

УДК 539.3

ВОЛНЫ ОБЖАТИЯ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Пухлий В.А.

На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получены уравнения движения трехслойных пологих оболочек переменной жесткости с изотропными внешними слоями и жестким трансверсально-изотропным заполнителем, сжимаемом в поперечном направлении.

Как известно, в многослойных конструкциях с жестким несжимаемым заполнителем уравнения движения, учитывающие поперечные сдвиги и инерцию вращения, описывают распространение волн сжатия – растяжения и изгиба – сдвига [1]. Изучению распространения волн в морской среде посвящена монография Л.Бреховских [2], в которой слои воды рассматриваются как несжимаемые. Учет сжимаемости заполнителя (одного из слоев) приводит к появлению нового типа волн – волн обжатия.

Впервые на это обстоятельство было указано на V-м Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике [3], позже – в монографии В.Л.Бердичевского [4]. При учете обжатия одного из слоев в многослойных конструкциях возникают высокочастотные колебания, при которых несущие слои колеблются в противофазе. Данный эффект может привести к нарушению адгезии, т.е. к расслоению многослойной конструкции.

В [5] получены уравнения равновесия в перемещениях для трехслойных оболочек переменной жесткости с жестким сжимаемым заполнителем. Здесь получены уравнения движения трехслойных оболочек переменной жесткости с жестким сжимаемым заполнителем.

1. Уравнения движения

При выводе уравнений движения принимаются следующие гипотезы: внешние слои представляют собой тонкие упругие оболочки, для которых справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява; срединная поверхность заполнителя совпадает с плоскостью OX_1X_2 ; рассматривается общий для всех слоев приведенный коэффициент Пуассона; коэффициент Пуассона материала заполнителя, характеризующий сокращение размеров в плоскости изотропии при растяжении в поперечном направлении, принимается равным нулю.

Несущий слой, расположенный со стороны внешней нормали, назовем первым, со стороны внутренней – вторым слоем, а заполнитель – третьим (рисунок 1). Обозначим h_k – толщину k -того слоя; u_i^k, w^k – перемещения точек k -того слоя в направлении осей x_1, x_2, z ; E_k – модуль упругости k -того слоя; G – модуль поперечного сдвига заполнителя; E_z – модуль упругости заполнителя в поперечном направлении; $2\sigma\alpha_i$ –

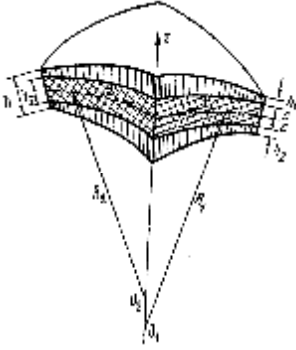


Рисунок 1 – Элемент трехслойной оболочки переменной жесткости

абсолютный сдвиг поверхностей контакта заполнителя с внешними слоями; k_{ij} – кривизны и кручение координатных линий оболочки ($i, j = 1, 2$).

Кроме того, имеем:

$$h = \sum_{k=1}^3 h_k; \quad h_3 = 2c; \quad t_k = h_k h^{-1};$$

$$E = \sum_{k=1}^3 E_k t_k; \quad \gamma_k = E^{-1} E_k t_k.$$

Нормальное перемещение в заполнителе и тангенциальные перемещения в слоях запишутся в виде

$$w^3 = \frac{w^1 + w^2}{2} + \frac{z}{c} \frac{w^1 - w^2}{2} = w + \frac{z}{c} v;$$

$$u_i^1 = u_i + c\alpha_i - (z - c)w_i - \left(z - \frac{1}{2}c\right)v_i \quad (c \leq z \leq c +$$

$$u_i^2 = u_i - c\alpha_i - (z + c)w_i + \left(z + \frac{1}{2}c\right)v_i \quad (-c - h_2 \leq$$

$$u_i^3 = u_i + z\alpha_i - \frac{1}{2}z^2 c^{-1}v_i \quad (-c \leq z \leq$$

(1)

Верхний индекс характеризует номер слоя, нижний индекс i , следующий после запятой, означает частное дифференцирование по координатам x_i . Компоненты деформации произвольного волокна в заполнителе, находящемся на расстоянии z от срединной поверхности, определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^3 = \frac{1}{2} (u_{i,j}^3 + u_{j,i}^3 + 2k_{ij} w^3).$$

