

УДК 681.511.46

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПРИВОДИМОСТИ СИСТЕМ

Шушляпин Е.А.

Предложен алгоритм управления, придающий свойство квазилинейности нелинейной системе с гладкими правыми частями и аддитивным управлением. Применение алгоритма иллюстрировано примером и результатами компьютерного моделирования.

Классическая задача приводимости систем, соответствующие теоремы и методы, сформулированные А.М.Ляпуновым и развитые в работах Н.П.Еругина, В.В. Немыцкого и других авторов [1], ставят своей целью такое преобразование фазового пространства, чтобы в итоге получилась система, более удобная для анализа. Чаще всего ищут такие преобразования, чтобы исходная система приводилась к линейной стационарной системе заданного вида (диагональной, блочно-диагональной, треугольной и др.).

Достаточно полно задача решена для линейных стационарных систем и частных видов нестационарных систем. Для нелинейных же систем, насколько нам известно, имеются лишь теоремы существования устанавливающие необходимые и достаточные условия приводимости в форме, не дающей практически пригодного способа приведения нелинейной системы к линейной [2]. В классической задаче приводимости имеются в виду такие преобразования, при которых исходная и приведенная системы оказываются эквивалентными с любой наперед заданной точностью во всей области начальных условий и при любых внешних воздействиях. Можно предположить, что множество приводимых в классическом смысле нелинейных систем весьма невелико. В то же время задача придания свойств линейности нелинейным системам остается актуальной, так как при этом появляется возможность использовать какие-то элементы теории линейных систем для нелинейных задач управления.

По указанным причинам вместо классического определения приводимости по Ляпунову введем другое определение, которое назовем «неклассическим».

Система в векторно-матричной записи

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(t, x) + B(t)u(t), \quad u(t) \in U(t), t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0 \quad (1)$$

приводится к векторно-матричной эталонной системе

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y + C(t)f(t), \quad f(t) \in F(t), t \in [t_0, t_f], y(t_0) = x^0, \quad (2)$$

если можно найти такое управление $u(t) = u(t, x(t), y(t), f(t))$, что интеграл от нормы разности $\Delta(t) = x(t) - y(t)$ не превышает наперед заданного

числа Δ^* . В (1) и (2) x, y - векторы состояний одинаковой размерности. В качестве нормы можно использовать квадратическую форму с неотрицательно определенной матрицей F . При этом указанное ограничение примет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Delta(t)^T \cdot F \cdot \Delta(t) dt \leq \Delta^*. \quad (3)$$

Данное определение приводимости основано не на линейном преобразовании пространства состояния, как классическое определение приводимости [1], а на в общем случае нелинейном преобразовании пространства управлений. Следует также отметить, что можно было обобщить задачу приводимости, рассматривая вместо (2) другую нелинейную систему. Полученные ниже результаты очевидным образом обобщаются и на такую задачу. Из (3) также следует, что приводимость может иметь место не для всего вектора состояний, а для отдельных координат. Для этого достаточно задать единственный ненулевой элемент матрицы F в соответствующей позиции на главной диагонали. Можно рассматривать приводимые системы разной размерности, однако для упрощения выкладок остановимся именно на системах вида (1), (2) с ограничением (3).

Наряду с приводимостью на всем интервале времени введем также неклассическое определение приводимости для конечного времени. Данное определение отличается от приведенного тем, что вместо ограничения (3) в нем используется ограничение

$$J = \Delta(t_f)^T \cdot F \cdot \Delta(t_f) \leq \Delta^*. \quad (4)$$

Приводимость для конечного времени может также оказаться полезной, если свойство линейности требуется только для вектора состояния в конечный момент времени.

