

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Методические указания
к выполнению лабораторной работы № 3
по дисциплине «Прикладная математика»
для студентов направления 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»
очной формы обучения

Севастополь
СевГУ
2021

УДК 519.852(076.5)

ББК 22.18я73

Д241

Р е ц е н з е н т :

Д.В. Заморенова - канд. техн. наук, доцент кафедры ПСАТП

Ответственный за выпуск:

А.А. Брюховецкий - канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой ИТиКС

Составители : И.А. Балакирева, В.И. Шевченко

Д241 Двойственность в линейном программировании : методические указания к выполнению лабораторной работы № 3 по дисциплине «Прикладная математика» для студентов направления 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника» очной формы обучения / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Севастопольский государственный университет ; сост.: И. А. Балакирева., В. И. Шевченко. – Севастополь : СевГУ, 2021. – 13 с. – Текст : электронный.

Целью методических указаний является оказание методической помощи студентам в изучении дисциплины «Прикладная математика»

Методические рекомендации содержат:

- типовые задачи, рассматриваемые на занятиях;
- задания для самостоятельной работы по индивидуальным вариантам.

УДК 519.852(076.5)

ББК 22.18я73

Методические рекомендации рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных технологий и компьютерных систем, протокол № 6 от 16 марта 2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Построение двойственной ЗЛП. Занятие 1.....	4
2. Геометрическая интерпретация взаимодвойственных задач. Занятие 2.....	8
Приложение А.....	11

Лабораторная работа № 3

Двойственность в линейном программировании

Лабораторная работа рассчитана на 4 учебных часа.

Цель: освоить методику построения взаимодвойственных ЗЛП и их решения.

1. ПОСТРОЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗЛП. ЗАНЯТИЕ 1

Правила построения двойственной задачи и соответствие решений взаимодвойственных задач рассмотрим на следующем примере.

Задача 1.1

$$\begin{aligned}
 F &= 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\
 \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Представим задачу (1.1) в основной форме ЗЛП:

$$\begin{aligned}
 F' &= -F = 0 - (7x_1 + 5x_2) \rightarrow \min \\
 \begin{cases} x_3 = 19 - (2x_1 + 3x_2) \\ x_4 = 13 - (2x_1 + x_2) \\ x_5 = 15 - (3x_2) \\ x_6 = 18 - (3x_1) \\ x_j \geq 0, j = 1, 6 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Решим задачу (1.2) симплекс-методом. В таблицах 1.1-1.4 представлены преобразования, приводящие к оптимальному решению

Табл.1.1

	b	x ₁	x ₂	
x ₃	19	2	3	
	-15	0		-1
x ₄	13	2	1	
	-5	0		-1/3
x ₅	15	0	3	
	5	0		1/3
x ₆	18	3	0	
	0	0		0
F'	0	7	5	
	-25	0		-5/3

Табл.1.2

	b	x ₁		x ₅
x ₃	4	2		-1
	2		1/2	-1/2
x ₄	8	2		-1/3
	-4		-1	1
x ₂	5	0		1/3
	0		0	0
x ₆	18	-3		0
	-6		-3/2	3/2
F'	-25	7		-5/3
	-14		-7/2	7/2

Табл.1.3

	b	x ₃	x ₅	
x ₁	2	1/2	-1/2	
	3	-3/4		3/4
x ₄	4	-1	2/3	
	6	-3/2		3/2
x ₂	5	0	1/3	
	-2	1/2		-1/2
x ₆	12	-3/2	3/2	
	-9	9/4		-9/4
F'	-39	-7/2	11/6	
	-11	11/4		-11/4

Табл.1.4

	b	x ₃	x ₄
x ₁	5	-1/4	3/4
x ₅	6	-3/2	3/2
x ₂	3	1/2	-1/2
x ₆	3	3/4	-9/4
F'	-50	-3/4	-11/4

Оптимальное решение получено в таблице 1.4: $X=(5, 3, 0, 0, 6, 3)$,

$F = -F' = 50$.

Выполним построение задачи, двойственной к исходной задаче (1.1) по следующим правилам:

Прямая задача

Двойственная к ней

1

Матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$$

6

2

Знаки неравенств ограничений

 $\leq$ $\geq$

3

Условие задачи

max

min

4

Свободные коэффициенты в системе линейных ограничений

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

5

Коэффициенты в линейной форме

$$(c_1 \quad c_2)$$

$$(b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4)$$

Итак, получена задача, двойственная к задаче (1.1):

$$\begin{aligned} \Phi &= 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 3y_4 \geq 7 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 + 0y_4 \geq 5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Приведем задачу (1.3) к виду, соответствующему применению симплекс-метода. Для этого неравенства выравниваем до равенств, вводя переменные y_5 и y_6 , и определим допустимое решение:

$$\begin{aligned} \Phi &= 67 - (8y_1 + 4y_2 - 6y_5 - 5y_6) \rightarrow \min \\ \begin{cases} y_3 = \frac{5}{3} - (y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_6) \\ y_4 = \frac{7}{3} - (\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_5) \\ y_i \geq 0, i = 1, 6 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

В таблицах 1.5 и 1.6 представлено решение задачи (1.4), а в таблицах 1.7 и 1.8 – оптимальные решения взаимодвойственных задач.

