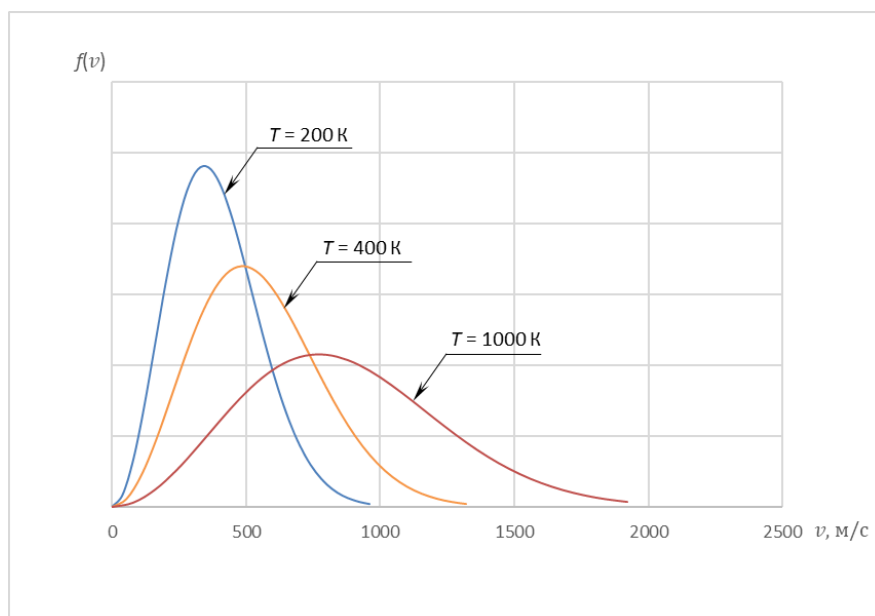
**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации**

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Г Рипп, О.В. Матузаева

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Учебное пособие
по общей физике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2021

УДК 53.08 (075.8)
P537

Рецензент:

Ю.В. Браславский – кандидат технических наук, доцент

Рипп А.Г.

P537 Распределение Максвелла: учебное пособие по общей физике / А.Г. Рипп, О.В. Матузаева; Министерство науки и высшего образования РФ, Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2021. – 20 с. – Текст : электронный.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «физика» и «физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться со способом описания случайных величин в молекулярной и в статистической физике, основанном на использовании функций распределения. Кроме того, студентам предлагается измерить две функции распределения: скорости молекулы в равновесном идеальном газе и дальности полёта молекулы, вылетевшей из сосуда с равновесным идеальным газом. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 53.08 (075.8)

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 9 от 15 июня 2020 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2021

Работа 23. Распределение Максвелла

Цель работы

Знакомство с функциями распределения случайных величин. Измерение двух функций распределения: функции распределения скорости молекулы равновесного идеального газа и функции распределения дальности полёта молекулы, вылетевшей из сосуда с равновесным идеальным газом.

1. Краткая теория

1.1. Краткие сведения о распределении Максвелла

Молекулы идеального газа совершают хаотическое тепловое движение. Для описания этого движения удобно использовать статистическую модель, в которой считается, что скорость каждой молекулы – это случайная величина. Значения случайных величин непредсказуемы, но их количественное описание всё же возможно. Этим занимается математическая наука названием Теория вероятностей. В физике эта теория оказалась очень полезной и плодотворной, она и развивалась в значительной степени в рамках физики. В данной лабораторной работе вам предлагается познакомиться с главной количественной характеристикой случайной величины – *функцией распределения*.

Рассмотрим для конкретности такую случайную величину, как модуль скорости молекулы v . Эта величина – непрерывная, то есть в каждом, даже очень малом интервале $(v_1; v_2)$ содержится бесконечно много её значений. В результате вероятность каждого значения v оказывается равной нулю. Однако вероятность попадания значения v в любой интервал может оказаться отличной от нуля. Рассмотрим бесконечно малый интервал скорости $(v; v + dv)$. Вероятность того, что значение скорости молекулы принадлежит этому интервалу, тоже бесконечно мала. Обозначим её dW . Эта вероятность зависит от двух величин.

- От ширины интервала dv : чем больше dv , тем больше dW .
- От места расположения интервала на оси скорости v .

Данный факт можно записать в следующем виде:

$$dW(v) = f(v)dv.$$

Здесь $f(v)$ – некоторая функция, которая как раз и называется *функцией распределения*. Другое название этой функции – *плотность вероятности*. Так как вероятность – это неотрицательная величина, то функция распределения – это неотрицательная функция. Для каждой случайной величины функция распределения своя. Функции распределения скорости молекул (их проекций и модуля) и кинетической энергии молекул получил известный британский физик Джеймс Максвелл в 1859 году. Эти функции получили общее название «рас-

пределение Максвелла». В частности, функция распределения модуля имеет следующий вид:

$$f_M(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (1)$$

Здесь m – масса молекулы, T – абсолютная температура газа.

У этой функции есть несколько характерных особенностей.

- Функция распределения $f_M(v)$ равна нулю на границах области определения. Это значит:

$$f_M(0) = 0, \quad f_M(v) \rightarrow 0 \text{ при } v \rightarrow \infty.$$

- Функция распределения $f_M(v)$ имеет максимум в точке $v = v_B$, которая определяется следующей формулой:

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (2)$$

Величина v_B называется *наиболее вероятной скоростью*.

- Как видно из формулы (2), максимум функции распределения смещается вправо (в область больших скоростей) с ростом температуры. Это означает, что с ростом температуры молекулы в своей массе движутся всё быстрее. Данный факт наглядно иллюстрируют графики функции распределения $f_M(v)$, показанные на следующем рис. 1.