Для решения задачи воспользуемся методом конечного состояния, основы которого изложены в [3]. Введем переменные конечного состояния (ПКС) для систем (1) и (2), которые обозначим соответственно $\bar{x}(\vartheta, t)$ и $\bar{y}(\vartheta, t)$. ПКС связаны с переменными состояния соотношениями [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= \Phi(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t)), \quad \frac{d\bar{x}(t_f, t)}{dt} = W^N(t_f, t, x(t)) \cdot B(t) \cdot u(t), \\ \frac{dW^N(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \left[\frac{\partial \Phi(\vartheta, x)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}(\vartheta, t)} \cdot W^N(\vartheta, t, x(t)), \\ \vartheta \in [t, t_f], \quad \bar{x}(t, t) &= x(t), \quad W^N(t, t, x(t)) = I, \quad t \in [t_0, t_f], \quad \bar{x}(t_f, t_0) = \bar{x}^0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{y}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= A(\vartheta) \cdot \bar{y}(\vartheta, t), \quad \frac{d\bar{y}(t_f, t)}{dt} = W^L(t_f, t) \cdot C(t) \cdot f(t), \\ \frac{dW^L(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= A(\vartheta) \cdot W^L(\vartheta, t), \quad \frac{dW^L(t_f, t)}{dt} = -W^L(t_f, t) \cdot A(t), \\ \vartheta &\in [t, t_f], \quad \bar{y}(t, t) = y(t), \quad W^L(t, t) = I, \\ t &\in [t_0, t_f], \quad \bar{y}(t_f, t_0) = W^L(t_f, t_0) \cdot y(t_0), \quad W^L(t_f, t_f) = I. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В соотношениях (5) и (6) I - единичная матрица, W^N , W^L - весовые матрицы для систем (1) и (2), $\bar{x}^0$ - начальное условие по ПКС $\bar{x}$, которое может быть определено интегрированием первого векторно-матричного однородного уравнения из (5).

Одним из основных соотношений, составляющих основу метода конечных состояний, является равенство переменных состояния и ПКС при одинаковых значениях первого и второго аргументов. В (5) и (6) указанное соотношение для переменных нелинейной и линейной моделей записано дважды в виде начальных условий $\bar{x}(t, t) = x(t)$, $\bar{y}(t, t) = y(t)$.

Аналогичные выражения можно записать и для конечного момента t_f :

$$\bar{x}(t_f, t_f) = x(t_f), \quad \bar{y}(t_f, t_f) = y(t_f). \quad (7)$$

Решим вначале задачу приводимости для конечного времени. Для этого запишем терминальный критерий, выраженный через ПКС и эквивалентный левой части (4) при $t = t_f$ в силу (7):

$$\begin{aligned} \bar{J}(t_f, t) &= \bar{\Delta}(t_f, t)^T \cdot F \cdot \bar{\Delta}(t_f, t), \quad \bar{J}(t_f, t_f) = J, \\ \bar{\Delta}(t_f, t) &= \bar{x}(t_f, t) - \bar{y}(t_f, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Продифференцируем (8) по t с учетом (5) и (6):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}(t_f, t)}{dt} &= 2\bar{\Delta}(t_f, t)^T F \frac{d\bar{\Delta}(t_f, t)}{dt} = \\ &= 2\bar{\Delta}(t_f, t)^T F [W^N t_f, t(t) B(t) u(t) - W^L(t_f, t) C(t) f(t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Потребуем, чтобы $\bar{J}(t_f, t)$ изменялся по траектории, приходящей в конечный момент времени в точку, равную заданному минимально достижимому значению $J^* \leq \Delta^*$. Этого можно достичь, если, например, $\bar{J}(t_f, t)$ определено дифференциальным уравнением

$$\frac{d\bar{J}(t_f, t)}{dt} = \frac{J^* - \bar{J}(t_f, t)}{T_u}, \quad (10)$$

где $T_u = t_f - t$.

Если не требовать точного равенства $\bar{J}(t_f, t_f)$ и J^* , то можно взять дифференциальное уравнение (10) с $T_u = T$, дающее экспоненциальное приближение $\bar{J}(t_f, t)$ к J^* с постоянной времени T . Могут быть использованы и другие желаемые траектории вместе с соответствующими им дифференциальными уравнениями.

