

УДК 539.3

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ДЕФЕКТОМ СТРУКТУРЫ

Торлин В. Н., Рогозина Т. А.

Получено аналитическое решение трехмерной связанной задачи термоупругости для композита, структура которого и возможные дефекты заданы тригонометрическими полиномами высокого порядка. Параметры температурного поля, возникающего в результате деформации композита, используется для диагностики дефектов его структуры.

Деформационный нагрев композитов исследовали Победря Б. Е. [1], Хорошун Л. П. [2] и др., при этом преследовалась цель исследовать влияние возникающих температурных полей на термopочность конструкций. Такой подход требует решения прямой задачи.

Для исследования влияния дефекта композита на характер деформационного температурного поля использовался метод обратных задач [3], что позволило по параметрам температурных полей идентифицировать форму дефектов, вызывающих рассеяние энергии деформации. Решение задачи было получено в два этапа. На первом этапе интегрируется система уравнений связанной задачи термоупругости [2]:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \bar{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(T - T_0) - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} &= L_1(\mu, \lambda, \alpha_T, \rho, \bar{u}), \\ \nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_0}{\lambda_a} \text{div} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= L_2(\mu, \lambda, \alpha_T, \rho, \bar{u}). \end{aligned} \quad (1)$$

Начальные и граничные условия для трехмерного композита в декартовых координатах имеют вид (рисунок 1).

$$\sigma_z \Big|_{z=-\frac{h}{2}} = P(x, y), \quad \sigma_z \Big|_{z=\frac{h}{2}} = -q_z(x, y), \quad \tau_{xz} \Big|_{z=-\frac{h}{2}} = 0,$$

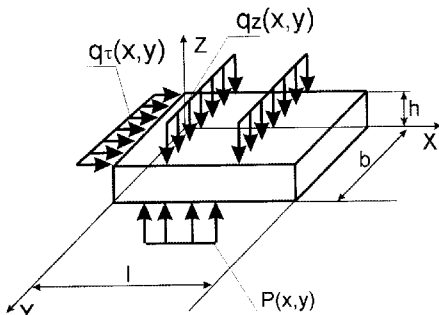


Рисунок 1 - Граничные условия в декартовых координатах

$$\tau_{xz}\big|_{z=\frac{h}{2}} = -q_\tau(x, y), \quad T_l\big|_{t=0} = T_0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \sigma_y &= \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \sigma_z &= \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

здесь φ — функция Галеркина Б. Г., T_λ — решение модифицированного уравнения Пуассона

Все свойства композита представлены в (1), (2) тригонометрическими полиномами:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= \lambda_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad \mu(x, y) = \mu_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b} \\ \alpha_T(x, y) &= \alpha_{T_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad \rho(x, y) = \rho_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (4)$$

($i = j = 1, 3, 5, \dots$)

Операторы L_1 и L_2 представляют собой сумму известных дифференциальных соотношений условий совместности деформаций и теплопроводности над функциями (4).

Для решения задачи (1) - (4) был разработан специальный итерационный метод, позволяющий получить решения в аналитическом виде, в которые входят произвольные коэффициенты $k_{ij}, p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}$, что

позволяет решать обратную задачу: варьированием этих коэффициентов определять конфигурацию искомых температурных полей.

Метод решения задачи заключается в следующем.

В нулевом приближении $v = 0$, когда в правых частях уравнений (1) стоят нули, переменные разделяются и решением задачи будет следующая функция Галеркина Б. Г.:

$$\varphi = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[\begin{aligned} &A_{mn} sh \left(\pi z \sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{4n^2}{b^2}} \right) + \\ &+ B_{mn} ch \left(\pi z \sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{4n^2}{b^2}} \right) + \\ &+ C_{mn} z sh \left(\pi z \sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{4n^2}{b^2}} \right) + \\ &+ D_{mn} z ch \left(\pi z \sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{4n^2}{b^2}} \right) \end{aligned} \right] E_{mn} \exp(-ak^2 t) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{2n\pi y}{b}. \quad (5)$$

Неизвестные постоянные интегрирования $A_{MN}, B_{MN}, C_{MN}, D_{MN}, E_{MN}$ определяем из граничных и начального условий. При $v = 1$ (в первом приближении) выражение (5) с найденными из граничных условий постоянными интегрирования подставляем в L_1 и L_2 и решаем задачу в первом приближении с нулевыми граничными условиями. Так же поступаем в последующих приближениях. В результате находим функцию $u(x, y, z, t)$ как сумму

$$u(x, y, z, t) = u_0 + u_1 + u_2 \dots, \quad (6)$$

через которую находим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Далее, на исследуемой поверхности тела (например, $y = \frac{b}{2}$) определяем T :

$$T(x, y, z, t) = T_0 \exp \left[-\frac{3\lambda + 2\mu}{c_e} \alpha_T (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]. \quad (8)$$

В выражении (8) произвольная структура композита представлена полиномами (4). В случае, когда $k_{ij}, p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}$ константы, получим известное решение для однородного тела, рисунок 2, а, где 1, 2, 3 — изотерма $T = 376K$ при $t = 5$ с, 20с, 35 с соответственно. На рисунке 2, б

показано влияние дефекта, помещенного в начало координат. Кривые 1–3 показывают движение изотермы $T = 382\text{K}$ во времени через 15 с. На

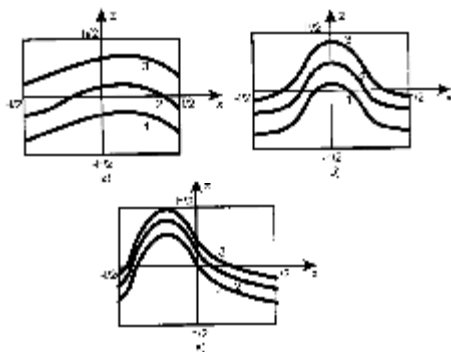


Рисунок 2 – Изотермы на поверхности $y = \frac{b}{2}$:

а) дефектов нет; б) дефект в начале координат;

в) дефект смещен в точку $x = -\frac{l}{4}$

рисунке 2, в наблюдается картина смещения температурного поля, так как расположение дефекта здесь смещено в точку $x = -\frac{l}{4}$.

Кривые 1–3 соответствуют положению изотермы $T = 382\text{K}$ через 15 с.

Полученное решение используется в программном обеспечении диагностики автомобильных шин, имеющих композиционную структуру. Наличие дефекта структуры (разрыв корда и др.) вызывает

изменение характера температурного поля на поверхности шины, что позволяет оценить ресурс шины и определить возможность ее дальнейшей эксплуатации.

Библиографический список

1. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 336 с.
2. Хорошун Л. П. К теории связанной термоупругости двухкомпонентных смесей / Л. П. Хорошун, Н. С. Солтаков // Прикладная механика. — 1981. — Т. 17. — № 6. — С. 21—28.
3. Торлин В. Н. Прямая и обратная задачи теории упругости неоднородного тела / В. Н. Торлин // Прикладная механика. — 1976. — Т. 12. — № 8. — С. 49—53.

Поступила в редакцию 10.12.2001 г.