Рис. 1. Функции распределения модуля скорости молекул азота

- Из формулы (2) следует ещё один факт: с ростом массы молекул максимум функции распределения смещается влево (в область меньших скоростей).

Это означает, что тяжёлые молекулы движутся в среднем медленнее лёгких.

- Удобно перейти от абсолютной скорости v к относительной $u = \frac{v}{v_B}$. У относительной скорости есть два преимущества перед абсолютной. Во-первых, она безразмерная. Во-вторых, её функция распределения имеет универсальный вид и не зависит ни от каких параметров:

$$f_0(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}. \quad (3)$$

1.2. Распределение дальности полёта

Функцию распределения молекул по абсолютной или относительной скорости можно определить экспериментальным путём с тем, чтобы убедиться в правильности функции распределения Максвелла $f_M(v)$ и её универсального варианта $f_0(u)$. Основные трудности две: как измерять скорости молекул и как считать молекулы.

Скорость можно измерять косвенно: измерять другую величину, связанную со скоростью, а по ней уже определять скорость. Для счёта молекул можно использовать детекторы частиц. Например, можно реализовать такую идею. На горизонтальном столе устанавливается сосуд с газом. В сосуде проделывается отверстие, из которого вылетают молекулы. Вылетевшие молекулы под действием силы тяжести падают на стол, причём дальность полёта молекулы s тем больше, чем больше скорость v , с которой она вылетела, так что по дальности можно определять скорость. Вся поверхность стола распределена на отдельные малые ячейки, в которых смонтированы детекторы, соединённые со счётчиками. Каждая ячейка расположена на определённом расстоянии от сосуда (дальности s), вот и получается, что эксперимент может дать зависимость вероятности попадания молекулы в ячейку от дальности ячейки, а эту информацию можно использовать для получения функции распределения молекул по скоростям.

У этой идеи есть, правда, три технические трудности.

Первая трудность. Дальность полёта молекулы s зависит не только от скорости молекулы v , но и от угла вылета молекулы α , значит, надо как-то измерять этот угол. Можно вставить в отверстие под определённым углом к горизонту узкую трубочку, тогда все молекулы будут вылететь под одним и тем же углом. Мало того, тогда все они будут вылетать в одной и той же вертикальной плоскости, это позволяет упростить эксперимент – ячейки и детекторы не надо располагать по всему столу, достаточно их расположить вдоль одной линии на столе, которая проходит в плоскости полёта частиц. При этом ячейки можно сделать поменьше и расположить их почаще – это увеличит точность определения функции распределения.

Вторая трудность. При комнатных температурах средние скорости молекул – это сотни метров в секунду, поэтому дальность полёта молекул – тоже

сотни метров и даже километры. Значит, линия, по которой монтируются ячейки с детекторами, должна быть очень длинной, и ячеек придётся использовать очень много, так что эксперимент окажется довольно дорогим. Правда, можно регистрировать тяжёлые частицы – они помедленнее.

Третья трудность. Пока молекула пролетит по воздуху и упадёт в ячейку, она много раз столкнётся с молекулами воздуха, и столкновения эти носят случайный характер, так что дальность полёта молекулы s не является однозначной функцией скорости v , с которой молекула вылетела из сосуда. Эту трудность тоже можно преодолеть, если использовать достаточно тяжёлые молекулы, которые слабо реагируют на молекулы воздуха и на пылинки, содержащиеся в воздухе. Лучше всего, если бы в сосуде вообще были не молекулы, а частички массой порядка нескольких граммов. Это было бы решением и второй, и третьей трудностей. Однако в реальности нет таких частиц с массой в несколько граммов, которые бы могли образовать идеальный газ, да ещё и с максвелловским распределением по скоростям. В реальности – нет, зато есть *в виртуальности*.

Предлагаемая вам лабораторная работа – виртуальная, лабораторная установка представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете. Схема эксперимента показана на следующем рис. 2.

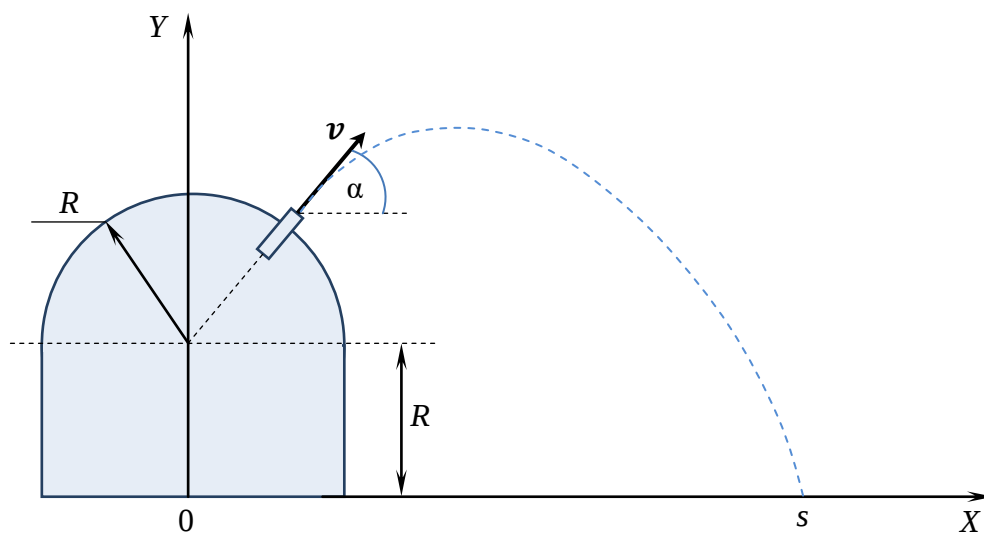


Рис. 2. Схема эксперимента

Сосуд с частицами – это цилиндр радиусом $R = 10$ м, он закрыт крышкой, форма которой – полусфера того же радиуса. В крышке есть узкая трубочка, через которую могут вылететь частицы. Угол, под которым расположена трубочка (угол вылета α), можно менять в интервале от 0 до 180° . От этого угла зависят координаты точки вылета:

$$x_0 = R \cos \alpha, y_0 = R + R \sin \alpha = R(1 + \sin \alpha).$$

Определим связь между дальностью полёта частицы s и скоростью вылета частицы из сосуда v . Это позволит решить две задачи.

Первая задача. Исходя из функций распределения Максвелла для абсолютной и относительной скоростей $f_m(v)$ и $f_0(u)$ (1) и (3), получить функцию распределения дальности полёта $f(s)$, которую можно сверять с экспериментальной. Решению этой задачи как раз посвящён данный раздел 1.2.

Вторая задача. Исходя из экспериментальной функции распределения дальности полёта $f(s)$, определить одну из функций распределения скорости частиц (например, функцию распределения относительной скорости) и затем сверить её с соответствующей функцией распределения Максвелла. Решение этой задачи будет рассмотрено в разделе 1.4.

Уравнения кинематики частицы, вылетевшей со скоростью v из отверстия в сосуде, следующие:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \alpha + vt \cos \alpha, \\ y(t) = (R + R \sin \alpha) + vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Для определения дальности полёта частицы s подставим в систему уравнений (4) конечные условия:

$$x(t_{\pi}) = s, \quad y(t_{\pi}) = 0,$$

где t_{π} – момент времени падения частицы на лабораторный стол. В итоге получается:

$$\begin{cases} R \cos \alpha + vt_{\pi} \cos \alpha = s, \\ (R + R \sin \alpha) + vt_{\pi} \sin \alpha - \frac{gt_{\pi}^2}{2} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Это – система двух уравнений с двумя неизвестными t_{π} и s . Для исключения из системы времени полёта t_{π} выразим его из первого уравнения:

$$t_{\pi} = \frac{1}{v} \left(\frac{s}{\cos \alpha} - R \right).$$

Подстановка t_{π} во второе уравнение системы (5) даёт:

$$\frac{g}{2v^2} \left(\frac{s}{\cos \alpha} - R \right)^2 = R + s \tan \alpha.$$

Относительно s это – квадратное уравнение. Решить его нетрудно, но проще выразить из этого уравнения не s , а скорость вылета v , то есть получить зависимость $v(s)$:

$$\frac{g}{2v^2} (s - R \cos \alpha)^2 = \cos \alpha (s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha),$$

$$v^2 = \frac{g}{2} \frac{(s - R \cos \alpha)^2}{\cos \alpha (s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha)} = \frac{gs}{2} \frac{\left(1 - \frac{R}{s} \cos \alpha\right)^2}{\cos \alpha \left(\sin \alpha + \frac{R}{s} \cos \alpha\right)}, \quad (6)$$

$$v = \left(1 - \frac{R}{s} \cos \alpha\right) \sqrt{\frac{gs}{2 \cos \alpha \left(\sin \alpha + \frac{R}{s} \cos \alpha\right)}}. \quad (7)$$

Интересно было бы упростить формулу (7). Это можно сделать для больших значений дальности полёта $s \gg R$. Если при этом угол вылета α находится в интервале $(45^\circ; 90^\circ)$, то можно считать, что

$$s \gg R \cos \alpha, \quad s \cdot \sin \alpha \gg R \cos \alpha,$$

$$\frac{R}{s} \cos \alpha \ll 1, \quad \frac{R}{s} \cos \alpha \ll \sin \alpha.$$

Тогда формула (7) упрощается так:

$$v = \sqrt{\frac{gs}{\sin(2\alpha)}}, \quad (8)$$

откуда можно получить выражение для s без решения квадратного уравнения:

$$s = \frac{\sin(2\alpha)}{g} v^2.$$

Удобно связать дальность полёта не с абсолютной скоростью частицы v , а с относительной $u = \frac{v}{v_B}$. Так как наиболее вероятная скорость v_B определяется формулой $v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, то связь между дальностью полёта s и относительной скоростью u следующая:

$$u = \frac{v}{v_B} = \sqrt{\frac{mgs}{2kT \sin(2\alpha)}}. \quad (9)$$

Введём обозначение:

$$\theta = \frac{2kT \sin(2\alpha)}{mg} = \frac{\sin(2\alpha)}{g} v_B^2. \quad (10)$$

Формула (9) тогда будет иметь вид

$$u = \sqrt{\frac{s}{\theta}}, \quad s = \theta u^2. \quad (11)$$

Величину θ будем в дальнейшем называть *параметром дальности*.

Для определения функции распределения дальности полёта $f(s)$ воспользуемся равенством, которое выполняется для случайных величин, между которыми есть *взаимно однозначное* соответствие:

$$f(s)ds = f_0(u)du.$$

Из этого равенства следует, что

$$f(s) = f_0(u) \frac{du}{ds}.$$

Производная $\frac{du}{ds}$, как следует из (11), равна $\frac{du}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{s\theta}}$. Тогда

$$f(s) = \frac{f_0(u)}{2\sqrt{s\theta}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{s\theta}} u^2 e^{-u^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi s\theta}} \frac{s}{\theta} e^{-\frac{s}{\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sqrt{s} e^{-\frac{s}{\theta}}. \quad (12)$$

Из этой формулы, кстати, следует физический смысл параметра дальности θ . Это удвоенное значение наиболее вероятной дальности¹:

$$\theta = 2s_B, \quad s_B = \frac{\theta}{2}.$$

Формулу (12) можно проверить экспериментальным путём. Для этого есть два способа.

