

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кафедра "Информатика и управление в технических системах"

СИНТЕЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
к выполнению курсовой работы
по дисциплине "Оптимальные системы управления"
для студентов направления подготовки
27.03.04 – Управление в технических системах



Севастополь
СевГУ
2021

УДК 681.513.5:004.9 (07)
ББК 32.965.09
С38

Р е ц е н з е н т:

В.А. Крамарь – профессор кафедры "Информатика и управление в технических системах", доктор техн. наук, профессор

Составитель: В.А. Карапетьян

С38 Синтез и моделирование оптимальных систем управления : методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине "Оптимальные системы управления" для студентов направления подготовки 27.03.04 Управление в технических системах / Севастопольский государственный университет, Институт информационных технологий и управления в технических системах, кафедра "Информатика и управление в технических системах"; сост. В.А. Карапетьян. – Севастополь: СевГУ, 2021. – 42 с. – Текст : электронный.

В методических указаниях приводится описание курсовой работы, целью которой является развитие у студентов навыков самостоятельного исследования и решения задач линейно-квадратичной оптимизации и анализа влияния параметров синтеза на динамические свойства оптимальной системы управления. Процедура синтеза регулятора и моделирование движения оптимальной САУ проводится в среде Matlab&Simulink.

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 27.03.04 Управление в технических системах.

УДК 681.513.5:004.9 (07)
ББК 32.965.09

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 7 от 23 марта 2021 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании ученого совета института "Информационные технологии и управление в технических системах", протокол № 5 от 15 апреля 2021 г.

© Карапетьян В.А., 2021
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	4
2 ОБЪЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ	4
3 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	5
3.1 Постановка задачи синтеза ЛКР и её решение	5
3.2 Синтез модального наблюдателя	7
3.3 Терминальное программное управление	8
4 ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ	10
4.1 Варианты исходных данных.....	10
4.2 Алгоритм синтеза и моделирование оптимальной САУ	10
4.3 Средства Matlab для реализации алгоритма	10
4.4 Программа и анализ результатов исследований	14
5 ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ.....	16
5.1 Общие требования к структуре и содержанию ПЗ	16
5.2 Общие требования к оформлению ПЗ.....	17
6 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА И ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ РАБОТЫ	22
7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	22
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	23
ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное) Математические модели объектов управления	24
А.1 Двухзвенный робот-манипулятор	24
А.2 Химический реактор с перемешиванием	25
А.3 Летательный аппарат	27
А.4 Трёхбаковая жидкостная система.....	28
А.5 Двигатель постоянного тока	29
А.6 Модель перевёрнутого маятника на тележке	30
А.7 Модель обычного маятника на тележке	31
А.8 Модель маятника Фуруты	32
А.9 Модель электромагнитного подвеса.....	35
А.10 Модель движения подводного аппарата в вертикальной плоскости.....	36
А.11 Трёхзвенный робот-манипулятор	38
А.12 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	40
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Титульный лист пояснительной записки	41
ПРИЛОЖЕНИЕ В Бланк Задания на курсовую работу	42

1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Целью курсовой работы (КР) является овладение методами линейно-квадратического синтеза регуляторов и проведение исследования влияния параметров синтеза на динамические свойства оптимальных систем автоматического управления (САУ).

Основные задачи курсовой работы: закрепление теоретических знаний, полученных студентами при изучении дисциплин учебного плана направления подготовки 27.03.04, в области анализа, синтеза и моделирования систем автоматического управления динамическими объектами и процессами; приобретение практических навыков применения современных программных средств автоматизированного проектирования оптимальных САУ.

2 ОБЪЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ

Описания и математические модели динамических объектов и процессов, для которых в КР необходимо синтезировать линейно-квадратичные регуляторы (ЛКР), приведены в Приложении А. Каждому объекту управления дана краткая характеристика, представлена его математическая модель в терминах пространства состояний, задано начальное положение (состояние). Перечень объектов управления приведён в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Объекты управления

Вариант	Объект управления	Источник
1	Двухзвенный робот-манипулятор	[А.1, А.2]
2		
3	Химический реактор с непрерывным перемешиванием	[А.2÷А.4]
4	Летательный аппарат	[А.5, А.2]
5		
6	Трёхбаковая жидкостная система	[А.6, А.7]
7	Двигатель постоянного тока	[А.5]
8	Перевернутый маятник на тележке	[А.3, А.8, А.9]
9	Обычный маятник на тележке	[А.4]
10	Маятник Фуруты	[А.10, А.3]
11	Электромагнитный подвес	[А. 9, А.3]
12	Подводный аппарат	[А.9, А.11]
13		
14		
15	Трёхзвенный маятник	[А.12]

3 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

3.1 Постановка задачи синтеза ЛКР и её решение

Линейно-квадратические регуляторы (ЛКР или LQR) относятся к классу оптимальных [1÷9]. Синтез таких регуляторов проводится для линейных динамических объектов, а качество управления оценивается величиной квадратического критерия.

Рассматривается линейный стационарный объект, заданный своей моделью в пространстве состояний с начальными условиями x_0 :

$$\text{– уравнение состояний –} \quad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0; \quad (3.1)$$

$$\text{– уравнение выходов –} \quad y(t) = C \cdot x(t). \quad (3.2)$$

Качество управления оценивается величиной интегрального квадратического функционала – интегралом от суммы квадратических форм, построенных на векторах состояния $x(t)$ (размерности n) и управления $u(t)$ (размерности m):

$$\text{– критерий качества –} \quad J = \int_0^{\infty} [x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t)] dt \rightarrow \min, \quad (3.3)$$

где Q – $n \times n$ вещественная симметрическая положительно полуопределённая числовая матрица штрафа при состоянии $x(t)$; R – $m \times m$ вещественная симметрическая положительно определённая числовая матрица штрафа при управлении $u(t)$.

Выбор полубесконечного $[0, \infty)$ интервала времени управления обусловлен следующими соображениями: необходимо удерживать вектор состояния объекта $x(t)$ в окрестности нулевого значения по окончании переходного процесса, вызванного начальными условиями x_0 ; иметь возможность рассматривать поведение системы на любом, сколь угодно большом, интервале времени.

Кратко задача синтеза ЛК-регулятора формулируется так: найти управление $u(t)$, которое бы переводило линейную стационарную систему (ЛСС, LTI) из заданного начального состояния x_0 в состояние покоя $x(t) \rightarrow 0$ и при этом $t \rightarrow \infty$

критерий (3.3) принимал минимально возможное значение.

Достаточными условиями существования решения задачи синтеза оптимального ЛК-регулятора состояния являются полная управляемость объекта (3.1) и полная наблюдаемость пары $\{A, N\}$, где N – матрица, такая, что $N^T N = Q$. Оптимальное управление формируется в виде пропорциональной отрицательной обратной связи по состоянию:

$$u(t) = -K \cdot x(t), \quad (3.4)$$

где K – $m \times n$ матричный коэффициент оптимальной обратной связи, который определяется как произведение

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot P, \quad (3.5)$$

P – $n \times n$ вещественная симметрическая положительно определённая числовая матрица, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$P \cdot A + A^T \cdot P + Q - P \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot P = 0. \quad (3.6)$$

После подстановки выражения для оптимального управления (3.4) в уравнение состояния (3.1), матрица динамических коэффициентов оптимальной системы A_{opt} примет вид:

$$A_{opt} = A - B \cdot K. \quad (3.7)$$

Оптимальная система будет асимптотически устойчивой, а расположение собственных чисел матрицы A_{opt} в левой полуплоскости будет определяться выбором значений матриц штрафов функционала (3.3). Структура оптимальной системы имеет следующий вид (рисунок 3.1).

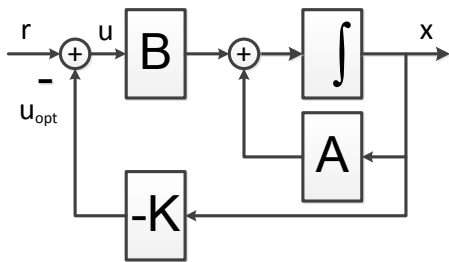


Рисунок 3.1 – Структура САУ с ЛК-регулятором

Построенный на основе соотношений (3.1) и (3.3) ЛК-регулятор называют регулятором состояния. На практике часто требуется управлять не всем вектором состояния $x(t)$, а только управляемыми переменными – вектором выхода $y(t)$ (размерности p). В этом случае необходимо учитывать и уравнение выходов (3.2) модели объекта управления и

включить в критерий качества квадратическую форму, построенную на векторе выходов. Тогда выражение (3.3) необходимо заменить на следующее:

$$J = \int_0^{\infty} [y^T(t) \cdot M \cdot y(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t)] dt \rightarrow \min, \quad (3.8)$$

где M – $p \times p$ вещественная симметрическая положительно полуопределённая числовая матрица штрафа при выходе $y(t)$.

Функционал (3.3), с подстановкой в нём вместо вектора $y(t)$ произведения $C \cdot x(t)$ в соответствии с (3.2), примет вид (3.3), где матрица штрафа Q замещается матрицей $C^T \cdot M \cdot C$.

Дополнительное условие полной наблюдаемости пары $\{A, C\}$ является достаточным для существования и единственности положительно определённого решения уравнения Риккати (3.6), в котором также следует заменить матрицу Q на матрицу $C^T \cdot M \cdot C$:

$$P \cdot A + A^T \cdot P + C^T \cdot M \cdot C - P \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot P = 0. \quad (3.9)$$

Выражение для оптимального управления (3.4) остаётся прежним. ЛК-регулятор, построенный по соотношениям (3.5), (3.7) и (3.9) называют оптимальным регулятором выхода.

3.2 Синтез модального наблюдателя

Решение задачи синтеза оптимальной САУ с ЛК-регулятором предполагает наличие информации о текущем состоянии объекта $x(t)$. Здесь управляющий сигнал $u(t)$ формируется в виде обратной связи по состоянию (3.4), т.е., предполагается, что весь вектор состояния $x(t)$ доступен для измерения в каждый момент времени t . Однако практическая реализация таких регуляторов существенно затруднена в силу различных причин. Все эти причины обусловлены одним – отсутствием возможности измерения в режиме реального времени всех компонентов вектора состояния $x(t)$. Связано это обычно с ограничениями на количество, качество или, собственно, наличие необходимых измерительных устройств (датчиков). Часто не представляется возможным использовать измерители по причинам их стоимости, массогабаритных ограничений, обеспечения безопасности функционирования объекта управления и т.п.

В реальности в САУ измеряется выходная (наблюдаемая) переменная $y(t)$, которая в случае ЛСС формируется из отдельных компонентов вектора состояния объекта и/или их линейных комбинаций (3.2):

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t).$$

Здесь следует заметить, что наблюдению доступен и вектор управляющих переменных $u(t)$, так как он формируется регулятором, выходные сигналы которого всегда можно измерить.

Информация об $y(t)$ и $u(t)$ доступна в каждый текущий момент времени и она может быть использована для получения оценок $\hat{x}(t)$ текущих значений вектора состояния $x(t)$. Таким образом, возникает задача синтеза устройства, в котором бы по результатам измерений выходных переменных $y(t)$ и управляющих воздействий $u(t)$, формировалась в реальном времени вектор-функция $\hat{x}(t)$, "близкая" к значениям вектор-функции состояния объекта управления $x(t)$. Такого рода устройства называют наблюдающими устройствами – наблюдателями состояния [3, 5].