Табл.1.5

	b	y_1	y_2	y_5	y_6
y_3	5/3	1	1/3	0	-1/3
	-7/6	-1/3	-1/2	1/6	0
y_4	7/3	2/3	2/3	-1/3	0
	7/2	1	3/2	-1/2	0
Φ	67	8	4	-6	-5
	-14	-4	-6	2	0

Табл.1.6

	b	y_1	y_4	y_5	y_6
y_3	1/2	2/3	-1/2	1/6	-1/3
	3/4	3/2	-3/4	1/4	-1/2
y_2	7/2	1	3/2	-1/2	0
	-3/4	-3/2	3/4	-1/4	1/2
Φ	53	4	-6	-4	-5
	-3	-6	3	-1	2

Табл.1.7

	b	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	3/4	3/2	-3/4	1/4	-1/2
y_2	11/4	-3/2	9/4	-3/4	1/2
Φ	50	-6	-3	-5	-3

Табл.1.8

	b	x_3	x_4
x_1	5	-1/4	3/4
x_5	6	-3/2	3/2
x_2	3	1/2	-1/2
x_6	3	3/4	-9/4
F'	-50	-3/4	-11/4

Получено решение двойственной задачи: $\Phi=50$ при

$$Y=(y_1=3/4, y_2=11/4, y_3=y_4=y_5=y_6=0).$$

В таблицах 1.7 и 1.8 одинаковым цветом выделено соответствие решений взаимодвойственных задач. Если переменные двойственной задачи нумеруются в соответствии с ограничениями в прямой, то между переменными существует соответствие (рис.1.1):



Рисунок 1.1. Соответствие между переменными взаимодвойственных ЗЛП.

Как видно по ходу решения двух задач, при решении двойственной задачи было выполнено меньшее количество циклов преобразования симплекс-таблицы, поскольку ограничений в двойственной задаче меньше, чем в прямой. Поэтому, предпочтительней решать ту задачу, которая имеет меньше ограничений, и по результатам определить решение двойственной к ней задаче.

Задача 1.2. Построить задачу, двойственную к данной, решить одну из пары задач и определить оптимальное решение второй.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}$$

Задача 1.3. Построить задачу, двойственную к сквозной задаче (1.4 из лабораторной работы №2). Показать соответствие решений взаимодвойственных задач.

Задание для занятия 1. Решить задачи 1.2 и 1.3. Результат решения задачи 1.3 включается в отчет по лабораторной работе №3.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЗАМОДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ. ЗАНЯТИЕ 2

Задача 2.1. Построить задачу, двойственную к данной и получить графическое решение обеих задач. Расчеты и построение выполнить в среде ЭТ Excel.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ 2x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи выполнено с помощью возможности Поиск решения в ЭТ Excel (рис.2.1).

	x1	x2			
	5,333333	5,333333	ЦФ		
коэф	2	3	26,66667		
огр1	1	2	16 >=	16	
огр2	2	1	16 >=	16	

Рис.2.1. Решение прямой ЗЛП.

Получено решение прямой задачи: $X=(5,33; 5,33)$, при этом целевая функция достигает значения $F=26,67$.

Двойственная к заданной задаче имеет вид:

$$\Phi = 16y_1 + 16y_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ 2y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение двойственной задачи представлено на рис. 2.2.

	y1	y2		
	1,333333	0,333333	ЦФ	
коэф	16	16	26,66667	
огр1	1	2	2 <=	2
огр2	2	1	3 <=	3

Рисунок 2.2. Решение двойственной ЗЛП.

В результате решения двойственной задачи имеем $Y=(1,33; 0,33)$, значение целевой функции $\Phi=26,67$. Значения целевых функций взаимодвойственных задач равны.

Для геометрической интерпретации взаимодвойственных задач построим области допустимых решений (рис. 2.3).