Способ первый – прямой. Надо получить экспериментально функцию распределения $f(s)$ и затем сравнить её с тем, что дают расчёты по теоретической формуле (12). Значение параметра дальности θ в (12) можно рассчитать по формуле (10), исходя из условий эксперимента.

Способ второй – косвенный. Функцию распределения $f(s)$ измерить надо, но расчёты по формуле (12) не нужны. Вместо этого можно попробовать *линеаризовать* зависимость $f(s)$. Например, так:

$$\frac{f(s)}{\sqrt{s}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} e^{-\frac{s}{\theta}}, \quad \frac{\sqrt{s}}{f(s)} = \frac{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}{2} e^{\frac{s}{\theta}}, \quad \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{f(s)}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}{2}\right) + \frac{s}{\theta}.$$

Если теперь ввести новую переменную $z = \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{f(s)}\right)$, то получается, что эта переменная *линейно* зависит от дальности полёта частицы s :

$$z = ks + b, \quad (13)$$

где обозначено:

$$k = \frac{1}{\theta}, \quad b = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}{2}\right).$$

Если эксперименты подтвердят линейную зависимость вспомогательной переменной z от s , то можно найти параметры этой зависимости k и b , а затем двумя способами определить значение параметра дальности θ :

$$\theta = \frac{1}{k}, \quad \theta = \left(\frac{2e^b}{\sqrt{\pi}}\right)^{2/3} = 1,084e^{2/3b}. \quad (14)$$

¹ Наиболее вероятную дальность s_B можно найти, приравняв к нулю производную от функции $f(s)$.

Совпадение результатов и их соответствие расчётному значению параметра дальности будет являться дополнительным аргументом, подтверждающим функцию распределения (12). Разумеется, ожидать положительного результата можно при условии, что значения функции $f(s)$ измерены для достаточно больших значений дальности полёта s , чтобы выполнялись условия $s \gg R$, $s \cdot \sin \alpha \gg R \cos \alpha$.

1.3. Измерение функции распределения дальности полёта

Функция распределения дальности полёта частицы $f(s)$ определяет вероятность dW того, что значение дальности для данной конкретной частицы окажется в интервале $(s; s + ds)$:

$$dW(s) = f(s)ds.$$

Эта формула остаётся верной, если размер интервала – это не бесконечно малое число, но всё же он достаточно мал по сравнению с числом s , определяющего положение интервала $(s; s + \Delta s)$ на числовой оси: $\Delta s \ll s$. Будем считать, что это условие выполняется. Тогда можно записать:

$$\Delta W(s) = f(s)\Delta s,$$

откуда следует, что

$$f(s) = \frac{\Delta W(s)}{\Delta s}.$$

С точки зрения эксперимента, эту формулу надо понимать так. Δs – это размер ячейки с детектором вдоль линии, по которой на лабораторном столе расположены детекторы, а $\Delta W(s)$ – это вероятность частице попасть в ячейку с координатой (адресом) s . Если известно, сколько частиц $n(s)$ насчитал счётчик, соединённый с данной ячейкой, то вероятность $\Delta W(s)$ можно считать равной:

$$\Delta W(s) = \frac{n(s)}{N}, \quad N = \sum_{(s)} n(s).$$

N – это суммарное число частиц, которые попали во все рабочие ячейки. В результате формула, определяющая способ измерения функции распределения $f(s)$, имеет вид:

$$f(s) = \frac{n(s)}{N\Delta s}. \quad (15)$$

Одно важное замечание к этому способу. Число частиц, попавших в ячейку, $n(s)$ – случайное, поэтому и каждый результат измерения функции распределения $f(s)$ – это случайное число. Разумеется, любое измерение содержит в себе случайную погрешность, то есть является случайным числом. Оценить случайную погрешность можно, если проделать многократные измерения. Однако в данной ситуации нет необходимости проводить многократные измерения, так как известно распределение случайной величины n – числа частиц, по-

павших в ячейку. В теории вероятностей доказывается, что это – так называемое *распределение Пуассона*. Вы познакомитесь с распределением Пуассона и с его особенностями, когда будете изучать теорию вероятностей, а здесь вам важно узнать только две вещи.

Во-первых, мерой естественного разброса всякой случайной величины является *среднеквадратичное отклонение*. Оно обозначается буквой σ . В измерительной технике его называют ещё одним термином «стандартное отклонение», и есть способ оценки значения σ при проведении многократных измерений. В EXCEL есть для этого функция СТАНДОТКЛОН.