Для ЛСС (ЛТИ-объектов) проблема формирования такой оценки сводится к построению некоторой линейной стационарной системы (наблюдателя), динамические свойства которой могут быть специальным образом заданы. Предлагается выбрать в качестве математической модели наблюдателя следующую динамическую систему:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - (C\hat{x}(t) + Du(t))], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (3.10)$$

Здесь L – матричный коэффициент усиления наблюдателя;

$y(t)$ и $u(t)$ – измеряемые значения векторов управляемых и управляющих переменных;

$y(t) - (C\hat{x}(t) + Du(t))$ – невязка (разность) значений измеряемого выхода объекта $y(t)$ и оценки выхода $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t)$;

$\hat{x}_0$ – вектор начального состояния наблюдателя.

На рисунке 3.2 приведена структурная схема оптимальной САУ, включа-



Рисунок 3.2 – Структурная схема оптимальной САУ с наблюдателем состояния

ющая в себя объект управления, ЛК-регулятор и модальный наблюдатель состояния.

Необходимым и достаточным условием назначения матрицы наблюдателя $A-LC$ произвольного спектра (произвольного множества мод) является полная наблюдаемость пары $\{A, C\}$.

Синтезированный таким способом наблюдатель состояния называют модальным наблюдателем состояния полного порядка.

В этом случае выражение (3.4) для оптимального, а точнее, субоптимального, управления объектом (3.1), (3.2) примет вид:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) = -R^{-1}B^T P \cdot \hat{x}(t), \quad (3.11)$$

где $K = R^{-1}B^T P$ – матрица коэффициентов оптимального ЛК-регулятора; P – симметрическая матрица, которая определяется из алгебраического матричного уравнения Риккати (3.9);

$\hat{x}(t)$ – оптимальная оценка состояния объекта управления, которая генерируется наблюдателем полного порядка (3.10).

Важно отметить следующее – если начальное состояние наблюдателя $\hat{x}_0$ окажется равным начальному состоянию объекта управления x_0 , то наблюдатель (3.10), начиная с начального момента времени, будет генерировать оценку состояния $\hat{x}(t)$, полностью совпадающую с вектором состояния объекта управления $\hat{x}(t) \equiv x(t)$.

3.3 Терминальное программное управление

Рассматривая детерминированную постановку задачи управления стационарным объектом (3.1) и предполагая полную его управляемость, систему управления объектом можно построить на основе принципа программного управления. Такое управление, не будучи оптимальным, позволяет, однако, решить задачу перевода объекта из произвольного начального состояния $x(t_0)=x_0$ в произвольное конечное состояние $x(t_k)=x_k$. Здесь моменты времени $t_0=0$ и t_k , как и состояния x_0 и x_k , задаются заранее.

Общее движение стационарной системы (3.1) при известных начальных условиях x_0 и управляющего воздействия $u(t)$ может быть представлено формулой Коши-Лагранжа:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.12)$$

Замечание. Для стационарной системы (3.1) переходная матрица $\Phi(t)$ является матричной экспонентой e^{At} .

Грамианом управляемости системы (3.1) в момент времени t_k называют положительно полуопределённую матрицу

$$W_C(t_k) = \int_0^{t_k} e^{A(t_k-\tau)} BB^T e^{A^T(t_k-\tau)} d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \text{Введя замену} \\ \theta = t_k - \tau \end{array} \right\} = \int_0^{t_k} e^{A\theta} BB^T e^{A^T\theta} d\theta. \quad (3.13)$$

Для полностью управляемых стационарных систем грамиан (3.13) является строго положительно определённой матрицей для любого $t_k > 0$, поэтому для любого $t_k > 0$ существует обратная матрица $W_C^{-1}(t_k)$.

Покажем, что управление, сформированное в виде векторной функции

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_k-t)} W_C^{-1}(t_k) [x_k - e^{At_k} x_0]. \quad (3.14)$$

переведёт систему (3.1) из заданного начального состояния $x(0)=x_0$ в заданное конечное состояние $x(t_k)=x_k$.

Доказательства этого утверждения проводится простой подстановкой выражения (3.14) в формулу Коши-Лагранжа (3.12) для $t = t_k$:

$$\begin{aligned} x_k = x(t_k) &= e^{At_k} x_0 + \int_0^{t_k} e^{A(t_k-t)} B u(t) dt = \\ &= e^{At_k} x_0 + \int_0^{t_k} e^{A(t_k-t)} BB^T e^{A^T(t_k-t)} W_C^{-1}(t_k) [x_k - e^{At_k} x_0] dt = \\ &= e^{At_k} x_0 + \int_0^{t_k} e^{A(t_k-t)} BB^T e^{A^T(t_k-t)} dt \cdot W_C^{-1}(t_k) [x_k - e^{At_k} x_0] = \\ &= e^{At_k} x_0 + W_C(t_k) \cdot W_C^{-1}(t_k) [x_k - e^{At_k} x_0] = e^{At_k} x_0 + [x_k - e^{At_k} x_0] = x_k. \end{aligned}$$

Применение выражения (3.14) для формирования управления $u(t)$, переводящего полностью управляемую систему (3.1) из состояния x_0 в состояние x_k , требует вычислить грамиан (3.13) и обратить его, а также следует определять значение матричной экспоненты $e^{A^T(t_k-t)}$ в каждый момент времени $t \in [0, t_k]$.

Вычисление грамиана управляемости $W_C(t_k)$ непосредственно по формуле (3.13) затруднительно. Поэтому грамиан $W_C(t_k)$ получают как решение следующего матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{dW_C(t)}{dt} = AW_C(t) + W_C(t)A^T + BB^T, \quad t \in [0, t_k], \quad W_C(0) = O. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) формируется дифференцированием выражения (3.13) по переменной t :

$$\frac{d}{dt} W_C(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-\tau)} BB^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau.$$

Здесь применяется правило Лейбница дифференцирования интеграла по переменным пределам

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(\tau, t) d\tau = f(\beta(t), t) \frac{d\beta(t)}{dt} - f(\alpha(t), t) \frac{d\alpha(t)}{dt} + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(\tau, t) d\tau.$$

4 ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

4.1 Варианты исходных данных

Номер варианта и объект оптимального управления выбирается студентом из таблицы 2.1 в соответствии с порядковым номером записи в журнале группы. Необходимо синтезировать оптимальную систему стабилизации линеаризованной модели объекта в окрестности её нулевого состояния (в окрестности состояния объекта управления, выбранного в качестве точки линеаризации). Схема оптимальной системы стабилизации изображена на рисунке 3.2. Математические модели объектов управления, их линеаризованные модели и значения параметров приведены в разделах Приложения А.

4.2 Алгоритм синтеза и моделирование оптимальной САУ

Алгоритм решения задачи синтеза САУ с ЛК-регулятором выхода и модальным наблюдателем состояния объекта управления (рисунок 3.2) определяется последовательностью перечисленных ниже шагов.

1. Формирование матриц модели объекта управления **A**, **B**, **C** и **D**.
2. Проверка свойства полной управляемости пары **{A, B}**.
3. Проверка свойств полной наблюдаемости пары **{A, C}**.
4. Формирование модели объекта управления в виде (3.1), (3.2).
5. Задание матриц штрафов **M** ≥ 0 и **R** > 0 функционала качества (3.8).
6. Решение уравнения Риккати (3.9) и получение матрицы **P**.
7. Определение матрицы (3.5) оптимального регулятора **K** = **R**⁻¹**B**^T**P**.
8. Вычисление матричного коэффициента усиления наблюдателя **L**.
9. Формирование модели наблюдателя в виде (3.10).
10. Вычисление грамиана управляемости как решение уравнения (3.15).
11. Формирование терминального программного управления по (3.14).
12. Моделирование программного движения объекта управления в Matlab.
13. Организация Simulink-схемы оптимальной САУ по схеме рисунка 3.2.
14. Моделирование поведения оптимальной САУ в Simulink.

4.3 Средства Matlab для реализации алгоритма

Исполнение первых двенадцати шагов алгоритма синтеза и моделирования движения САУ может быть поддержано математическими функциями Matlab, которые сведены в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Функции Matlab, обеспечивающие исполнение алгоритма

Шаг алгоритма	Функция Matlab	Описание функции
1	—	Стандартные приёмы формирования числовых массивов
2	ctrb	Формирование матрицы управляемости ЛСС
	rank	Вычисление ранга матрицы
3	obsv	Формирование матрицы наблюдаемости ЛСС
	rank	Вычисление ранга матрицы
4	ss	Формирование модели объекта управления в пространстве состояний
5	—	Стандартные приёмы формирования числовых массивов
6	care	Решение уравнения Риккати для случая непрерывных ЛСС
7	lqry	Решение детерминированной задачи синтеза ЛК-регулятора выхода
8	acker, place	Вычисление матричного коэффициента усиления наблюдателя L
9	ss	Формирование динамической модели модального наблюдателя
10	reshape ode45	Переформатирование массивов данных Численное решение системы обыкновенных диф. уравнений
11	expm	Вычисление матричной экспоненты
12	lsim	Вычисление реакции линейной системы на произвольное воздействие
13	Simulink	Формирование Simulink-схемы
14		Моделирование поведения оптимальной САУ в Simulink

Функция **ctrb** формирует матрицу управляемости U (размерности $n \times (n \times m)$) линейной стационарной системы (3.1) в виде

$$U = [B : A \cdot B : A^2 \cdot B : \dots : A^{n-1} \cdot B].$$

Функция **ctrb** используется в двух формах:

$$U = \text{ctrb}(A, B) \quad \text{или} \quad U = \text{ctrb}(\text{sys}).$$

Функция **rank** предназначена для вычисления ранга матрицы:

$$r = \text{rank}(M).$$

Функция **obsv** формирует матрицу наблюдаемости O линейной стационарной системы (3.1), (3.2) размерностью $(n \times p) \times n$.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Функция **obsv** используется в двух формах:

$$O = \text{obsv}(A, C) \quad \text{или} \quad O = \text{obsv}(\text{sys}).$$

Функция **ss** формирует модель линейной стационарной системы в терминах пространства состояний по соотношениям (3.1), (3.2):

$$\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, D).$$

Для отдельного решения уравнения Риккати (3.6) может быть применена функция **care**, вызов которой осуществляется обычно в виде:

$$[P, E, K] = \text{care}(A, B, Q, R).$$

Здесь матрицы A, B, Q, R, P и K образуют соотношения (3.5) и (3.6), вектор E сформирован из собственных чисел матрицы динамических коэффициентов оптимальной системы A_{opt} (3.7).

Функция **lqry** из библиотеки Control System Toolbox (CST) решает задачу синтеза ЛК-регулятора *выхода*. Функция **lqry** вызывается либо в укороченной форме

$$K=lqry(sys,M,R),$$

либо в полной форме

$$[K,P,E]=lqry(sys,M,R),$$

где **sys=ss(A,B,C,D)** – модель объекта управления (3.1), (3.2).