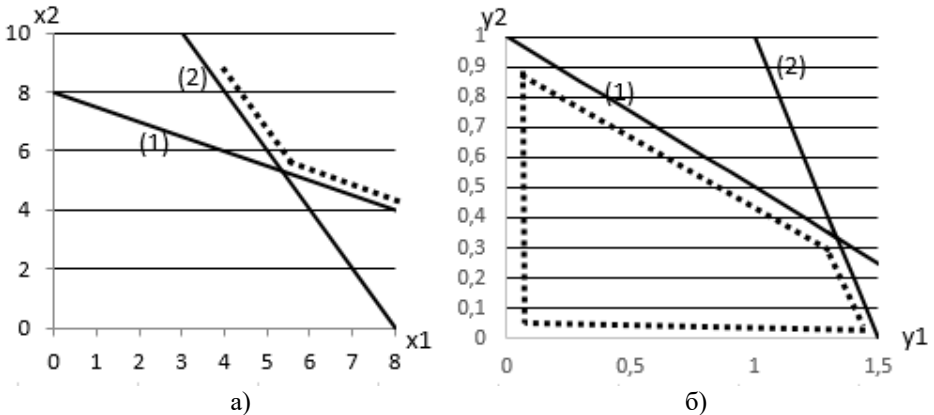


Рисунок 2.3. Область допустимых решений: а) прямой задачи; б) двойственной задачи.

Далее выполняется построение целевой функции и направление ее перемещения к оптимальной точке. Для прямой задачи направление движения по антиградиенту, в двойственной – в направлении градиента (красная стрелка на рис.2.4.).

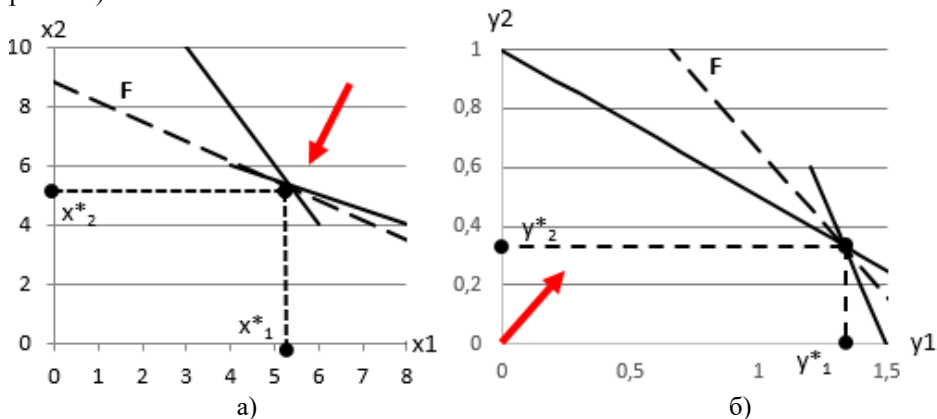


Рисунок 2.4. Решение взаимодвойственных задач: а) прямой задачи; б) двойственной задачи.

Задача 2.2. Построить задачу, двойственную к данной и получить графическое решение обеих задач. Расчеты и построение выполнить в среде ЭТ Excel. Вариант задания выбрать в соответствии с номером в списке группы из Приложения А.

Задание для занятия 2. Решить задачу 2.2 и результат решения оформить в отчет по лабораторной работе №3.

Содержание отчета по результатам выполнения лабораторной работы №3.

В отчет включить решение задач 1.3 и 2.2.

1. Постановка задачи
2. Последовательность действий при решении задач.
3. Геометрическая интерпретация решения.
4. Анализ результатов и выводы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

1

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$

$$10x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 9.5$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10.6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 11$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

6

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 7$$

$$10x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

7

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$5x_1 + 7x_2 \leq 21$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

8

$$F = 1.6x_1 + 10x_2 \rightarrow \min$$

$$-2x_1 + x_2 \leq -3.3$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

9

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

10

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 9x_2 \leq 36$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

12

11

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 11$$

$$4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

13

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

15

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12.6$$

$$4x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

17

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

19

$$F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

12

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

14

$$F = 1.6x_1 + 10x_2 \rightarrow \min$$

$$-2x_1 + x_2 \leq -3.3$$

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

16

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 14$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

18

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 75$$

$$12x_1 + 7x_2 \leq 55$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

20

$$F = 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 5.8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9.2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

21

$$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

23

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

25

$$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

27

$$F = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

29

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 28$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

22

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 11$$

$$4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

24

$$F = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq -6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

26

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 20.6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

28

$$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

30

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 16$$

$$2x_1 + x_2 \geq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Методические указания
к выполнению лабораторной работы № 3

Составители : **Балакирева** Ирина Аркадьевна,
Шевченко Виктория Игоревна

В авторской редакции

Изд. № 115/2021. Объем 1 п.л.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»