Во-вторых, среднеквадратичное отклонение случайной величины с распределением Пуассона определяется формулой

$$\sigma(n) = \sqrt{n}.$$

Считая $\sigma(n)$ абсолютной погрешностью измерения числа частиц в ячейке, делаем вывод: эта погрешность тем больше, чем больше результат измерения n . Однако относительная погрешность измерения при этом *уменьшается*:

$$\varepsilon(n) = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Это означает, что функцию распределения $f(s)$ можно измерить тем точнее, чем дольше длится эксперимент – при этом число частиц, зарегистрированных в каждой ячейке, растёт. Общая относительная погрешность измерения функции распределения, как следует из формулы (15), равна

$$\varepsilon(f) = \varepsilon(n) + \varepsilon(N) + \varepsilon(\Delta s) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \varepsilon(N) + \varepsilon(\Delta s).$$

Полное число зарегистрированных частиц N , как и число частиц в каждой ячейке, подчиняется распределению Пуассона, поэтому $\varepsilon(N) = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Для того чтобы измерить функцию распределения достаточно подробно, ячеек должно быть много, поэтому $N \gg n$, и тогда $\varepsilon(N) \ll \varepsilon(n)$, так что

$$\varepsilon(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \varepsilon(\Delta s). \quad (16)$$

Погрешность $\varepsilon(f)$, которую экспериментатор может признать достаточно малой, это – единицы процентов. Ячейки можно настроить так, что их размер был выверен с точностью до десятых долей процента, а вот для снижения относительной погрешности числа частиц в ячейке $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ниже уровня 0,1 (то есть ниже 10 %), требуется, чтобы $n > 100$. В предлагаемой вам виртуальной лабораторной установке начальное число частиц в сосуде фиксировано – меньше 1000, поэтому условие $n > 100$ или вообще не выполняется ни для одной ячейки, или выполняется только для двух-трёх ячеек. Итак, вы должны быть готовыми к тому, что погрешность измерения функции распределения $f(s)$ будет больше 10 %, так что ваши измерения будут грубыми, *оценочными*. Вообще при экспе-

риментальных исследованиях функций распределения для получения достаточно точных результатов требуется большое количество измерений. Как говорят, нужна «хорошая статистика». Данная установка даёт не очень хорошую статистику. Правда, есть возможность её улучшить, для чего каждый эксперимент нужно проводить многократно.

1.4. Измерение функции распределения скорости

Как упоминалось в разделе 1.2, зная связь между скоростью вылета частицы v и дальностью её полёта s , можно решить две задачи. Одна из них (первая) рассмотрена в разделе 1.2. Здесь мы рассмотрим вторую задачу: как, исходя из полученной экспериментально функции распределения дальности полёта $f(s)$, определить функцию распределения относительной скорости частиц $f_2(u)$. Эту функцию затем можно прямым способом сравнить с универсальной функцией распределения Максвелла $f_0(u)$ – см. формулу (3):

$$f_0(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}.$$

Связь между v и s определяется формулой (6)

$$v^2 = \frac{g}{2 \cos \alpha} \frac{(s - R \cos \alpha)^2}{s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha},$$

а относительная скорость связана с абсолютной формулой $u = \frac{v}{v_B}$. Применим снова правило связи функций распределения случайных величин, которые взаимно однозначно зависят друг от друга:

$$f_2(u) du = f(s) ds.$$

Из этой формулы следует:

$$f_2(u) = f(s) \frac{ds}{du} = \frac{f(s)}{\frac{du}{ds}}. \quad (17)$$

Вычислим производную $\frac{du}{ds}$.

$$\frac{du^2}{ds} = 2u \frac{du}{ds} \Rightarrow \frac{du}{ds} = \frac{1}{2u} \frac{du^2}{ds} = \frac{1}{2uv_B^2} \frac{dv^2}{ds}. \quad (18)$$

Воспользуемся формулой (6):

$$\begin{aligned} \frac{dv^2}{ds} &= \frac{g}{2 \cos \alpha} \frac{d}{ds} \left(\frac{(s - R \cos \alpha)^2}{s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha} \right) = \frac{g}{2 \cos \alpha} \frac{2(s - R \cos \alpha)(s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha) - (s - R \cos \alpha)^2 \sin \alpha}{(s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha)^2} = \\ &= \frac{g(s - R \cos \alpha)}{2 \cos \alpha} \frac{2s \cdot \sin \alpha + 2R \cos \alpha - s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha \sin \alpha}{(s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha)^2} = \frac{g(s - R \cos \alpha)}{2 \cos \alpha} \frac{s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha (2 + \sin \alpha)}{(s \cdot \sin \alpha + R \cos \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Подставив этот результат в (18) с учётом формулы (10), получаем

$$\frac{du}{ds} = \frac{\sin\alpha}{2u\theta} \left(1 - \frac{R}{s} \cos\alpha\right) \frac{\sin\alpha + \frac{R}{s} \cos\alpha (2 + \sin\alpha)}{\left(\sin\alpha + \frac{R}{s} \cos\alpha\right)^2}. \quad (19)$$

Итак, по формулам (17) и (19) можно, используя полученную в прямом эксперименте функцию распределения $f(s)$, получить экспериментальную функцию распределения относительной скорости частиц $f_2(u)$, а затем методом прямого сравнения сверить её с универсальной функцией Максвелла $f_0(u)$.

2. Описание экспериментальной установки

При запуске компьютерной программы, которая имитирует реальную установку, открывается окно «Распределение Максвелла». В центральной части окна приведены цель работы и краткое описание работы. Внизу окна – три управляющие кнопки:

- **Ход работы.** При нажатии этой кнопки открывается окно, в котором показан порядок выполнения работы.
- **Эксперимент.** При нажатии на эту кнопку открывается окно с экспериментальной установкой.
- **Завершение работы.** Эта кнопка вызывает выход из программы.

Окно «Эксперимент» показано на рисунке 3. Оно содержит окна визуализации и панели инструментов.

