

УДК 628.543.52

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГИХ СИСТЕМ Бохонский А.И.

Исследованы относительные колебания, обусловленные оптимальным переносным движением упругих систем из исходного в конечное состояние покоя.

Колебания линейных систем изучены в классических трудах [1]. Однако некоторые новые закономерности колебания упругих систем все еще можно выявить при исследовании оптимального переносного движения, возбуждающего колебания. В [2-3] даны решения задач управления переносным движением руки манипулятора, найден и исследован такой закон движения, который обеспечивает состояние покоя центра масс схвата с грузом для нежесткой руки манипулятора в конце ее движения (отсутствие колебаний). В [3] обращено внимание на существование одного класса управлений переносным движением, которые обеспечивают абсолютный покой упругих объектов в конечном положении.

Переносное движение должно выбираться с учетом динамических свойств упругой системы. Проиллюстрируем алгоритм поиска управления таким движением на достаточно простых примерах. Если, например, ускорение основания осциллятора принять в виде

$$U_e(t) = A \sin pt, \quad (1)$$

то скорость и соответственно перемещение переносного движения запишутся так:

$$V_e(t) = -\frac{A}{p} \cos pt + C, \quad S_e(t) = -\frac{A}{p^2} \sin pt + Ct + D. \quad (2)$$

Постоянные C и D определяются из условий

$$t_1 = T = \frac{2\pi}{p}, \quad V_e\left(\frac{2\pi}{p}\right) = 0, \quad S_e\left(\frac{2\pi}{p}\right) = L, \quad (3)$$

где t_1 - время движения; L - общее перемещение объекта в переносном движении. Тогда из (2) и (3) следует:

$$-\frac{A}{p} + C = 0, \quad L = \frac{2\pi A}{p^2} + D. \quad (4)$$

При этом с учетом $S_e(0) = 0$ находится

$$A = \frac{Lp^2}{2\pi}. \quad (5)$$

С использованием (4) и (5) выражения (1) и (2) записываются как

$$U_e(t) = \frac{Lp^2}{2\pi} \sin pt, \quad V_e(t) = -\frac{Lp}{2\pi} \cos pt + \frac{Lp}{2\pi}, \quad S_e(t) = -\frac{L}{2\pi} \sin pt + \frac{Lpt}{2\pi}. \quad (6)$$

Характерно, что в моменты времени $t=0$ и $t=t_1$ скорость и ускорение переносного

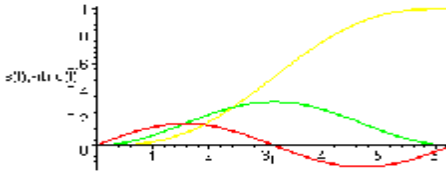


Рисунок 1- Перемещение $s(t)$, скорость $v(t)$ и ускорение $u(t)$ в переносном движении

движения равны нулю (рисунок 1). Полученный закон (6) переносного движения $S_e(t)$ дальше используется при анализе относительного движения (колебаний) систем.

Для системы с одной степенью свободы дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к подвижной системе координат) в векторном виде записывается как

$$m\vec{a}_r = \vec{\Phi}_e + \vec{F}_{yn},$$

а в скалярном виде (в проекциях на подвижную ось) -

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -A \sin pt, \quad (7)$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$ - квадрат частоты собственных колебаний; c - коэффициент

жесткости; m - сосредоточенная масса; $A = \frac{Lp^2}{2\pi}$ - амплитудное значение

ускорения основания (на единицу массы); $p = \frac{2\pi}{T}$. Движение осциллятора

начинается из состояния покоя (при $t=0$, $x_r(0)=0$, $\dot{x}_r(0)=0$).

Перемещение, скорость и ускорение в относительном движении определяются в результате решения уравнения (7):

$$x_r = \frac{A}{k^2 - p^2} \left[\frac{p}{k} \sin kt - \sin pt \right], \quad \dot{x}_r = \frac{A}{k^2 - p^2} [p \cos kt - p \cos pt],$$

$$\ddot{x}_r = \frac{A}{k^2 - p^2} [-pk \sin kt + p^2 \sin pt] \quad (8)$$

Для исключения резонанса предполагается, что $\frac{k}{p} \geq 2$. Графики

зависимостей (8) (рисунок 2) построены для исходных данных: $k = 2.0 \text{ с}^{-1}$;

$p = 1.0 \text{ с}^{-1}$; $A = \frac{1}{2\pi} \text{ м/с}^2$.