Синтез ЛК-регулятора *состояния* проводится функцией **lqr**:

$$K=lqr(A,B,Q,R) \text{ или } [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R).$$

В первом случае функция **lqr** возвращает только матрицу оптимальной обратной связи **K**, а во втором – помимо матрицы **K**, ещё матрицу **P** – решение уравнения Риккати (3.6) и вектор собственных чисел **E** матрицы динамики оптимальной системы **A_{opt}** (3.7). Входными параметрами функции **lqr** являются матрицы модели объекта **A** и **B** из (3.1), а также матрицы штрафов **Q** и **R** функционала (3.3). Вместо первых двух входных параметров (**A** и **B**) допускается использование одного параметра **sys** – идентификатора **ss**-модели объекта управления (3.1) и (3.2), т.е., **K=lqr(sys,Q,R)**, где **sys=ss(A,B,C,D)**.

Синтез модальных наблюдателей полного порядка, как и модальных регуляторов, обеспечивают функции **acker** и **place**. Параметрами функций являются матрицы модели **A**, **C** и вектор желаемых собственных чисел **p** для матрицы **A-LC**. Применение одних и тех же функций, как для синтеза модальных регуляторов, так и наблюдателей, обусловлено справедливостью двойственности задач управления и наблюдения для линейных динамических систем.

Вызов функций **acker** и **place** производится командами со следующим набором параметров:

$$L=acker(A',C',p)' \text{ или } L=place(A',C',p)'.$$

Здесь **A** и **C** – матрицы модели объекта управления (3.1), (3.2);

p – числовой вектор, содержащий **n** желаемых собственных чисел матрицы динамики **A-LC** синтезируемого наблюдателя состояния (3.10);

символ **(')** (апостроф) – знак операции транспонирования (для вещественнозначных массивов). Возвращаемый функциями матричный коэффициент наблюдателя **L** также должен быть транспонирован (что и осуществляется последней, третьей, операцией транспонирования в операторе вычисления **L**).

Функция **acker** предназначена для вычисления матрицы коэффициентов модального наблюдателя **L** только для объектов со скалярным выходом (**C** – матрица-строка). Рекомендуются использовать объекты невысокого порядка.

Функция **place** применяется как при синтезе модальных наблюдателей со скалярным выходом, так и с векторным. Для объектов со скалярным выходом функции **acker** и **place** при одинаковых исходных данных возвращают одну и ту же матрицу коэффициентов наблюдателя **L**. В случае же векторного выхода (матрица **C** имеет более одной строки), алгоритм, реализуемый функцией **place**, формирует модальный наблюдатель, свойства которого обладают ми-

нимальной чувствительностью к возмущениям значений коэффициентов матриц A и C . При задании вектора желаемых полюсов p , следует также иметь ввиду, что кратность назначаемых полюсов в p не должна превышать ранг матрицы C .

Функция **reshape** используется для изменения формы массива данных, например, преобразование одномерного $n \times m$ -массива X в правильный двумерный $n \times m$ -массив Y :

`Y=reshape(X,[n m])` .

Функция **ode45** – один из "решателей" (solver) нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

`[time_out,x_out] = ode45(fun_RP,time,x0)`

Функция **expm** предназначена для вычисления значения матричной экспоненты для матрицы A : **`expm(A)`** .

Для формирования терминального управления в виде (3.14) используются функция **expm** – вычисление матричной экспоненты и функция-решатель системы дифференциальных уравнений, например, **ode45**. Так как (3.15) матричная система ОДУ, то предварительно следует преобразовать матрицу $W_c(t)$ в вектор из её столбцов. Это можно сделать с помощью функции **reshape**.

Решение матричного дифференциального уравнения (3.15) можно осуществить, например, таким образом:

```
.....
.....
% вычисление грамиана управляемости Wc(t1) по (3.15)
nn=n*n;
X_Gr_0=zeros(nn,1);
t0=0; t1=1; h=(t1-t0)/500;
[time,Gr_Vec]=ode45(@RP_Gram,[t0:h:t1],X_Gr_0);
temp=Gr_Vec(end,:);
Gr_c=reshape(temp,[n n]); % грамиан управляемости Wc(t1)
% формирование "терминального" управления U(t) по (3.14)
U=[];
for a=0:length(time)-1
    tic=t1-a*h;
    U=[U B'*expm(A*tic)'*Gr_c^-1*(x1-expm(A*(t1-t0))*x0)];
end;
% функция вычисления правых частей ДУ для получения Wc(t1)
function Y=RP_Gram(t,X);
global A B n nn;
Y=zeros(nn,1);
W_c=reshape(X,[n n]);
RP=A*W_c+W_c*A'+B*B';
Y=reshape(RP,[nn 1]);
end
```

Функция **feedback** предназначена для организации структуры линейной стационарной системы с обратной связью:

`sys_fb=feedback(sys_pr,sys_oc,znak)` .

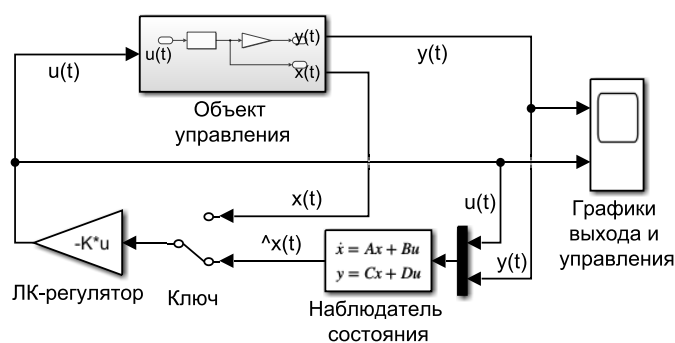
Здесь **sys_fb** – модель замкнутой системы (с обратной связью); **sys_pr** – модель подсистемы в прямой цепи; **sys_oc** – модель подсистемы в цепи обратной связи.

Функция **lsim** используется для определения реакции линейной стационарной системы на произвольное воздействие:

$$[y, t, x] = \text{lsim}(\text{sys}, u, t, x_0) .$$

Здесь **y**, **t**, **x** – вычисленные массивы данных выхода, времени и состояния системы **sys**; **u**, **t**, **x0** – числовой массив входного воздействия, величина интервала времени моделирования, вектор начальных условий (для модели пространства состояний).

На рисунке 3.3 приведена примерная схема Simulink-модели оптимальной САУ. На схеме изображены следующие блоки: подсистема "Объект управления" в форме блока Subsystem; блок State Space "Наблюдатель состояния"; блок Gain "ЛК-регулятор"; блок ManualSwitch "Ключ"; блок Scope "Графики выхода и управления".



Наличие блока "Ключ" позволяет довольно просто отключать наблюдатель состояния и имитировать идеальную ситуацию полного и точного измерения вектора состояния $x(t)$. На схеме также отмечены сигналы состояния $x(t)$, выхода $y(t)$, управления $u(t)$ и оценки состояния $\hat{x}(t)$.

Рисунок 3.3 – Simulink-схема САУ с ЛК-регулятором и наблюдателем состояния

4.4 Программа и анализ результатов исследований

Здесь излагается примерная программа проведения компьютерного моделирования оптимальной системы стабилизации с целью проверки её динамических свойств и качества управления.

1. Провести анализ влияния значений матриц штрафов **M** и **R** в функционале качества (3.8) на динамические характеристики оптимальной системы управления (быстродействие, перерегулирование, колебательность и т.п.). Моделирование оптимальной системы проводить при условии полного и точного измерения вектора состояния объекта управления. Выбрать приемлемые (с физической и математической точек зрения) параметры оптимального регулятора.
2. Оценить влияние динамики наблюдателя (3.10) на качество работы оптимальной системы управления (варьировать набором назначаемых собственных чисел наблюдателя). Здесь следует использовать параметры регулятора, выбранные в предыдущем пункте. Подобрать приемлемый набор собственных чисел наблюдателя.

3. Оценить влияние выбора начального состояния наблюдателя $\hat{x}_0$ на качественные показатели работы оптимальной системы.
4. Моделирование программного терминального (3.14) управляемого движения *линеаризованного* объекта следует проводить с помощью Matlab-программы в форме m-файла. Начальное $x_0=x(0)$ и конечное $x_k=x(t_k)$ состояния и интервал времени $[0, t_k]$ управления следует выбирать самостоятельно с учётом реальных физических динамических свойств объекта.

Замечание. При проведении компьютерного моделирования начальное состояние x_0 *линеаризованного* объекта управления следует выбрать самостоятельно с учётом необходимых физических и математических требований к моделированию *линеаризованной* системы.

Результаты моделирования и выводы по проведённым исследованиям должны быть достаточно полно проиллюстрированы в числовом и графическом виде.

5 ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

Приведённые здесь рекомендации и требования по оформлению пояснительной записки (ПЗ) к курсовой работе основаны на материалах ГОСТ 7.32-2017 СИБИД. Отчет о НИР. Структура и правила оформления¹.

5.1 Общие требования к структуре и содержанию ПЗ

Структурно в ПЗ выделяют вводную часть, основную часть и приложения. Обязательными элементами ПЗ являются: титульный лист; задание на КР; содержание; введение; основная часть работы; заключение; список использованных источников.

Структурные элементы ПЗ необходимо размещать в следующем порядке:

- титульный лист (специальный бланк) – первый лист ПЗ;
- задание на курсовую работу (специальный бланк) – второй лист ПЗ;
- **содержание** ПЗ – третий лист ПЗ;
- **введение**;
- **основная часть**, (разделы, отражающие существо КР);
- **заключение**;
- **список использованных источников**;
- **приложения** (если они необходимы).

Основная часть состоит из разделов, подразделов, пунктов и подпунктов, которые не являются структурными элементами ПЗ.

Титульный лист и лист задания оформляются в виде специальных бланков (Приложение А и Б).

Содержание включает в себя номера и наименования разделов и подразделов, а также именованных пунктов и подпунктов, начиная с "Введения" с указанием номеров страниц.

Во **Введении** кратко излагается общая характеристика проблемы синтеза САУ, указывается место задачи синтеза ЛК-регулятора в проблеме. Далее, в повествовательном стиле лаконично характеризуются разделы пояснительной записки, их отношение к решаемой в КР задаче.

Основная часть ПЗ состоит из разделов, содержащих:

- а) математическое описание задачи – даётся развёрнутая постановка задачи с полной характеристикой исходных данных и их математических свойств, а также полное описание решения задач синтеза регулятора и условий его существования;
- б) описание объекта управления и его математической модели, с указанием численных значений всех составляющих модели объекта, а также параметров критерия качества управления;

¹ ГОСТ 7.32-2017 СИБИД. Отчет о НИР. Структура и правила оформления [Текст]. – Введ. 2018-07-01. – М.: Стандартинформ, 2018. – 27 с.

в) графическое представление и подробная характеристика структуры оптимальной САУ, её подсистем и элементов, а также описание функционального назначения подсистем оптимальной САУ;

г) тексты Matlab-программ (m-программ), соответствующих алгоритмам решения задач синтеза (подраздел 3.2), их подробные описания и численные результаты промежуточных вычислений;

д) графические изображения Simulink-схем моделирования оптимальной САУ с полным описанием Simulink-блоков и их опциональных и численных параметров;

е) численные и графические результаты моделирования, развёрнутый анализ проведённых исследований и соответствующие выводы.

В **Заключении** необходимо перечислить и кратко охарактеризовать этапы выполнения задания, сформулировать основные выводы по работе.