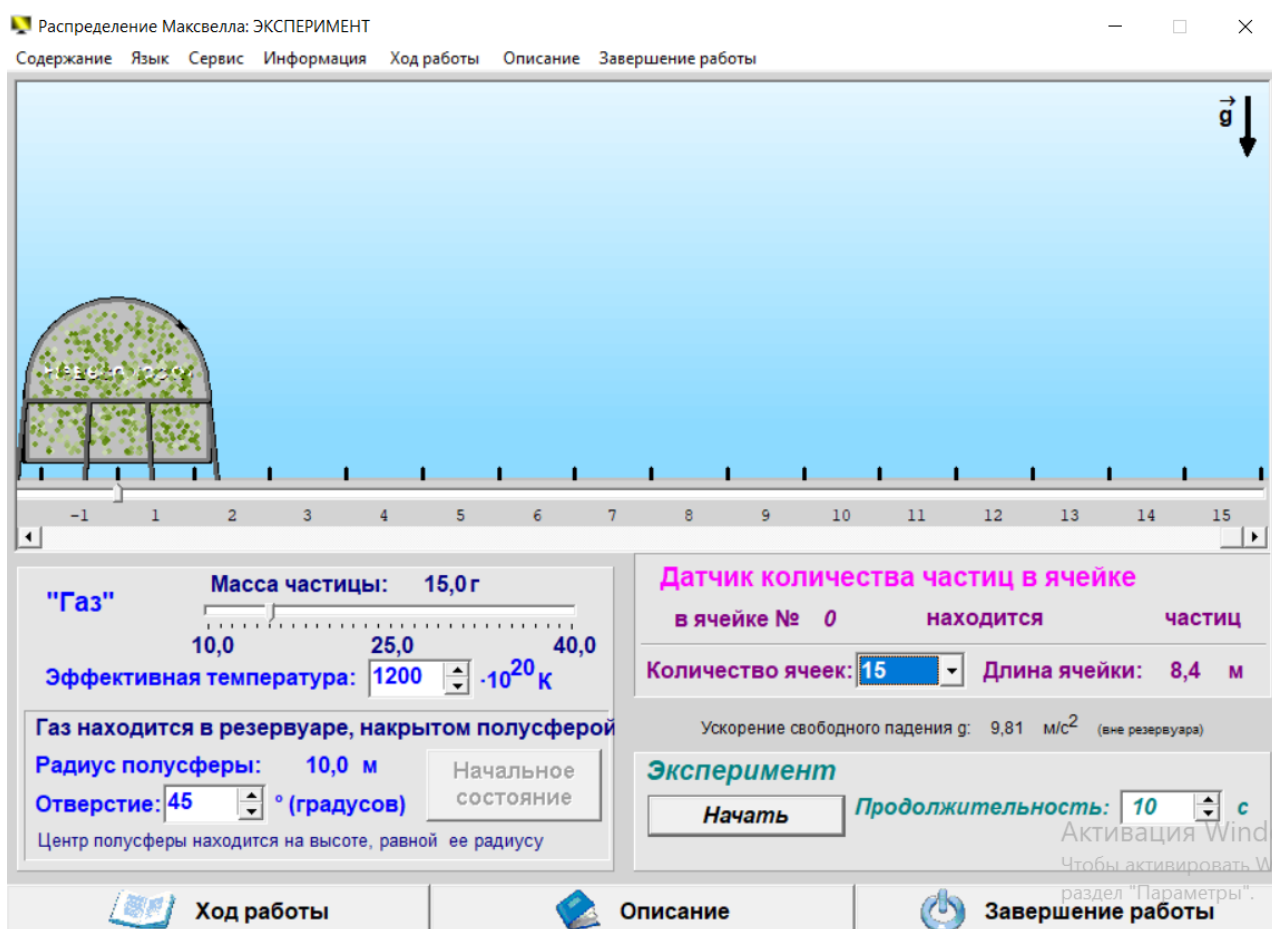


Рис. 3. Окно «Эксперимент»

- В окне визуализации на лабораторном столе расположен сосуд и ячейки с детекторами для регистрации частиц и подсчёта их количества. Число ячеек выбирает экспериментатор.
- Панели инструментов.

- **Газ.** Панель содержит три инструмента.

Инструмент **Масса частицы** позволяет выбирать массу частицы в интервале от 10 г до 40 г.

Инструмент **Эффективная температура** предназначен для выбора температуры газа в интервале от $2,5 \cdot 10^{22}$ К до $1,2 \cdot 10^{23}$ К. Это – нереально высокие температуры, но иначе невозможно заставить частицы массой нескольких десятков граммов двигаться так же, как двигаются молекулы в газе. При таких температурах никакое вещество уже не может существовать в виде конденсированных частиц, то есть в твёрдом или жидком состоянии. Так что не следует относиться к огромным температурам, которые можно назначать в данной лабораторной установке, как к реальности. Именно поэтому они и называются «эффективными».

Инструмент **Отверстие** предназначен для выбора угла вылета частиц из сосуда α от 0 до 180° .

- **Датчик количества частиц в ячейке.** В этой панели есть один инструмент – **Количество ячеек**. Экспериментатор может выбрать от 5 до 58 ячеек и проводить измерения функции распределения с желаемой подробностью. После выбора количества ячеек на панели появляется информация о длине ячейки, а под каждой ячейкой появляется её номер.

После окончания эксперимента можно узнать, сколько частиц попало в каждую ячейку. Для этого вдоль лабораторного стола расположена линейка с бегунком, и надо только последовательно устанавливать бегунок под каждой из ячеек, в результате чего на панели появляется информация о количестве частиц, зарегистрированных в ячейке.