При этом, если достижимо нулевое значение J^* , система (1) приводима к (2) по конечному времени. В противном случае можно лишь утверждать, что при выбранном законе изменения $\bar{J}(t_f, t)$ (10) приводимость не достигается. Критерием достижимости при заданных начальных условиях, функции $f(t)$ и моменте t_f является выполнение (4) с учетом того, что $\Delta(t_f) = \bar{\Delta}(t_f, t_f)$.

Приравняв (9) и (10) и выполняя псевдообращение, получаем выражение для приводящего управления

$$\begin{aligned} u(t) &= G^+ b, \quad G^+ = G^T (GG^T)^{-1}, \\ G &= \bar{\Delta}^T(t_f, t) \cdot F \cdot W^N(t_f, t, x(t)) \cdot B(t), \\ b &= \frac{J^* - \bar{J}(t_f, t)}{2T_u} + \bar{\Delta}^T(t_f, t) \cdot F \cdot W^L(t_f, t) \cdot C(t) \cdot f(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное управление зависит от ПКС $\bar{x}(t_f, t)$, линейной и нелинейной весовых матриц W^L, W^N как функций второго аргумента, текущего состояния нелинейной системы $x(t)$ и текущего состояния линейной системы $y(t)$. Последние две зависимости - неявные через

$$\bar{\Delta}(t_f, t) = \bar{x}(t_f, t) - \bar{y}(t_f, t) = \bar{x}(t_f, t) - W^L(t_f, t) \cdot y(t).$$

Линейная весовая матрица как функция второго аргумента может быть вычислена заранее и сохранена в памяти. Что же касается $\bar{x}(t_f, t)$ и нелинейной весовой матрицы, то они могут быть получены как функции первого аргумента при совместном интегрировании первого и третьего векторно-матричных уравнений системы (5) для каждого текущего момента t . При этом требуемые в (11) получаются при $\vartheta = t_f$.

Таким образом, приводимость по конечному времени производится совместным интегрированием систем (1), (3) при управлении (11), для расчета которых каждый момент времени дополнительно интегрируются первое и третье уравнения из (5).

Перейдем теперь к задаче приводимости с критерием (3), т.е. приводимости на всем интервале времени. Для ее решения разобьем весь

временной интервал $[t_0, t_f]$ на малые интервалы $[t_i, t_i + h], i = 1, 2, \dots, N$ длительностью h и для каждого из таких интервалов воспользуемся алгоритмом (11), считая $t \sim t_i, t_f \sim t_i + h \equiv t_{i+1}$. При этом ввиду малости интервала расчет ПКС и нелинейной весовой матрицы можно упростить, заменив интегрирование дифференциальных уравнений (11) разностными уравнениями

$$\bar{x}(t_{i+1}, t_i) = \bar{x}(t_i, t_i) + \Phi(t_i, \bar{x}(t_i, t_i)) \cdot h,$$

$$W^N(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) = W^N(t_i, t_i, x(t_i)) + \left[\frac{\partial \Phi(t_i, x)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}(t_i, t_i)} \cdot W^N(t_i, t_i, x(t_i)) \cdot h.$$

С учетом начальных условий из (5) последние выражения приобретают более простой вид

$$\bar{x}(t_{i+1}, t_i) = x(t_i) + \Phi(t_i, x(t_i)) \cdot h, \quad W^N(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) = I + \left[\frac{\partial \Phi(t_i, x)}{\partial x} \right]_{x=x(t_i)} \cdot h. \quad (12)$$

Для линейной весовой матрицы запишем аналогичное равенство

$$W^L(t_{i+1}, t_i) = I + A(t_i) \cdot h. \quad (13)$$

Теперь управление (11) зависит только от текущих значений переменных состояния систем (1) и (2), т.е. расчет управлений для приводимости на всем интервале времени осуществляется значительно проще, чем для приводимости по конечному времени.