Список использованных источников должен включать названия только тех источников (книг, статей, интернет-ссылок и т.п.), на которые в тексте ПЗ имеются ссылки.

Приложения содержат материалы, которые исполнитель по каким-либо причинам не счёл необходимым включить в основной текст ПЗ. Сюда могут быть помещены громоздкие математические выкладки, объёмные тексты программ, таблицы результатов эксперимента, графики, иллюстрации, описания основного программного обеспечения и вспомогательных пакетов и библиотек и т.п.

Текст в разделах ПЗ должен быть кратким, чётким и не допускать различных толкований. Необходимо применять научно-технические термины, обозначения и определения, установленные соответствующими стандартами, а при их отсутствии - общепринятыми в научно-технической литературе. Не допускается применять обороты разговорной речи, техницизмы, профессионализмы, сленг.

Если в документе принята специфическая терминология или особая система сокращений слов и наименований, то оформляются соответствующие структурные элементы — "Перечень терминов" и "Перечень сокращений". Они вставляются перед "Введением" и включаются в "Содержание".

Полный объем ПЗ, должен быть в пределах 20÷25 листов формата А4 (без учёта листов Приложений).

5.2 Общие требования к оформлению ПЗ

ПЗ оформляют на листах белой бумаги формата А4 (210х297мм) компьютерным способом на одной стороне листа. Текст следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: левое – 30 мм; правое – 15 мм, верхнее и нижнее – 20 мм. Тип шрифта для основного текста ПЗ – Times New Roman.

Нумерация страниц ПЗ осуществляется арабскими цифрами в центре нижней части листа без точки в конце. Используется сквозная нумерация, т.е. номера присваиваются всем без исключения страницам ПЗ, включая

титульный. При этом титульный лист ПЗ и лист Задания на КР не нумеруются, но в сквозной нумерации учитываются. В нашем случае **всегда** лист "Содержание" будет иметь **номер 3**.

Заголовки структурных элементов ПЗ не нумеруют, печатают заглавными полужирными буквами без точки в конце и центрируют в строке (**СОДЕРЖАНИЕ, ВВЕДЕНИЕ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ, СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ, ПРИЛОЖЕНИЕ**)

Основная часть работы делится на разделы, подразделы, пункты и подпункты. **Разделы** ПЗ имеют порядковую нумерацию и обозначаются арабскими цифрами без завершающей точки. **Подразделы** должны иметь порядковую нумерацию **в пределах своего раздела**. Номер подраздела состоит из номера раздела и порядкового номера подраздела, разделённых точкой (например, 2.3 – подраздел 3 раздела 2). После номера подраздела точка не ставится. **Пункты** подраздела требуют "тройной" нумерации (например, 2.3.4 – пункт 4 в подразделе 3 раздела 2). ГОСТ допускает "четверную" нумерацию для **подпунктов**. Последующие уровни нумерации ГОСТом не предусмотрены. Разделы и подразделы **должны** иметь заголовки, а пункты и подпункты **могут** их иметь. **Все заголовки** элементов **основной части** следует печатать полужирным шрифтом с основного абзачного отступа строчными буквами, начиная с прописной, без точки в конце, не подчёркивая. Если заголовков состоит из нескольких предложений, то их разделяют точкой. Переносы слов в заголовках не допускаются.

Текст и перечисления

Для набора текста в качестве основного шрифта следует применять шрифт Times New Roman. Оформление заголовков допускается осуществлять шрифтом Arial. Размер символов – 14 пунктов.

Междустрочный интервал в тексте – полуторный. Абзацный отступ – один по всему тексту, равный 1,25 см. Выравнивание текста в абзаце – по ширине. Не разрешается оставлять одну строку абзаца на странице. Допускается перенос слов в основном тексте.

Текст компьютерных программ рекомендуется набирать шрифтом Courier, размером 12 пунктов с одинарным междустрочным интервалом.

Каждый **структурный элемент** ПЗ и каждый **раздел основной части** ПЗ должен начинаться с новой страницы.

Все заголовки от основного текста отделяются одной пустой строкой. Междустрочный интервал для следующих подряд один за другим заголовков выбирается таким же, как и в основном тексте.

Не допускается размещать наименование подраздела, пункта и подпункта в нижней части страницы, если после него расположена только одна строка текста.

Перечисления (списки) используются внутри любых структурных единиц документа и могут иметь уровни детализации. Перед перечислением ставится двоеточие. Элементы перечисления отделяются друг от друга точками с запятой. Каждая позиция перечисления **первого** уровня детализации начинает

ся с абзацного отступа и обозначается строчной буквой национального алфавита с последующей закрывающей круглой скобкой или, если не требуется идентификация позиции, обозначается дефисом. Для дальнейшей детализации (**второй** и последующие уровни) перечисления используются дефис или арабские цифры со скобкой, располагаемые с отступом относительно положения элементов перечислений первого уровня детализации.

Формулы и уравнения

Формулы и уравнения располагают и **центрируют** в отдельных строках непосредственно после текста, в котором они упомянуты. Выше и ниже каждой формулы или уравнения необходимо оставить не менее одной пустой строки. Применяется сквозная порядковая нумерация математических выражений **в пределах раздела**. Номер формулы состоит из двух чисел, разделённых точкой – номера раздела и порядкового номера формулы в разделе. Нумеруются **только** те формулы и уравнения, на которые имеются ссылки в тексте ПЗ.

Номера записываются в круглых скобках на уровне формулы или уравнения в **крайнем правом** положении в строке.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов приводят непосредственно под формулой или уравнением в той последовательности, в которой они встречаются. Пояснения для каждого символа следует давать с новой строки. Первую строку пояснений начинают с абзацного отступа словом "где" без двоеточия. Перенос формулы или уравнения на следующую строку допускается только на знаках выполняемых операций, причём знак операции повторяется на следующей строке. Идущие в последовательных строках формулы, не разделённые текстом, отделяются запятыми. Размеры символов в редакторе формул следует выбирать такими: обычный – 14 пт; крупный индекс – 9 пт; мелкий индекс – 7 пт; крупный символ – 22 пт; мелкий символ – 14 пт.

Иллюстрации

Иллюстрации (чертежи, рисунки, графики, схемы, диаграммы, фотоснимки) следует помещать непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые или на следующей странице. На одной странице можно располагать несколько иллюстраций. На все иллюстрации в тексте должны быть ссылки. Если иллюстрация создана не автором работы, необходимо указать библиографическую ссылку на её источник. Иллюстрации **могут** иметь названия, которые помещаются **под** иллюстрацией. При необходимости, **между** иллюстрацией и её названием размещают поясняющие данные (подрисуночный текст).

Любая иллюстрация, имеющая название, обозначается словом "Рисунок" с последующими атрибутами – номер, дефис и собственно название иллюстрации. Например, "Рисунок 3.1 – График переходного процесса". Вся эта фраза центрируется под рисунком. Если наименование рисунка состоит из нескольких строк, то его следует записывать через один межстрочный интервал. Наименование рисунка приводят с прописной буквы без точки в конце. Перенос слов в наименовании графического материала не допускается. Нумерация иллюстра-

ций осуществляется арабскими цифрами по порядку в **пределах раздела**. Точка после последней цифры в номере не ставится. Если иллюстрация не умещается на одной странице, то её можно переносить на последующие страницы. При этом название иллюстрации обязательно должно присутствовать на первой странице. На каждой последующей странице под продолжением рисунка могут размещаться поясняющие данные и под ними **обязательно** приводят обозначение продолжения рисунка, например, "Рисунок 2.12, лист 2".

Таблицы

Таблицу располагают сразу после ссылки на неё в тексте или на следующей странице. На каждую таблицу в работе должна быть ссылка. Таблицы **могут** иметь краткие названия, которые помещают без абзачного отступа слева над таблицами. Если наименование таблицы занимает две строки и более, то его следует записывать через один межстрочный интервал.

Нумеруют таблицы арабскими цифрами по порядку в **пределах раздела**. Точка после последней цифры в номере не ставится. При переносе части таблицы на другие страницы для этих частей повторяют головные строки таблицы (головные строки допускается заменять номерами граф или строк), **над** которыми пишут "Продолжение таблицы XXX". Заголовки колонок печатают, начиная с прописных букв, а подзаголовки, если они составляют одно предложение с заголовком, – со строчных, иначе – также с прописных, без точек в конце и в единственном числе. В таблице допускается применять размер шрифта меньше, чем в тексте ПЗ.

Список использованных источников

Ссылки на библиографические источники указывают их порядковыми номерами, помещёнными в квадратные скобки. Например, [2, 3, 7 – 12]. Ссылки на источники оформляют в виде перечня отдельным **структурным элементом** ПЗ с названием "**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**".

Сведения об источниках располагают в порядке появления ссылок на источники в тексте ПЗ, нумеруют арабскими цифрами без точки и печатают с абзачного отступа. Примеры оформления элементов списка источников приведены ниже.

1 Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления: /Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Наука, 1977. – 650 с.

2 Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп., Т.3: Синтез регуляторов систем автоматического управления [Текст]: /Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 616 с.

3 Гантмахер Ф.Р. Теория матриц /Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988 –552 с.

4 Брайсон А. Новые идеи по теории управления /А. Брайсон//Аэрокосмическая техника. – 1986. – № 8. – С. 31-42.

5 Chu E.K. Optimization and Pole Assignment in Control System Design /E.K. Chu//Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2001, Vol. 11, No.5, pp.1035-1053.

6 Никульчев Е.В. Пособие "Control System Toolbox". Синтез оптимального управления с полной обратной связью [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://matlab.exponenta.ru/controlsystem/book1/5.php>. – Загл. с экрана.

Приложения

Приложения, как и любые структурные элементы ПЗ, начинаются с новой страницы. Объёмные приложения могут иметь свою внутреннюю автономную структуру, включая разделы, подразделы, пункты и подпункты. На первой странице Приложения в первой его строке посередине с прописными буквами печатают слово **ПРИЛОЖЕНИЕ** и прописную букву (без завершающей точки), обозначающую приложение – **ПРИЛОЖЕНИЕ А**. Приложения обозначают заглавными буквами национального алфавита, начиная с А, за исключением букв (Ё, З, Й, О, Ч, Ь, Ы, Ъ). Если приложение в ПЗ единственное, то оно также обозначается буквой А.

Приложения могут быть **обязательными** или **информационными** (рекомендуемыми или справочными). Поэтому, в следующей, после слова "**ПРИЛОЖЕНИЕ**", строке в круглых скобках строчными буквами печатают одно из слов: "обязательное", "справочное" или "рекомендуемое". Каждое Приложение должно иметь заголовок (название Приложения), который печатается в третьей сверху строке строчными буквами с первой прописной и центрируется.

Для нумерации страниц Приложений используется сквозная нумерация в пределах всей ПЗ. Иллюстрации, таблицы, формулы нумеруют в пределах всего Приложения (не разделов Приложения), например, "Рисунок Б.5 – Структурная схема САУ". Перед каждым номером структурной части Приложения также проставляют обозначение Приложения (букву), например, Б.3.2. (второй подраздел третьего раздела Приложения Б).