Учитывая (1), получаем:

$$\varepsilon_{ij}^1 = e_{ij} + k_{ij} v + c\alpha_{ij} - (z - c)w_{,ij} - \left(z - \frac{c}{2}\right)v_{,ij};$$

$$\varepsilon_{ij}^2 = e_{ij} - k_{ij} v - c\alpha_{ij} - (z + c)w_{,ij} + \left(z + \frac{c}{2}\right)v_{,ij};$$

(3)

$$\varepsilon_{ij}^3 = e_{ij} + zc^{-1}k_{ij} v + z\alpha_{ij} - \frac{1}{2}z^2 c^{-1}v_{,ij};$$

$$\varepsilon_{iz}^3 = \alpha_i + w_{,i}; \quad \varepsilon_{zz}^3 = c^{-1}v.$$

Здесь e_{ij} – компоненты деформации срединной поверхности заполнителя

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + 2k_{ij}w); \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}).$$

В соответствии с законом Гука определим напряжения в слоях

$$\sigma_{ij}^k = \frac{E_k}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \varepsilon_{ij}^k + \delta_{ij} \nu (\varepsilon_{11}^k + \varepsilon_{22}^k) \right]; \quad \sigma_{iz}^3 = G(\alpha_i + w_{,i}); \quad \sigma_{zz}^3 = E_z c^{-1} \nu, \quad (4)$$

где δ_{ij} – символ Кронеккера.

Уравнения движения трехслойных оболочек переменной жесткости с сжимаемым заполнителем получим на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta A_1 + \delta A_2) dt = 0. \quad (5)$$

Здесь δK и $\delta \Pi$ – вариации кинетической и потенциальной энергий оболочки; δA_1 – вариация работы внешней поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности заполнителя; δA_2 – вариация работы внешних контурных усилий.

В общем случае для кинетической энергии имеем:

$$K = \iint_{\Omega} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho \dot{w}^2}{2} dz d\Omega. \quad (6)$$

Здесь, как и в дальнейшем, точка означает производную по времени.

Как известно, кинетическая энергия оболочки обусловливается в общем случае нормальными и тангенциальными перемещениями. Запишем кинетическую энергию оболочки, связанную с нормальными перемещениями. Выражения для прогибов в несущих слоях имеют вид:

$$w^1 = w + v; \quad w^2 = w - v; \quad w^3 = w + \frac{z}{c} v.$$

Тогда имеем:

$$K = \iint_{\Omega} \left[\int_c^{c+h_1} \frac{\rho_1 \left(\dot{w} + \dot{v} \right)^2}{2} dz + \int_{-c}^c \frac{\rho_3 \left(\dot{w} + \frac{z}{c} \dot{v} \right)^2}{2} dz + \int_{-c-h_2}^{-c} \frac{\rho_2 \left(\dot{w} - \dot{v} \right)^2}{2} dz \right] d\Omega. \quad (7)$$

Вариация кинетической энергии:

$$\delta K = \iint_{\Omega} \left[\int_c^{c+h_1} (\psi + \psi) \delta(\psi + \psi) \rho_1 dz + \int_{-c}^c \left(\psi + \frac{z}{c} \psi \right) \delta \left(\psi + \frac{z}{c} \psi \right) \rho_3 dz + \right. \\ \left. \int_{-c-h_2}^{-c} (\psi - \psi) \delta(\psi - \psi) \rho_2 dz \right] d\Omega. \quad (8)$$

После некоторых преобразований, с учётом (8) найдем:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = - \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left\{ \left[\sum_{k=1}^3 \rho_k h_k \psi + (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) \psi \right] \delta w + [(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) \psi + \right. \\ \left. + \left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \frac{1}{3} \rho_3 h_3 \right) \psi \right] \delta v \right\} d\Omega dt. \quad (9)$$

Перейдем к рассмотрению кинетической энергии системы, связанной с тангенциальными перемещениями. Учитывая выражение (1), запишем кинетическую энергию для первого слоя:

$$K_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho_1 \int_c^{c+h_1} \left[\psi_i + c \psi_{,i} - (z-c) \psi_{,i} - \left(z - \frac{1}{2} c \right) \psi_{,i} \right]^2 dz d\Omega. \quad (10)$$