Характерно, что при $t_1 = \frac{2\pi}{p}$ перемещение, скорость и ускорение в

относительном движении равны нулю. Итак, упругий осциллятор движется из исходного состояния абсолютного покоя в конечное состояние абсолютного покоя, т.е. в переносном и относительном движении в начале и в конце пути скорость и ускорение равны нулю.

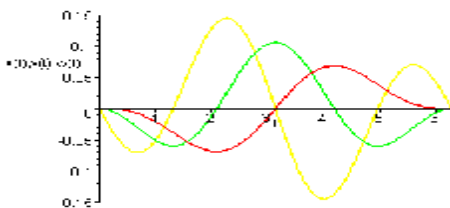


Рисунок 2 - Перемещение $x(t)$, скорость $v(t)$ и ускорение $w(t)$ в относительном движении

С целью оценки влияния высших форм колебаний исследовано поведение системы с двумя степенями свободы. В соответствии с принципом суперпозиции для линейной системы и принципом Даламбера дифференциальные уравнения относительного движения упругого стержня с

сосредоточенными массами записываются как:

$$\delta_{11}m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \delta_{12}m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + x_1 = -\delta_{1p}A \sin pt, \quad (9)$$

$$\delta_{21}m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \delta_{22}m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 = -\delta_{2p}A \sin pt,$$

где δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$, δ_{22} - удельные перемещения, которые для данной

системы вычисляются с использованием интеграла Мора; $\delta_{11} = \frac{I_1^3}{3EI}$,

$$\delta_{12} = \frac{I_2(2I_1 + 3I_2)}{6EI}, \quad \delta_{22} = \frac{(I_1 + I_2)^3}{3EI}; \quad EI - \text{ жесткость стержня при изгибе;}$$

$\delta_{1p} = \delta_{11}m_1 + \delta_{12}m_2$; $\delta_{2p} = \delta_{21}m_1 + \delta_{22}m_2$. Общее решение системы (9) следующее

$$x_1 = A_1 \sin(k_1 t + \lambda_1) + A_2 \sin(k_2 t + \lambda_2) + C_1 \sin pt, \quad (10)$$

$$x_2 = A_1 v_1 \sin(k_1 t + \lambda_1) + A_2 v_2 \sin(k_2 t + \lambda_2) + C_2 \sin pt.$$

Частоты собственных колебаний k_1 , k_2 определяются на основании зависимости:

$$k_{1,2} = \frac{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) \pm \sqrt{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2}}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2}. \quad (11)$$

Коэффициенты форм колебаний v_1 и v_2 соответственно равны:

$$v_1 = -\frac{\delta_{11}m_1k_1^2 - 1}{\delta_{12}m_2k_1^2}; \quad v_2 = -\frac{\delta_{11}m_1k_2^2 - 1}{\delta_{12}m_2k_2^2}.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся из системы линейных алгебраических уравнений, полученной после подстановки в (10) частных решений ($x_1 = C_1 \sin pt$, $x_{21} = C_2 \cos pt$) и преобразований:

$$C_1 = \frac{A[\delta_{12}m_2p^2\delta_{2p} - (\delta_{22}m_2p^2 - 1)\delta_{1p}]}{\Delta},$$

$$C_2 = \frac{A[\delta_{21}m_1p^2\delta_{1p} - (\delta_{11}m_1p^2 - 1)\delta_{2p}]}{\Delta},$$

где $\Delta = m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)$.

Произвольные постоянные A_1 , A_2 в (10) найдены с использованием следующих начальных условий для относительного движения:

при $t = 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. (12)

Выполнение условий (12) означает относительный покой в начальный момент времени. Из (10) с учетом (12) получена

$$A_1 = \frac{(-C_1pv_2k_2 + C_2pk_2)}{\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{(-C_2pk_1 + C_1pv_1k_1)}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = k_1k_2(v_2 - v_1). \quad (13)$$

Численный анализ поведения системы выполнен для следующих исходных данных: $m_1 = m_2 = 20,0$ кг; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $d = 0,04$ м; $I = \frac{\pi d^4}{64}$;

$I_1 = 2,0$ м; $I_2 = 1,0$ м. Частоты собственных колебаний найдены согласно (11): $k_1 = 10,47$ с⁻¹; $k_2 = 80,55$ с⁻¹; этим частотам соответствуют периоды

собственных колебаний $T_1 = 0,6$ с; $T_2 = 0,078$ с. Далее принято $p = \frac{k_1}{2}$,

т.е. $T = 2T_1$, где T - общее время переносного движения упругой системы. Графики перемещений, скоростей и ускорений каждой из масс изображены на рисунках 3,4. В системе наблюдается полное подавление колебаний по обоим модам в момент времени $t_1 = T$.

