

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ**

Методические указания
к выполнению лабораторной работы № 1
по дисциплине «Прикладная математика»
для студентов направления 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»
очной формы обучения

Севастополь
СевГУ
2021

УДК 519.852(076.5)

ББК 22.18я73

П637

Р е ц е н з е н т:

Д.В. Заморонова - канд. техн. наук, доцент кафедры ПСАТП

Ответственный за выпуск:

А.А. Брюховецкий - канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой ИТиКС

Составители : И.А. Балакирева, В.И. Шевченко

П637 Построение моделей задач линейного программирования и их геометрическая интерпретация : методические указания к выполнению лабораторной работы № 1 по дисциплине «Прикладная математика» для студентов направления 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника» очной формы обучения / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Севастопольский государственный университет ; сост.: И. А. Балакирева., В. И. Шевченко. – Севастополь : СевГУ, 2021. – 16 с. – Текст : электронный.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в изучении дисциплины «Прикладная математика». Методические рекомендации содержат типовые задачи, рассматриваемые на занятиях, задания для самостоятельной работы.

УДК 519.852(076.5)

ББК 22.18я73

Методические рекомендации рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных технологий и компьютерных систем, протокол № 6 от 16 марта 2021 г.

В авторской редакции

Изд. № 116/2021. Объем 1 п.л.

РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

1. Построение моделей задач, приводящих к ЗЛП. Занятие 1	4
2. Геометрическая интерпретация ЗЛП. Занятие 2.....	7
3. Построение аналитической модели ЗЛП. Занятие 3.....	9
Приложение А Варианты индивидуальных заданий	12

Лабораторная работа № 1

Построение моделей задач линейного программирования и их геометрическая интерпретация

Лабораторная работа рассчитана на 6 учебных часов.

Цель: освоить методику построения системы линейных ограничений и целевой функции (ЦФ) задач линейного программирования (ЗЛП) по заданному содержательному описанию задачи; изучить способы построения в декартовой системе координат области допустимых решений и ЦФ ЗЛП; научиться решать ЗЛП графическим методом.

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ, ПРИВОДЯЩИХ К ЗЛП. ЗАНЯТИЕ 1

Правила построения математической модели (ММ) рассмотрим на следующей задаче.

Задача 1.1 Один из цехов машиностроительного предприятия выпускает изделия двух видов: корпуса и задвижки. Для производства этих изделий требуются три вида сырья: алюминий, сталь и пластмасса. На выпуск одного корпуса расходуется 20 кг алюминия, 10 кг стали и 5 кг пластмассы. На выпуск одной задвижки расходуется 5 кг алюминия, 5 кг стали и 20 кг пластмассы. Запасы ресурсов ограничены: за рабочую смену цех может израсходовать не более 200 кг алюминия, 250 кг стали и 500 кг пластмассы. Выпуск одного корпуса приносит предприятию прибыль в размере 100 денежных единиц (ден. ед.), одной задвижки – 300 ден. ед.

Требуется составить оптимальный план работы цеха, т.е. найти, сколько корпусов и задвижек требуется выпускать, чтобы получить максимальную прибыль (при соблюдении ограничений на ресурсы).

Построение модели всегда начинается с обозначения переменных задачи, далее формулируется цель задачи, и затем строятся ограничения задачи.

I. Переменные. Обозначим через x_1 количество выпускаемых корпусов, через x_2 – количество выпускаемых задвижек.

II. Целевая функция. В данной задаче требуется определить количество выпускаемых изделий, при котором прибыль от их производства будет максимальной. Прибыль от выпуска одного корпуса составляет 100 ден. ед.; значит, прибыль от выпуска всех корпусов составит $100x_1$ ден. ед. Прибыль от выпуска задвижек составит $300x_2$ ден. ед. Таким образом, общая прибыль от выпуска всех изделий составит $100x_1 + 300x_2$ ден. ед. Требуется найти такие значения переменных x_1 и x_2 , при которых эта величина будет максимальной. Таким образом, целевая функция (ЦФ) для данной задачи будет иметь следующий вид:

$$F = 100x_1 + 300x_2 \rightarrow \max.$$

III. Ограничения. Составим ограничение на расход алюминия. На выпуск одного корпуса расходуется 20 кг алюминия; значит, расход алюминия на выпуск

всех корпусов составит $20 x_1$ кг. На выпуск задвижек будет израсходовано $5x_2$ кг алюминия. Таким образом, общий расход алюминия составит $20 x_1 + 5x_2$ кг.