С учетом (10) после ряда преобразований, получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K_1 dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left\{ \rho_1 h_1 (\psi_i \delta u_i + \psi_{,i} c \delta \alpha_i + c \psi_{,i} \delta u_i + c^2 \psi_{,i} \delta \alpha_i) - \right. \\ - \frac{\rho_1 h_1^2}{2} (\psi_{,i} \delta u_i + c \psi_{,i} \delta \alpha_i - \psi_{,i,i} \delta w - c \psi_{,i,i} \delta w) - \frac{\rho_1 h_1^3}{3} \psi_{,ii} \delta w - \\ - \frac{\rho_1 h_1 (h_1 + c)}{2} [\psi_{,i} \delta u_i + c \psi_{,i} \delta \alpha_i - (\psi_{,i,i} + c \psi_{,i,i}) \delta v] - \\ - \rho_1 \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{c h_1^2}{4} \right) (\psi_{,ii} \delta v + \psi_{,ii} \delta w) - \frac{h_1}{3} \left(h_1^2 + \frac{3}{2} h_1 c + \frac{3}{4} c^2 \right) \psi_{,ii} \delta v \Big\} dx_1 dx_2 dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{l_1} \left\{ \rho_1 \left[\left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{c h_1^2}{4} \right) \psi_{,2} + \frac{\rho_1 h_1^3}{3} \psi_{,2} - \frac{\rho_1 h_1^2}{2} (\psi_{,i} + c \psi_{,i}) \right] \delta w + \left[\rho_1 \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{c h_1^2}{4} \right) \psi_{,2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_1}{3} \left(h_1^2 + \frac{3}{2} h_1 c + \frac{3}{4} c^2 \right) \psi_{,2} - \frac{\rho_1 h_1 (h_1 + c)}{2} (\psi_{,i} + c \psi_{,i}) \right] \delta v \right\} dt dx_1 \Big|_0^{l_2} + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{l_2} \left\{ \left[\rho_1 \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{c h_1^2}{4} \right) \psi_{,1} + \frac{\rho_1 h_1^3}{3} \psi_{,1} - \frac{\rho_1 h_1^2}{2} (\psi_{,i} + c \psi_{,i}) \right] \delta w + \left[\rho_1 \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{c h_1^2}{4} \right) \psi_{,1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_1}{3} \left(h_1^2 + \frac{3}{2} h_1 c + \frac{3}{4} c^2 \right) \psi_{,1} - \frac{\rho_1 h_1 (h_1 + c)}{2} (\psi_{,i} + c \psi_{,i}) \right] \delta v \right\} dt dx_2 \Big|_0^{l_1}. \quad (11)$$

Здесь l_i - линейные размеры оболочки в направлении x_i ($i=1, 2$).

Аналогичный подход позволяет получить выражения для вариации кинетической энергии второго слоя и для заполнителя.

Дальше вычисляется вариация потенциальной энергии оболочки и вариация работы поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности заполнителя.

После ряда преобразований получены уравнения движения трехслойных оболочек переменной жесткости с сжимаемым заполнителем в усилиях. В связи с ограничением объема статьи уравнения здесь не приводятся.

2. Точное решение задачи о собственных колебаниях трехслойной панели

После дальнейших преобразований получаем разрешающую систему шести уравнений 16-го порядка относительно функций $u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2, w$ и v , описывающую движение трехслойной оболочки переменной жесткости с жестким сжимаемым заполнителем. В общем случае уравнения имеют весьма сложную структуру и ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

С целью выявления некоторых эффектов, характерных для оболочки с сжимаемым заполнителем, рассмотрим задачу о собственных колебаниях трехслойной цилиндрической панели постоянной жесткости с жестким сжимаемым заполнителем, шарнирно опертой по контуру. Для данного случая уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} & \left(2B_{11} + B_1^*\right) \left[u_{1,11} + \frac{1-v}{2} u_{1,22} + \frac{1+v}{2} u_{2,12} + k_{11} w_{,1} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left(B_{11} h + \frac{B_1^* h_3}{6} \right) (v_{,111} + v_{,122}) - \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k \mathbb{U}_1 - c(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) \mathbb{U}_1 - \end{aligned} \quad (12)$$

$$- \frac{1}{2} (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2) \mathbb{U}_{,1} - \frac{1}{2} \left[\rho_1 h_1 (h_1 + c) + \rho_2 h_2 (h_2 + c) + \frac{\rho_3 h_3^2}{6} \right] \mathbb{U}_{,1} = 0;$$

$$\begin{aligned} & \left(2B_{11} + B_1^*\right) \left[\frac{1+v}{2} u_{1,12} + \frac{1-v}{2} u_{2,11} + u_{2,22} + v k_{11} w_{,1} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left(B_{11} h + \frac{B_1^* h_3}{6} \right) (v_{,112} + v_{,222}) - \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k \mathbb{U}_2 - c(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) \mathbb{U}_2 - \end{aligned} \quad (13)$$