Ссылки на источники, цитируемые только в Приложении, рассматриваются независимо от ссылок в основных разделах ПЗ. Перечень таких ссылок должен быть оформлен как отдельный раздел Приложения и помещён в конце этого Приложения.

6 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА И ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ РАБОТЫ

ПЗ должна включать в себя структурные элементы и разделы, состав и содержание которых указано в подразделе 5.1 настоящих указаний.

Выполнение и защита курсовой работы производится каждым студентом индивидуально. Защита результатов курсовой работы осуществляется при наличии полностью оформленной ПЗ, работающих программ и состоит в следующем:

- краткий доклад по результатам выполненной работы;
- представление и демонстрация работы программ;
- ответы на вопросы по теоретической и практической частям работы.

7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

При сдаче курсовой работы необходимо уметь полно и подробно отвечать на вопросы, касающиеся:

- математической постановки задачи и достаточных условий её решения;
- формы, структуры и содержания математической модели объекта управления;
- последовательности и существа шагов алгоритма решения задачи синтеза;
- назначения, структуры и содержания разработанных Matlab-программы формирования и расчёта параметров регулятора и Simulink-схемы моделирования оптимальной САУ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы : учебник и практикум для вузов / Д. П. Ким. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 441 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00975-0. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471091> (дата обращения: 07.04.2021).
- 2 Рачков, М. Ю. Оптимальное управление в технических системах : учебное пособие для вузов / М. Ю. Рачков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 120 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09144-1. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452772> (дата обращения: 07.04.2021).
- 3 Веремей, Е.И. Линейные системы с обратной связью : учебное пособие / Е.И. Веремей. — СПб.: Лань, 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-1412-3. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168875> (дата обращения: 08.04.2021).
- 4 Деменков, Н.П. Оптимальное управление в классическом вариационном исчислении : учебное пособие / Н.П. Деменков. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. — 136 с. — ISBN 978-5-7038-4714-5. — Текст : электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/103508> (дата обращения: 07.04.2021).
- 5 Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления /Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
- 6 Александров, А.Г. Оптимальные и адаптивные системы / А.Г. Александров. — М.: Высш. шк., 1989. — 253 с.
- 7 Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. — М.: Высш. шк., 2003. — 614 с.
- 8 Теория автоматического управления: Учеб. для вузов /С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев, и др.; Под. Ред. В.Б. Яковлева. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 2005. — 567 с.
- 9 Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами /Ю.Н. Андреев. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
- 10 Control System Toolbox™. Getting Started Guide. Matlab R2014a – The MathWorks, Inc., 2014. — 314 p.
- 11 Карапетьян, В. А. Средства Matlab в задачах анализа и синтеза линейных стационарных САУ: учебное пособие / В. А. Карапетьян, В. А. Крамарь. — М.: Центркаталог, 2019. — 216 с. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/125434> (дата обращения: 16.08.2021).

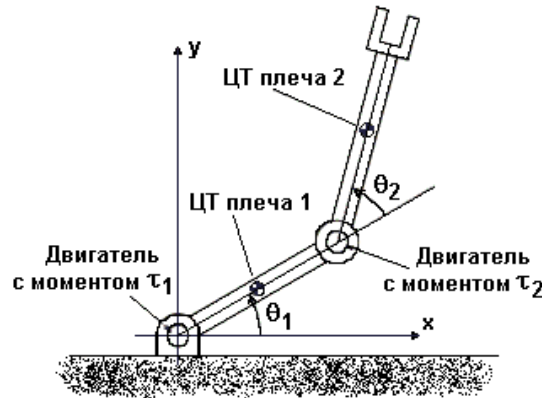
ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

Математические модели объектов управления

А.1 Двухзвенный робот-манипулятор

Схема двухзвенного робота-манипулятора [А.1, А.2] показана на рисунке



x, y – координатные оси; ЦТ – центр тяжести плеча манипулятора;
 θ_1 и θ_2 – углы поворота первого и второго плеча манипулятора;

Рисунок А.1 – Схема двухзвенного робота-манипулятора

Положение плеч манипулятора определяется двумя углами – θ_1 и θ_2 . Длины, массы и моменты инерции каждого плеча характеризуются величинами m_1, m_2, l_1, l_2, J_1 и J_2 соответственно. Предполагается, что массы распределены по длинам плеч равномерно и центры масс располагаются по серединам каждого плеча. Управляемые вращения плеч манипулятора обеспечивают два двигателя, развивающие соответствующие моменты τ_1 и τ_2 .

Для удержания произвольной конфигурации $[\theta_{10} \theta_{20}]$ плеч робота-манипулятора в неподвижном положении, двигатели в сочленениях манипулятора должны развивать соответствующие постоянные усилия (моменты), рассчитываемые по формулам:

$$\tau_{10} = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \theta_{10} + m_2 g \left(l_1 \cos \theta_{10} + \frac{l_2}{2} \cos (\theta_{10} + \theta_{20}) \right), \quad \tau_{20} = m_2 g \frac{l_2}{2} \cos (\theta_{10} + \theta_{20}).$$

Определим векторы состояния $x(t)$, управления $u(t)$ и выхода $y(t)$ как:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}.$$

Проведём линеаризацию математической модели движения манипулятора в окрестностях двух неподвижных положений его плеч:

- верхнего вертикального положения неустойчивого равновесия, определяемого угловыми координатами $[\theta_{10} \ \dot{\theta}_{10} \ \theta_{20} \ \dot{\theta}_{20}] = [90^0 \ 0 \ 0^0 \ 0]$;
- нижнего вертикального положения устойчивого равновесия, определяемого угловыми координатами $[\theta_{10} \ \dot{\theta}_{10} \ \theta_{20} \ \dot{\theta}_{20}] = [-90^0 \ 0 \ 0^0 \ 0]$.

Линеаризация модели динамики движения робота-манипулятора в малой окрестности **первого** положения $[\theta_{10} \ \dot{\theta}_{10} \ \theta_{20} \ \dot{\theta}_{20}] = [90^0 \ 0 \ 0^0 \ 0]$ приводит к получению следующих численных значений матриц **A** и **B** линейной модели робота-манипулятора в пространстве состояний:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,2094 & -0,7868 & -16,8412 & 1,6452 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24,4197 & 1,6452 & 53,0498 & -4,3491 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,5737 & -3,2904 \\ 0 & 0 \\ -3,2904 & 8,6981 \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Линеаризация модели динамики движения робота-манипулятора в малой окрестности **второго** положения $[\theta_{10} \ \dot{\theta}_{10} \ \theta_{20} \ \dot{\theta}_{20}] = [-90^0 \ 0 \ 0^0 \ 0]$ даёт следующие значения матриц **A** и **B**:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -20,2094 & -0,7868 & 16,8412 & 1,6452 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 24,4197 & 1,6452 & -53,0498 & -4,3491 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,5737 & -3,2904 \\ 0 & 0 \\ -3,2904 & 8,6981 \end{bmatrix}. \quad (A.2)$$

A.2 Химический реактор с перемешиванием

Рассматривается химический реактор с непрерывным перемешиванием (CSTR – Continuous Stirred Tank Reactor), в котором происходит экзотермическая реакция первого порядка $A \rightarrow B$ [A.4, A.2, A.3]. Реактор имеет охлаждающую оболочку (cooling jacket). Схема реактора приведена на рисунке A.2.

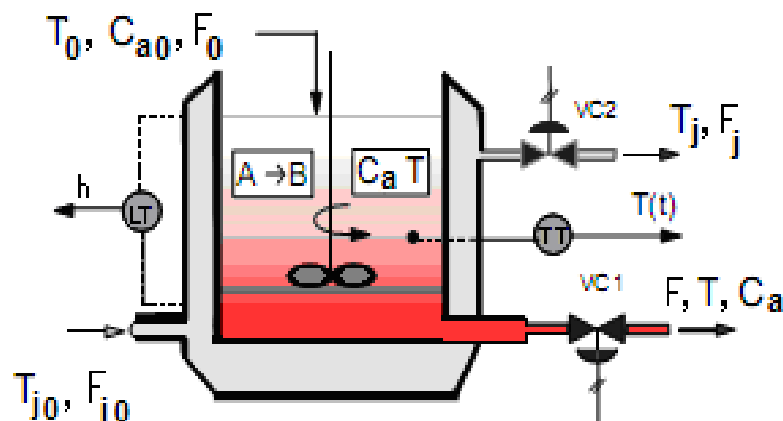


Рисунок A.2 – Химический реактор с непрерывным перемешиванием и охлаждающей оболочкой [A.4]

В химический реактор поступает поток F_0 водного раствора вещества A , имеющего концентрацию C_{a0} и температуру T_0 . В результате прохождения хи-

мической экзотермической (с выделением теплоты) реакции и перемешивания из реактора вытекает поток F раствора концентрации C_a и температуры T . Отвод тепла осуществляется потоком F_{j0} охлаждающей жидкости с начальной температурой T_{j0} . Температура и поток жидкости на выходе из охлаждающей оболочки равны T_j и F_j , соответственно. Объём химического раствора в реакторе – V , объём охлаждающей жидкости – V_j . Рассматривается номинальный режим работы реактора, параметры которого приведены в [А.4, А.2]. Здесь приняты следующие единицы измерения физических и химических величин: метр; час; килограмм; градус Кельвина; килоДжоуль; киломоль.

Математическая модель процессов в химическом реакторе представляется системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dC_a}{dt} = \frac{F_0}{V} (8 - C_a) - 7,08 \cdot 10^{10} C_a e^{-\frac{8397,3}{T}}, \\ \frac{dT}{dt} = \frac{F_0}{V} (294,7 - T) + 197,4 \cdot 10^{10} C_a e^{-\frac{8397,3}{T}} - \frac{28,4222}{V} (T - T_j), \\ \frac{dT_j}{dt} = \frac{F_{j0}}{V_j} (294,7 - T_j) + \frac{17,0261}{V_j} (T - T_j), \\ \frac{dV}{dt} = F_0 - F, \\ \frac{dV_j}{dt} = F_{j0} - F_j. \end{cases} \quad (\text{А.НМ})$$

Определим векторы состояния $x(t)$, управления $u(t)$ и выхода $y(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_a(t) \\ T(t) \\ T_j(t) \\ V(t) \\ V_j(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} F(t) \\ F_j(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} C_a(t) \\ T(t) \end{bmatrix}.$$

Проведём линеаризацию системы (А.НМ) в малой окрестности стационарного (невозмущённого) режима

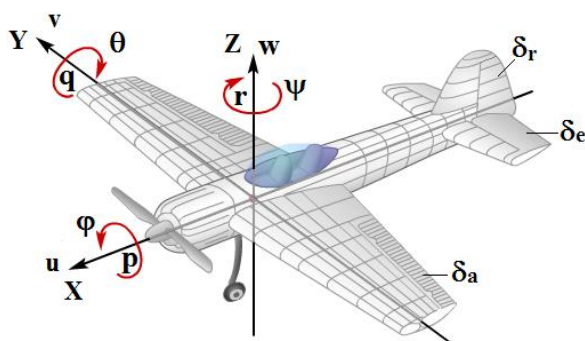
$$x_0 = [C_a \quad T \quad T_j \quad V \quad V_j]^T = [7,61 \quad 298,42 \quad 298,14 \quad 1,36 \quad 0,085]^T.$$

Линеаризация системы (А.3) даёт следующий вид линейной стационарной модели химического реактора в отклонениях от точки линеаризации x_0 :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -0,87 & -0,03 & 0 & -0,24 & 0 \\ 1,19 & -20,88 & 20,9 & 6,6 & 0 \\ 0 & 200,3 & -216,9 & 0 & 11,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u(t), \quad (\text{А.3})$$

А.3 Летательный аппарат

Рассматриваются линеаризованные модели движения летательного аппарата (ЛА) в вертикальной и горизонтальной плоскостях [А.5, А.2]. На рисунке А.3 изображены схема ЛА, оси координат, обозначены переменные движения и управления.