Рассмотрим пример. Пусть

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = v, \quad y_1(0) = x_{10}, \quad y_2(0) = x_{20}, \quad t \in [0, t_f]. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно (5), (6), (8) весовые матрицы и другие составляющие управления (11) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} W^L(t_f, t) &= \begin{pmatrix} 1 & t_f - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W^N(t_f, t, x(t)) = \begin{pmatrix} 1 & -x_2^3(t) \exp(-3(t_f - t) - 1) \\ 0 & \exp(-(t_f - t)) \end{pmatrix}, \\ \bar{\Delta}(t_f, t, x(t), y(t)) &= \begin{pmatrix} x_1(t) - \frac{1}{3} x_2^3(t) \exp(-3(t_f - t) - 1) - y_1(t) - y_2(t) \cdot (t_f - t) \\ x_2(t) \exp(-(t_f - t)) - y_2(t) \end{pmatrix}, \\ B = C &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Компьютерное моделирование системы (14) с приводящим управлением (11) и критерием (4) для случаев периодического и линейно растущего внешнего воздействия $v(t)$ при $t_f = 1, T = 0,05$, шаге

интегрирования метода Рунге-Кутты четвертого порядка 0,001, $J^* = 0$, показало, что средняя относительная погрешность, вычисленная по формуле $\varepsilon_i = |(x_i(t_f) - y_i(t_f)) / y_i(t_f)|$, $i = 1, 2$, составляет величину порядка 20% (для первой координаты - 4%, для второй - 34%). Различие в точности объясняется разницей весовых коэффициентов

Получим теперь управление, реализующее приводимость на всем интервале времени работы системы.

Из (12) и (13) следует:

$$W^N(t_i + h, t_i, x(t_i)) \approx \begin{pmatrix} 1 & 3x_2^2(t_i) \cdot h \\ 0 & 1 - h \end{pmatrix} W^L(t_i + h, t_i) \approx \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta(t_{i+1}, t_i) &= \bar{x}(t_{i+1}, t_i) - \bar{y}(t_{i+1}, t_i) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1(t_i) + x_2^3(t_i) \cdot h - y_1(t_i) - y_2(t_i) \cdot h \\ x_2(t_i) \cdot (1 - h) - y_2(t_i) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для расчета приводящего управления в каждый дискретный момент t_i используем (8), (11) при $T_u = h$, где W^N, W^L, Δ рассчитываем по (15), (16).

Для иллюстрации приближенной эквивалентности приведенной и эталонной систем рассмотрим задачу линейной коррекции приведенной системы. Указанную коррекцию получим на основе эталонной линейной системы (14), для которой введем две обратные связи, превращающие систему в устойчивое инерционное звено второго порядка. Указанные обратные связи соответствуют $v(t) = -y_2(t) - y_1(t) + f(t)$, где $f(t)$ - задающее воздействие. При этом в эквивалентных приведенной и эталонной системах отклики на различные задающие воздействия должны быть близки. Соответствующие результаты компьютерного моделирования показаны на рисунках 1,2, где изображены зависимости от времени координат приведенной и эталонной систем при $x_1^0 = y_1^0 = x_2^0 = y_2^0 = 0$;

$t_f = 20$; $F_{11} = 1$; $F_{22} = 0,001$; $J^* = 0,001$; шаг интегрирования дифференциальных уравнений и периоде дискретности вычисления приводящего управления $h = 0,04$. Графики получены для задающих

воздействий $f(t) = 3$ и $f(t) = 4 \sin\left(\frac{4\pi}{t_f} t\right)$.

Из приведенных на рисунках 1, 2 графиков видно, что отклики по первой координате практически одинаковы, отклики же по второй координате несколько отличаются. Следует заметить, что весовой коэффициент критерия F_{22} для второй координаты в тысячу раз меньше коэффициента для первой координаты. Попытка же увеличить этот коэффициент и сблизить отклики по второй координате в данном случае безуспешны. При небольшом увеличении (в несколько раз) отклики по второй координате несколько сближаются, однако на отклике приведенной системы по первой координате появляются выбросы. При большем увеличении коэффициента F_{22} (на порядок и больше) приведенная