$$- \frac{1}{2} (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2) \mathbb{U}_{,2} - \frac{1}{2} \left[\rho_1 h_1 (h_1 + c) + \rho_2 h_2 (h_2 + c) + \frac{\rho_3 h_3^2}{6} \right] \mathbb{U}_{,2} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_3^2}{4} \left(B_{11} + \frac{B_1^*}{6} \right) [2\alpha_{1,11} - (1-\nu)\alpha_{1,22} + (1+\nu)\alpha_{2,12}] - Gh_3(\alpha_1 + w_{,1}) - \frac{B_{11}h_1h_3}{2} \times \\
& \times (w_{,111} + w_{,122}) + k_{11}h_3 \left(B_{11} + \frac{B_1^*}{6} \right) v_{,1} - \frac{h_3}{2} (\rho_1h_1 - \rho_2h_2) \mathbb{W}_1 - \frac{h_3^2}{4} \left(\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \frac{1}{3}\rho_3h_3 \right) \times \\
& \times \mathbb{W}_1 - \frac{h_3}{4} (\rho_1h_1^2 + \rho_2h_2^2) \mathbb{W}_1 - \frac{h_3}{4} [\rho_1h_1(h_1 + c) - \rho_2h_2(h_2 + c)] \mathbb{W}_1 = 0; \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_3^2}{4} \left(B_{11} + \frac{B_1^*}{6} \right) [(1+\nu)\alpha_{1,12} + (1-\nu)\alpha_{2,11} + 2\alpha_{2,22}] - Gh_3(\alpha_2 + w_{,2}) - \frac{B_{11}h_1h_3}{2} \times \\
& \times (w_{,112} + w_{,222}) + \nu k_{11}h_3 \left(B_{11} + \frac{B_1^*}{6} \right) v_{,2} - \frac{h_3}{2} (\rho_1h_1 - \rho_2h_2) \mathbb{W}_2 - \frac{h_3^2}{4} \left(\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \frac{1}{3}\rho_3h_3 \right) \times \\
& \times \mathbb{W}_2 - \frac{h_3}{4} (\rho_1h_1^2 + \rho_2h_2^2) \mathbb{W}_2 - \frac{h_3}{4} [\rho_1h_1(h_1 + c) - \rho_2h_2(h_2 + c)] \mathbb{W}_2 = 0; \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{11} \left(B_1^* - 2B_{11} \right) (u_{1,1} - \nu u_{2,2}) + B_{11} \frac{h_1h_3}{2} [(\nabla^2\alpha_1)_{,1} + (\nabla^2\alpha_2)_{,2}] + Gh_3\alpha_{1,1} + Gh_3\alpha_{2,2} - \\
& - 8D_{11}\nabla^2\nabla^2w + Gh_3(w_{,11} + w_{,22}) - k_{11}^2 \left(B_1^* + 2B_{11} \right) w + k_{11} \left(B_{11}h_1 + \frac{B_{11}h}{2} + \frac{B_1^*h_3}{12} \right) \times \\
& \times (v_{,11} + \nu v_{,22}) - \frac{1}{2} (\rho_1h_1^2 - \rho_2h_2^2) (\mathbb{W}_{1,1} + \mathbb{W}_{2,2}) - \frac{h_3}{4} (\rho_1h_1^2 + \rho_2h_2^2) (\mathbb{W}_{1,1} + \mathbb{W}_{2,2}) - \\
& - \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k \mathbb{W} + \frac{1}{3} (\rho_1h_1^3 + \rho_2h_2^3) (\mathbb{W}_{,11} + \mathbb{W}_{,22}) - (\rho_1h_1 - \rho_2h_2) \mathbb{W} + \\
& + \left[\rho_1 \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{ch_1^2}{4} \right) - \rho_2 \left(\frac{h_2^3}{3} + \frac{ch_2^2}{4} \right) \right] (\mathbb{W}_{,11} + \mathbb{W}_{,22}) = 0; \\
& (6D_{11}hh_1^{-2} + D_1^*h_3^{-1}) [(\nabla^2u_1)_{,1} + (\nabla^2u_2)_{,2}] - 12k_{11}h_1^{-2}h_3D_{11}(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2}) + k_{11} \times \\
& \times (6h_1^{-2}hD_{11} + D_1^*h_3^{-1})(w_{,11} + \nu w_{,22}) - \left[D_{11} \left(\frac{3h_3 + 8h_1}{h_1} + \frac{3h_3h}{2h_1^2} \right) + \frac{3}{20}D_1^* \right] (v_{,1122} + \nu_{,2222}) - \\
& - 2 \left[D_{11} \left(\frac{(2\nu-1)(3h_3 + 8h_1)}{h_1} - \frac{3}{20} \frac{h_3h}{h_1^2} \right) - \frac{3}{20}D_1^* \right] v_{,1122} - 4[6k_{11}^2h_1^{-2}D_{11} + h_3^{-1}E_z] \nu + \\
& + \frac{1}{2} \left[\rho_1h_1(\rho_1 + c) + \rho_2h_2(h_2 + c) - \frac{1}{6}\rho_3h_3^2 \right] (\mathbb{W}_{1,1} + u_{2,2}) + \frac{h_3}{4} [\rho_1h_1(h_1 + c) - \rho_2h_2(h_2 + c)] \times \\
& \times (\mathbb{W}_{1,1} + \mathbb{W}_{2,2}) - (\rho_1h_1 - \rho_2h_2) \mathbb{W} - \left[\rho_1 \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{ch_1^2}{4} \right) - \rho_2 \left(\frac{h_2^3}{3} + \frac{ch_2^2}{4} \right) \right] (\mathbb{W}_{,11} + \mathbb{W}_{,22}) -
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \frac{1}{3} \rho_3 h_3 \right) \left[\frac{\rho_1 h_1}{3} \left(h_1^2 + \frac{3}{2} h_1 c + \frac{3}{4} c^2 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\rho_2 h_2}{3} \left(h_2^2 + \frac{3}{2} h_2 c + \frac{3}{4} c^2 \right) - \frac{1}{10} \rho_3 c^3 \right] (\mathbb{K}_{11} + \mathbb{K}_{22}) = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1^2} = B_{22} = \frac{E_2 h_2}{1 - \nu_2^2}; \quad B_1^* = \frac{E_1 h_3}{1 - \nu_3^2}; \\
D_{11} &= \frac{E_1 h_1^3}{12(1 - \nu_1^2)} = D_{22} = \frac{E_2 h_2^3}{12(1 - \nu_2^2)}; \quad D_1^* = \frac{E_1 h_3^3}{12(1 - \nu_3^2)}
\end{aligned}$$