Эта величина не должна превышать 200 кг, так как цех не может израсходовать за смену свыше 200 кг алюминия. Поэтому можно записать следующее ограничение:

$$20 x_1 + 5 x_2 \leq 200.$$

Аналогично можно составить ограничение на расход стали:

$$10 x_1 + 5 x_2 \leq 250,$$

и на расход пластмассы:

$$5 x_1 + 20 x_2 \leq 500.$$

Кроме того, переменные x_1 и x_2 по своему физическому смыслу не могут принимать отрицательных значений, так как они обозначают количество изделий. Поэтому необходимо указать условия неотрицательности:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Приведем полную математическую модель рассматриваемой задачи:

$$F = 100 \cdot x_1 + 300 x_2 \rightarrow \max$$

$$20 x_1 + 5 x_2 \leq 200$$

$$10 x_1 + 5 x_2 \leq 250$$

$$5 x_1 + 20 x_2 \leq 500$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Задание для занятия 1. В соответствии с рассмотренной схемой предлагается выполнить построение ММ для следующих задач.

Задача 1.2. Фирма производит два продукта А и В, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан тремя машинами I, II, III. Время обработки каждого изделия (в часах) представлено в таблице 1.1.

Таблица 1.1

	I	II	III
A	0.5	0.4	0.2
B	0.25	0.3	0.4

Время работы машин I, II, III соответственно 40, 36, 36 часов в неделю. Прибыль от изделий А и В соответственно составляет 5 и 3 денежных единиц.

Фирме необходимо определить недельные нормы выпуска изделий А и В с целью получения максимальной прибыли.

Задача 1.3. Средства для мытья посуды оценивают по следующим трем показателям: очищающие свойства; дезинфицирующие свойства; раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей оценивают по линейной шкале от 0 до 100 единиц. Продукт на рынке должен иметь, по крайней мере 60 единиц

очищающих свойств, 60 единиц дезинфицирующих. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Конечный продукт должен быть смесью из трех основных очистителей, характеристики которых приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие
А	90	30	70
В	65	85	50
С	45	70	10

Сформулировать задачу нахождения оптимальной смеси.

Задача 1.4. В некоторой местности в двух пунктах А и В имеется потребность в дополнительном транспорте. В пункте А требуется 5 дополнительных автобусов, а в пункте В – 7. Известно, что 3, 4, 5 автобусов могут быть получены соответственно из гаражей Г₁, Г₂, Г₃. Как следует распределить эти автобусы между пунктами А и В, чтобы минимизировать их суммарный пробег? Расстояния от гаражей до пунктов А и В приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

Гараж	Расстояние до пунктов А и В	
	А	В
Г ₁	3	4
Г ₂	1	3
Г ₃	4	2

Задача 1.5. Фирма производит две модели книжных полок А и В. Их производство ограничено наличием сырья и временем машинной обработки. Для каждого изделия А требуется 3 м² досок, а для изделия В – 4 м². Фирма может получить от своих поставщиков до 1700 м² досок в неделю.

Для каждого изделия А требуется 12 мин. машинного времени, а для изделия В – 30 мин. В неделю можно использовать 160 ч машинного времени.

Сколько изделий каждой модели следует производить фирме в неделю, если каждое изделие А приносит 2 денежных единицы прибыли, а каждое изделие В – 4 денежных единицы.

Задача 1.6. Предприятие производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов М1 и М2. Основные данные задачи сведены в таблицу 1.4. Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2-х т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более, чем на 1 т аналогичный показатель производства краски для внешних работ.

Таблица 1.4

Виды сырья	Расход сырья в т на 1 т краски		Максимально возможный расход сырья в т (ежедневно)
	для наружных работ	для внутренних работ	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход в тыс. ден.ед. на 1 т краски	5	4	

Компания хочет определить оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего дохода.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗЛП. ЗАНЯТИЕ 2

Графическое решение ЗЛП сводится к построению области допустимых решений, построению, переносу линии ЦФ и определению координат оптимальной точки. Оптимальная точка всегда находится в вершине многогранника, определяющего область допустимых решений задачи. Рассмотрим построение графического решения ЗЛП на примере.

Задача 2.1. Получить графическое решение ЗЛП по предложенной ММ:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Область допустимых решений задачи представляет собой многоугольник, стороны которого есть координатные оси и оба ограничения (рис. 2.1).