- **Эксперимент.** На этой панели – один инструмент **Продолжительность**, он позволяет назначить время эксперимента от 10 с до 5 мин (300 с).
- **Кнопки управления экспериментом.** Этих кнопок две.

Одна из них находится на панели **Эксперимент**. Это – кнопка **Начать**. После нажатия на неё она превращается в кнопку **Прервать**, а после нажатия на кнопку **Прервать** она опять становится кнопкой **Начать**.

Вторая кнопка находится на панели **Газ**. Это – кнопка **Начальное состояние**. Она активируется только после нажатия на кнопку **Прервать**. Нажатие на кнопку **Начальное состояние** возвращает все частицы из ячеек обратно в сосуд. Если вы хотите продолжить прерван-

ный эксперимент, а не начать его заново, то кнопку **Начальное состояние** нажимать не надо.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Выберите по согласованию с преподавателем условия эксперимента:

- массу частицы m , эффективную температуру T , угол вылета частиц α ,
- количество и размер ячейки Δs , продолжительность эксперимента t .

Результаты запишите в таблицу 1.

3.2. Заполните остальные ячейки таблицы 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Масса частицы	m	г	
Радиус сосуда	R	м	
Эффективная температура	T	К	
Угол вылета частиц	α	град.	
		рад	
Вспомогательные величины	$\cos\alpha$		
	$R\cos\alpha$	м	
	$\sin\alpha$		
Длина ячейки	Δs	м	
Количество ячеек			
Продолжительность эксперимента	t	с	
Постоянная Больцмана	k_B	Дж/К	
Ускорение свободного падения	g	м/с ²	
Наиболее вероятная скорость (расчётное значение)	v_B	м/с	
Параметр дальности (расчётное значение)	θ	м	
Коэффициент в функции распределения $f(s)$	A	м ⁻¹	
Погрешность дальности полёта частицы s	$\Delta(s)$	м	

Часть 1. Исследование функции распределения дальности полёта частиц

3.3. Нажмите кнопку **Начать** и наблюдайте за экспериментом, при этом считайте частицы, которые улетели за пределы зоны эксперимента (области визуализации). После завершения эксперимента запишите количество частиц, которое вы насчитали (N_{out}), в предпоследнюю строку таблицы 2.

3.4. Запишите в таблицу 2 основные результаты эксперимента: количество частиц n , попавших в каждую ячейку. Для этого последовательно устанавливайте бегунок линейки на рабочем столе под каждой ячейкой.

Таблица 2

Функция распределения дальности полёта частицы s

Эксперимент							Теория	
Номер ячейки	s	n	$f(s)$	$\Delta(f(s))$	z	$\Delta(z)$	s	$f(s)$
	м	шт.	м ⁻¹	м ⁻¹			м	м ⁻¹
1								
2								
...								
...								
Число ч-ц вне зоны:								
Общее число частиц:								

3.5. Для повышения точности измерения функции распределения $f(s)$, то есть для «улучшения статистики» можно повторить эксперимент, причём неоднократно. Сначала нажмите кнопку **Начальное состояние**, а затем кнопку **Начать**. Снова наблюдайте за экспериментом и считайте частицы, улетающие за пределы зоны эксперимента. После завершения эксперимента *добавьте* результаты измерений в столбец « n » таблицы 2, а также поправьте значение продолжительности эксперимента в таблице 1.

3.6. Заполните остальные ячейки таблицы 2.

Значение s – это координата середины ячейки.

Экспериментальные значения функции распределения $f(s)$ определяйте по формуле (15) $f(s) = \frac{n(s)}{N\Delta s}$, где N – общее число частиц, равное сумме значений n по всем ячейкам, включая число частиц, улетающих за пределы области эксперимента N_{out} .

Значения вспомогательной переменной z определяйте по формуле $z = \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{f(s)}\right)$.

Теоретические значения функции распределения $f(s)$ определяйте по формуле (12) $f(s) = A\sqrt{s}e^{-\frac{s}{\theta}}$, где коэффициент A равен $A = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}$. Значение этого коэффициента вам надо рассчитать заранее и вписать его значение в таблицу 1. Значения s , для которых вы будете определять теоретические значения $f(s)$, выберите так, как вам понравится. Желательно только, чтобы теоретический диапазон был немного шире экспериментального.

3.7. Постройте два графика функций распределения: экспериментальной и теоретической – на *одном* поле. На теоретическом графике точки ставить не принято, поэтому для него рекомендуется тип диаграммы: «Точечная с гладкими кривыми». Тип диаграммы для экспериментального графика: «Точечная». На экспериментальном графике не забудьте указать планки погрешностей.

3.8. Прокомментируйте построенные вами графики.

- 3.9. Постройте график линеаризованной зависимости $z(s)$. Не забудьте нанести планки погрешностей. Прокомментируйте график.
- 3.10. Если эксперименты подтвердили, что зависимость $z(s)$ – линейная, определите параметры этой зависимости k и b , а по ним двумя способами определите параметр дальности θ – см. формулы (14). Для этого воспользуйтесь функцией ЛИНЕЙН и заполните таблицу 3.

Таблица 3

Измерение параметра дальности θ

Величина	k	b	$\theta = 1/k$	$\theta = 1,08e^{2/3b}$
Размерность				
Значение				
Абсолютная погрешность				
Относительная погрешность				

- 3.11. Прокомментируйте результаты определения параметра дальности θ .

Часть 2. Определение функции распределения скорости частиц

Никакие новые измерения вам проводить не надо, достаточно той информации, которую вы занесли в таблицу 2, то есть экспериментальные значения функции распределения $f(s)$.