Граничные условия по контуру панели соответствуют свободно опертому краю. Граничные условия на краях панели $x = 0$, $x = l$ (имеется диафрагма, препятствующая относительному сдвигу несущих слоев вдоль краев оболочки) записывается в виде:

$$N_{11} = e_{22} = w = v = \alpha_2 = H_{11} = M_{11} = L_{11} = 0, \tag{18}$$

или в функциях перемещений:

$$u_{1,1} = u_{2,2} = \alpha_{1,1} = \alpha_2 = w = w_{,11} = v = v_{,11} = 0. \tag{19}$$

Аналогично для краев панели $y = 0$, $y = b$ получим

$$N_{22} = e_{11} = w = v = \alpha_1 = H_{22} = M_{22} = L_{22} = 0, \tag{20}$$

или в функциях перемещений:

$$u_{1,1} = u_{2,2} = \alpha_1 = \alpha_{2,2} = w = w_{,22} = v = v_{,22} = 0. \tag{21}$$

Краевая задача, описываемая системой уравнений (12)-(17) и граничными условиями (19) и (21) допускает точное решение, которое записывается в виде:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_1^0 e^{i\omega t} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}; & u_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_2^0 e^{i\omega t} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\
\alpha_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1^0 e^{i\omega t} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}; & \alpha_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_2^0 e^{i\omega t} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\
w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_0 e^{i\omega t} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}; & v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_0 e^{i\omega t} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Подставляя решение (26) в исходную систему уравнений в перемещениях, приходим к проблеме собственных значений для векторного уравнения.

$$(A - B\lambda) \mathbf{\dot{U}} = 0,$$

где вектор $\mathbf{\dot{U}}$ - вектор-столбец, матрицы A и B - константы.

Собственные значения уравнения (27) находим из условия:

$$\det(B^{-1}A - E\lambda) = 0, \tag{23}$$

где E – единичная матрица.