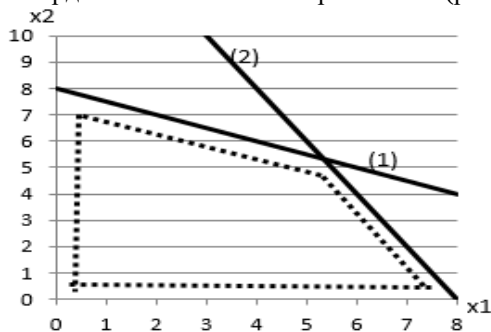


Рис. 2.1. Область допустимых решений.

На рис. 2.2 представлен график ЦФ и стрелкой обозначено направление градиента.

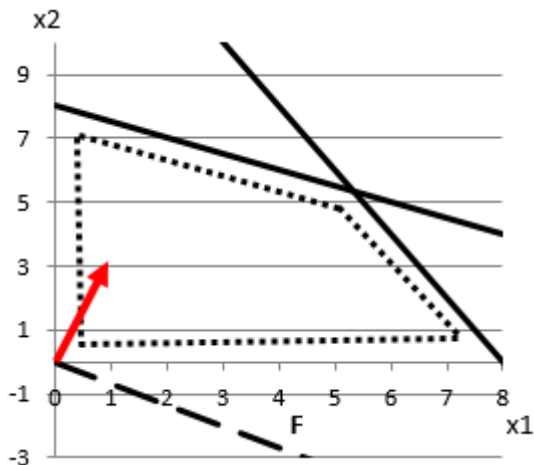


Рис. 2.2. Направление увеличения значений целевой функции.

Перемещая ЦФ параллельно самой себе по направлению градиента, определяем точку, в которой ЦФ покидает допустимую область. Эта точка и будет решением ЗЛП (рис.2.3).

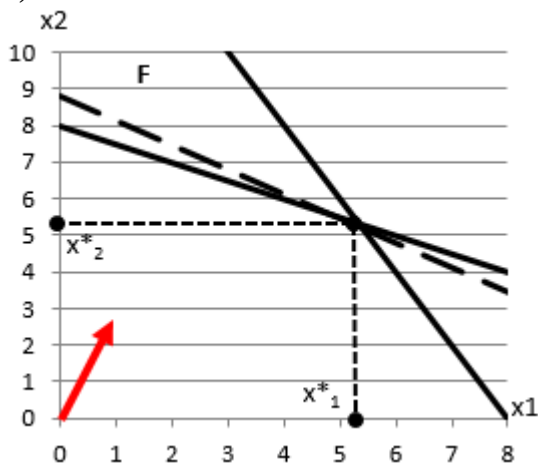


Рис. 2.3. Оптимальное решение ЗЛП.

Таким образом, получено оптимальное решение задачи: $X^*=(5,33; 5,33)$, при этом ЦФ достигает значения $F^*=26,7$.

Задание для занятия 2. Получить графическое решение задач 1.1-1.3, 1.5 и 1.6. Решение выполнять в среде ЭТ Excel.

Рекомендации для решения задачи 1.3. Из ограничения-равенства можно выразить одну из переменных и подставить ее значение в остальные ограничения и ЦФ. Тем самым, понижается размерность задачи, и появляется возможность графического решения.

3. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗЛП. ЗАНЯТИЕ 3

Если ЗЛП задана графически областью допустимых решений и направлением движения ЦФ, то возможно построение аналитической модели задачи. Рассмотрим порядок построения аналитической модели ЗЛП на примере. Итак, ЗЛП задана областью допустимых решений и направлением движения ЦФ (рис. 3.1).

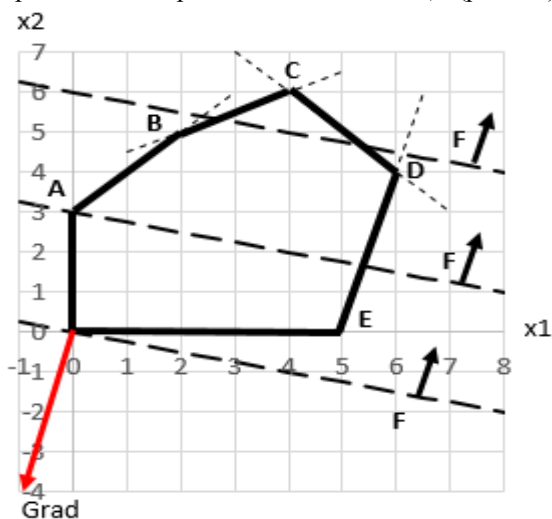


Рисунок 3.1. Геометрическая интерпретация ЗЛП.