X, Y, Z – координатные оси;

φ – угол крена;

θ – угол тангажа;

ψ – угол рыскания;

u, v, w – линейные скорости вдоль осей координат;

p, q, r – угловые скорости (крена, тангажа, рыскания);

$\delta_a, \delta_e, \delta_r$ – углы отклонения элеронов, рулей высоты и направления.

Рисунок А.3 – Схема ЛА, переменные движения и управления

В математической модели движения ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение) обычно в качестве управляющего воздействия выбирают угол поворота руля высоты δ_e , а в качестве управляемого выхода – угол тангажа θ . Таким образом, ЛА в вертикальной плоскости будет представлен как SISO-объект.

При формировании математической модели движения ЛА в горизонтальной плоскости (боковое движение) в качестве управляющих воздействий выбирают угол поворота руля направления δ_r и углы отклонения элеронов δ_a , а в качестве выходов – угол рыскания ψ и угол крена φ . В этом случае ЛА будет представлен как MIMO-объект.

А.3.1 Модель продольного движения ЛА

Рассматривается модель продольного (в вертикальной плоскости) слабо возмущённого движения (longitudinal motion) малого самолёта общего назначения, летящего на небольшой высоте с крейсерской скоростью около 200 км/ч [А.5]. В качестве векторов состояния x , управления u и выхода y выбраны соответственно $[u \ w \ q \ \theta]^T$, $[\delta_e]$ и $[\theta]$ (рисунок А.3). Переменные, составляющие векторы x , u и y , являются малыми отклонениями от номинальных (балансировочных) значений переменных состояния, характерных для рассматриваемого режима полёта. Здесь u – горизонтальная скорость самолёта; w – вертикальная скорость самолёта; q – угловая скорость тангажа; θ – угол тангажа; δ_e – угол поворота руля высоты.

Матрицы коэффициентов линейной модели **A**, **B** взяты из [A.5]:

$$A = \begin{bmatrix} -0.045 & 0.036 & 0 & -0.322 \\ -0.370 & -2.02 & 1.76 & 0 \\ 0.191 & -3.96 & -2.98 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.282 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

А.3.2 Модель бокового движения ЛА

В математической модели бокового (в горизонтальной плоскости) слабо возмущённого движения (lateral motion) самолёта в качестве векторов состояния **x**, управления **u** и выхода **y** выбраны соответственно $[\mathbf{v} \ \mathbf{r} \ \mathbf{p} \ \varphi \ \psi]^T$, $[\delta_a \ \delta_r]^T$ и $[\varphi \ \psi]^T$ (рисунок 2.2). Здесь **v** – скорость бокового скольжения самолёта; **r** – угловая скорость рыскания; **p** – угловая скорость крена; **φ** – угол наклона (крена); **ψ** – угол рыскания; **δ_a** – угол отклонения элеронов; **δ_r** – угол отклонения руля направления. Все указанные выше переменные – малые отклонения от значений параметров номинального движения ЛА.

Матрицы коэффициентов модели **A**, **B** также взяты из [A.5]:

$$A = \begin{bmatrix} -0.254 & -1.76 & 0 & 0.322 & 0 \\ 2.55 & -0.76 & -0.35 & 0 & 0 \\ -9.08 & 2.19 & -8.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0.1246 \\ -0.222 & -4.60 \\ 29 & 2.55 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

А.4 Трёхбаковая жидкостная система

В качестве исследуемого ОУ выбрана математическая модель линеаризованной трёхбаковой жидкостной управляемой системы [A.6, A.7]. Схема этой системы представлена на рисунке

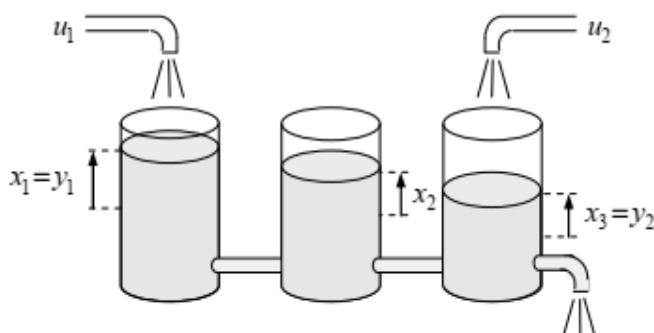


Рисунок А.4 – Схема трёхбаковой управляемой системы

Вектор состояния $\mathbf{x}=[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ и управления $\mathbf{u}=[u_1 \ u_2]^T$ задают отклонения величин уровней жидкости в баках и входных потоков от номинальных значений, определяющих параметры стационарного режима работы системы. Управ-

ляемыми выходами системы принимаются отклонения уровней в левом и правом баках, т.е., вектор выходов $y=[x_1 \ x_3]^T$. Уровень жидкости измеряется в метрах, а поток жидкости в м³/мин. Матрицы модели пространства состояний линеаризованной модели имеют следующий вид [А.6]:

$$A = \begin{bmatrix} -0.332 & 0.332 & 0 \\ 0.332 & -0.664 & 0.332 \\ 0 & 0.332 & -0.524 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.764 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.764 \end{bmatrix}. \quad (\text{А.6})$$

Симметрия в матрицах **A** и **B** объясняется одинаковостью размерных параметров баков и трубопроводов.

А.5 Двигатель постоянного тока

На рисунке А.5 приведена электромеханическая схема двигателя постоянного тока (ДПТ) с независимым возбуждением, управляемого по цепи якоря [А.1]. Вал двигателя соединён гибкой механической связью с внешней нагрузкой. J_m и J_l – соответственно, моменты инерции вращающихся частей ДПТ (ротора и вала) и внешней нагрузки. Коэффициенты k и b численно характеризуют эффекты пружинного (упругого) скручивания и вязкого трения (демпфирования) в гибкой механической связи. R , L , $i(t)$ и $u(t)$ – активное сопротивление, индуктивность, ток и приложенное напряжение в цепи якоря ДПТ. Углы поворота вала ДПТ и нагрузки обозначены соответственно θ_m и θ_l .

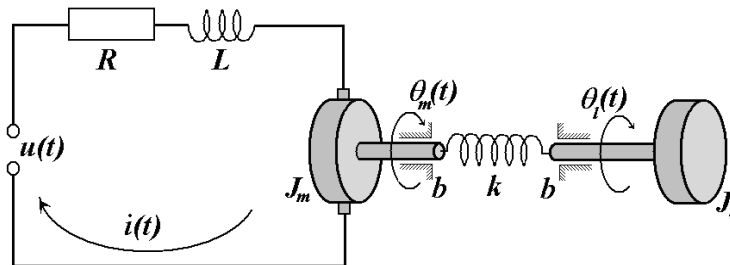


Рисунок А.5 – Электромеханическая схема ДПТ с нагрузкой

Уравнения баланса моментов в линейном приближении с учётом взаимного влияния двух вращающихся масс – ротора и внешней нагрузки – будут иметь вид:

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m(t) &= k_a i(t) + k(\theta_l(t) - \theta_m(t)) + b(\dot{\theta}_l(t) - \dot{\theta}_m(t)) - b_m \dot{\theta}_m(t); \\ J_l \ddot{\theta}_l(t) &= -k(\theta_l(t) - \theta_m(t)) - b(\dot{\theta}_l(t) - \dot{\theta}_m(t)) - b_l \dot{\theta}_l(t). \end{aligned}$$

Здесь: k_a – конструктивная механическая постоянная ДПТ, определяющая величину момента вращения, вызванного током в цепи якоря $i(t)$; b_m и b_l – коэффициенты вязкого трения при вращении вала ДПТ и нагрузки.

Применяя закон Ома и второй закон Кирхгофа для якорной цепи ДПТ, получим следующее уравнение баланса напряжений

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + k_e \dot{\theta}_m(t).$$

Здесь k_e – конструктивная электрическая постоянная ДПТ, определяющая величину наведённой противоЭДС в обмотке якоря.

Управляющим входом будет напряжение $u(t)$, а управляемым выходом – угол поворота нагрузки $\theta(t)$. Численные значения параметров ДПТ и гибкой механической связи определены в соответствии с [А.1, А.2]:

$$R=3 \text{ Ом}; L=0,01 \text{ Гн}; J_m=0,05 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2; J_l=0,15 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2; b_m=0,01 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}; \\ b_l=0,04 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}; k_a=0,35 \text{ Н}\cdot\text{м/А}; k_e=0,35 \text{ В}\cdot\text{с/рад}; b=0,1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}; \\ k=1 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}.$$

Вектором состояния модели в пространстве состояний объекта выберем вектор $x(t) = [i \ \theta_m \ \dot{\theta}_m \ \theta_l \ \dot{\theta}_l]^T$, управляемым выходом примем переменную $y(t) = \theta_l(t)$, а в качестве управляющего воздействия $u(t)$ – напряжение $u(t)$, прикладываемое к цепи якоря ДПТ. В соответствии с выбранными составами векторов состояния, выхода и управления, получим матрицы модели в виде:

$$A = \begin{bmatrix} -300,0 & 0 & -35,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -20,0 & -2,2 & 20,0 & 2,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6,6(6) & 0,6(6) & -6,6(6) & -0,93(3) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 100,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{А.7})$$

А.6 Модель перевернутого маятника на тележке

Рассматривается перевернутый маятник, расположенный на движущейся тележке [А.8, А.9, А.3]. Схема маятника показана на рисунке А.6. Ось маятника монтируется на тележке, перемещающейся в горизонтальном направлении. Тележка приводится в действие мотором, который в момент времени t формирует силу $u(t)$. При отсутствии каких-либо внешних воздействий на тележку, маятник, находящийся в равновесии в строго вертикальном положении, при малей-

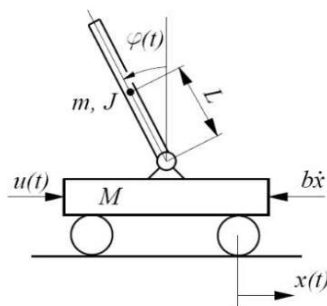


Рисунок А.6 – Схема перевернутого маятника на тележке

ших внешних возмущениях теряет это равновесие. Это означает, что данное положение маятника является неустойчивым.

Здесь введены следующие обозначения:

M – масса тележки; m – масса маятника; J – момент инерции маятника относительно центра тяжести; b – коэффициент вязкого трения при движении тележки; C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника; L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести; $u(t)$

– сила, прикладываемая к тележке (управление); $x(t)$ – значение горизонтального перемещения тележки; $\varphi(t)$ – угол отклонения маятника в положительном направлении от вертикали вверх; g – ускорение свободного падения.