- 3.12. Заполните таблицу 4.

Скорость частицы v определяйте по формуле (7).

Производную $\frac{du}{ds}$ вычисляйте по формуле (19).

Для вычисления экспериментального значения функции распределения относительной скорости $f_2(u)$ используйте формулу (17) $f_2(u) = \frac{f(s)}{\frac{du}{ds}}$.

Теоретические значения функции распределения $f_0(u)$ определяйте по формуле (3) $f_0(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}$. Значения u , для которых вы будете определять функцию $f_0(u)$, выберите так, как вам понравится. Желательно только, чтобы теоретический диапазон был немного шире экспериментального.

Таблица 4

Функция распределения относительной скорости

[illegible]

- 3.13. Постройте два графика функций распределения: экспериментальной $f_2(u)$ и теоретической $f_0(u)$ – на *одном* поле. Для теоретического графика используйте тип диаграммы: «Точечная с гладкими кривыми», для экспериментального графика – тип «Точечная». На экспериментальном графике не забудьте указать планки погрешностей (достаточно вертикальных).
- 3.14. Прокомментируйте графики.
- 3.15. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

4. Оценка погрешностей измерений

4.1. Погрешности прямых измерений.

Прямые измерения – это число частиц в ячейке n и дальность полёта частицы s . Число частиц определяет счётчик практически без ошибок. Дальность полёта определяется положением ячейки, в которую попала частица, то есть с точностью до размера ячейки. Однако считать, что $\Delta(s)$ – это размер ячейки, неправильно. Значение s нужно для того, чтобы определить точку, в которой измерена функция распределения $f(s)$, и наиболее естественно считать эту точку центром ячейки. Тогда *максимальная* погрешность измерения дальности s – это половина размера ячейки (50 %). Предлагается оценить $\Delta(s)$ как 20 % от размера ячейки, то есть $\Delta(s) = \Delta s/5$.

4.2. Погрешность измерения функции распределения дальности $f(s)$.

Значение $f(s)$ определяется по формуле (15) $f(s) = \frac{n(s)}{N\Delta s}$. Главный источник ошибки в этой формуле – то, что число частиц n является случайной величиной. Об этом достаточно подробно написано в разделе 1.3, та же указано, что погрешность функции распределения можно оценить по формулам

$$\varepsilon(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \Delta(f) = \frac{f(s)}{\sqrt{n}}.$$

4.3. Погрешность измерения вспомогательной переменной z .

По определению, $z = \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{f(s)}\right)$. Тогда, в соответствии с общим правилом,

$$\Delta(z) = \left| \frac{dz}{ds} \right| \Delta(s).$$

После вычисления производной и упрощения результата получается:

$$\Delta(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \varepsilon(s).$$

При больших значениях s , для которых имеет смысл линеаризация функции распределения $f(s)$ и использование вспомогательной переменной z , относительная погрешность $\varepsilon(s)$ значительно меньше, чем первое слагаемое $\frac{1}{\sqrt{n}}$, так что вполне достаточно для оценки погрешности $\Delta(z)$ пользоваться формулой

$$\Delta(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

4.4. Погрешность измерения функции распределения относительной скорости частицы $f_2(u)$.

Для определения $f_2(u)$ используется формула (17) $f_2(u) = \frac{f(s)}{\frac{du}{ds}}$. Основным источником ошибки в этой формуле является значение функции распределения дальности $f(s)$, поэтому можно пренебречь погрешностью производной $\frac{du}{ds}$ и оценивать погрешность $\Delta(f_2)$ так:

$$\Delta(f_2) = \frac{\Delta(f)}{\frac{du}{ds}}.$$

4.5. Погрешность измерения параметра дальности θ .

Параметр дальности измеряется двумя способами: используя формулы (14)

$$\theta = \frac{1}{k}, \quad \theta = \left(\frac{2e^b}{\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} = 1,084e^{2/3b}.$$

Если используется первая из этих формул, то

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon(k), \quad \Delta(\theta) = \theta \varepsilon(\theta).$$

Если используется вторая формула, то

$$\Delta(\theta) = \frac{d\theta}{db} \Delta(b) = \frac{2}{3} \theta \Delta(b).$$

5. Контрольные вопросы

- 5.1. Что означает термин «функция распределения»?
- 5.2. Какие физические величины описываются распределением Максвелла?
- 5.3. Что такое «наиболее вероятная скорость» и какой формулой она определяется?
- 5.4. Как зависит функция распределения Максвелла для модуля скорости молекул от температуры газа и от массы каждой молекулы?
- 5.5. Что такое «относительная скорость» и в чём ценность её использования?
- 5.6. Как связана дальность полёта молекулы, вылетевшей из сосуда с равновесным идеальным газом, со скоростью вылета?
- 5.7. Что такое «параметр дальности» и какой у него физический смысл?
- 5.8. Какую линейную зависимость предлагается проверить в данной лабораторной работе?
- 5.9. Как предлагается в данной лабораторной работе измерять функцию распределения дальности полёта частицы?
- 5.10. Что такое «ячейка» в данной лабораторной установке? Что входит в состав ячейки?

6. Рекомендуемая литература

- 6.1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 2.– М.: Наука, 1977–1985 г.
- 6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989.
- 6.3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., Высшая школа, 2003.
- 6.4. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск, Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
- 6.5. Рипп А.Г. Обработка измерений: методическое пособие. – Севастополь: СНУЯЭП, 2012.

У ч е б н о е и з д а н и е

Рипп Александр Гешелевич
Матузаева Ольга Вячеславовна

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 228/2020. Объем 1,25 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»