Стороны многоугольника OABCDE образованы прямыми линиями, координаты его вершин известны. Уравнение прямой проходящей через две точки в общем виде A1 (x_1, y_1) и A2 (x_2, y_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Используя приведенное выражение, можно построить уравнения для всех сторон многогранника и ЦФ. Знак ограничения выбирается так, чтобы многогранник находился в допустимой области.

$$\text{AB: } (0;3); (2;5) \quad \frac{x_1 - 0}{2 - 0} = \frac{x_2 - 3}{5 - 3} \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 - 6 \Rightarrow$$

$$\underline{x_1 - x_2 + 3 \geq 0}$$

$$\text{BC: (2;5); (4;6)} \quad \frac{x_1 - 2}{4 - 2} = \frac{x_2 - 5}{6 - 5} \Rightarrow x_1 - 2 = 2x_2 - 10 \Rightarrow$$

$$\underline{x_1 - 2x_2 + 8 \geq 0}$$

$$\text{CD: (4;6); (6;4)} \quad \frac{x_1 - 4}{6 - 4} = \frac{x_2 - 6}{4 - 6} \Rightarrow -2x_1 + 8 = 2x_2 - 12 \Rightarrow$$

$$\underline{-x_1 - x_2 + 10 \geq 0}$$

$$\text{DE: (6;4); (5;0)} \quad \frac{x_1 - 6}{5 - 6} = \frac{x_2 - 4}{0 - 4} \Rightarrow -4x_1 + 24 = -x_2 + 4 \Rightarrow$$

$$\underline{-4x_1 + x_2 + 20 \geq 0}$$

$$\text{ЦФ: (0;0); (4;-1)} \quad \frac{x_1 - 0}{4 - 0} = \frac{x_2 - (-1)}{-1 - 0} \Rightarrow -x_1 = -4x_2 - 4 \Rightarrow$$

$$\underline{-x_1 - 4x_2 = 0} \text{ - свободный коэффициент в ЦФ не включается в модель, так}$$

как интерес представляет только угол наклона прямой относительно осей.

В вариантах заданий перпендикулярно линии ЦФ изображена стрелка, которая определяет вариант решения ЗЛП – максимизирующее или минимизирующее ЦФ. Если направление градиента ЦФ совпадает с направлением стрелки, необходимо найти решение, максимизирующее ЦФ, иначе – минимизирующее.

Для определения варианта решения задачи вычислим градиент ЦФ:

$$\text{Grad}(F) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\} = \{-1; -4\}. \text{ Направление градиента ЦФ изображено на}$$

рис.3.1 красным цветом. Направление градиента противоположно стрелке, определяющей вариант решения. Это означает, что необходимо определить решение ЗЛП, минимизирующее ЦФ:

Итак, математическая модель ЗЛП будет представлена следующим образом:

$$F = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3 \geq 0 & (AB) \\ x_1 - 2x_2 + 8 \geq 0 & (BC) \\ -x_1 - x_2 + 10 \geq 0 & (CD) \\ -4x_1 + x_2 + 20 \geq 0 & (DE) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Перемещая ЦФ (рис.3.1) параллельно самой себе в направлении противоположном градиенту (ЦФ минимизируется), можно определить точку, в которой ЦФ покидает

допустимую область. Это точка, $C(4,6)$, и будет решением ЗЛП. Итак, получено решение ЗЛП:

$$X^*=(4,6), F^*=-28.$$

Полезно вычислить значения ЦФ во всех остальных вершинах многоугольника:

$$F_A=(0,3)=-12$$

$$F_B=(2,5)=-22$$

$$F_D=(6,4)=-22$$

$$F_E=(5,0)=-5$$

$$F_O=(0,0)=0$$

При изучении алгебраических методов решения ЗЛП эта информация может быть полезной.

Задание для занятия 3. Построить аналитическую модель ЗЛП и получить ее решение графическим методом.

Индивидуальные варианты заданий приведены в Приложении А. Номер варианта задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

По результатам выполнения задания 3 формируется отчет.

Математическая модель задачи, решенной по индивидуальному варианту будет использована в заданиях последующих лабораторных работ раздела «Задачи линейного программирования». При выполнении заданий к последующим лабораторным работам данная задача называется «сквозной».

Содержание отчета по результатам выполнения лабораторной работы №1.

1. Постановка задачи
2. Последовательность действий при построении аналитической модели.
3. Решение ЗЛП.
4. Анализ результатов и выводы.

Приложение А. Варианты индивидуальных заданий