Численные параметры объекта "перевёрнутый маятник" выбраны следующими:

M – масса тележки = **0,5** кг; m – масса маятника = **0,2** кг;

J – момент инерции маятника относительно центра тяжести = **0,006** кг·м²;

b – коэффициент вязкого трения при движении тележки = **0,1** Н/м/сек;

C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника = **0.01** Н*м/рад/сек;

L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести = **0,3** м;

g – ускорение свободного падения = **9,81** м/сек².

Определим векторы состояния $X(t)$, управления $U(t)$ и выхода $Y(t)$ как:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = [u(t)], \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}.$$

Проведя линеаризацию нелинейной динамической модели перевёрнутого маятника в окрестности положения неустойчивого равновесия (неподвижная тележка и неподвижное строго вертикальное вверх положение маятника – $X_0=0$ и $U_0=0$), получим численные значения матриц линейной модели пространства состояний:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2,68 & -0,18 & -0,05 \\ 0 & 31,21 & -0,45 & -0,53 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,82 \\ 4,55 \end{bmatrix}. \quad (A.8)$$

А.7 Модель обычного маятника на тележке

Рассматривается обычный маятник, расположенный на движущейся тележке [А.9]. Схема маятника показана на рисунке А.7. Такой маятник часто используют в качестве физической модели портального (козлового) крана.

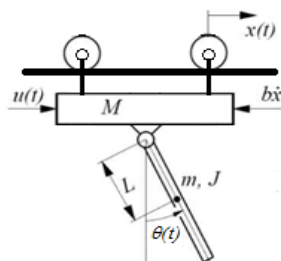


Рисунок А.7 – Схема обычного маятника на тележке (портальный кран)

Ось маятника монтируется на тележке, перемещающейся в горизонтальном направлении. Тележка приводится в действие мотором, который в момент времени t формирует силу $u(t)$. Состояние покоя маятниковой системы определяется неподвижно-

стью тележки и строго вертикальным нижнем положением самого маятника. В это положение система всегда возвращается из любого, отличного от покоя, состояния. По определению, в этом случае говорят, что данное положение устойчиво.

Здесь введены следующие обозначения:

M – масса тележки; m – масса маятника; J – момент инерции маятника относительно центра тяжести; b – коэффициент вязкого трения при движении тележки; C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника; L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести; $u(t)$ – сила, прикладываемая к тележке (управление); $x(t)$ – значение горизонтального перемещения тележки; θ – угол отклонения маятника в положительном направлении от вертикали вниз; g – ускорение свободного падения.

Численные параметры объекта "перевернутый маятник на тележке" выбраны следующими:

M – масса тележки = **0,37** кг; m – масса маятника = **0,127** кг;

J – момент инерции маятника = **$1,2 \cdot 10^{-3}$** кг·м²;

b – коэффициент вязкого трения при движении тележки = **4,7** Н*сек/м;

C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника = **0.0024** Н*м*сек/рад;

L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести = **0,1778** м;

g – ускорение свободного падения = **9,81** м/сек².

Определим векторы состояния $X(t)$, управления $U(t)$ и выхода $Y(t)$ как:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = [u(t)], \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}.$$

Проведя линеаризацию нелинейной динамической модели маятника в окрестности положения устойчивого равновесия (неподвижная тележка и неподвижное строго вертикальное вниз положение маятника), получим численные значения матриц линейной модели пространства состояний:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2,4 & -11,77 & 0,26 \\ 0 & -52,86 & 50,95 & -5,72 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,51 \\ -10,84 \end{bmatrix}. \quad (A.9)$$

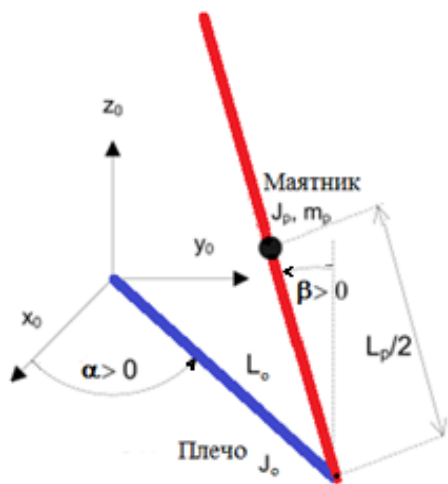
А.8 Модель маятника Фуруты

Вращающийся перевернутый маятник – маятник Фуруты [А.10, А.3] – представляет собой перевернутый маятник с подвижным вращающимся плечом (точкой подвеса) (см. рисунок А.8). Плечо маятника соединено с валом электродвигателя и вращается в пределах ± 150 градусов. Задача управления реша-

ется за счет изменения углового положения плеча маятника: двигатель поворачивает опору, "подводя" ее под маятник. Сам маятник подвешен на конце горизонтального плеча. Углы отклонения маятника β и плеча α измеряются. Управляющая переменная – входное напряжение, подаваемое на усилитель ШИМ-сигнала, который управляет двигателем. Двигатель постоянного тока установлен вертикально в металлической камере. Выходные переменные – угол отклонения маятника β и угол поворота плеча маятника α .

Получение нелинейной динамической математической модели маятниковой системы основывается на геометрических соотношениях, законах классической механики и массо-моментных характеристиках:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_0 + m_p L_0^2 + m_p l_p^2 \sin^2 \beta & -m_p L_0 l_p \cos \beta \\ -m_p L_0 l_p \cos \beta & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} C_0 + \frac{k_t k_b}{R_a} + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\beta} \sin 2\beta & \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta + m_p L_0 l_p \dot{\beta} \sin \beta \\ -\frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p g l_p \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_t k_u}{R_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (\text{А.Ф})$$



Геометрическая модель маятника



Лабораторный стенд с маятником Фуруты
Quanser QNET Rotary Inverted Pendulum 2.0

Рисунок А.8 – Маятник Фуруты

В таблице приведены обозначения переменных и значения констант в (А.Ф).

Символ	Мера	Определение
α	рад	угловое положения плеча маятника
β	рад	угловое положения маятника

Символ	Мера	Определение
$J_0=5.72e-5$	кг*м ²	момент инерции плеча маятника
$J_p=1.0e-4$	кг*м ²	момент инерции маятника
$C_0=1.5e-3$	кг*м ² /с	коэффициент вязкого трения оси вращения α
$C_p=0.5e-3$	кг*м ² /с	коэффициент вязкого трения оси вращения β
$m_p=0.024$	кг	масса маятника
$m_0=0.095$	кг	масса плеча маятника
$l_p=0.129$	м	половина длины маятника
$l_0=0.085$	м	длина плеча маятника
$g=9,81$	м/с ²	ускорение свободного падения
$R_a=8.4$	Ом	сопротивление обмотки ротора ДПТ
$k_t=0.042$	Н*м/А	постоянная крутящего момента ДПТ
$k_b=0.042$	В/(рад/с)	постоянная противоЭДС ДПТ
$k_u=0.0636$	В/отсчёт	постоянная усиления ДПТ

Коэффициенты вязкого трения для маятника C_p и плеча C_0 в данной системе подбираются на основе экспериментальных данных для каждого экземпляра макета.

Введём векторы состояния $x(t)$, выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ как:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = [u(t)].$$

Проведя линеаризацию нелинейной динамической модели маятника Фуруты (А.Ф) в окрестности положения неустойчивого равновесия (плечо маятника в начальном неподвижном положении ($\alpha=\alpha'=0$) и маятник строго в вертикальном вверх неподвижном положении ($\beta=\beta'=0$)), получим численные значения матриц линейной модели пространства состояний:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 69,45 & -11,88 & -2,29 \\ 0 & 121,7 & -7,82 & -4,01 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,21 \\ 1,45 \end{bmatrix}. \quad (A.10)$$

А.9 Модель электромагнитного подвеса

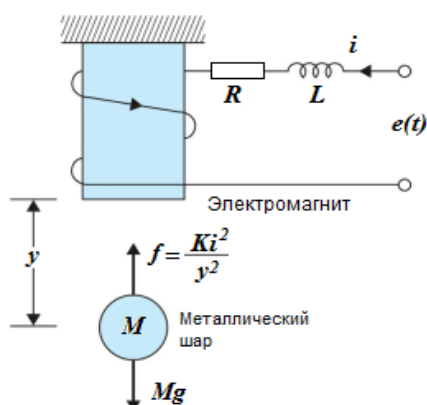


Рисунок А.9 – Электромагнитный подвес

Рассматривается электромагнитная подвеска [А.9, А.3], показанная на рисунке А.9. Электромагнитная сила f , порождённая приложенным к обмотке напряжением e , удерживает металлический шар на расстоянии y от нижней кромки электромагнита.

Математическая модель, описывающая динамику электромагнитной подвески, содержит два дифференциальных уравнения:

– уравнение движения шара

$$M \frac{dy^2(t)}{dt^2} = Mg - \frac{Ki^2(t)}{y^2(t)};$$

– уравнение электрической цепи

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t).$$

Здесь M – масса металлического шара; g – ускорение свободного падения; K – коэффициент электромагнитного усилия; L и R – индуктивность и активное сопротивление обмотки электромагнита. Выражение для величины электромагнитной силы $f=K(i^2/y^2)$ связывает в систему уравнение механического движения шара с уравнением электрических процессов в цепи электромагнита.

Значения коэффициентов и параметров электромагнитной системы [А.9] в режиме удержания шара на расстоянии Y_0 приведены ниже в таблице.

L	индуктивность обмотки электромагнита	0,508 Гн
R	активное сопротивление обмотки электромагнита	23,2 Ом
M	масса металлического шара	1,75 кг
K	коэффициент электромагнитной силы	$2,9 \times 10^{-4} \text{ Нм}^2/\text{А}^2$
I_0	рабочая точка по току	1,06 А
Y_0	рабочая точка (расстояние до точки равновесия)	$\sqrt{\frac{K \cdot I_0^2}{M \cdot g}} \text{ м}$
g	ускорение свободного падения	$9,81 \text{ м/с}^2$

Нелинейная математическая модель, описывающая динамику электромагнитной подвески, имеет вид:

Введём векторы состояния $x(t)$, выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ как:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = g - \frac{K}{M} \frac{x_3^2(t)}{x_1^2(t)}, \\ \dot{x}_3(t) = -\frac{R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} e(t). \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = [y(t)], \quad u(t) = [e(t)].$$

Проведя линеаризацию нелинейной модели электромагнитного подвеса в окрестности положения неустойчивого равновесия (параметры заданы в таблице $x_0 = [Y_0 \ 0 \ I_0]$ и $e_0 = R \cdot I_0$), получим численные значения матриц линейной модели пространства состояний:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4503,5 & 0 & -18,5 \\ 0 & 0 & -45,7 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,97 \end{bmatrix}. \quad (A.11)$$

А.10 Модель движения подводного аппарата в вертикальной плоскости

В качестве математической модели управляемого подводного подвижного объекта управления выбрана линеаризованная модель динамики подводного аппарата (ПА) в вертикальной плоскости в режиме горизонтального движения со скоростью 6 узлов ($v_0 = 3,0867$ м/с) на перископной глубине $H_0 = 25$ метров [А.9, А.11].

На рисунке А.10 приведены схема ПА и обозначения переменных, описывающих параметры движения и управления объектом.