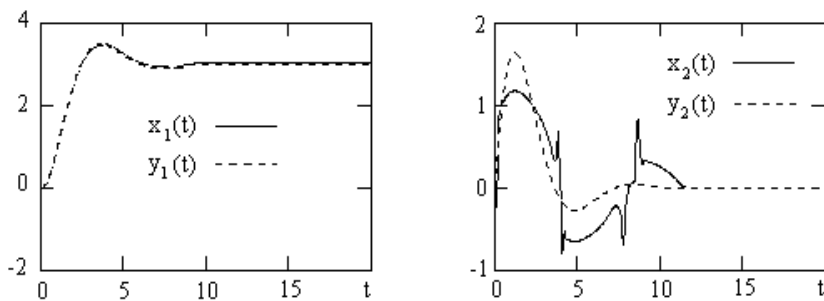


Рисунок 1 - Результаты компьютерного моделирования приводимости на интервале для $v(t) = -y_2(t) - y_1(t) + 3$

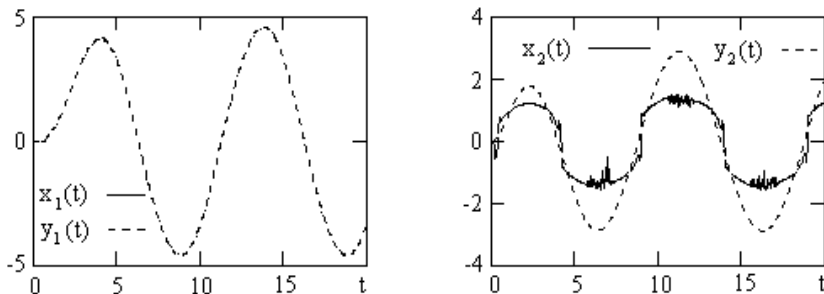


Рисунок 2 - Результаты компьютерного моделирования приводимости на интервале для $v(t) = -y_2(t) - y_1(t) + 4 \sin(4\pi \cdot t / t_f)$

система теряет устойчивость. Данный факт отражает недостижимость цели приведения. Как указывалось выше, достижимость регулируется параметром J^* . Однако в задаче приводимости на интервале, когда сведение критериальной функции (8) к J^* происходит многократно (t_f/h раз), накапливается ошибка, которая зависит не только от J^* , но и от h и коэффициентов критерия F . По этой причине уменьшение h не означает автоматического увеличения точности процесса управляемого приведения.

Для каждого случая параметры J^* , h , F_{ij} необходимо подбирать индивидуально. Что касается J^* , то его подбор нужно начинать со значения $J^* = 0$. Так, например, в задаче линейной коррекции $J^* = 0$ подходит для случая $f(t) = 3$, однако для $f(t) = 4 \sin\left(\frac{4\pi}{t_f} t\right)$ на кривых отклика приведенной системы появляются выбросы большой амплитуды. По этой причине J^* взят ненулевым, в результате чего указанные выбросы исчезли.

Следует отметить, что реакция приводимой и эталонной систем рассматриваемого примера на одно и то же воздействие, т.е. в случае $u(t) = v(t)$, совершенно различна. Так, для $u(t) = v(t) = 2t$ отклики приводимой и эталонной систем $x_1(t_f) = 4,09$; $y_1(t_f) = 2,67$. Это свидетельствует о значительном влиянии приводящего управления на динамику рассматриваемого примера системы.

Таким образом, управляемая приводимость в неклассическом смысле позволяет придавать динамической системе свойства другой системы, значительно отличающейся своей математической моделью. При этом область начальных условий и внешних воздействий, а также точность воспроизведения фазовых траекторий существенно больше, чем при использовании линеаризованных моделей.

Библиографический список

1. Былов Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф.Былов, Р.Э.Виноград, Д.М.Гробман. — М.: Наука, 1966. — 576с.
2. Подчукаев В.А. Достаточные условия приводимости нелинейных систем / В.А.Подчукаев, Д.В.Орлов // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: Тез. докл. VII Четаевской конф. — Казань, 1997. — С. 63.
3. Шушляпин Е.А. Синтез линейных и нелинейных систем управления конечным положением на основе моделей конечного состояния / Е.А.Шушляпин // Проблемы управления и информатики. — 1997. — №3. — С.10 – 15.