3. Анализ численных результатов

Исследуем собственные частоты трехслойной квадратной панели. В исходных уравнениях движения учитывались инерциальные члены, обусловленные только нормальными перемещениями – w и v .

Исходные данные для расчета: $h_1 = h_2 = 0,3$ см; $h_3 = 6$ см; $l = b = 200$ см; $h/R = 0,06$. Материал несущих слоев – дюралюминий, материал заполнителя – пенополиуретан

В таблице 1 приводятся собственные частоты ω_1 и ω_2 при различных значениях $m, n = 1$ при $E_z = 2000$ кгс/см² и $G = 10^{10}$ кгс/см², т.е. для панели учитывается обжатие и не учитывается сдвиг. В таблице 2 приводятся собственные частоты при $E_z = 10^{10}$ кгс/см² и $G = 770$ кгс/см², т.е. не учитываются обжатие заполнителя и учитывается сдвиг.

Анализируя данные таблиц, можно сделать следующие выводы. Собственные частоты, связанные с обжатием заполнителя ω_1 на два-три порядка выше собственных частот ω_2 , обусловленных общим изгибом панели (таблица 1). Если обжатие заполнителя практически не учитывается (данные таблиц 2 и 3), частоты ω_1 не претерпевают изменений, частоты же ω_2 , обусловленные общим изгибом, претерпевают существенные изменения.

Таким образом, учет обжатия заполнителя связан с изучением высокочастотных колебаний и им соответствующих волнам обжатия.

Таблица 1 – Собственные частоты (Гц) для квадратной трехслойной панели ($E_z = 2000$ кгс/см²; $G = 10^{10}$ кгс/см²)

m	$\omega_1 \cdot 10^{-6}$	$\omega_2 \cdot 10^{-4}$	m	$\omega_1 \cdot 10^{-6}$	$\omega_2 \cdot 10^{-4}$
1	0,3981	0,3548	7	2,787	0,3554
2	0,7962	0,3554	8	3,185	0,3943
3	1,194	0,3554	9	3,583	0,3943
4	1,592	0,3588	10	3,981	0,3943
5	1,990	0,3588	11	4,379	0,3943
6	2,389	0,3588	12	4,777	0,3943

Таблица 2 – Собственные частоты (Гц) для квадратной трехслойной панели ($E_z = 10^{10}$ кгс/см² $G = 770$ кгс/см²)

m	$\omega_1 \cdot 10^{-6}$	$\omega_2 \cdot 10^{-4}$	m	$\omega_1 \cdot 10^{-6}$	$\omega_2 \cdot 10^{-4}$
1	7,924	0,1972	7	7,924	0,2788
2	7,924	0,2788	8	7,924	0,2788
3	7,924	0,1972	9	7,924	0,2788
4	7,924	0,1972	10	7,924	0,2788
5	7,924	0,1972	11	7,924	0,2788
6	7,924	0,1972	12	7,924	0,2788

Таблица 3 – Собственные частоты (Гц) для квадратной трехслойной панели ($E_z = 10^{10}$ кгс/см² $G = 10^{10}$ кгс/см²)

m	$\omega_1 \cdot 10^{-6}$	$\omega_2 \cdot 10^{-4}$	m	$\omega_1 \cdot 10^{-6}$	$\omega_2 \cdot 10^{-4}$
1	7,924	39,81	7	7,924	278,7
2	7,924	79,62	8	7,924	318,5
3	7,924	119,4	9	7,924	358,3
4	7,924	159,2	10	7,924	398,1
5	7,924	199,0	11	7,924	437,9
6	7,924	238,9	12	7,924	477,7

Библиографический список

1. Григолюк Э.И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек /

Э.И.Григолюк, П.П.Чулков. — М.: Машиностроение, 1973. — 171 с.

2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М.Бреховских. — М.: Наука 1973. — 344 с.

3. Григолюк Э.И. Динамика трехслойных оболочек переменной жесткости с жестким сжимаемым заполнителем / Э.И.Григолюк, В.А.Пухлий, П.П.Чулков — Тез. докл. на V-м Всесоюз. съезде по теорет. и прикладной механике. — Алма-Ата, 1981. — С. 124 – 125.

4. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В.Л.Бердичевский. — М.: Наука, 1983. — 448 с.

5. Пухлий В.А. К расчету трехслойных оболочек переменной

жесткости с сжимаемым заполнителем / В.А.Пухлий // Прикладная механика. — 1982. — Т.18. — №2. — С. 54 – 59.

Поступила в редакцию 20.01.2001 г.