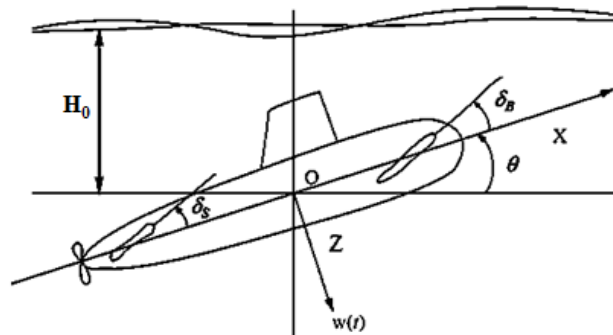


Рисунок А.10 – Схема ПА и переменные движения и управления

На рисунке обозначены:

$H_0 = 25$ – начальная глубина погружения ПА (м);

z, w – глубина ПА (м) и скорость его погружения (м/сек);

θ, q – угол тангажа (дифферента) (рад) и угловая скорость тангажа (рад/сек);

δ_B, δ_S – углы поворота носового и кормового рулей (рад).

Организуем векторы состояния x , управления u и выхода y ПА следующим образом:

$$x = \begin{bmatrix} w \\ q \\ z \\ \theta \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \delta_B \\ \delta_S \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}.$$

В линеаризованной модели все шесть переменных (x и u) представляют собой малые отклонения от балансировочных значений, определяющих стационарное номинальное движение ПА в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью v_0 и на постоянной глубине H_0 .

Значения матриц линеаризованной модели в пространстве состояний выбраны в соответствии с данными, приведенными для подводной лодки [11]:

$$A = \begin{bmatrix} -0,038 & 0,896 & 0 & 0,0015 \\ 0,0017 & -0,092 & 0 & -0,0056 \\ 1 & 0 & 0 & -3,087 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -0,0075 & -0,023 \\ 0,0017 & -0,0022 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (A.11)$$

Рассмотрим далее два варианта модели (A.13) – линейные модели ПА отдельно с кормовыми рулями и отдельно с носовыми рулями.

A.10.1 Модель подводного аппарата с кормовыми рулями

Модель будет включать в себя полную матрицу A и второй столбец матрицы B из соотношений (A.11):

$$A = \begin{bmatrix} -0,038 & 0,896 & 0 & 0,0015 \\ 0,0017 & -0,092 & 0 & -0,0056 \\ 1 & 0 & 0 & -3,087 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -0,023 \\ -0,0022 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (A.12)$$

A.10.2 Модель подводного аппарата с носовыми рулями

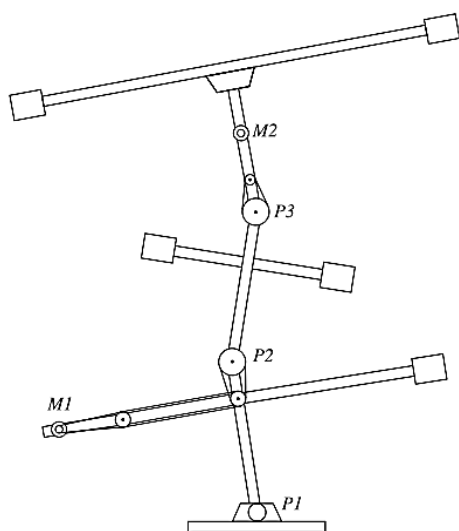
Модель будет включать в себя полную матрицу A и первый столбец матрицы B из соотношений (A.11):

$$A = \begin{bmatrix} -0,038 & 0,896 & 0 & 0,0015 \\ 0,0017 & -0,092 & 0 & -0,0056 \\ 1 & 0 & 0 & -3,087 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -0,0075 \\ 0,0017 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (A.13)$$

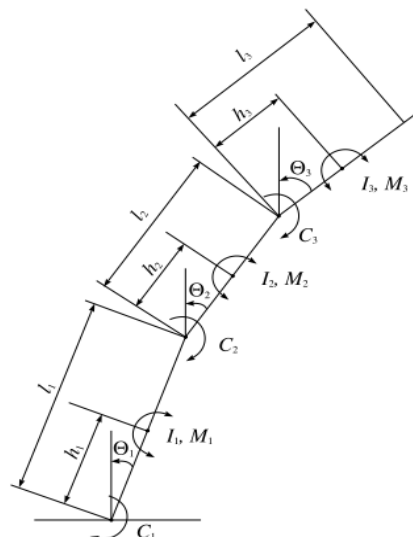
А.11 Трёхзвенный робот-манипулятор

Модель трёхзвенного перевернутого маятника используется при проектировании систем управления сложными механическими объектами, например, движением шагающих роботов, стабилизации гибких конструкций и т.п. [А.12].

Маятник состоит из трех рычагов (рисунок А.11), которые шарнирно закреплены на шарикоподшипниках и могут вращаться в вертикальной плоскости. Крутящий момент двух верхних шарниров регулируется двигателями М1 и М2, при этом нижний шарнир свободен для вращения. Управляя углами двух верхних рычагов вокруг заданных значений, маятник можно стабилизировать в вертикальном направлении с желаемыми угловыми положениями. К каждому рычагу прикреплен горизонтальный стержень с концевыми массами для облегчения управления ими, за счет увеличения момента инерции. Два двигателя постоянного тока, М1 и М2, установлены на первом и третьем плечах, соответственно, и действуют как приводы, передающие крутящий момент на два верхних шарнира через зубчатые ремни. Потенциометры Р1, Р2 и Р3 прикреплены к шарнирам для измерения соответствующих углов.



Общая вид-схема



Геометрическая модель

Рисунок А.11 – Трёхзвенный перевернутый маятник [А.12]

Через Θ_i обозначен угол от вертикали i -го плеча. Первый потенциометр Р1 измеряет угол Θ_1 , а второй Р2 и третий Р3 потенциометры измеряют углы $\Theta_2 - \Theta_1$ и $\Theta_3 - \Theta_2$ соответственно (рисунок А.11).

Линеаризация математической модели движения трёхзвенного маятника определяет элементы описания линейной модели движения звеньев маятника в отклонениях от строго вертикального неподвижного положения [А.12]
 $[(\tau_{10} \quad \alpha_{20} \quad \alpha_{30} \quad (\ddot{\tau}_{10}) \quad (\ddot{\alpha}_{20}) \quad (\ddot{\alpha}_{30})] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]:$

– векторы состояния $x(t)$ (углы и угловые скорости трёх звеньев), управления $u(t)$ (крутящие моменты двух двигателей) и выхода $y(t)$ (углы):

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ \dot{\theta}_3(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \theta_1(t) \\ \alpha_2 (\theta_2(t) - \theta_1(t)) \\ \alpha_3 (\theta_3(t) - \theta_2(t)) \end{bmatrix}.$$

Здесь α_i – коэффициенты преобразования потенциометров [V/rad];
– значения матриц модели пространства состояний **A**, **B**, **C** и **D**:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ -22.2573 & -9.3658 & -0.2213 & -3.1414 & 3.4837 & -0.3886 \\ 24.2690 & 35.4955 & -3.3231 & 7.7836 & -9.6187 & 1.8856 \\ 1.2971 & -7.5172 & 9.1156 & -1.2068 & 2.4430 & -1.2335 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -45.4948 & 19.7426 \\ 113.6687 & -95.7872 \\ -17.7785 & 62.6609 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1.1460 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1460 & 1.1460 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9964 & 0.9964 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14}^*)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A.12 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

A.1 Hendricks E. Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods /E. Hendricks, O. Jannerup, P. Sorensen. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 556 p.

A.2 Карапетьян, В. А. Средства Matlab в задачах анализа и синтеза линейных стационарных САУ: учебное пособие / В. А. Карапетьян, В. А. Крамарь. — М.: Центркаталог, 2019. — 216 с. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/125434> (дата обращения: 16.08.2021).

A.3 Моделирование движения динамических управляемых объектов: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине "Теория автоматического управления" для студентов направления подготовки 27.03.04 – "Управление в технических системах" / Сост. В.А. Карапетьян, В.А. Крамарь. – Севастополь: СевГУ, 2020. – 36 с.

A.4 Albertos P. Multivariable control systems: an engineering approach /P. Albertos, A. Sala. – London: Springer-Verlag, 2004. – 340 p.

A.5 Bryson A.E. Applied Linear Optimal Control. Examples and Algorithms /A.E. Bryson. – Cambridge: University Press, 2002. – 362 p.

A.6 Ostertag E. Mono- and Multivariable Control and Estimation. Linear, Quadratic and LMI Methods / E. Ostertag. – Springer-Verlag, 2011. – 344 p.

A.7 Анализ и моделирование цифровых систем управления: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине "Цифровые системы управления" для студентов направления подготовки 27.03.04 Управление в технических системах / Сост. В.А. Карапетьян. – Севастополь: СевГУ, 2019. – 28 с.

A.8 Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления /Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Наука, 1977. – 650 с.

A.9 Дорф Р. Современные системы управления /Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. – 832 с.

A.10 QNET 2.0 Rotary Pendulum. Student Workbook. – Quanser Inc., 2014. – 26 p.

A.11 Nise N.S. Control systems engineering / N.S. Nise. – 7th ed. – John Wiley & Sons, Inc., 2015. – 944 p.

A.12 Gu D. Robust Control: Design with MATLAB / D. Gu, P.H. Petkov, M.M. Konstantinov. – Springer-Verlag London, 2013. – 468 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
Титульный лист пояснительной записки

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт "Информационные технологии и управление в технических системах"
Кафедра "Информатика и управления в технических системах"

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ**

**СИНТЕЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ**

по дисциплине "Оптимальные системы управления"

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

студент гр. УТС/б-18-о

дата, подпись

А.В. Крымов

инициалы, фамилия

**КУРСОВАЯ РАБОТА
ЗАЩИЩЕНА С ОЦЕНКОЙ** _____

РУКОВОДИТЕЛЬ

доц., канд. техн. наук, доц.

должность, уч. степень, звание

дата, подпись

В.А. Карапетьян

инициалы, фамилия

Севастополь – 2021

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Бланк Задания на курсовую работу

ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет"

Институт Информационные технологии и управление в технических системах
 Кафедра Информатика и управление в технических системах
 Направление подготовки/специальность 27.03.04 – Управление в технических системах
 Профиль/специализация Интеллектуальные робототехнические системы
 Образовательно-квалификационный уровень Бакалавр
 Курс 4 Группа УТС/б-18-о Семестр 7

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ИУТС

Кабанов А.А.

“ ” 20 год

З А Д А Н И Е

НА КУРСОВУЮ РАБОТУ СТУДЕНТУ

(фамилия, имя, отчество)

1. Тема работы Синтез и моделирование оптимальных систем управления

Руководитель работы _____

(фамилия и инициалы, должность, учёное звание, научная степень)

2. Срок сдачи студентом работы _____

3. Исходные данные к работе _____

4. Содержание ПЗ (перечень вопросов для разработки) _____

5. Дата выдачи задания _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Название этапов курсовой работы	Срок выполнения этапа	Примечание
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			

Руководитель работы

Студент

(подпись)

(фамилия и инициалы)

(подпись)

(фамилия и инициалы)

СИНТЕЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания

Составитель: **Карапетьян** Валерий Артёмович

В авторской редакции