Выполнение условия кратности частот позволяет устранить колебания по всем модам в момент окончания переносного движения.

Алгоритм проектирования систем с кратными частотами

можно проиллюстрировать на примере системы с двумя степенями свободы. Характеристическое уравнение для определения частот имеет вид

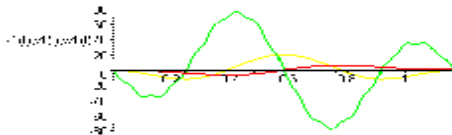


Рисунок 3 – Перемещение, скорость и ускорение первой массы в относительном движении

$$\omega^4 - \frac{A_*}{B} \omega^2 + \frac{1}{B} = 0, \quad (14)$$

где $A_* = \delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2$, $B = (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2$.

Уравнение (14) можно представить как $(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = 0$ или

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0, \quad (15)$$

где ω_1^2 , ω_2^2 - квадраты частот собственных колебаний. Из равенства коэффициентов уравнений (14) и (15) следует система, которая с учетом условия кратности частот $\omega_2 = \eta\omega_1$, где η - целое число ($\eta \geq 2$), записывается как:

$$(1 + \eta^2)\omega_1^2 = \frac{A_*}{B}, \quad \eta^2\omega_1^4 = \frac{1}{B}. \quad (16)$$

Теперь после задания η и других геометрических и физических исходных данных из (16) находится, например, ω_1 и l_2 , при которых обеспечивается кратность частот. Здесь l_2 - расстояние между сосредоточенными массами. Пример. Дано: $m_1 = m_2 = 20,0$ кг;

$E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $d = 0,04$ м; $I = \frac{\pi d^4}{64}$; $l_1 = 2,0$ м; $\eta = 8$. С использованием

программы SOLVE (Maple V) найдены корни системы нелинейных уравнений (16). Из шести пар корней взяты такие, которые удовлетворяют физическому смыслу задачи: $\omega_1 = 10,82$ с⁻¹ ($T_1 = 0,58$ с); $l_2 = 0,92$ м.

На практике общее время переносного движения руки манипулятора ($t = \frac{2\pi}{p}$) как упругой системы

малой жесткости может зависеть от конкретного технологического процесса и мощности используемых приводов. Для определения времени движения системы с одной степенью свободы рекомендуется использовать формулы, которые представляют собой ограничения на мощность привода либо на норму мощности

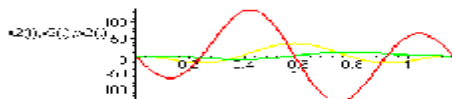


Рисунок 4 - Перемещение, скорости и ускорение второй массы в относительном движении

$$2m \int_0^{\pi/p} U(t)V(t)dt = E_1, \quad 2m \int_0^{\pi/p} U^2(t)dt = E_2, \quad (18)$$

где E_1 , E_2 - константы. После вычисления интегралов с учетом $p = \eta_1 k$ из (18) следует:

$$n_1 = \frac{\pi \sqrt{\frac{E_1}{m}}}{kL}, \quad n'_1 = \frac{1}{kL} \sqrt[3]{\frac{4\pi E}{m}}.$$

Отметим, что время переносного движения системы не может быть меньше либо равно периоду основного тона колебаний, но должно быть кратно периоду основного тона, что устраняет резонанс и обеспечивает отсутствие колебаний в конце движения.

Библиографический список

1. *Вибрации в технике: Справочник. [В 6-ти т.] Т.1. Колеб. линейных систем / Под. ред. В.В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. — 352с.*
2. *Бохонский А.И. Управляемое упругое деформирование твердых тел / А.И.Бохонский // Сб. науч. тр. Сев. гос. техн. ун.-та. — Вып. 1. — Севастополь, 1995. — С. 47 – 57.*
3. *Бохонский А.И. Управляемые колебательные процессы в механике / А.И.Бохонский // Вестн. СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология. — Вып. 25. — Севастополь, 2000. — С. 24 – 29.*

Поступила в редакцию 01.03.2001 г.